第三章 静态场
——静电场

- 静电场的基本方程
- 边界条件
- 电位方程
- 静电场中的理想导体
- 电偶极子和电介质
- 静电能量

论述一门学科的两种方法

归纳法　　　　演绎法

定义基本量

规定数学运算规则

假设基本关系

3.1 静电场和恒定电流场

3.1.1 两个基本方程

微分形式 $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \end{cases}$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

静电场有散无旋

- **电场强度的定义：** 当一个试验电荷置于电场区域时，所受到的单位电荷力。

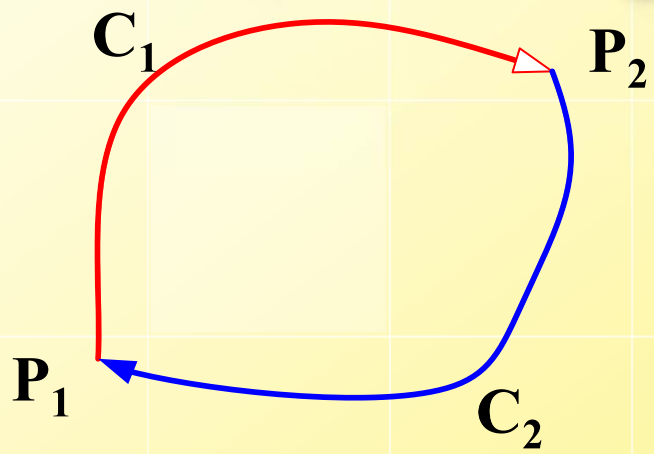
$$\boldsymbol{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q} \quad (\mathrm{V}/m)$$

存在媒质时，引入辅助量——电位移矢量$\vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\varepsilon_0}\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}}$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\rho} \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

积分形式

$$\begin{cases} \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \\ \boxed{\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0} \end{cases}$$

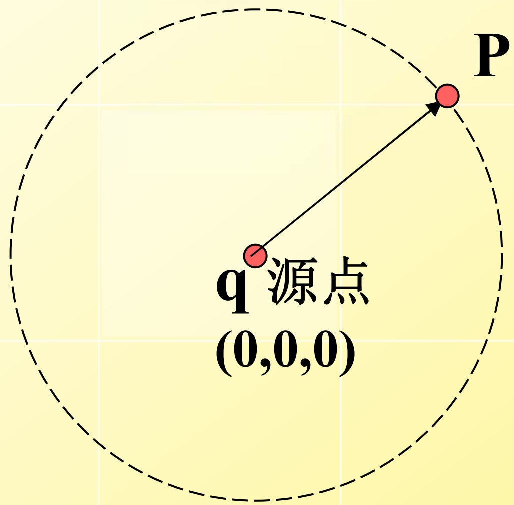


自由空间静电学的两个基本方程

微分形式	积分形式
$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$

➢ 几种典型带电体系的E分布

a) 点电荷【例3.2，p38】

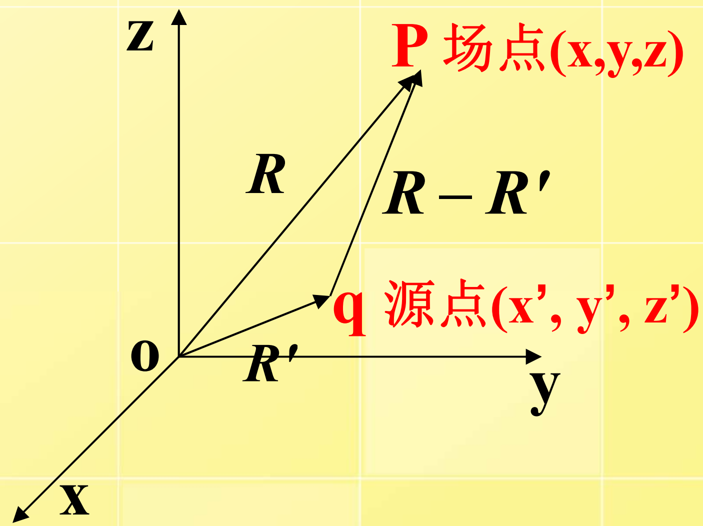


➢ 点电荷q在原点

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_S (\boldsymbol{a}_R E_R)\cdot \boldsymbol{a}_R ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_R E_R = \boldsymbol{a}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

