第五章 导行电磁波及电磁波辐射

5.1　导行电磁波

5.1.1 导波方程

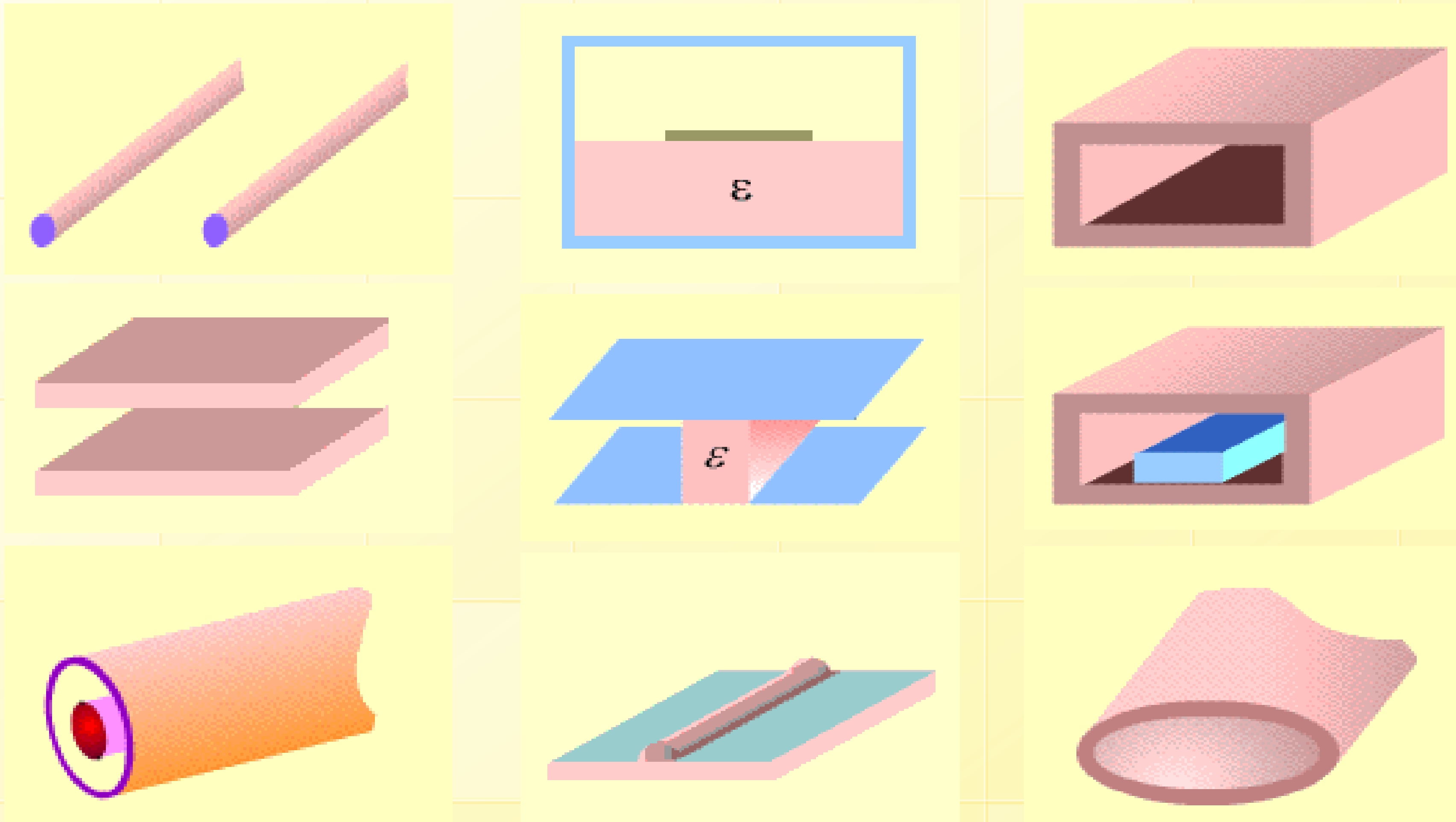
5.1.2 导波场的横向与纵向分量

5.1.3 导波波型（TE、TM、TEM）

5.1.4 矩形波导

5.1 导行电磁波

➢ 波导类型



低、中频区(双导体)　　中高频区(微带线)　　高频区(金属波导)

