第三章 静态场
——静磁场

- 自由空间静磁场的基本方程
- 静磁边界条件
- 磁矢位方程
- 磁偶极子
- 磁介质的磁化
- 磁能

3.2.1 静磁场的基本方程

1） 磁通密度（**Magnetic Flux Density**）

洛伦兹力公式 $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B})$

$$\boldsymbol{F}_e / q = \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{F}_m / q = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$$

B的单位：(1) Wb/m² (2) 特斯拉(T) (3) 高斯（Gs）

2） 基本方程

微分形式
$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \end{cases}$$

真空导磁率(***Permeability***)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^7$ H/m

积分形式 $\begin{cases} \oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0 & \text{磁通连续性原理（1）} \\ \oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I & \text{安培环路定律（2）} \end{cases}$

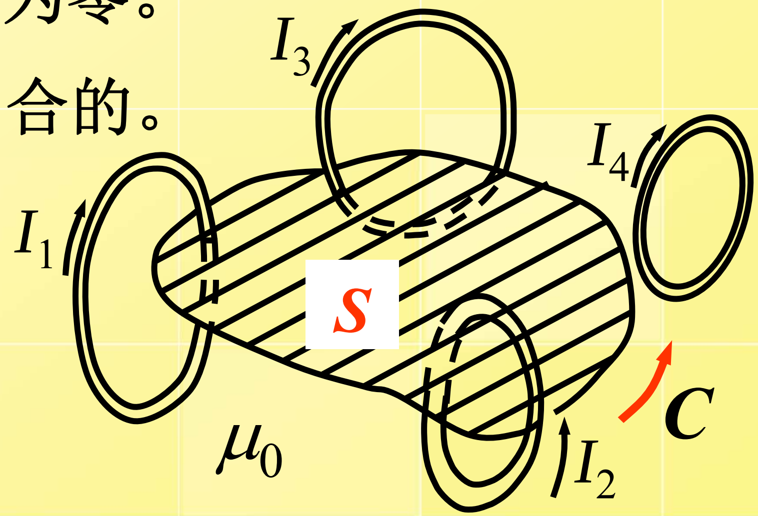
- 磁通（磁通量）　$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$

- 磁通连续性原理 【（1）式 】

穿过任意封闭曲面的总流出磁通量为零。

不存在磁流源，磁通线总是自身闭合的。

- 安培环路定律【（2）式】

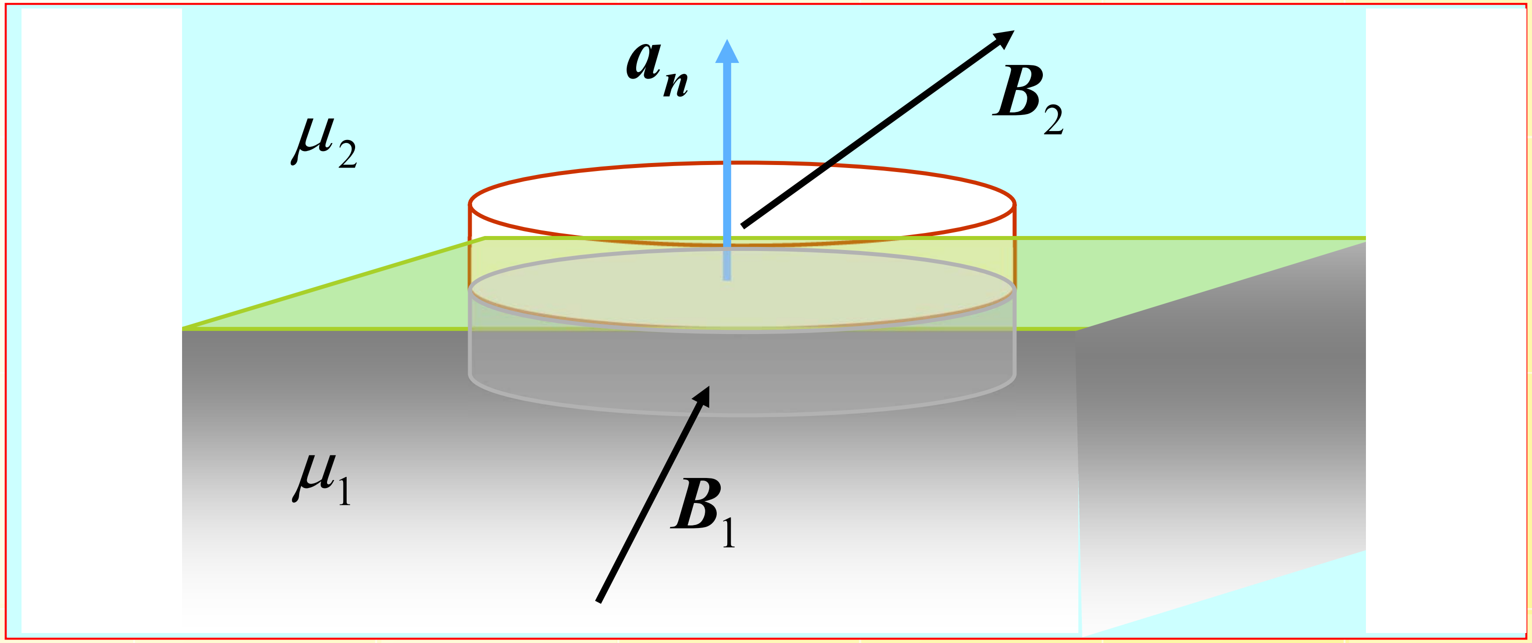


静磁学的两个基本方程：

微分形式	积分形式
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$
$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$	$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$

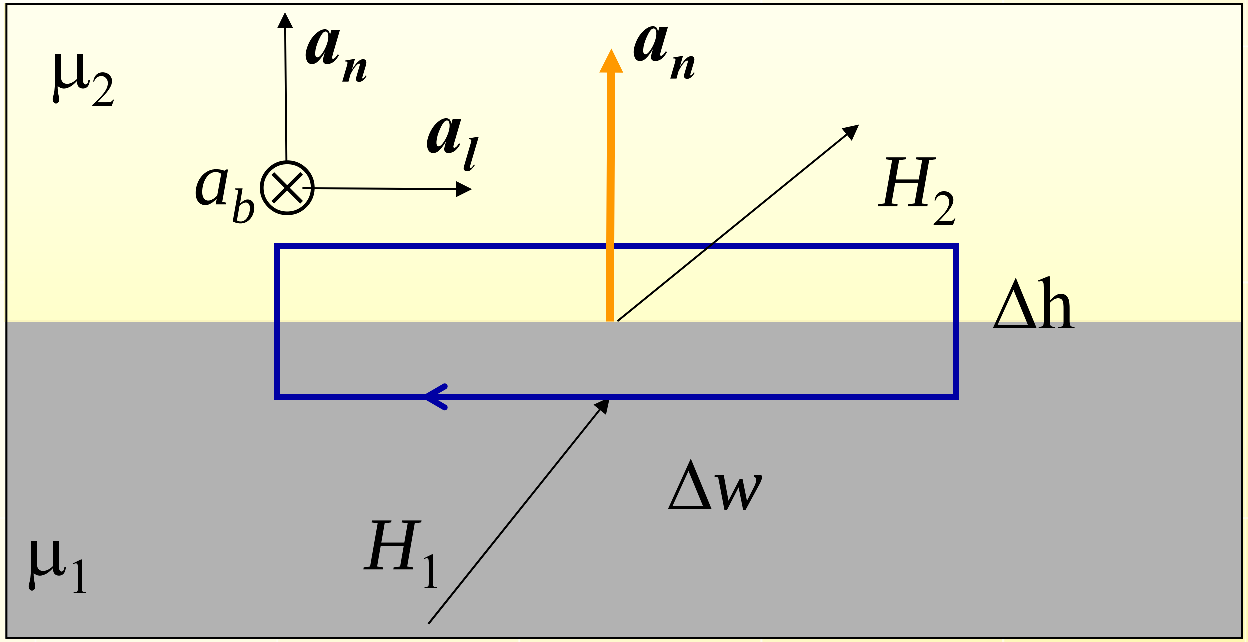
3.2.2 静磁场边界条件

➢ 法向边界条件



$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{a}_n\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \\ B_{2n}-B_{1n}=0 \end{array}}$$