➢ 点电荷q不在原点



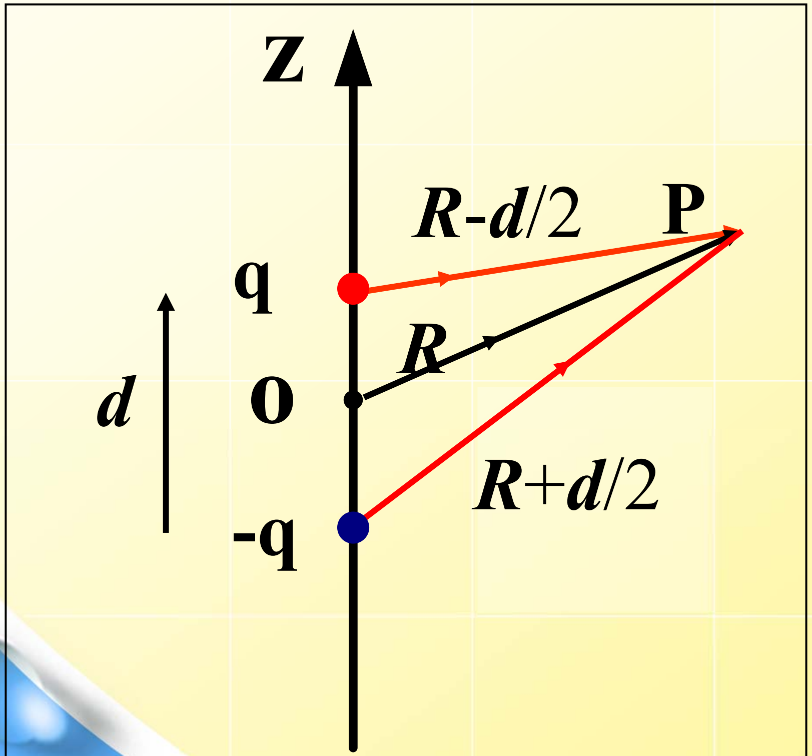
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_{qp} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|^2}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|^3} \qquad \boldsymbol{a}_{qp} = \frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|}$$

- 离散电荷系统

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_k')}{\left|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_k'\right|^3}$$

例：求电偶极子的电场分布



由间距“很小”的两个等量正负“点”电荷组成。

间距：d<<R

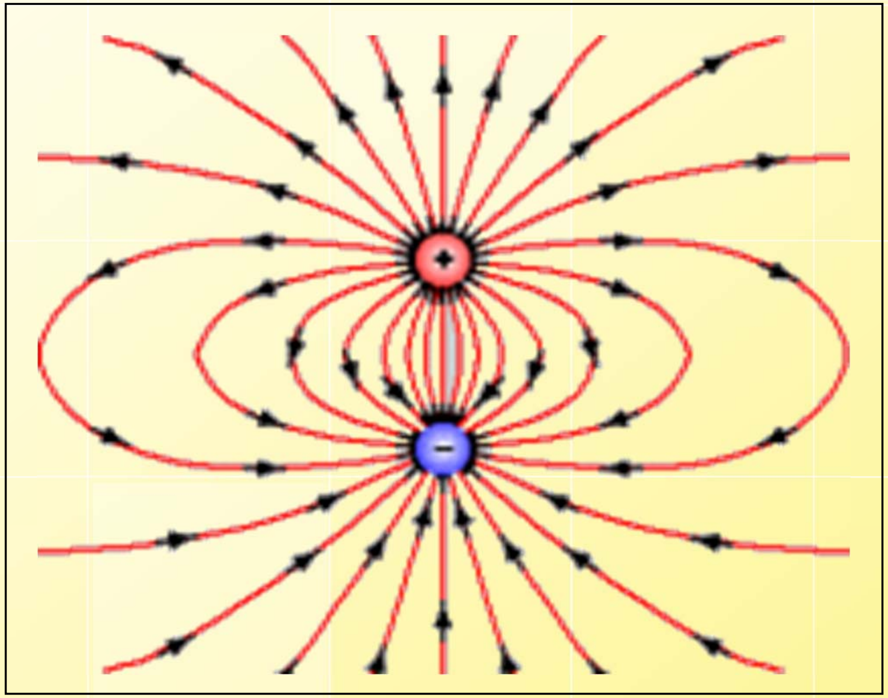
点电荷：+q，-q

由叠加原理, 得：

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[3\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{d}}{R^2}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}\right]}$$

定义电偶极矩 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$

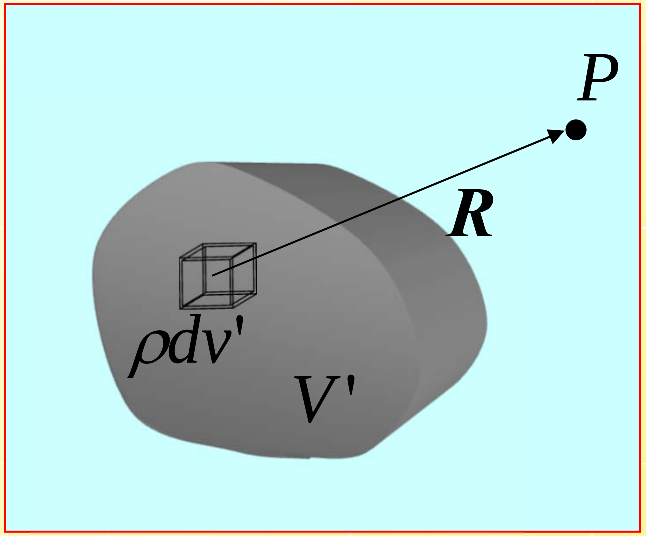
$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\boldsymbol{a}_R 2\cos\theta + \boldsymbol{a}_\theta \sin\theta)$$



电偶极子的电场分布

➢连续分布电荷系统

$$d\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_R \frac{\rho dv'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$



$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \boldsymbol{a}_R \frac{\rho}{R^2} dv'$$