5.1.1 导波方程

对于均匀波导，导波的电磁场矢量为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},z)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})e^{-\gamma z} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},z)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})e^{-\gamma z}$$

由于所讨论的波导区域是无源区，导波满足亥姆霍兹方程

$$\begin{cases} \nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})+k^2\boldsymbol{E}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z})=0 \\ \nabla^2\boldsymbol{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z})+k^2\boldsymbol{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z})=0 \end{cases}$$

令 $\nabla_t^2=\dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{u}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}^2}$ ，可以得到

导波方程

$$\begin{cases} \nabla_t^2\boldsymbol{E}(\mathbf{u},\mathbf{v})+k_c^2\boldsymbol{E}(\mathbf{u},\mathbf{v})=0 \\ \nabla_t^2\boldsymbol{H}(\mathbf{u},\mathbf{v})+k_c^2\boldsymbol{H}(\mathbf{u},\mathbf{v})=0 \end{cases}$$

$$k_c^2=k^2+\gamma^2$$

纵向分量的求解

亥姆霍兹方程的标量式：

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \qquad \nabla^2 H_x + k^2 H_x = 0\\ \nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0 \qquad \nabla^2 H_y + k^2 H_y = 0\end{aligned}\right\} \text{横向场方程}$$

$$\boxed{\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0} \qquad \boxed{\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0} \qquad \text{纵向场方程}$$

导波方程的纵向场表达式：

$$\begin{cases} E_z(x,y,z) = E_z(x,y)e^{-\gamma z} \\ H_z(x,y,z) = H_z(x,y)e^{-\gamma z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla_t^2 E_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + k_c^2 E_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ \nabla_t^2 H_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + k_c^2 H_z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \end{cases}$$

再结合边界条件可求得导行电磁波的纵向分量E_z和H_z

5.1.2横向分量与纵向分量

根据麦克斯韦方程组，可将导波的横向分量用纵向分量表示

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

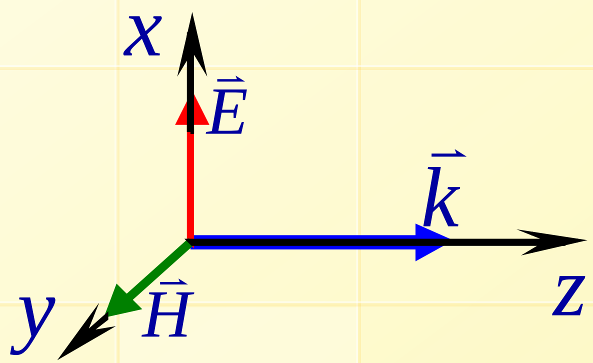
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{1}{k_c^2}\left(\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_y = -\dfrac{1}{k_c^2}\left(\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_x = -\dfrac{1}{k_c^2}\left(\gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\ H_y = -\dfrac{1}{k_c^2}\left(\gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) \end{cases}$$

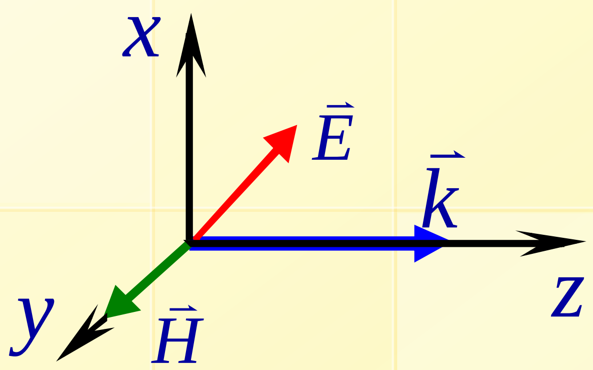
$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