➢切向边界条件



$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{a}_b \times \boldsymbol{a}_n$$

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_l\cdot(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\Delta w = (\boldsymbol{a}_b\times\boldsymbol{a}_n)\cdot(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\Delta w = \boldsymbol{a}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{a}_b\Delta w$$

$$\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} = \lim_{\Delta h\to 0}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{a}_b\Delta w\Delta h = \boldsymbol{J}_s\cdot\boldsymbol{a}_b\Delta w$$

$$\boldsymbol{a}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{J}_s$$

$$H_{2t}\text{-}H_{1t} = J_s$$

【例 3.5】 图 3.13 所示的一个同轴线的内导体半径为 R_1，外导体内半径为 R_2，外导体外半径为 R_3。同轴线中通过的电流为 I，求空间任意一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解：

$$\oint_c \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_s \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}$$

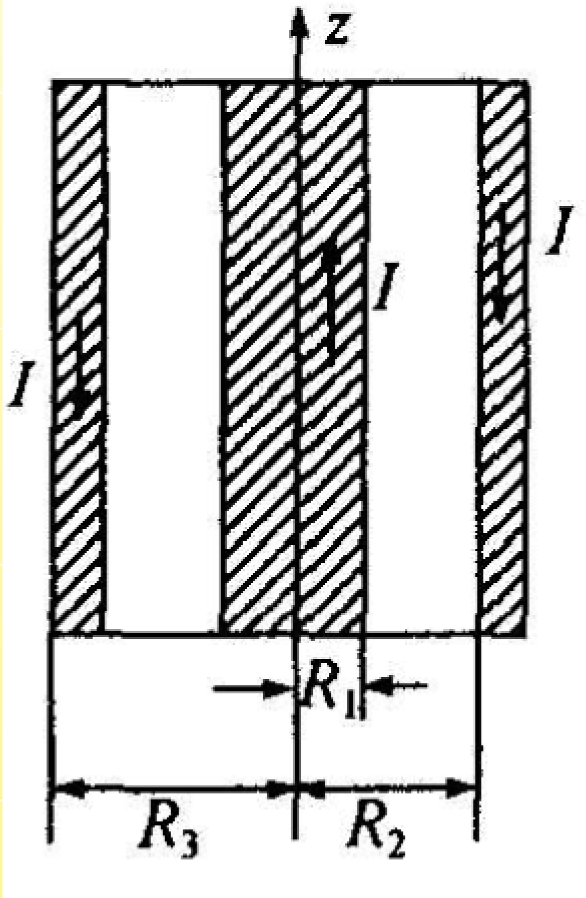
当 $r \leqslant R_1$ 时： $2\pi r H_\varphi = \dfrac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2$ $\qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$

当 $R_1 < r \leqslant R_2$ 时： $2\pi r H_\varphi = I$ $\qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

当 $R_2 < r \leqslant R_3$ 时： $2\pi r H_\varphi = \left(I - \dfrac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I\right)$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

当 $r > R_3$ 时 $\quad 2\pi r H_\varphi = 0 \qquad \boldsymbol{B} = 0$



3.2.2 矢量磁位

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \Longrightarrow \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\xrightarrow{\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}} \nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\mu_0\boldsymbol{J}$$

对比chap2“洛伦兹规范”： $\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial t}=0}$

库仑规范 $\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0} \Longrightarrow \boxed{\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}}$ 矢量泊松方程

无源区：$\boldsymbol{J}=0 \Longrightarrow \boxed{\nabla^2\boldsymbol{A}=0}$ 矢量拉普拉斯方程

笛卡儿坐标系

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \longrightarrow \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases}$$

$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i$	$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$
$V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'} \dfrac{\rho}{R} dv'$	$A_i = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \dfrac{J_i}{R} dv'$	$\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \dfrac{\boldsymbol{J}}{R} dv'$

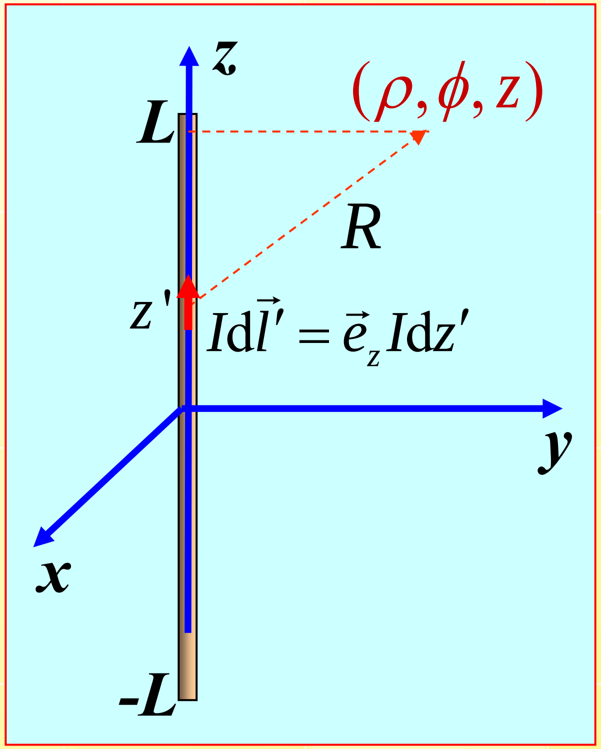
思考　不同形式的电流元，对应矢量磁位的表达式？

无电流区：$\boldsymbol{J} = 0 \longrightarrow \boxed{\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0}$ 矢量拉普拉斯方程

【注：此时可定义磁标位$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{m}}$】

【例3.6】 求无限长线电流 I 的磁场，设电流沿 $+z$ 方向流动。

解：先求长度为 $2L$ 的直线电流的磁矢位。电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}' = \hat{e}_z I\mathrm{d}z'$ 到点 $P(\rho,\varphi,z)$ 的距离 $R=\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$ 。则