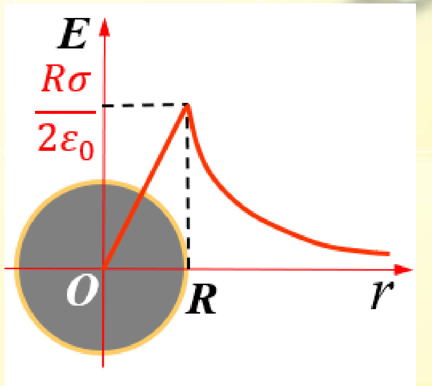
$$\left(\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} dv' \right)$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \boldsymbol{a}_R \frac{\rho_s}{R^2} ds'$$ （面电荷分布）

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \boldsymbol{a}_R \frac{\rho_l}{R^2} dl'$$ （线电荷分布）

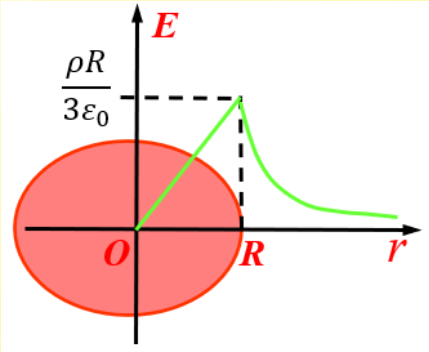
b) 无限长直线电荷【例3.1】 $\vec{E} = \dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$

c) 长直圆柱带电体 $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & (r \geq R) \\ \dfrac{r\rho}{2\varepsilon_0}\hat{a}_r & (r < R) \end{cases}$

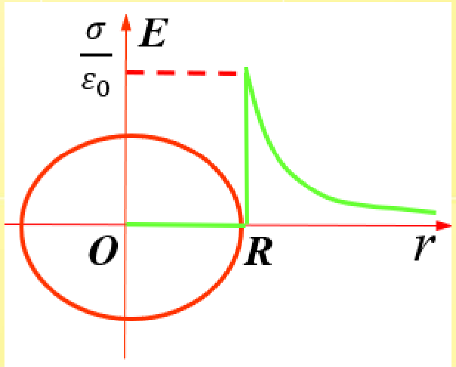


d) 无限大均匀面电荷 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\mathbf{2}\varepsilon_0}\hat{a}_n$, 外法向

e) 均匀带电球体 $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{qr\,\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \leq R) \\ \dfrac{q\,\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r \geq R) \end{cases}$