5.1.3 导波波型

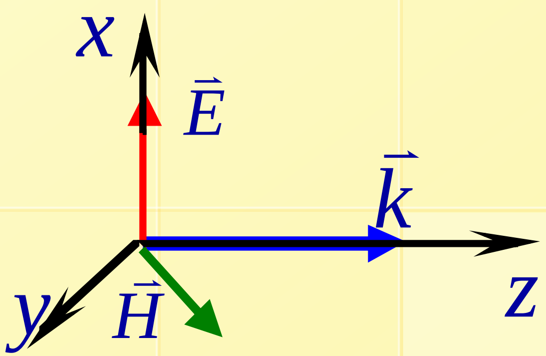
- 波型分类



TEM波



TM波



TE波

➢导波系统传输TEM波的条件

TEM波：E_z=0，H_z=0，由纵向分量与横向分量之间的关系可知，使E和H存在非零解的条件是：k_c=0，即

$$\gamma_{TEM}^2 + k^2 = 0 \to \gamma_{TEM} = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

导波方程

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \boldsymbol{E}(x,y) + k_c^2 \boldsymbol{E}(x,y) = 0 \\ \nabla_t^2 \boldsymbol{H}(x,y) + k_c^2 \boldsymbol{H}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla_t^2 \boldsymbol{E}_t(x,y) = 0 \\ \nabla_t^2 \boldsymbol{H}_t(x,y) = 0 \end{cases}$$