$$\vec{A}(\vec{r}') = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}z'$$

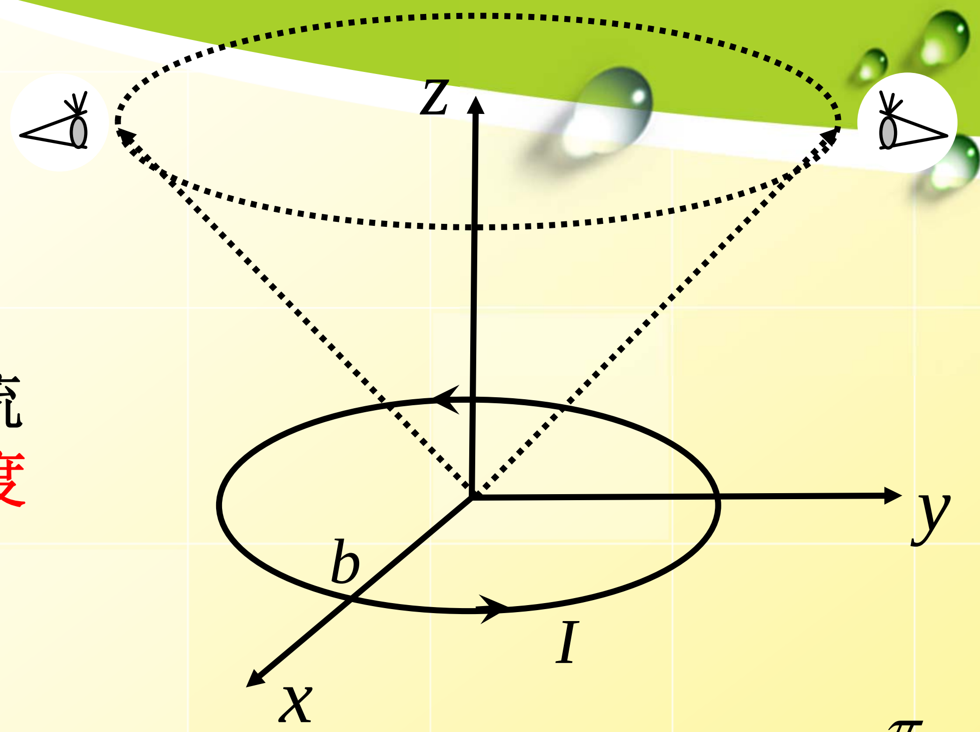
$$= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln[z'-z+\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}]\Big|_{-L}^{+L}$$

$$= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}-(z-L)}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}-(z+L)}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_z}{\partial r}+\boldsymbol{a}_r\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}$$

$$= \boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left\{\frac{-z+L}{\sqrt{(z-L)^2+\rho^2}}+\frac{(z+L)}{\sqrt{(z+L)^2+\rho^2}}\right\}$$

3.2.3 磁偶极子



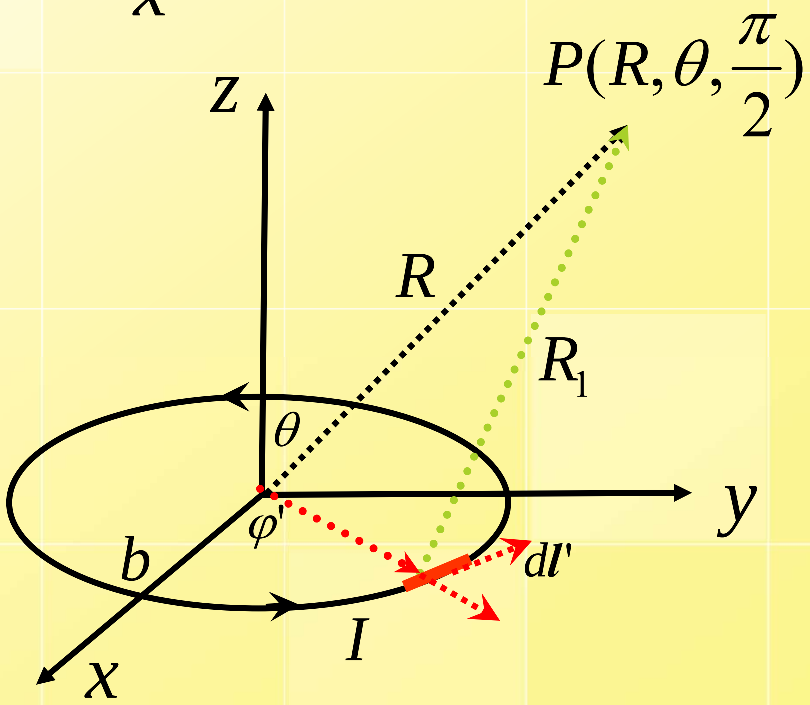
求一电流为I、半径为b的电流环在远处一点产生的磁通密度

选取球坐标系

矢量磁位$\boldsymbol{A}$

↓

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$



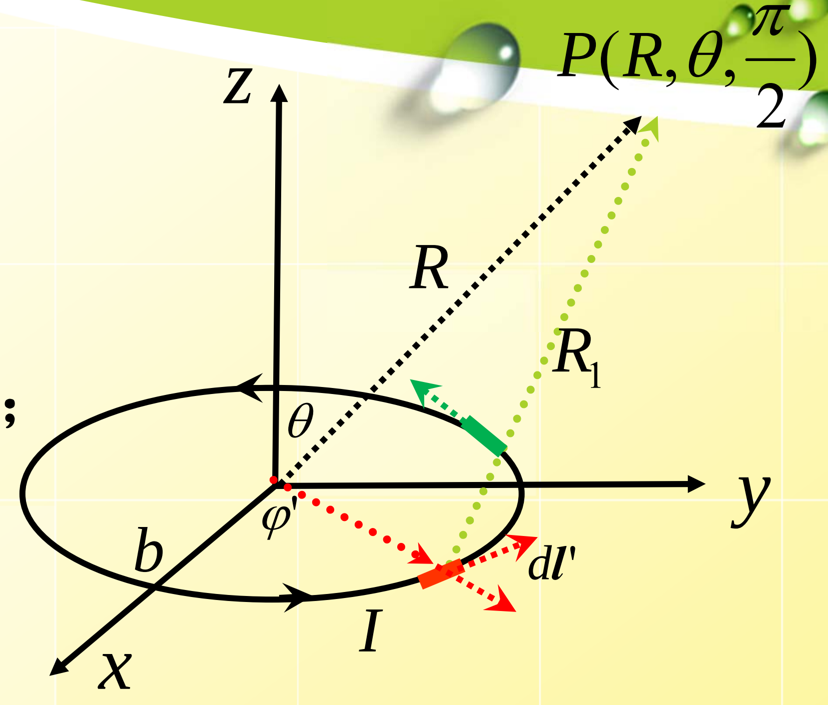
由于对称性，磁场与场点的方位角φ无关，所以可选择yz平面上的点P进行分析。

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\boldsymbol{l}'}{R_1}$$

注意：

1. 源点与场点的距离记为R_1而非R；

2. dl' 处的 $\boldsymbol{a}_{\varphi'}$ 与 $\boldsymbol{a}_{\varphi}$ 不同。



$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = (-\boldsymbol{a}_x \sin\phi' + \boldsymbol{a}_y \cos\phi')b\mathrm{d}\phi'$$

