Chapitre 8 : Suites.

Première 6

1 Définition et notations

1.1 Notation

Définition 1 *Une suite u est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. L'image du nombre entier n est appelé* ***terme de rang n*** *de la suite et est noté u_n.*

Remarque : Une suite u est parfois notée par (u_n).
Remarque : Dans un repère, on appelle représentation graphique d'une suite u_n l'ensemble des points M de coordonnées $(n; u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Définition par une formule explicite

Une suite est donnée par une formule explicite si son terme de rang n peut être donné par une formule explicite.
Exemple : u définie par la formule $u_n = n^2 + 1$. $u_1 = \dots; u_2 = \dots; u_3 = \dots$.

1.3 Définition par une relation de récurrence

Une suite u définie par une relation de récurrence est caractérisée par :

1. son terme initial, noté u_0.
2. une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple : la suite définie par $u_0 = 1$; $u_{n+1} = 2u_n + 3$. est une suite définie par récurrence dont les premiers termes valent $u_1 = \dots; u_2 = \dots; u_3 = \dots$ **Exemples :**

2 Sens de variation

Définition 2 *Soit u une suite.*
— *On dit que u est croissante si pour tout entier naturel*
— *On dit que u est décroissante si pour tout entier naturel*
— *On dit que u est constante si pour tout entier naturel*

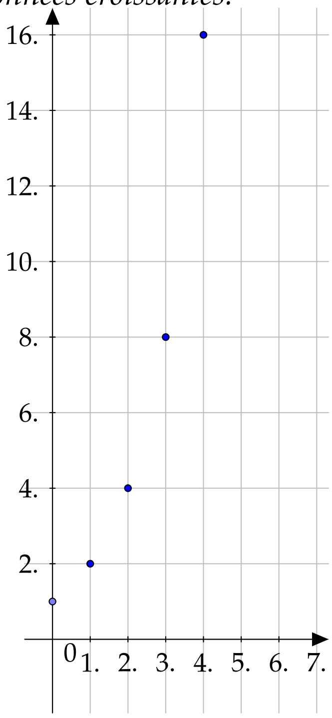
Méthode : Pour déterminer si une suite est croissante il suffit d'étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
— Si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite u est
— Si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite u est
Exemple : Déterminer le sens de variation de u définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n + 4$.

Théorème 1 *Si la suite u est définie par une formule explicite $u_n = f(n)$, alors :*
— *Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite u*
— *Si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite u*

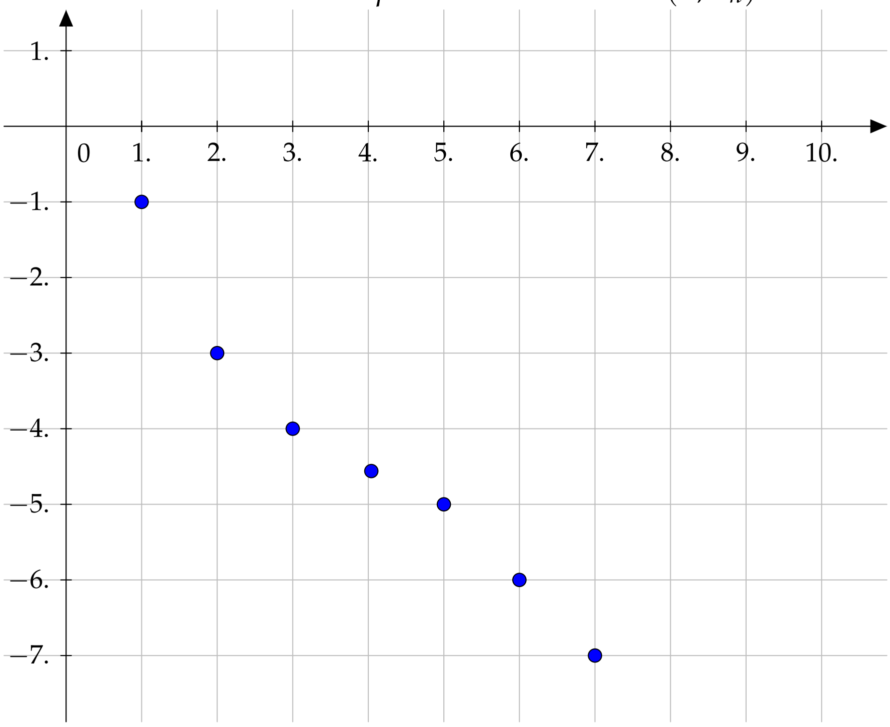
Remarque : *On parle de stricte croissance ou de stricte décroissance quand les inégalités sons strictes.*

Exemple : *Soit u la fonction définie pour tout entier naturel n par* $u_n = 3n - 4$. *Quel est son sens de variation ?*

Interprétation graphique : *Si u est croissante alors les points de coordonnées* $(n; u_n)$ *ont des ordonnées croissantes.*



Si u est décroissante alors les points de coordonnées $(n; u_n)$ *ont des ordonnées décroissantes.*



3 Suites arithmétiques

3.1 Définition par une relation de récurrence

Définition 3 *Une suite u est une suite arithmétique de raison r si u est définie :*

1. *Par la donnée d'un terme initial* u_0.
2. *Par une relation de récurrence du type* $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque : L'entier r est un nombre fixé.
Exemple : La suite définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ est une suite arithmétique.

3.2 Formule explicite

Proposition 1 *Si u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Réciproquement, si $u_n = a + bn$ alors u est arithmétique de raison b et de premier terme a.*

Exemples :

1. u est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$. Calculer u_1 et u_{42}.
2. u est la suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 12$. Calculer u_1 et u_{42}.

Théorème 2 *Si u est une suite arithmétique de raison r et de $m-$ème terme u_m alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_m + (n-m)r$.*

1. u est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de cinquième terme $u_4 = 3$. Calculer u_1 et u_{42}.
2. u est la suite arithmétique de raison $r = -1$ et telle que $u_8 = 12$. Calculer u_1 et u_{42}.

3.3 Sens de variation

Proposition 2 *Soit u une suite arithmétique de raison r,*
- *Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.*
- *Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.*

Remarque : Si $r = 0$ la suite est constante.

4 Suites géométriques

4.1 Définition par une relation de récurrence

Définition 4 *Une suite u est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que :*

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

q s'appelle la raison de la suite géométrique.

Exemple : Si u est définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n$ alors $u_1 = 12, u_2 = 36$ etc.

4.2 Formule explicite

Proposition 3 *Si u est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. Réciproquement, si $u_n = aq^n$ alors u est arithmétique de raison q et de premier terme a.*

Exemples :

1. u est la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$. Calculer u_1 et u_{42}.
2. u est la suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $u_0 = 12$. Calculer u_1 et u_{42}.

Théorème 3 *Si u est une suite géométrique de raison q et de $m-$ème terme u_m alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = q^{(n-m)}u_m$.*

1. u est la suite géométrique de raison $r = 3$ et de cinquième terme $u_4 = 3$. Calculer u_1 et u_{42}.
2. u est la suite géométrique de raison $r = -1$ et telle que $u_8 = 12$. Calculer u_1 et u_{42}.

4.3 Sens de variation

Proposition 4 *Soit u une suite géométrique de raison q,*
— *Si $q > 1$ alors u est strictement croissante.*
— *Si $0 < q < 1$ alors u est strictement décroissante.*

Exemples :
Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. u est la suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme 11.
2. v est la suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme 19.

Remarque : Si $q < 0$, alors la suite a un comportement oscillant (elle alterne entre le négatif et le positif.