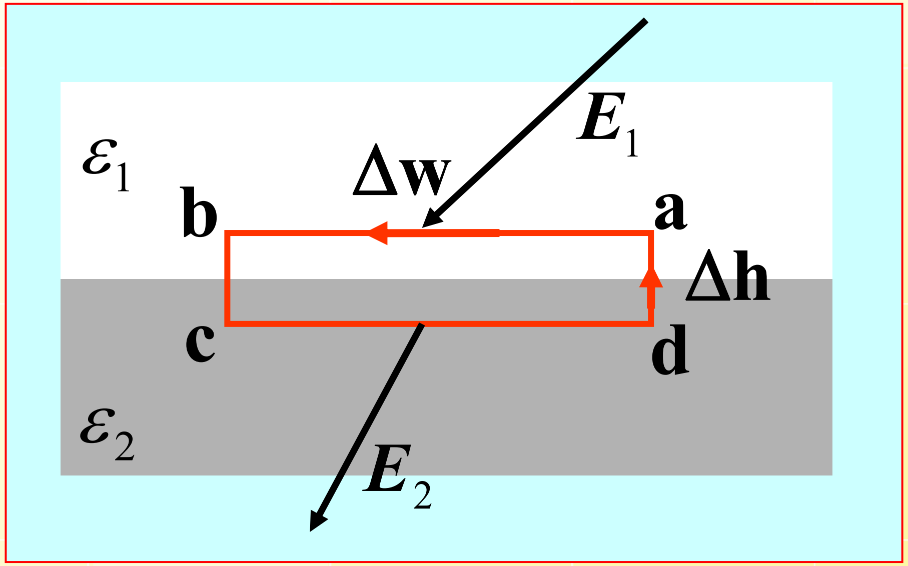


f) 均匀带电球面 $\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$



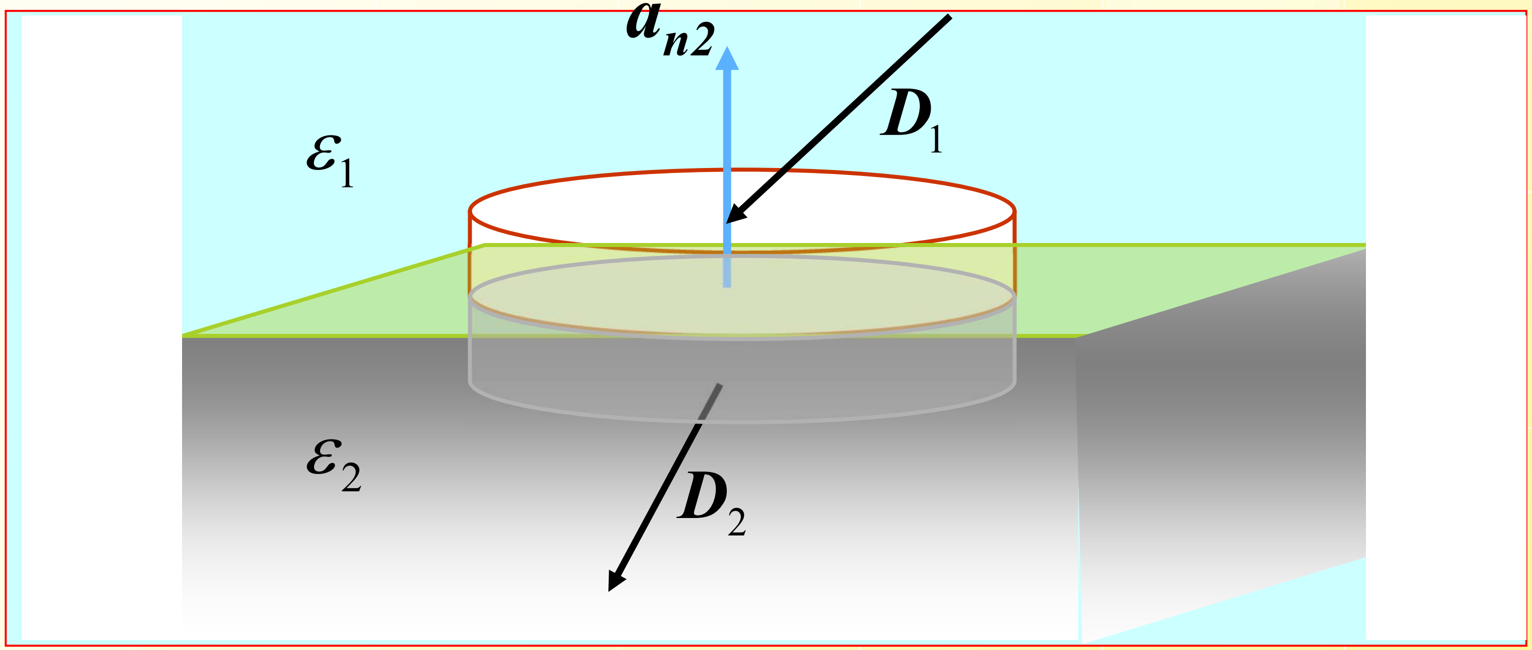
3.1.2 静电场边界条件

➤切向边界条件



$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_{1t} = E_{2t}$$

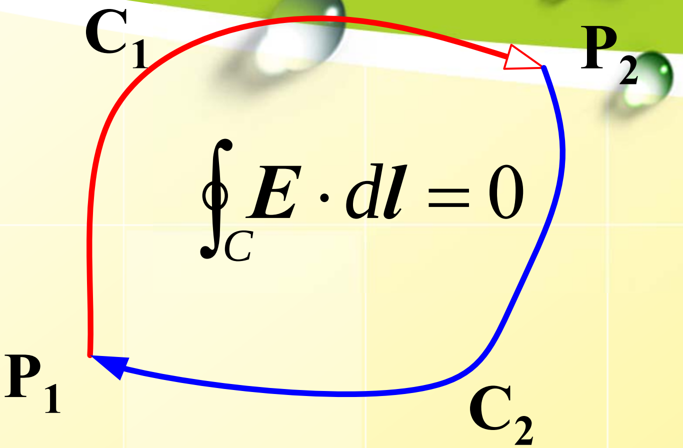
➢法向边界条件



$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = Q \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a}_{n2}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\rho_s$$

3.1.3 电位方程　$\boldsymbol{E} = -\nabla V$



任何做功与路径无关的力场，
叫做保守力场，或位场（势场）

定义：$V_a = \dfrac{W_a}{q_0} = \displaystyle\int_a^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

【讨论】：

1、电势U_a 等于单位正电荷自a点移至∞远电场力作的功，
或等于单位正电荷自∞远移至a点外力的功；

2、电势是标量，但是有正、有负；

3、原则上，零电势点是可任选的；
理论上，一般取∞远处电势为零（限有限尺寸的带电体）
实际中，一般选大地为零；

4、电势差（电压）：　$V_a - V_b = \displaystyle\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

5、电场力的功：　$A_{ab} = q(V_a - V_b)$

a） 典型分布电荷的电位

- 点电荷

$$V = -\int_{\infty}^{R} \boldsymbol{a}_R \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right) \cdot (\boldsymbol{a}_R dR)$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{(V)}}$$

- 离散点电荷系统

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_k'|}$$

思考

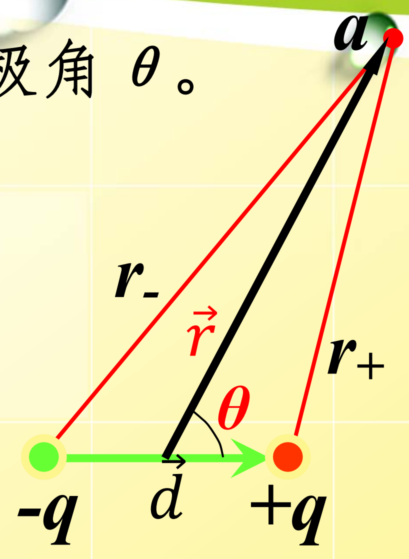
电偶极子的电场强度 $V \longrightarrow \boldsymbol{E} = -\nabla V$

【例】：求电偶极子电位与电场的分布

【解】：设电偶极子 $\vec{P}=q\vec{d}$ ，任一点a距离中心r，极角 θ。

则电势

$$V=V_{+}+\mathrm{V}_{-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{+}}-\frac{1}{r_{-}}\right)$$