（同二维静态场方程）

能够建立二维静态场的导波系统能够传输TEM波。

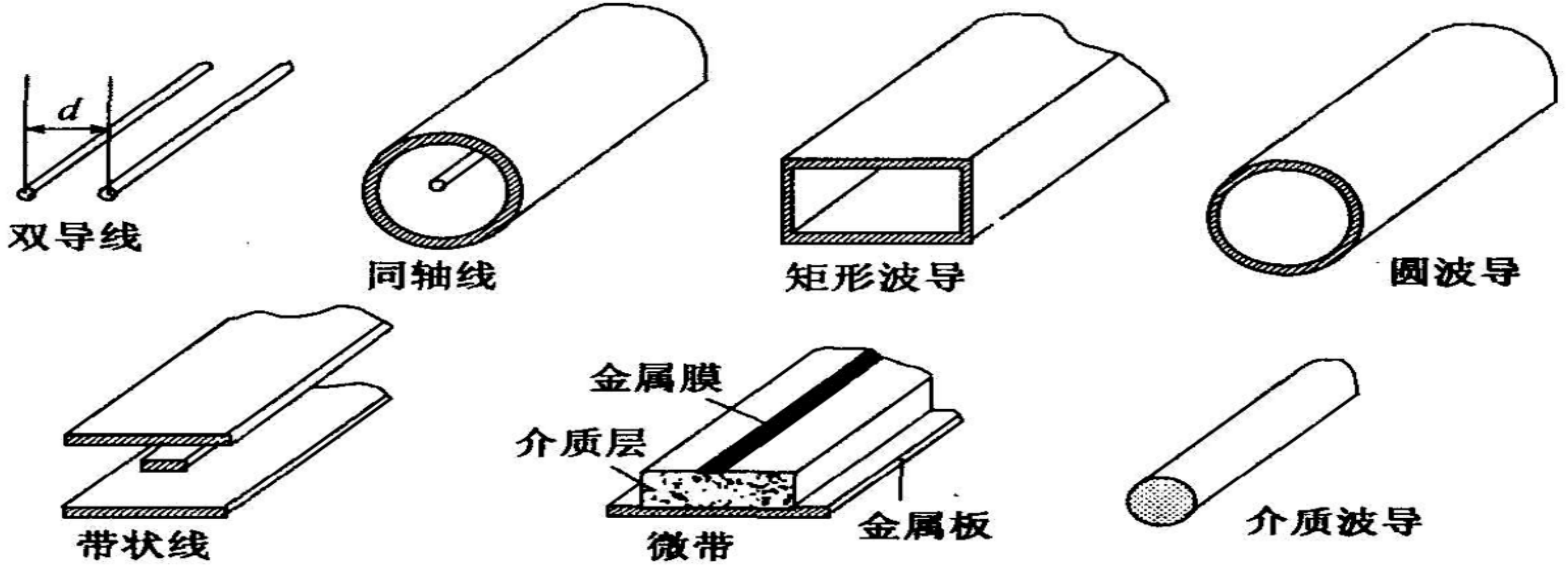


图 5.1 几种常用导波系统

导波结构	TEM波
平行双导线	√
同轴线	√
带状线、微带线	√
矩形/圆波导	×

单导体长直波导结构无法传输TEM波的原因？

该类结构不存在非零二维静态场【或者利用麦克斯韦方程组进行解释】

导波方程：

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}(x,y) + k_c^2 \mathbf{E}(x,y) = 0$$

5.1.4 传输特性

- 截止频率和传输条件

$$\mathrm{E}(x,y,z) = \mathrm{E}(x,y)e^{-\gamma z} \qquad \mathrm{H}(x,y,z) = \mathrm{H}(x,y)e^{-\gamma z}$$

其中 $\gamma^2 + k^2 = k_c^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\boldsymbol{k_c^2} - \boldsymbol{k^2}}$

$\gamma^2 < 0 \qquad \gamma = j\beta$

$$\mathrm{E}(x,y,z) = \mathrm{E}(x,y)e^{-j\beta z}$$

$$\mathrm{H}(x,y,z) = \mathrm{H}(x,y)e^{-j\beta z}$$

传播状态

$\gamma^2 > 0 \qquad \gamma = \alpha$

$$\mathrm{E}(x,y,z) = \mathrm{E}(x,y)e^{-\alpha z}$$

$$H_x(x,y,z) = H_x(x,y)e^{-\gamma z}$$

截止状态

$\gamma^2 = 0 \qquad k_c = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

临界状态

截止波数 k_c　截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2\pi}{k_c}$　截止频率 $f_c = \dfrac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = k\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}$$

1）TE、TM波均有截止现象，具有高通性质（$f > f_c$）

2）TEM波没有截止现象，任何频率都可沿波导传播

- 波导波长

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}}$$

其中 $\beta = k\sqrt{1 - \left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$

$(f > f_c)$

- 相速、群速和色散

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$v_p v_g = v^2$$

在导波系统中，**TE**、**TM**波存在色散，**TEM**波不存在色散。

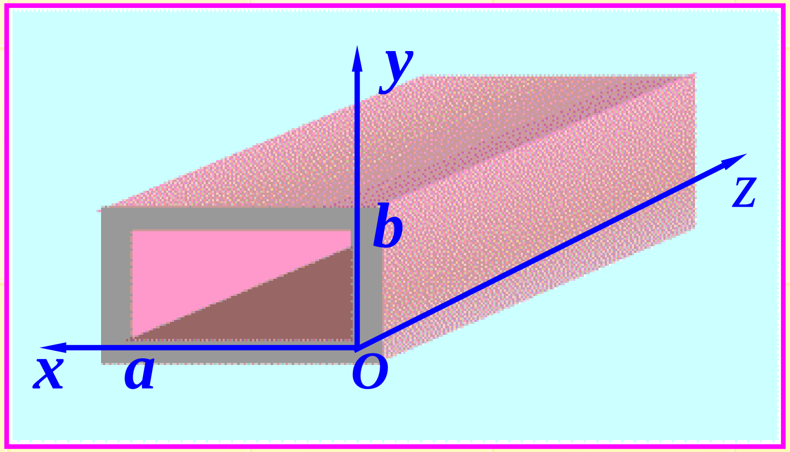
5.1.5 矩形波导

【矩形波导 可以传播TM 波和TE波，不能传播TEM波】

- **1. TM 波（ $H_z = 0$ ）**

纵向场只有E_z：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)E_z(x,y) = 0$$



边界条件：

$$E_z|_{x=0} = 0 \quad E_z|_{x=a} = 0$$
$$E_z|_{y=0} = 0 \quad E_z|_{y=b} = 0$$

分离变量法求解偏微分方程： $E_z(x,y) = f(x)g(y)$

偏微分方程化为微分方程求解:

$$\begin{cases} f''(x)+k_x^2 f(x)=0 \\ f(0)=0, \quad f(a)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g''(y)+k_y^2 g(y)=0 \\ g(0)=0, \quad g(b)=0 \end{cases} \qquad k_x^2+k_y^2=k_c^2$$