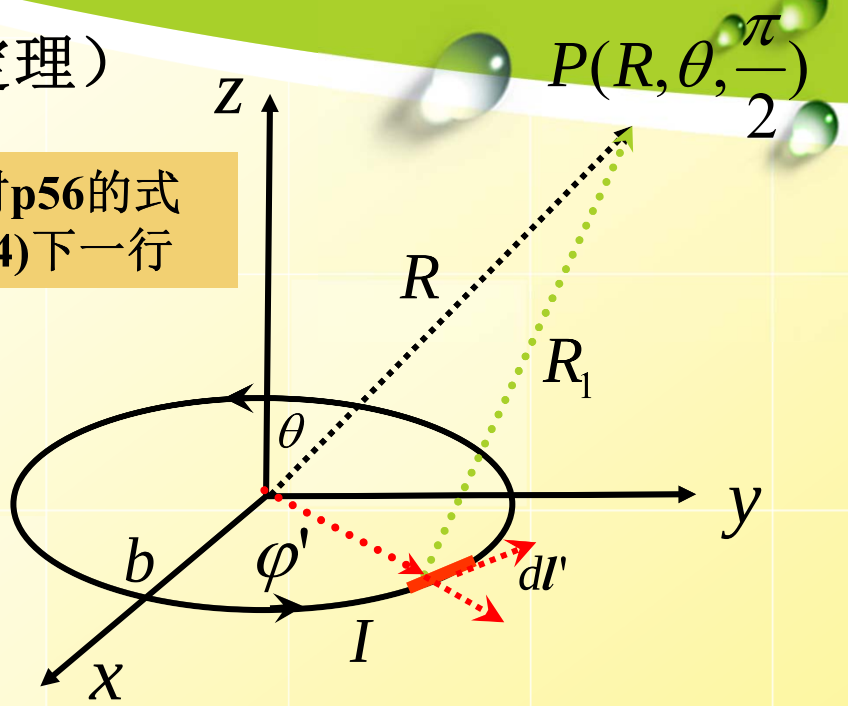
对于每一个 $I\boldsymbol{dl}'$，都存在一个位于y轴另一侧与之对称的微分电流元，它将对A沿 $-\boldsymbol{a}_x$方向产生等量的贡献，但将抵消 $I\boldsymbol{dl}'$ 在y方向上的贡献。

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{a}_x\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{b}\sin\varphi'}{R_1}d\varphi'=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin\varphi'}{R_1}d\varphi'$$

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\psi$$ （余弦定理）

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR\sin\theta\sin\varphi'$$

教材p56的式(3.74)下一行



$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)^{-1/2}$$

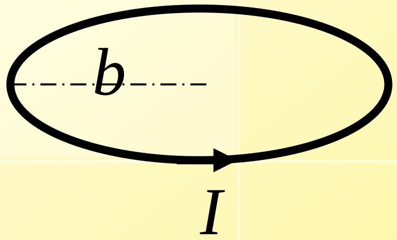
$$\approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b}{2\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\varphi'\right)\sin\varphi' \, d\varphi'$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2}\sin\theta \xrightarrow{\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3}(\boldsymbol{a}_R 2\cos\theta + \boldsymbol{a}_\theta \sin\theta)$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{\varphi}\frac{\mu_0 I b^2}{4R^2}\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{\phi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi b^2}{R^2}\sin\theta$$

磁偶极子：半径很小的电流环

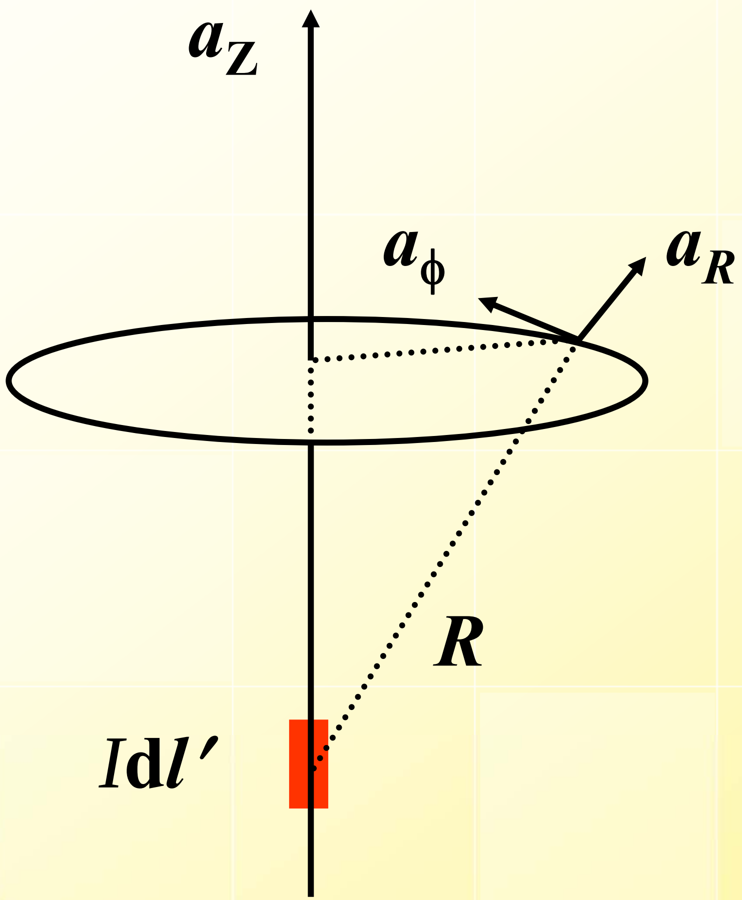


磁偶极矩： $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_z I\pi b^2$

磁偶极子（磁偶极矩）	电偶极子（电偶极矩）
$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$	$V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}$
$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{R^3}(\boldsymbol{a}_R 2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$	$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{R^3}(\boldsymbol{a}_R 2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$

普遍形式电流分布的B场求解：

毕奥—萨伐定律（Biot-Savart's Law）



$$\boldsymbol{J}\mathrm{d}v' = \boldsymbol{J}_S\mathrm{d}S' = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\boldsymbol{J}}{R}dv'$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\boldsymbol{l}'}{R}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\boldsymbol{l}'}{R}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\nabla\times\left(\frac{d\boldsymbol{l}'}{R}\right)$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{G}) = f\nabla\times\boldsymbol{G} + (\nabla f)\times\boldsymbol{G} \qquad f=\frac{1}{R},\boldsymbol{G}=d\boldsymbol{l}'$$

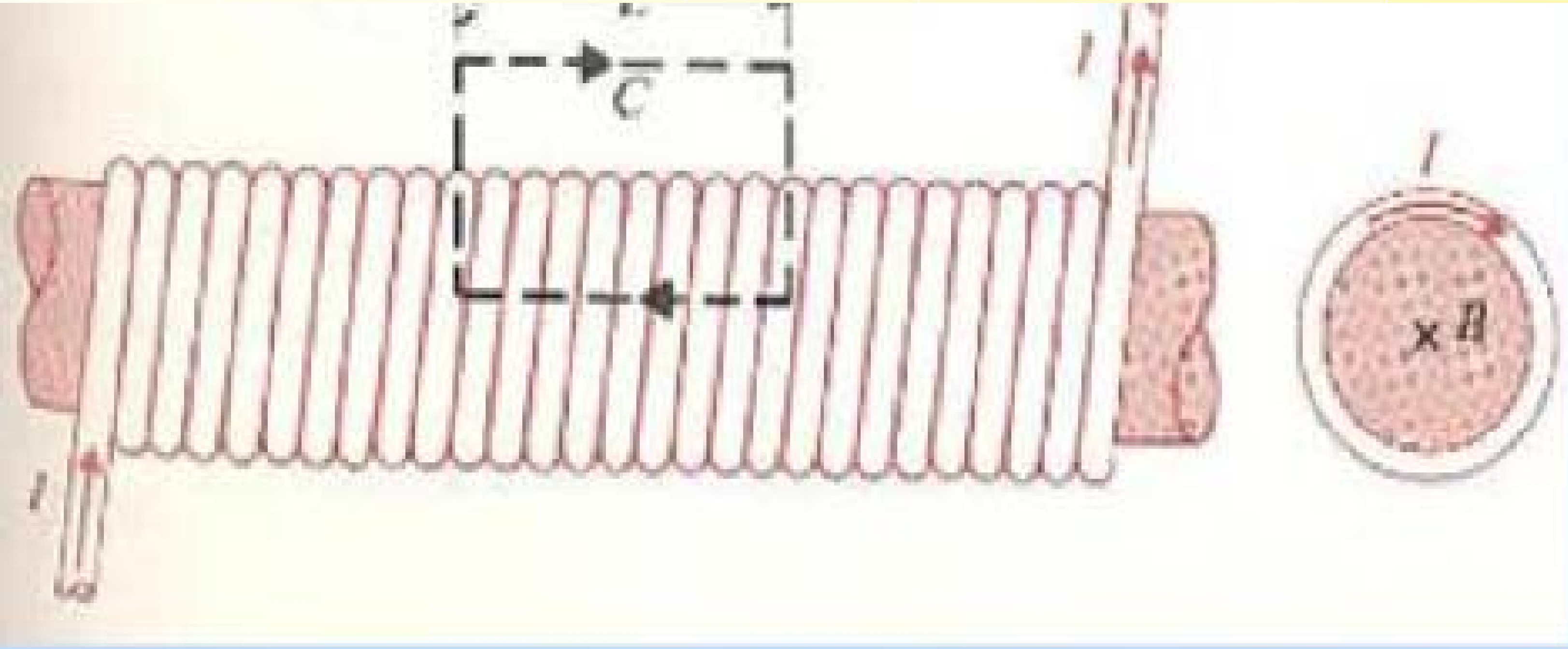
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}[\frac{1}{R}\underbrace{\boxed{\nabla\times d\boldsymbol{l}'}}_{0}+\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\times d\boldsymbol{l}']$$