电偶极子的电场

由图有：

$$r_{+}\approx r-\frac{d}{2}\cos\theta,\quad r_{-}\approx r+\frac{d}{2}\cos\theta,\quad \frac{1}{r_1r_2}=\frac{1}{r^2}$$

代入上式得

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{r^2-(\frac{d}{2}\cos\theta)^2}\approx\frac{q\mathrm{d}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0r^3}$$

电场强度

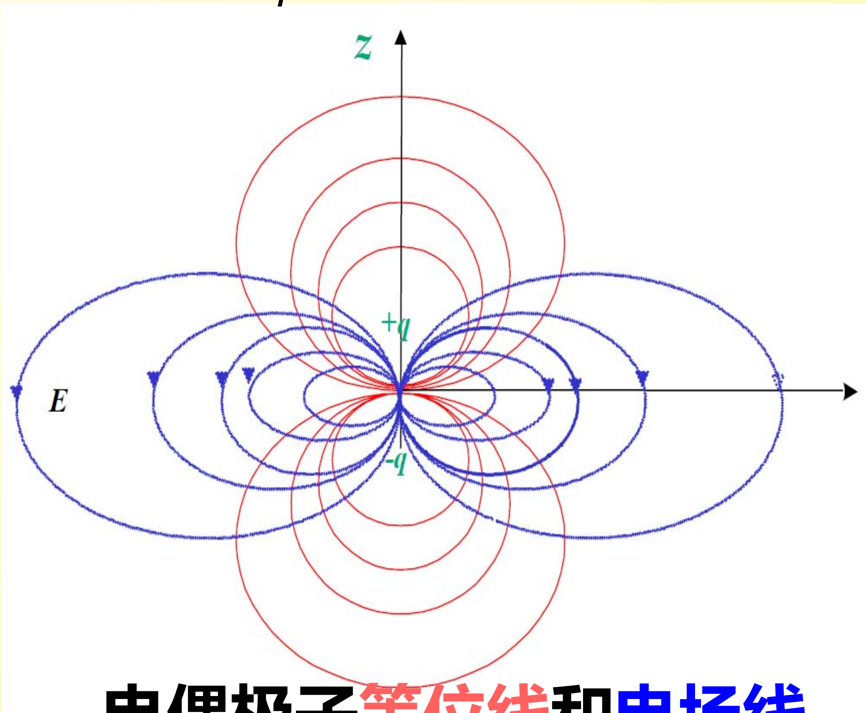
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3},\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

$\vec{E}$ 与 $\vec{r}$ 夹角**α** $\quad \tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta$

$\theta = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ$

$\theta = 0^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$



电偶极子等位线和电场线

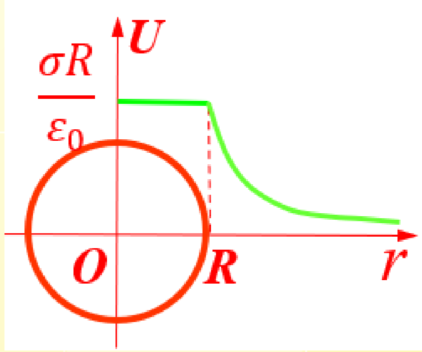
➢ 均匀带电球面内外的电位：

球外(r>R)： $V_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

球内(r≤R)：

$$V_2=\int_r^{R}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_R^{\infty}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}$$

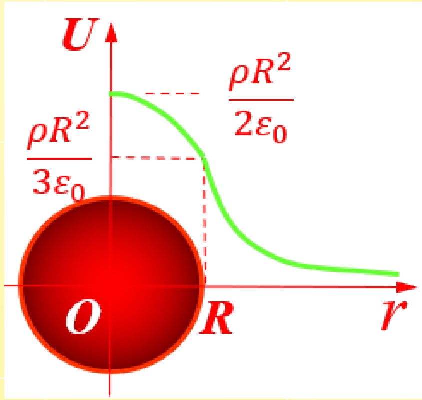
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$



➢ 均匀带电球体内外的电位：

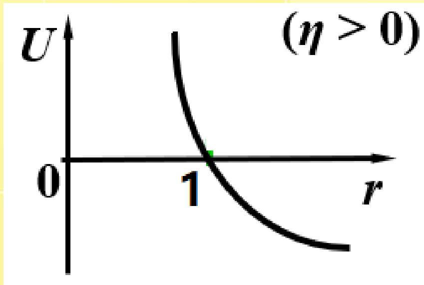
球外(r>R)： $V_1=\int_r^{\infty}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

球内(r≤R)： $V_2=\int_r^{R}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_R^{\infty}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$



➢ 均匀长直线电荷的电势(r=1零点)

$$V=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}$$



➢ 思考：无限大平板（或均匀电场）的电位分布？

- 离散点电荷系统

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\left|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_k{}'\right|}$$

