第四章 平面电磁波

4.1时谐电磁场

4.2在无损耗媒质中传播的均匀平面波

4.3横电磁波

4.4平面电磁波的极化

4.5在导电媒质中传播的平面电磁波

4.6在理想导体平面边界上的垂直入射

4.7在理想导体平面边界上的倾斜入射

4.8在电介质平面边界上的垂直入射

4.9在多层电介质分界面上的垂直入射

4.10在电介质平面边界上的倾斜入射

4.1 时谐电磁场

任意点的场量的每一个坐标分量随时间以相同的频率作正弦或余弦变化。

单频正弦场源在麦克斯韦方程组的约束下激励的场量的各个坐标分量仍是同频的正弦时间函数。

- 时谐电磁场的广泛适用：

工程中激发电磁场的源多为正弦激励方式，应用最多的就是时谐电磁场【广播、电视、通信的载波等】。

通过傅里叶变换理论，任何时变电磁场都可以表示成为各个单频正弦电磁场分量的叠加或积分。

➢时谐场的瞬时表示（实数表示）

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{a}_x E_x(x,y,z,t)+\boldsymbol{a}_y E_y(x,y,z,t)+\boldsymbol{a}_z E_z(x,y,z,t)$$

$$E_x(x,y,z,t)=\boxed{E_{xm}(x,y,z)}\cos[\boxed{\omega t}+\boxed{\varphi_x(x,y,z)}]$$

$$E_y(x,y,z,t)=\boxed{E_{ym}(x,y,z)}\cos[\boxed{\omega t}+\boxed{\varphi_y(x,y,z)}]$$

$$E_z(x,y,z,t)=\boxed{E_{zm}(x,y,z)}\cos[\boxed{\omega t}+\boxed{\varphi_z(x,y,z)}]$$

三要素　　振幅　　频率　　初相角

时谐场的相量表示（复数表示）

标量(分量)

$$E_x = \mathrm{Re}[E_{xm} e^{j(\omega t+\varphi_x)}] = \mathrm{Re}[\dot{E}_{xm} e^{j\omega t}]$$

$$E_y = \mathrm{Re}[E_{ym} e^{j(\omega t+\varphi_y)}] = \mathrm{Re}[\dot{E}_{ym} e^{j\omega t}]$$

$$E_z = \mathrm{Re}[E_{zm} e^{j(\omega t+\varphi_z)}] = \mathrm{Re}[\dot{E}_{zm} e^{j\omega t}]$$

相量（复振幅）

$$\dot{E}_{xm} = E_{xm} e^{j\varphi_x}$$

$$\dot{E}_{ym} = E_{ym} e^{j\varphi_y}$$

$$\dot{E}_{zm} = E_{zm} e^{j\varphi_z}$$

矢量

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x E_x + \boldsymbol{a}_y E_y + \boldsymbol{a}_z E_z$$

$$= \boldsymbol{a}_x \mathrm{Re}[\dot{E}_{xm} e^{j\omega t}] + \boldsymbol{a}_y \mathrm{Re}[\dot{E}_{ym} e^{j\omega t}] + \boldsymbol{a}_z \mathrm{Re}[\dot{E}_{zm} e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Re}[(\boldsymbol{a}_x \dot{E}_{xm} + \boldsymbol{a}_y \dot{E}_{ym} + \boldsymbol{a}_z \dot{E}_{zm}) e^{j\omega t}] \qquad = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}]$$

矢量相量 $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{a}_x \dot{E}_{xm} + \boldsymbol{a}_y \dot{E}_{ym} + \boldsymbol{a}_z \dot{E}_{zm}$

时谐场对时间的导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t})]$$

$$= \mathrm{Re}[j\omega \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}]$$

$$\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{E}}_m$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \dot{\boldsymbol{E}}_m$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow (j\omega)^2 \dot{\boldsymbol{E}}_m$$

……

时谐麦克斯韦方程组的矢量相量形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m = -j\omega \dot{\boldsymbol{B}}_m$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\boldsymbol{J}}_m + j\omega \dot{\boldsymbol{D}}_m$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}}_m = \dot{\rho}_m$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}}_m = 0$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega \boldsymbol{D}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