求解微分方程得TM波的通解:

$$\begin{cases} k_x=\dfrac{m\pi}{a} \\ f(x)=A\sin(\dfrac{m\pi}{a}x) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_y=\dfrac{n\pi}{b} \\ g(y)=C\sin(\dfrac{n\pi}{b}y) \end{cases} \qquad m,\ n=1,\ 2,\ 3,\cdots$$

故 $$E_z(x,y)=f(x)g(y)=E_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

【再根据纵向分量求出E、H的横向分量】

所以TM波的纵向电场分布为：

$$E_z(x,y,z)=E_z(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}=E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$m，\mathrm{n}=1，2，3,\cdots$$

其中， $\gamma^2=k_{\mathrm{cmn}}^2-k^2$

截止波数只与波导的结构尺寸有关。

$$k_{cmn}^2=k_{xm}^2+k_{yn}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

即 $\gamma=j\beta=j\sqrt{k^2-k_{\mathrm{cmn}}^2}=j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

当$\gamma=0$**时** $\omega_c=\frac{k_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

截止频率只与波导的结构尺寸有关。

即$\omega<\omega_c$**的信号不能在波导中传输通过**

TM波小结

- **TMmn模式：** $E_z^{TM}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{zmn}^{TM}(x,y)\,e^{-\gamma z}$

$$E_{zmn}^{TM}(x,y)=E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

- **TM波不存在TM_{0n}、 TM_{m0}和TM_{00}**

- **只有满足** $\omega^2\mu\varepsilon>\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ **的模式才能在波导中传播**

- **波导是一种高通传输系统,即：** $k>k_{cmn}^2$

工作频率越高，可以传播的高次模式越多,最低模式为TM_{11}

TM波小结（续）

- **TMmn波的截止频率为**

$$f_c=\frac{\omega_c}{2\pi}\qquad \omega_c=\frac{k_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$

- **相位常数** $\beta=\sqrt{k^2-k_{\mathrm{cmn}}^2}=k\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}$

- **波导波长** $\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}>\lambda$

- **相速** $v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}>v$

- **波阻抗**

$$Z_{TM}=\frac{E_x}{H_y}=\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}=\eta\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}<\eta$$

- **截止波长**

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_c}=\frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}}$$

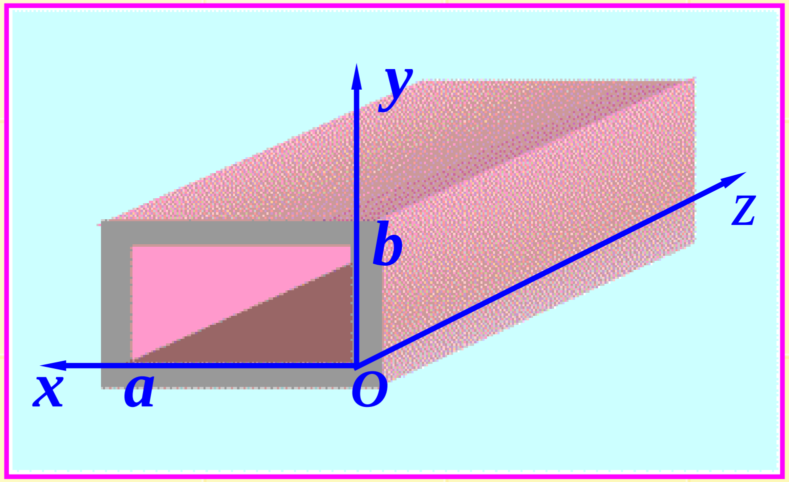
▪ 2. TE波（$E_z = 0$）

纵向场只有H_z，其边值问题为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)H_z(x,y)=0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial H_z}{\partial x}\Big|_{x=a}=0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\qquad \frac{\partial H_z}{\partial y}\Big|_{y=b}=0$$