- 连续分布电荷系统

体电荷分布

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho}{R}dv'$$

面电荷分布

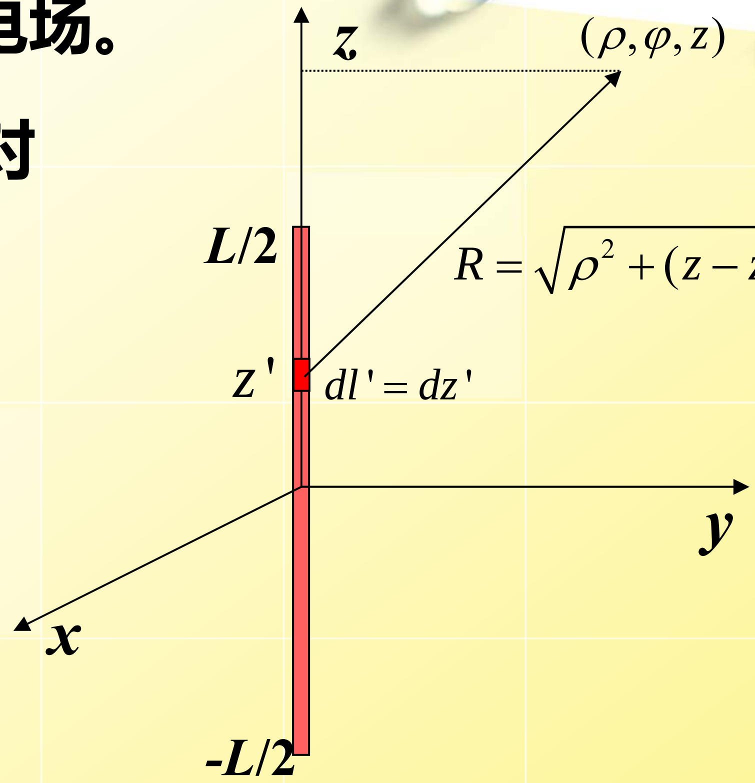
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_s}{R}ds'$$

线电荷分布

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'}\frac{\rho_l}{R}dl'$$

例：求长度为L，电荷线密度为η的长直均匀带电线的电位及电场。

解：建立圆柱坐标系，使具有轴对称性的场与φ无关。



计算线电荷上位置z'的微元dl'在场点(ρ,φ,z)的电位

$$d\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\eta dl'}{R}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\eta dz'}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}$$

$$\Phi(\vec{r})=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+\frac{L}{2}+\sqrt{\rho^2+(z+\frac{L}{2})^2}}{z-\frac{L}{2}+\sqrt{\rho^2+(z-\frac{L}{2})^2}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi = -(\hat{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \cancel{\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z})$$

$$= \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\{\hat{\rho}\frac{1}{\rho}(\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2+(z+\frac{L}{2})^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2+(z-\frac{L}{2})^2}})$$

$$+\hat{z}(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+\frac{L}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-\frac{L}{2})^2}})\}$$

$$L \to \infty \qquad \vec{E} = \hat{\rho}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

3.1.3 电位方程

电位方程

- 泊松方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho\\ \boldsymbol{E}&=-\nabla V\\ \boldsymbol{D}&=\varepsilon\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

柱面坐标

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

球面坐标

$$\nabla^2 V=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)+$$

$$\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

- 拉普拉斯方程

在没有自由电荷存在的区域： $\boxed{\nabla^2 V=0}$

满足给定边界条件的泊松方程(拉普拉斯方程)的解是唯一的解。

- 思考：电位的边界条件是什么？

【例】 半径为 a 的导体球电位为U（ 无穷远处电位为0 ），求球外的电位函数。

【解】 思路：由E求U？

在球外： $\rho = 0$， φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$

边界条件： $\varphi\big|_{r=a} = U$ $\quad\varphi\big|_{r\to\infty} = 0$ （无穷远为电位参考点）

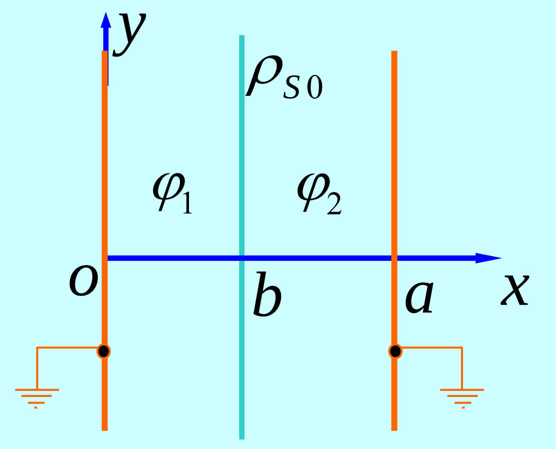
导体球电位球面对称： $\varphi = \varphi(r)$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0, \Rightarrow r^2\frac{d\varphi}{dr} = C_1 \to \varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

由边界条件：

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi\big|_{r=a} = U \Rightarrow U = -\frac{C_1}{a}, C_1 = -aU \\
&\varphi\big|_{r\to\infty} = 0 \Rightarrow C_2 = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{aU}{r}$$

例： 两块无限大接地导体平板分别置于 $x=0$ 和 $x=a$ 处，在两板之间的 $x=b$ 处有一面密度为ρ_{S0}的均匀电荷分布，如图所示。求两导体平板之间的电位和电场。



两块无限大平行板

分析 $\varphi_1=\varphi_1(x)$ ， $\varphi_2=\varphi_2(x)$

解

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_1(x)}{\mathrm{d}x^2}=0\,, \qquad (0<x<b)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2(x)}{\mathrm{d}x^2}=0\,, \qquad (b<x<a)$$