➢ 复坡印亭矢量

1、瞬时坡印亭矢量（瞬时的电磁功率流密度）：

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)$$

2、平均坡印亭矢量（平均功率流密度）：

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)dt$$

对时谐场，平均坡印亭矢量可由场矢量的复数形式表示为：

$$\boldsymbol{S}_{av}=\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\mathrm{Re}[\boldsymbol{S}]$$

其中，*S*为复坡印亭矢量：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$$

代表复功率密度，实部为平均功率流密度【有功功率流密度】

4.1 时谐电磁场 $\vec{E} = Re\{\vec{E}(x,y,z)e^{j\omega t}\}$

一般形式

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -j\omega \boldsymbol{B} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + j\omega \boldsymbol{D} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0
\end{aligned}$$

简单媒质

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu \boldsymbol{H} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0
\end{aligned}$$

简单、无源、无损媒质

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu \boldsymbol{H} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0
\end{aligned}$$

（齐次）亥姆霍兹方程
（Helmhotz Equations）

$$\begin{cases}
\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \\
\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0
\end{cases}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}$$

（k：传播常数）

4.1 时谐电磁场 $\vec{E} = Re\{\vec{E}(x,y,z)e^{j\omega t}\}$

写成标量位V和矢量位A所满足的波动方程为：

定义： $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

回顾: 2.5 时变电磁场位函数

波动方程（达朗贝尔方程 ）：

洛伦兹规范：$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$

矢量位A的非齐次波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J}$$

标量位V的非齐次波动方程:

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mathrm{j}\boldsymbol{\omega}\mu\varepsilon \boldsymbol{V} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = -\mu J$$

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = -\mu J$$

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho e^{-jkR}}{R} dV' \quad (\mathrm{V})$$

$$\mathbf{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J} e^{-jkR}}{R} dV' \quad (\mathrm{Wb/m})$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega \boldsymbol{A}$$

准静态近似：

推迟势 $e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2 R^2}{2} + \cdots$

if $\quad R \ll \lambda$

then $\quad kR = 2\pi \frac{R}{\lambda} \ll 1$

简化为静态结果

$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i$	$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$
$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{v'} \frac{\rho}{R} dv'$	$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_i}{R} dv'$	$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\boldsymbol{J}}{R} dv'$

[P72: 例4.1] 推导由均匀导电媒质填充的无源区域中电场强度和磁场强度所满足的波动方程。

4.2 无损耗媒质中的均匀平面波

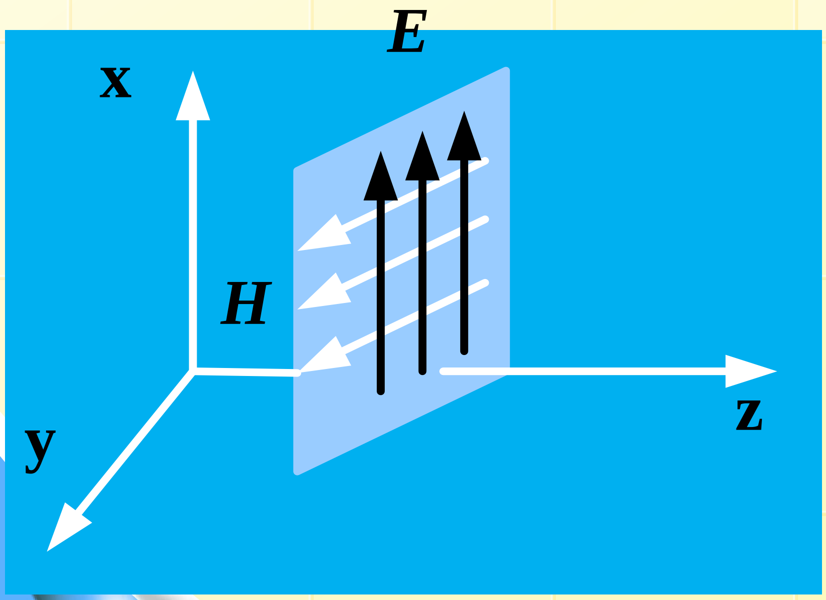
$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0$$