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\boldsymbol{a}_R\frac{1}{R^2}$$

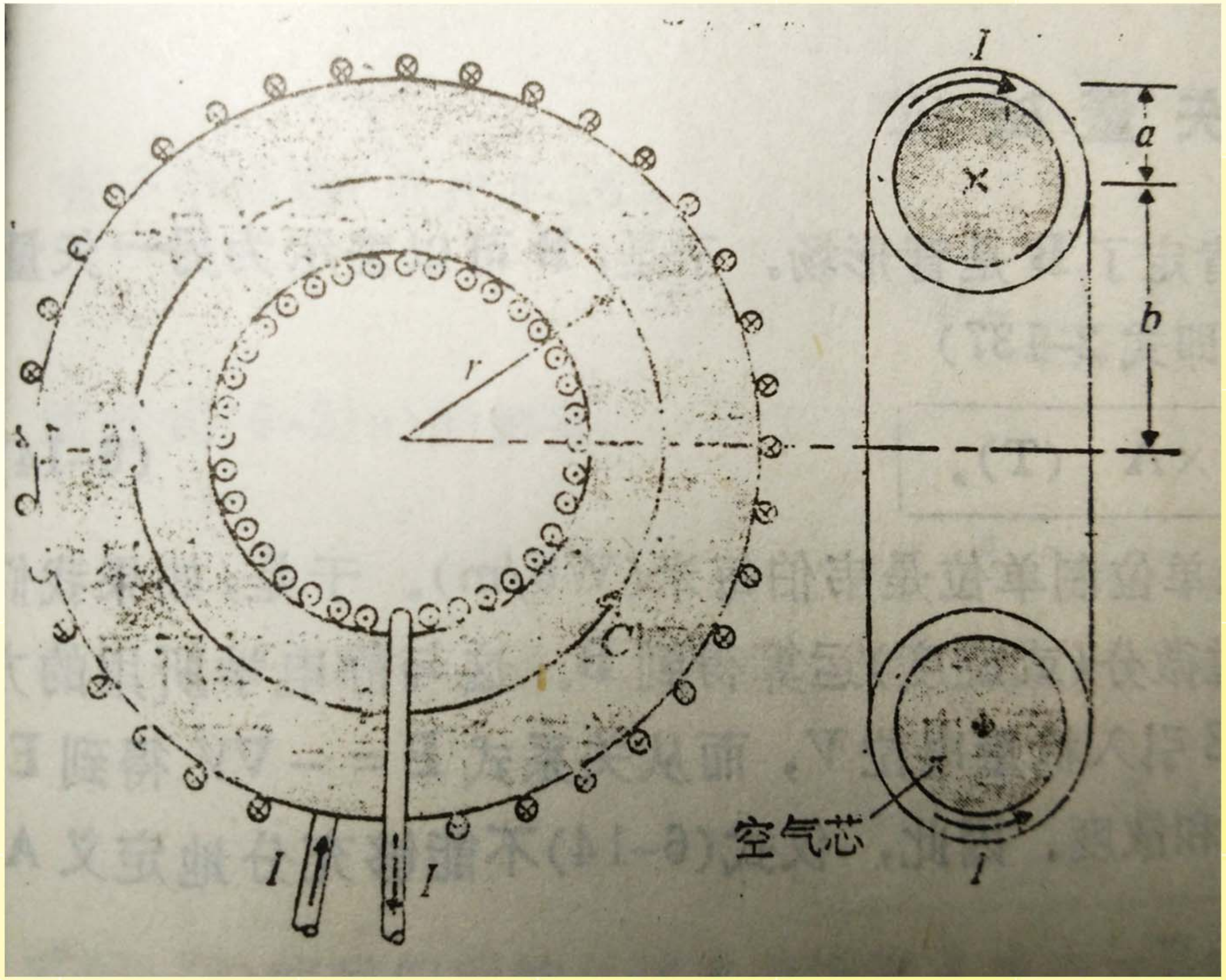
$$\boxed{\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}\quad(\mathrm{T})} \qquad \boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{R}}{R^3}\quad(\mathrm{T})$$

毕奥—萨伐定律 得证

【例】求无限长空气芯螺线管内部的磁通密度，螺线管每单位长度密绕n匝，其中流过电流I。



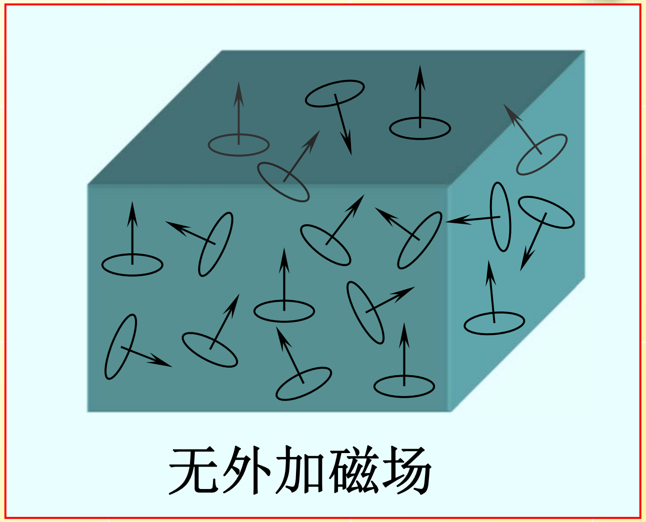
【例】空气芯环形线圈密绕N匝，通过的电流为I，求线圈内部的磁通密度。环的平均半径为b，每一匝的半径为a。