方程的解为

$$\varphi_1(x)=C_1x+D_1$$

$$\varphi_2(x)=C_2x+D_2$$

确定待定常数

方法

利用边界条件

$x=0$ 处，$\varphi_1(0)=0$

$x=a$ 处，$\varphi_2(a)=0$

$x=b$ 处，$\varphi_1(b)=\varphi_2(b)$，

$$\left[\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right]_{x=b}=-\frac{\rho_{S0}}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$C_1=-\frac{\rho_{S0}(b-a)}{\varepsilon_0 a},\quad D_1=0$$

$$C_2=-\frac{\rho_{S0}b}{\varepsilon_0 a},\quad D_2=\frac{\rho_{S0}b}{\varepsilon_0}$$

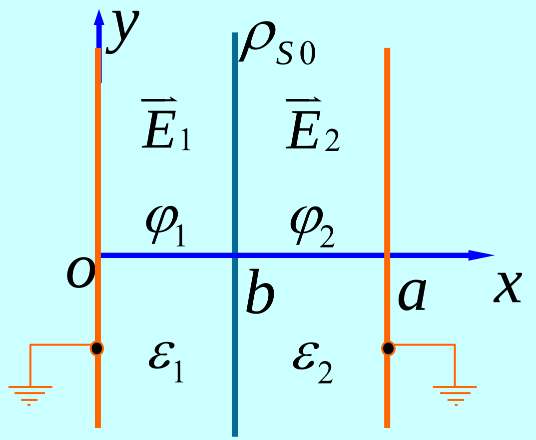
最后得

$$\varphi_1(x)=\frac{\rho_{S0}(a-b)}{\varepsilon_0 a}x,\quad (0\leqslant x\leqslant b)\qquad \vec{E}_1(x)=-\nabla\varphi_1(x)=-\vec{e}_x\frac{\rho_{S0}(a-b)}{\varepsilon_0 a}$$

$$\varphi_2(x)=\frac{\rho_{S0}b}{\varepsilon_0 a}(a-x),\quad (b\leqslant x\leqslant a)\qquad \vec{E}_2(x)=-\nabla\varphi_2(x)=\vec{e}_x\frac{\rho_{S0}b}{\varepsilon_0 a}$$