- 平面波

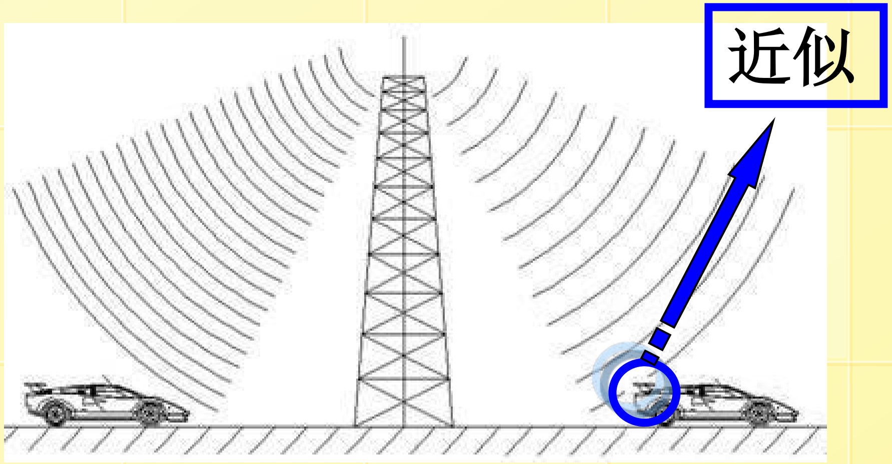
  等相位面是与电磁波传播方向垂直的无限大平面

- 均匀平面波

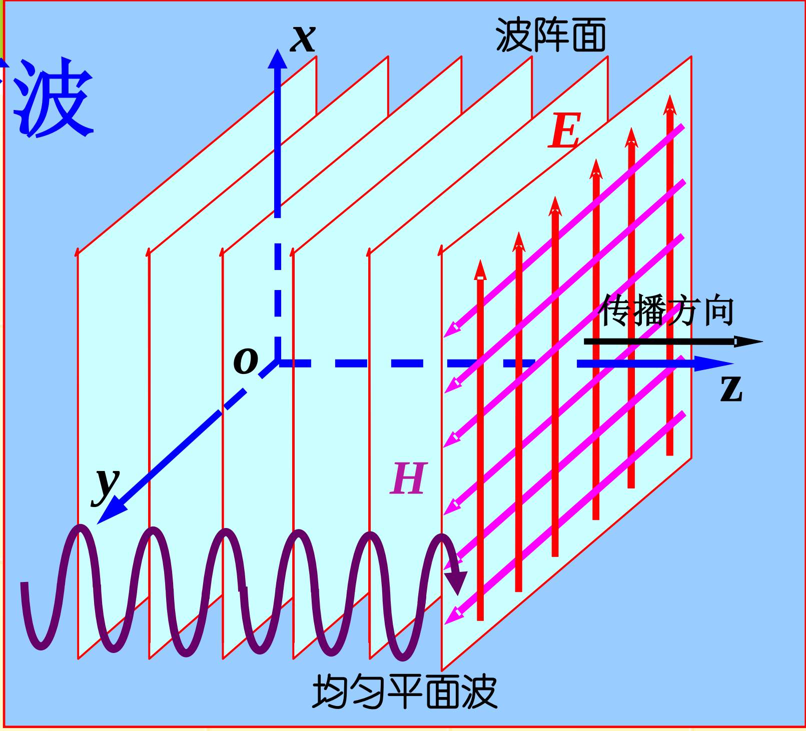
  平面等相位面上，电场和磁场的方向、振幅处处相同



均匀平面波在实际中不存在



4.2 无损耗媒质中的均匀平面波



4.2.1 齐次波动方程的均匀平面波解

- 电场强度 ***E*** 波动方程的解

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} + k^2 \boldsymbol{E} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \end{cases}$$