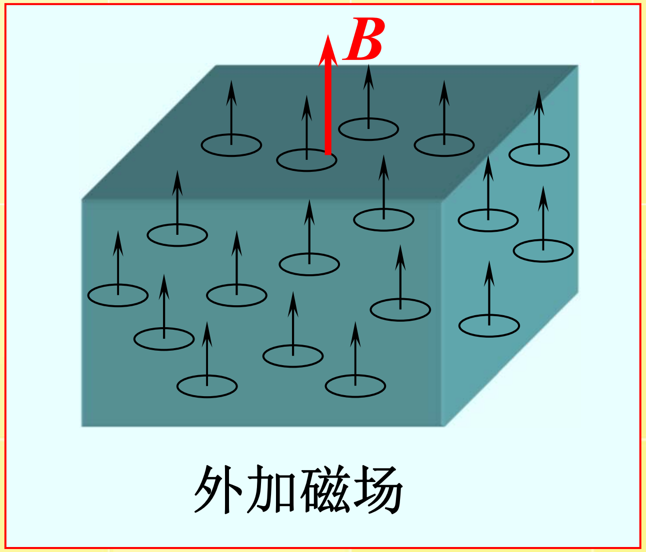
3.2.4 磁介质的磁化

- 磁介质的磁化

电子轨道运动和自旋 ⟶ 电子磁矩 ⟶ 分子磁矩



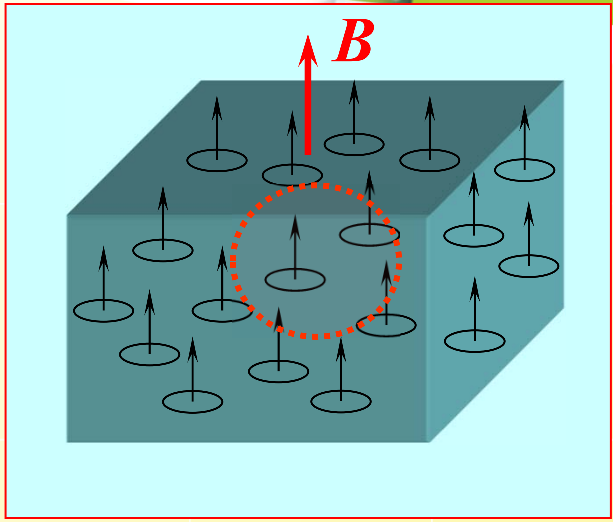
无外磁场作用时，大多数材料的分子磁矩具有随机取向，不产生净磁矩，宏观上不显磁性。



在外磁场作用下，分子磁矩发生变化，宏观上显示出磁性，这种现象称为磁介质的磁化。

➢磁化强度矢量$\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{m}_k}{\Delta v}$$



（磁偶极矩的体密度）

$$dA = \frac{\mu_0 \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}_R}{4\pi R^2} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$A = \int_{v'} dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \boldsymbol{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

$$\boldsymbol{\nabla}' \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}} \right) \times \vec{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{R}} \right) - \frac{\boldsymbol{\nabla}' \times \vec{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{R}}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{4\pi}} \left[\iiint \frac{\boldsymbol{\nabla}' \times \vec{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{R}} \mathrm{d}\boldsymbol{v}' - \iiint \boldsymbol{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{R}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{v}' \right]$$

$$\boldsymbol{A}=\boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}}{R}dv'}+\boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{a}_n'}{R}ds'}$$

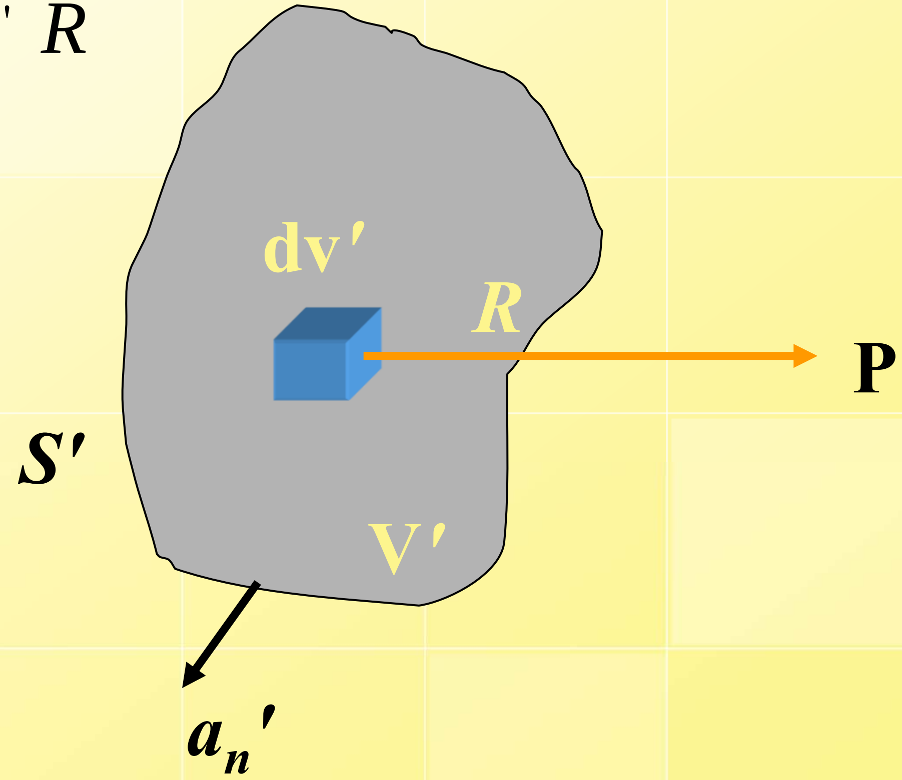
$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'}\frac{\boldsymbol{J}}{R}dv' \qquad \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{J}_s}{R}ds'$$

磁化电流体密度：

$$\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$$

磁化电流面密度：

$$\boldsymbol{J}_{ms}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{a}_n$$