延伸应用思考：

- 用直接积分的方法如何求解？
- 用高斯定理求解？
- 两区的介质不同？
- 其它坐标系下的同类问题？



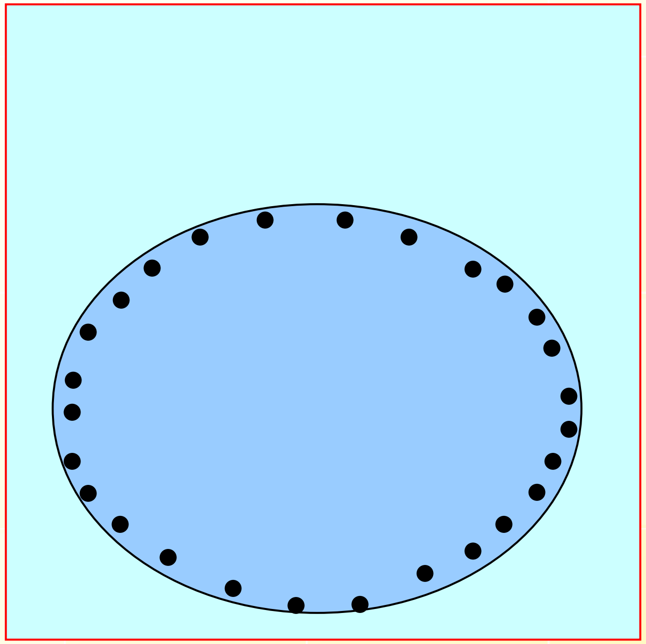
两块无限大平行板

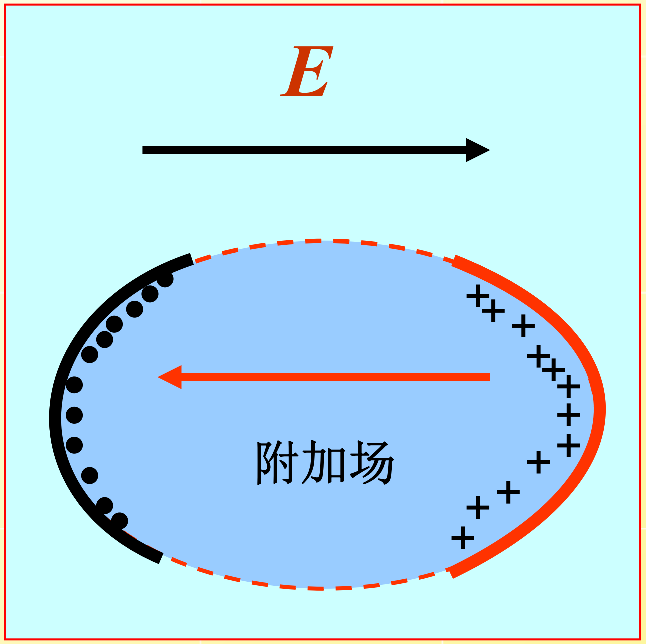
3.1.4 静电场中的理想导体

1） 媒质的分类

导电媒质	→	导体
理想电介质	→	绝缘体
半导电媒质	→	半导体

2）静电场中的导体



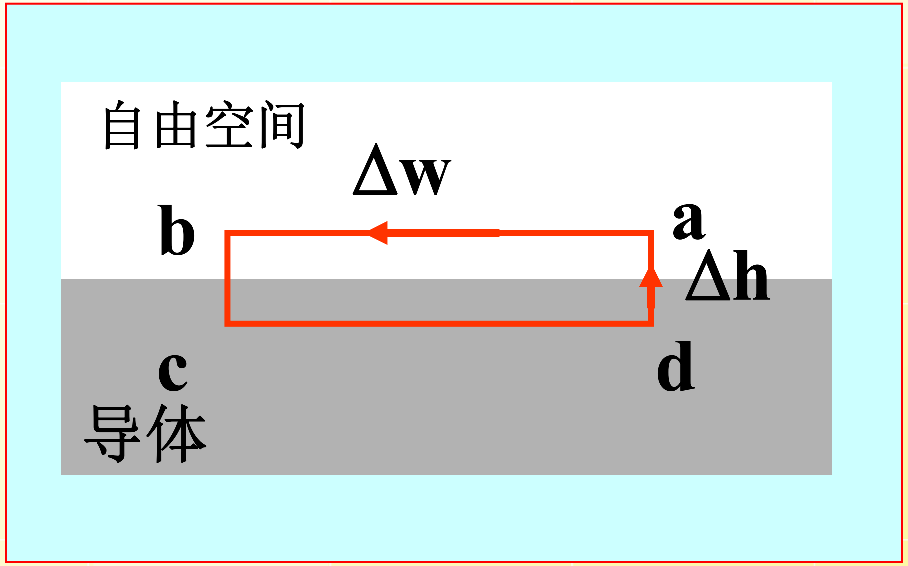


静电平衡

- 导体内部没有电流、没有自由电荷、电场为零
- 导体为等位体
- 导体表面为等位面
- 自由电荷集聚在表面，形成面电荷分布

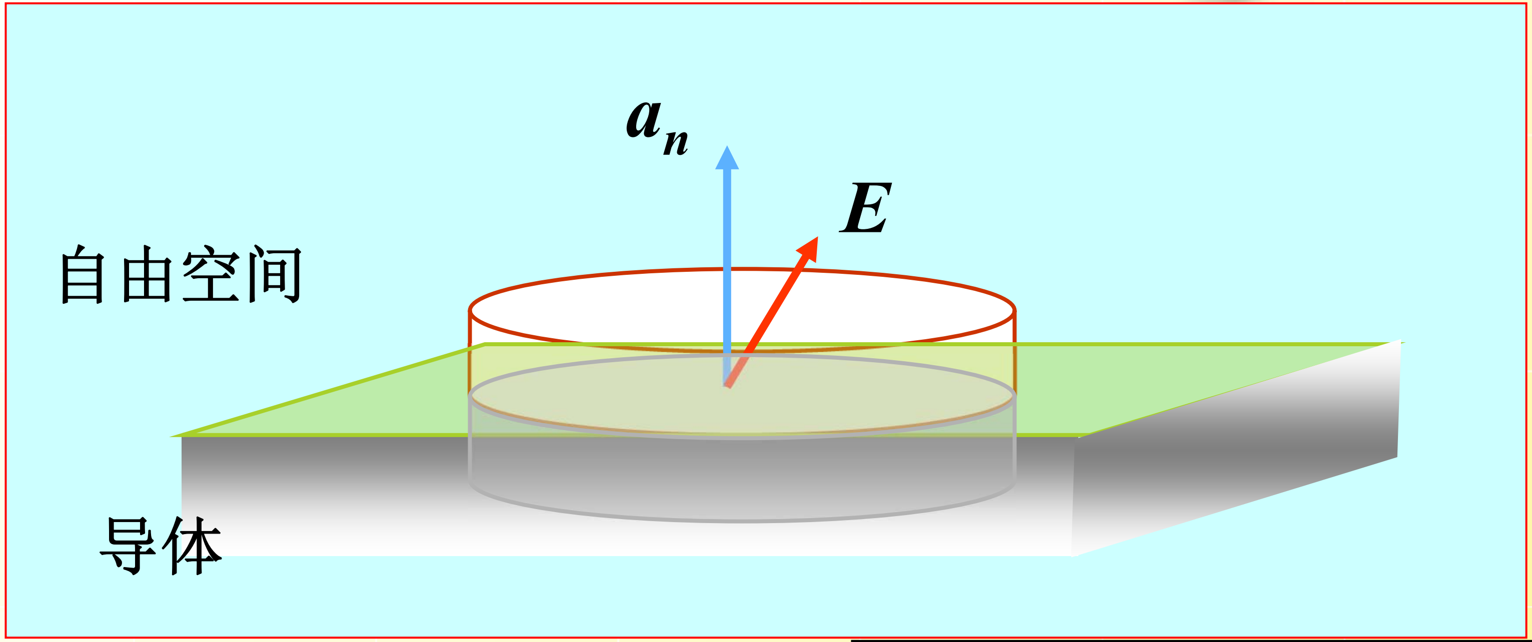
导体与自由空间的边界条件

- 切向边界条件



$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_t = 0$$

➢法向边界条件



$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

导体-自由空间的边界条件	
$E_t = 0$	$E_n = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0}$

➢ 思考：导体-自由空间边界的电位法向条件是什么？