E仅含x分量，

沿**z**轴传播的均匀平面波

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0}$$

对方程 $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2E_x=0$ 进行求解

$$E_x(z)=E_x^+(z)+E_x^-(z)=\boxed{E_0^+}e^{-jkz}+\boxed{E_0^-}e^{jkz}$$

待定常数，表征场的振幅（由边界条件确定）

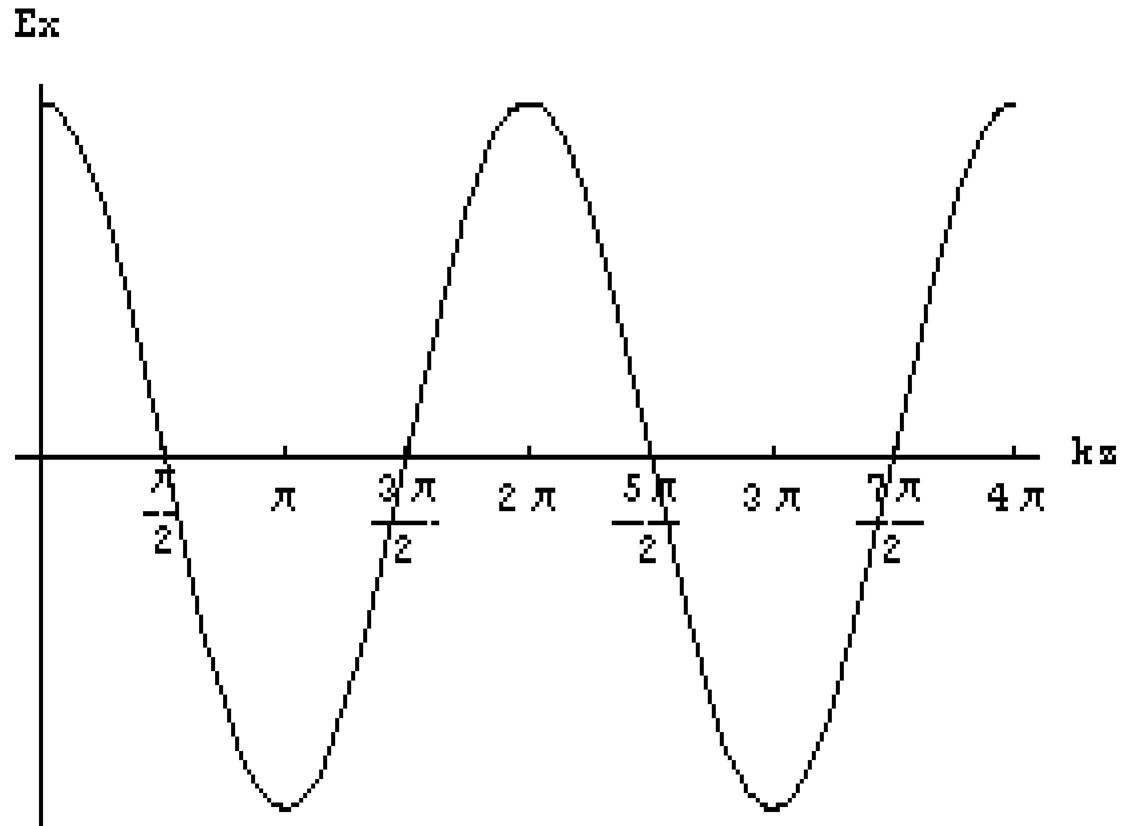
考虑第一项

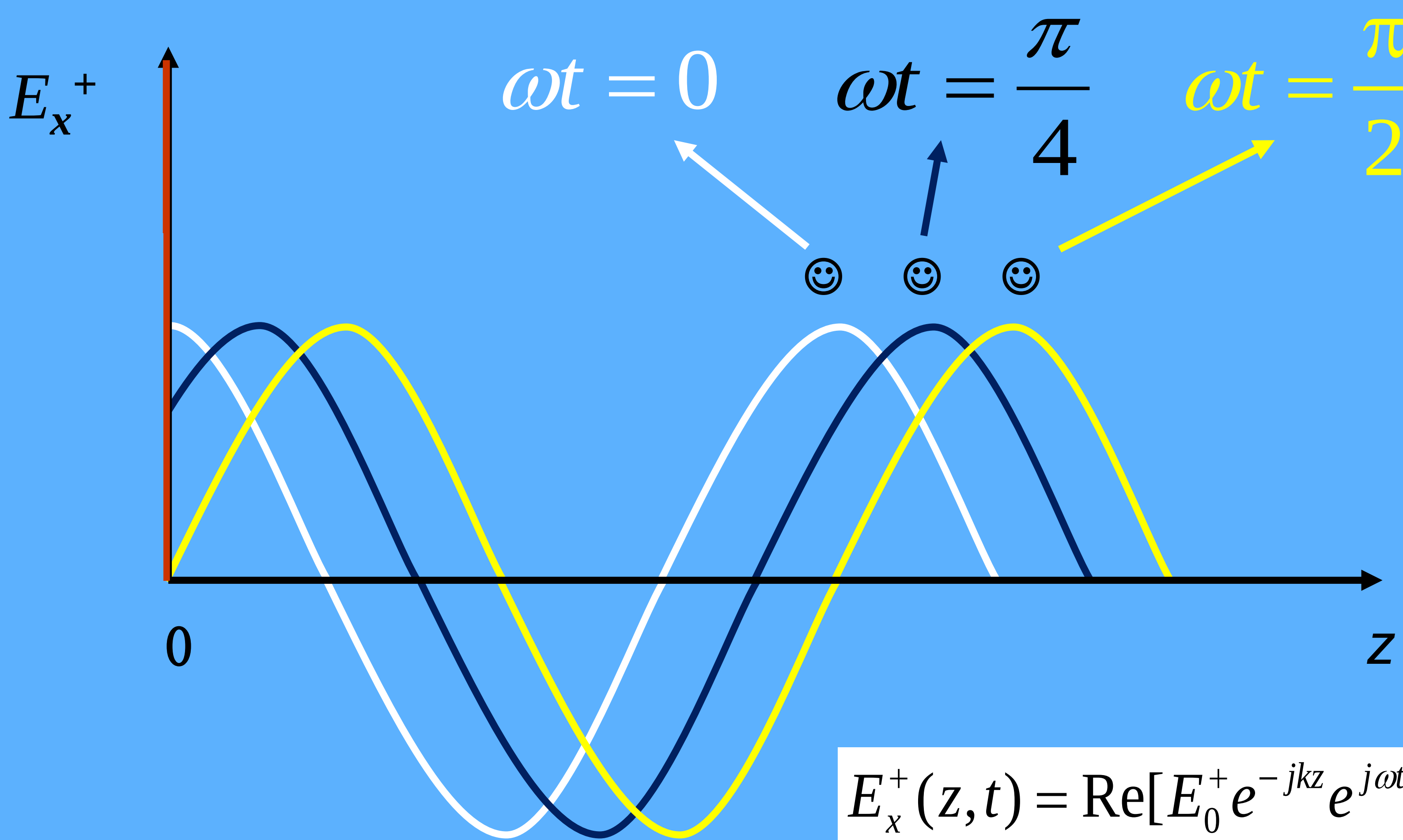
$$E_x^+(z)=E_0^+e^{-jkz}$$

其瞬时值形式为

$$E_x^+(z,t)=\mathrm{Re}[E_0^+e^{-jkz}e^{j\omega t}]$$

$$=E_0^+\cos(\omega t-kz)$$





$$E_x^+(z,t) = \mathrm{Re}[E_0^+ e^{-jkz} e^{j\omega t}]$$

不同时刻 E_x^+ 的波形

行波（**Traveling Wave**）

磁场强度 *H* 波动方程的解

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu\boldsymbol{H}\;\Rightarrow\;H_y(z)=\boldsymbol{a}_yH_0^+e^{-jkz}+\boldsymbol{a}_yH_0^-e^{jkz}$$

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{a}_xE_x^+(z)$$

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{a}_yH_y^+(z)=\boldsymbol{a}_y\frac{k}{\omega\mu}E_x^+(z)=\boldsymbol{a}_y\frac{1}{\eta}E_x^+(z)$$