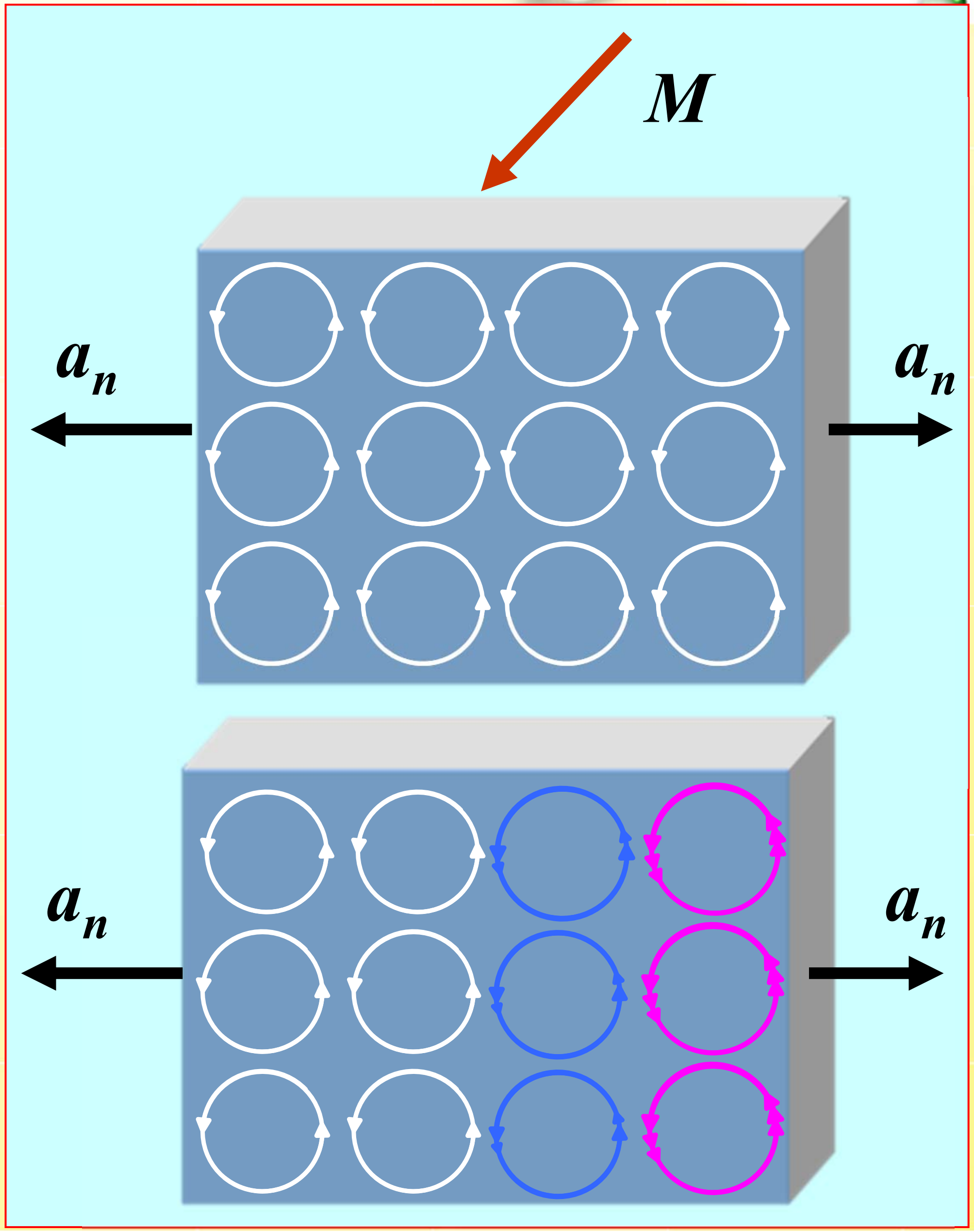
➢磁介质与等效（磁化）电流密度的关系

均匀磁化：介质内部

不存在任何净体电流

非均匀磁化：介质内

部存在净体电流密度



- 磁场强度和相对导磁率

自由空间 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$　　媒质中 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_m)$

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)=\boldsymbol{J}$$

定义磁场强度 $\boldsymbol{H}$：　$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$

在任何媒质中：　$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$

$$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot dl=\int_S\boldsymbol{J}\cdot ds=I$$

安培环路定律（另一形式）：磁场强度环绕任何闭合路径的环量，等于穿过以此路径为边界的表面的自由电流。

任何媒质中，静磁学的两个基本假设

微分形式	积分形式
$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot ds=0$
$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$	$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot dl=\int_S \boldsymbol{J}\cdot ds$

当媒质的磁场特性为线性和各向同性时

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

$\chi_m \rightarrow$ 磁化率

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \chi_m \boldsymbol{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$$

本构关系 $\boxed{\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}}$

媒质的相对导磁率 $\leftarrow$ $\mu_r = 1 + \chi_m = \dfrac{\mu}{\mu_0}$; $\mu \rightarrow$ 媒质的绝对导磁率