其通解为：

$$\boldsymbol{H_z(x,y)=H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

$m, n = 0，1，2，3,\cdots$

$$k_{cmn}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

所以TE波的纵向磁场分布为:

$$\boldsymbol{H_z(x,y,z) = H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}}$$

$m, \boldsymbol{n} = 0，1，2，3, \cdots$

其它场分量通过横纵分量关系给出:

$$H_x(x,y,z) = \frac{\gamma}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{\gamma}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}$$

$$E_z(x,y,z) = 0$$

TE波小结

- **通解为：** $H_z^{TE}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}H_{zmn}^{TE}(x,y)\,e^{-\gamma z}$ ，$m+n\neq 0$

其中， $$H_{zmn}^{TE}(x,y)=H_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)$$

称为TE波的TE_{mn}波，或TE_{mn}模式

- **TE波不存在TE_{00}（？）**
- **只有满足** $\omega^2\mu\varepsilon>(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2$ **的模式才能在波导中传播**
- **波导是一种高通传输系统,即：**

工作频率越高，可以传播的高次模式越多,最低模式为TE_{10}

TE波小结（续）

- **TMmn波的截止频率为**

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$ **其中，** $$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}$$

- **相位常数**

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{cmn}}^2} = k\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}$$

- **波导波长**

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} > \lambda$$

- **截止波长**

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}}$$

- **相速**

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} > v$$

- **波阻抗**

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} > \eta$$

矩形波导中的模式

模式： 能够在传输系统中独立存在的电磁场结构

TE_{mn}模（模式，波型）：每一组m、n对应的一种电磁场结构

矩形波导中除存在TE_{mn}模外，还能存在TE_{m0}和TE_{0n}，

其中TE_{10}模是最低次模【主模】，其余模式称为高次模。

可能存在两类场：TE_{mn}和TM_{mn} 模(波型)

$x: 0 \to a$，场沿x方向具有m个半波长的驻波

$y: 0 \to b$，场沿y方向具有n个半波长的驻波

m 和 n 称为波型指数(模式标号)有如下几种情况：

(1) $m=0$，$n=0$。在波导横截面内场没有变化，是均匀场

在交变情况下($\omega \neq 0$)，表示波导中电磁场的振幅均为零，即不存在 $m=0$，$n=0$模式。

(2) $m \neq \mathbf{0}$，$n = 0$ ；或 $m = \mathbf{0}$，$n \neq 0$

对TE波，可以存在TE_{0n}或TE_{m0}波，矩形波导最常用的模式TE_{10};

对TM 波来说，不存在$n=0$或$m=0$的（TM_{m0}或 TM_{0n}）模式

3. 矩形波导中的TM 波和TE波的特点

- **不同的模式有不同的截止波数k_{cmn}**
- **对相同的m 和n，TM_{mn} 模和TE_{mn} 模的截止波数k_{cmn} 相同，这种情况称为模式的简并**

$$k_{cmn}=\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}$$ ←只要相同，则传输特性完全相同

简并模式：空间场分布不同而传输特性相同的模式

{简并:具有相同截止波长的现象} TEmn模和 TMmn模都是简并的

当$b=a$时，*TEmn*， TEnm， TMmn和TMnm简并，即四重简并。

- 当工作频率 f 大于截止频率f_{cmn} 时，矩形波导中可同时传播 TEmn 模式和TMmn 模式的电磁波

- 在矩形波导中的最低次模为TE_{10}模，也称为矩形波导的主模，其截止频率最低、截止波长最长，是最重要的模式

- TE波和TM波的波阻抗分别为：

$$Z_{TE}=\frac{E_x}{H_y}=\frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$=\frac{\eta}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}>\eta$$

$$Z_{TM}=\frac{E_x}{H_y}=\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}$$

$$=\eta\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}<\eta$$