媒质的本征阻抗

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

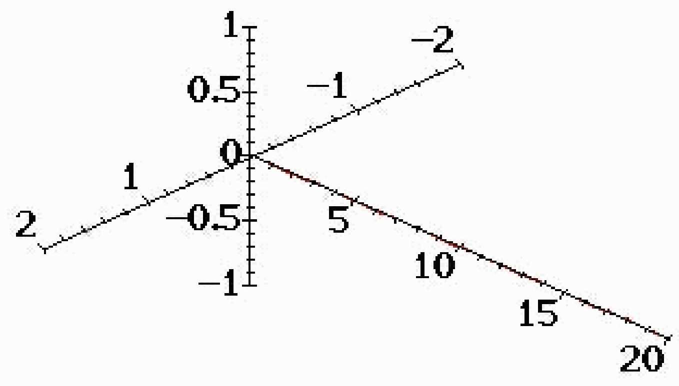
自由空间本征阻抗

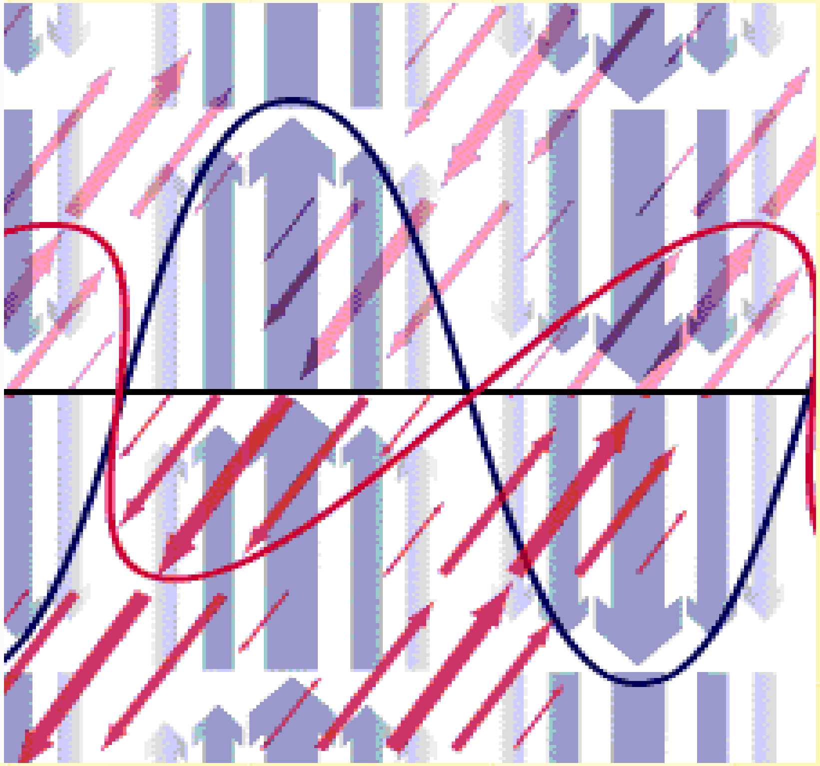
$$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx377(\Omega)$$

TEM波

电场与磁场相互垂直，两者又都垂直于波的传播方向。

正向行波

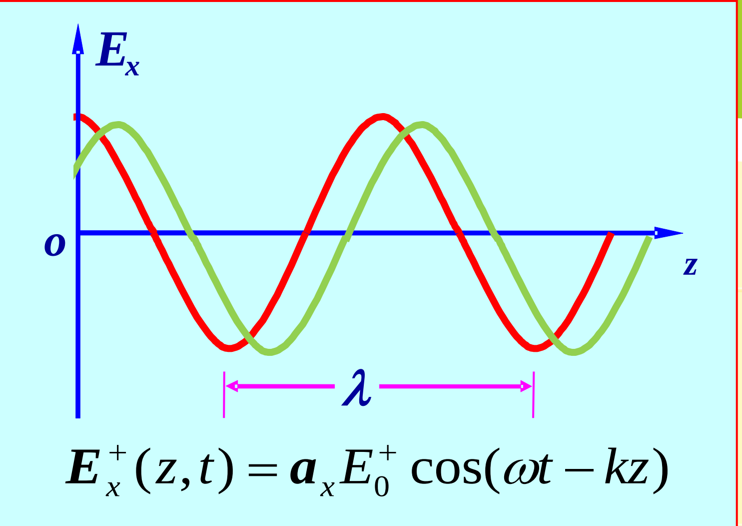




思考　试绘出反向行波中，***E***、***H***和传播方向之间的关系？

4.2.2 均匀平面波的传播特性

$$\boldsymbol{E}_x^+(z,t)=\boldsymbol{a}_x E_0^+\cos(\omega t-kz)$$



相速（phase velocity）

等相位面的传播速度

$$\omega t-kz=C \quad \Rightarrow \quad v_p=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

自由空间电磁波的相速： $v_p=c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\times10^8(m/s)$