简单媒质（线性、均匀、各向同性）：χ_m 和 μ_r 均为常数。

磁介质的分类

- 抗磁性介质

分子的固有磁矩为零。在外磁场作用下，由楞次定律，产生一个与外加磁场相反的附加分子磁矩，降低了磁通密度。

$\mu_r \le 1$　　χ_m 是一个很小的负数（**10^{-7}~10^{-4}**）

- 顺磁性介质

分子的固有磁矩不为零，取向由于热运动而随机分布。外磁场作用使分子磁矩部分沿外加场取向，增强了磁通密度。

$\mu_r \ge 1$　　χ_m 是一个很小的正数（**10^{-6}~10^{-2}**）

- 铁磁性介质

$\mu_r >> 1$　　χ_m 是一个很大的正数，可高达**10^5**以上。

➢铁磁性介质的磁化过程

畴壁移动（可逆）

⇩

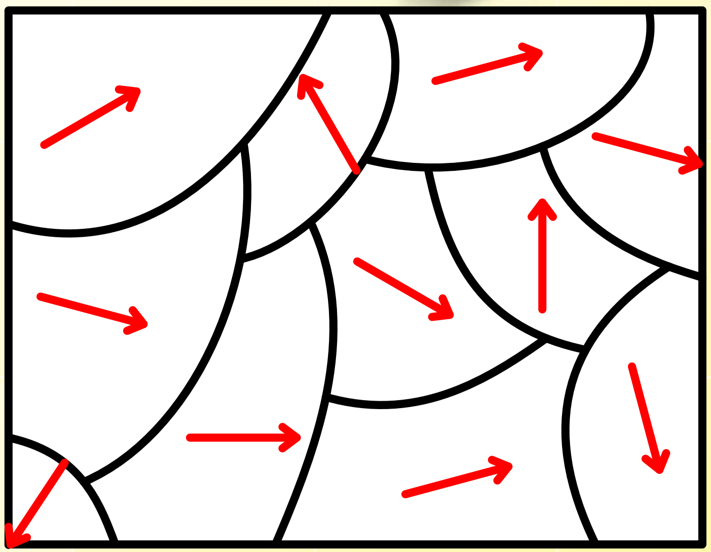
畴壁移动（不可逆）
磁畴结构突变

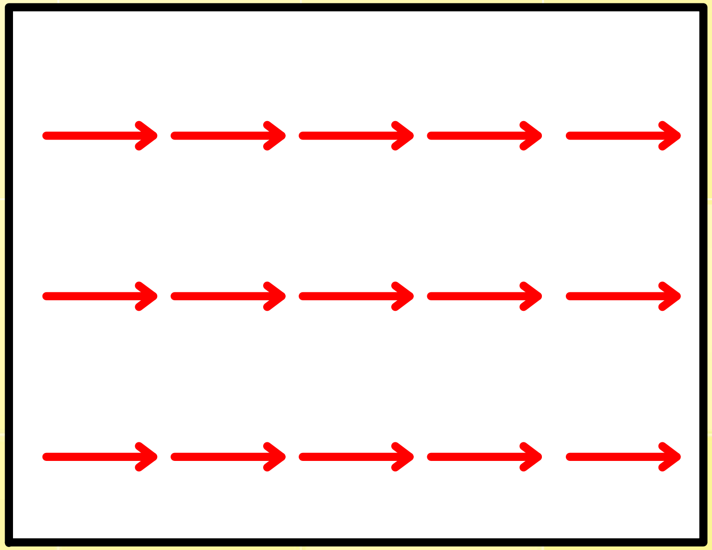
⇩

磁矩转动（可逆）

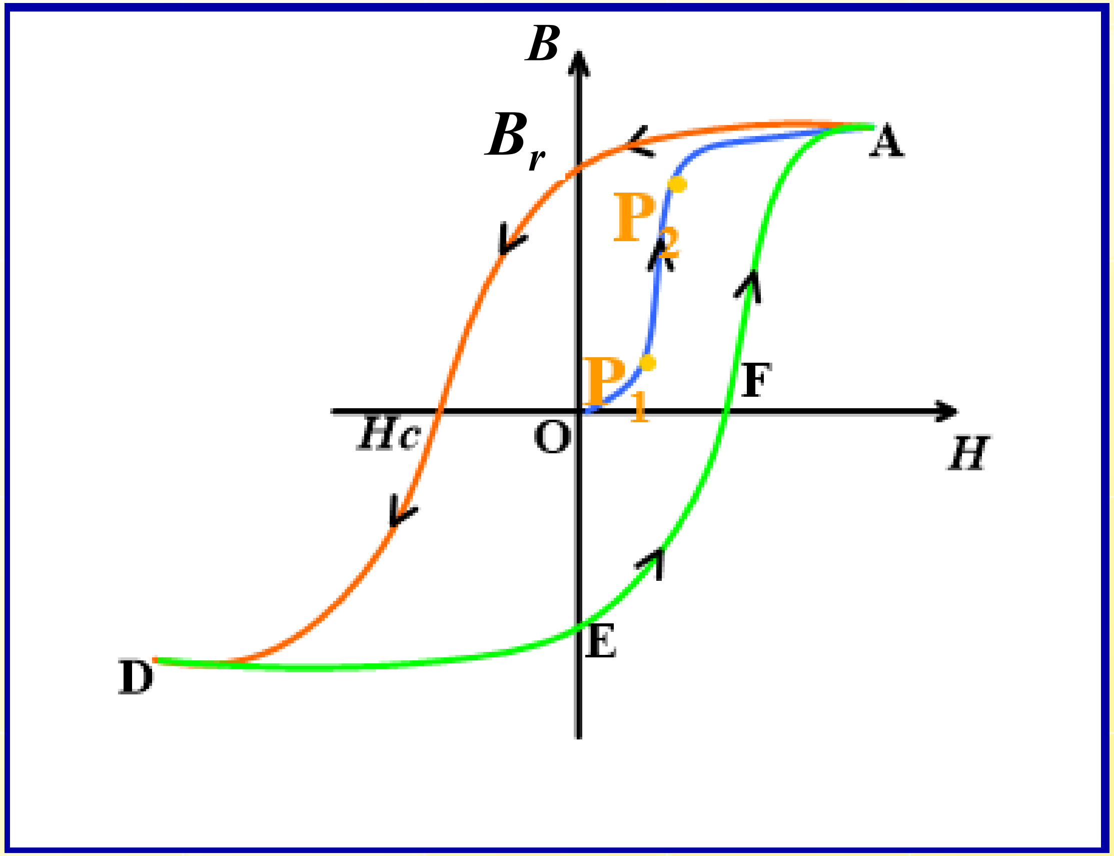
⇩

磁矩进一步转动，直至饱和





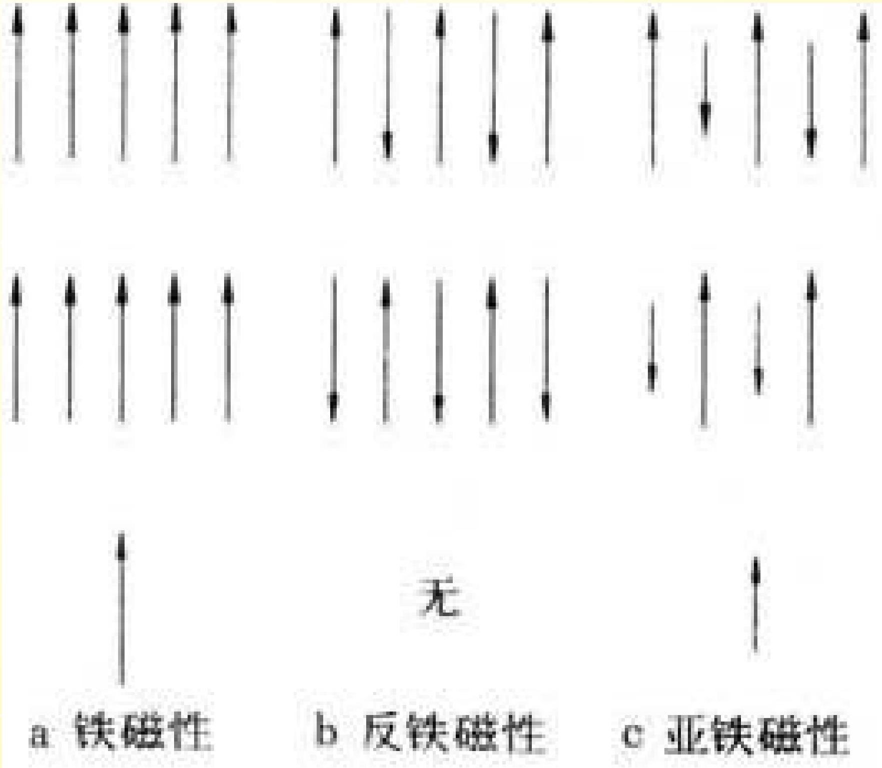
➢铁磁性介质的磁滞回线



B_r：剩余磁通密度（**Remanent flux density**）

H_c：矫顽力（**Coersive force**）

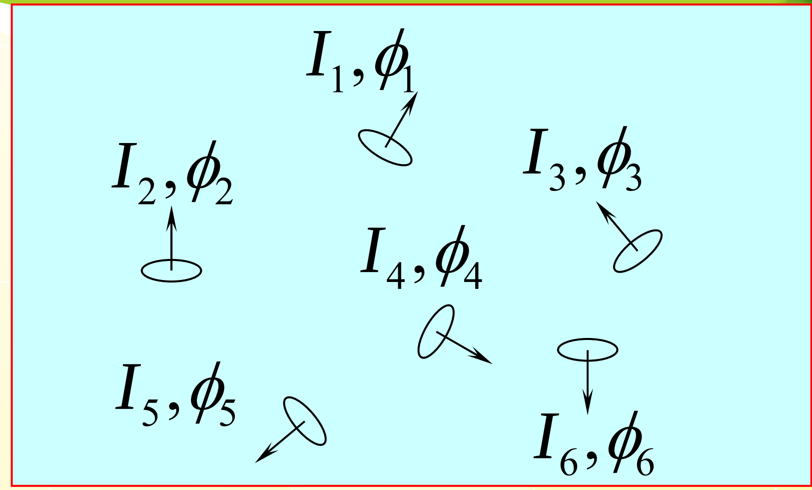
- 铁磁性介质、反铁磁性介质和亚铁磁性介质



- 居里温度

3.2.5 磁场的能量

- 多个回路组成的系统



假设对所有回路从零开始同步通以电流　$\alpha:0\rightarrow 1$

初态		任意时刻		终态
$0,0$	→	$\alpha I_1,\alpha\phi_1$	→	I_1,ϕ_1
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$0,0$		$\alpha I_k,\alpha\phi_k$		I_k,ϕ_k
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$0,0$		$\alpha I_n,\alpha\phi_n$		I_n,ϕ_n

第**k**个回路中产生的感应电动势

$$\xi_k=-\frac{d(\alpha\phi_k)}{dt}=-\phi_k\frac{d\alpha}{dt}$$

外电源所做的功

$$dW=\sum_{k=1}^{n}-\xi_k i_k dt=[\sum_{k=1}^{n}(I_k\phi_k)]\alpha d\alpha$$

$$W=\int dW=\int_0^1[\sum_{k=1}^{n}(I_k\phi_k)]\alpha d\alpha=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\phi_k$$

由能量守恒：　$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\phi_k$$

- 连续分布电流的磁能 $$W_m = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}dv$$

- 用场量表示磁能 $$W_e = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}dv$$

对线性媒质，$\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_v \frac{B^2}{\mu}dv \qquad W_m = \frac{1}{2}\int_v \mu H^2 dv$$

磁能密度

$$w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \qquad w_m = \frac{B^2}{2\mu} \qquad w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

P66的推导：