波长（wavelength）

波形每隔 $\dfrac{2\pi}{k}$ 重复一次，以此定义空间周期

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}$$

频率（frequency）

单位时间内波形变化的周期数 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$

角频率：单位时间内相位的变化 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

波数（wave number）

空间距离 2π 内所包含的波长数目 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

也称作相位常数：波传播单位距离的相位变化

小结

在理想无损媒质中，均匀平面波的特性：

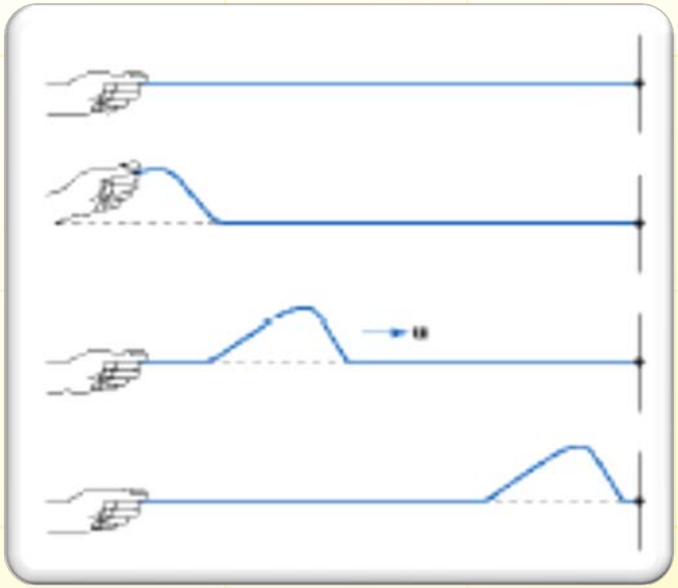
1. 电场和磁场相互垂直且都垂直于传播方向，是横电磁波（TEM波），***E***，***H***，***k***三者成右手螺旋关系；

2. 电场和磁场的振幅相差一个因子 $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 不随传播距离增加而变化；

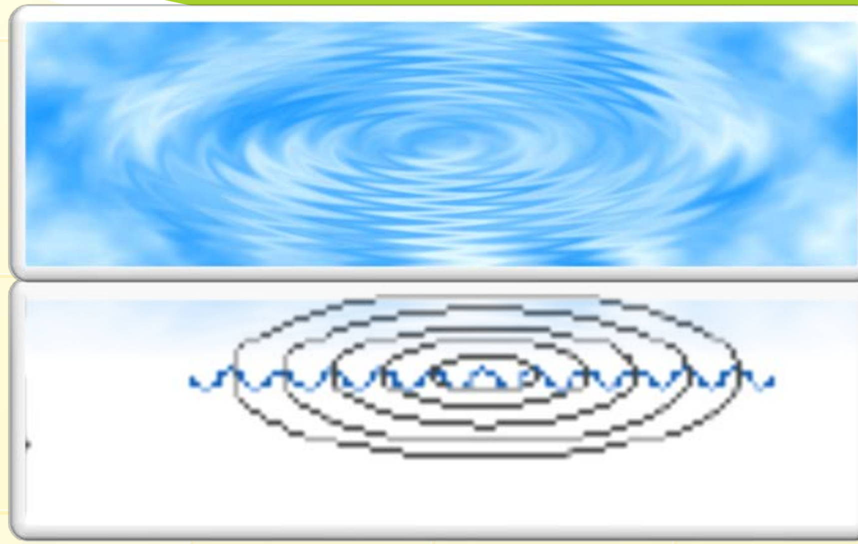
3. 电场和磁场的相位相同（媒质本征阻抗为实数）；

4. 相速度只与媒质参数ε、μ有关（与频率无关）；

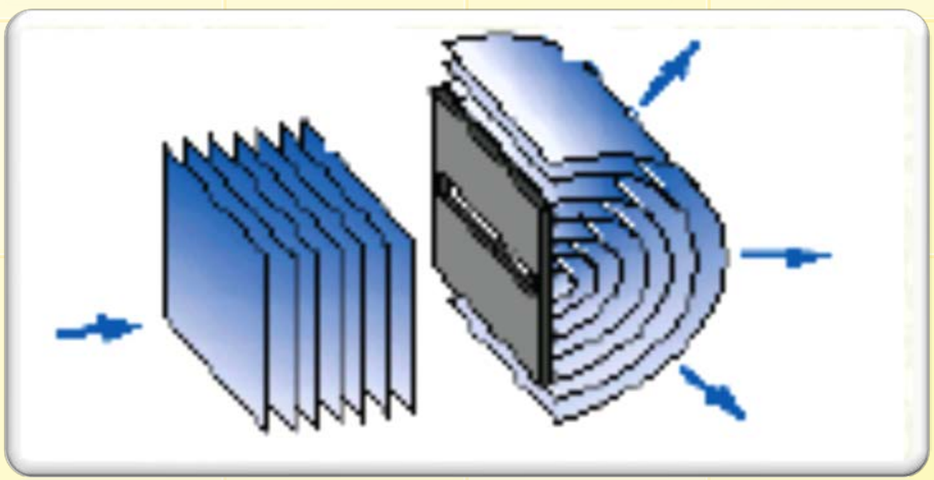
5. 电场能量密度等于磁场能量密度。

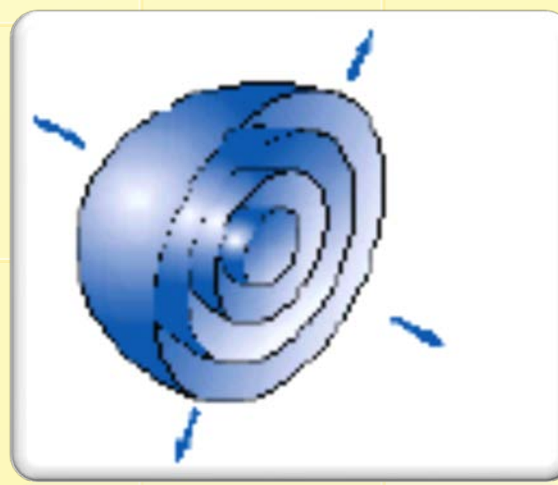


沿绳子传播的一维波



沿水面传播的二维波





波动举例

三维波：平面波、柱面波和球面波

例4.2 频率为100MHz的均匀电磁波，在一无耗媒质中沿 +z方向传播，电场$\vec{E}=\vec{e}_x E_x$。已知该媒质的相对介电常数$\varepsilon_r = 4$、相对磁导率$\mu_r = 1$，且当$t = 0$、z =1/8m时，电场幅值为10^{-4} V/m。 试求电场强度和磁场强度的瞬时表示式、相量表达式、t=10^{-8}s时，在哪些位置上电场强度达到最大值?

解：设电场强度的瞬时表示式为

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_x=\vec{e}_x 10^{-4}\cos(\omega t-kz+\phi)$$

式中 $$\omega=2\pi f=2\pi\times 10^{8}\quad \text{rad/s}$$

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}=\frac{2\pi\times 10^{8}}{3\times 10^{8}}\sqrt{4}=\frac{4}{3}\pi\ \ \text{rad/m}$$

对于余弦函数，当相角为零时达振幅值。考虑条件$t = 0$、z =1/8m时，电场达到幅值，得

$$\phi=kz=\frac{4\pi}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{6}$$

所以 $\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 10^{-4}\cos(2\pi\times10^8 t-\frac{4\pi}{3}z+\frac{\pi}{6})$

相量表达式为 $\vec{E}(z)=\vec{e}_x 10^{-4}e^{-j(\frac{4}{3}\pi z-\frac{\pi}{6})}$

磁场强度的瞬时表示式为 $\vec{\mathrm{H}}=\frac{1}{\eta}\vec{\mathrm{e}}_z\times\vec{\mathrm{E}}=\vec{\mathrm{e}}_y\frac{1}{\eta}E_x$

式中媒质的波阻抗 $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}=60\pi\quad\Omega$

因此 $\vec{H}(z,t)=\vec{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}\cos[2\pi\times10^8 t-\frac{4}{3}\pi(z-\frac{1}{8})]\quad\text{A/m}$

相量表达式为 $\vec{H}(z)=\vec{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}e^{-j(\frac{4}{3}\pi z-\frac{\pi}{6})}$

当t=10^{-8}s， $2\pi\times10^8\times10^{-8}-\frac{4\pi}{3}z+\frac{\pi}{6}=\pm2n\pi$时，E达最大值

得 $z=\frac{13}{8}\pm\frac{3}{2}n$，n=0，1，2，3, ...