

第2章 麦克斯韦方程组与时变电磁场

- **2.1 法拉第电磁感应定律**
- **2.2 麦克斯韦方程组**
- **2.3 电磁场边界条件**
- **2.4 坡印亭定理**
- **2.5 时变电磁场位函数**
- **2.6 电路与电磁场方程的联系（略）**
- **2.7 准静态场**

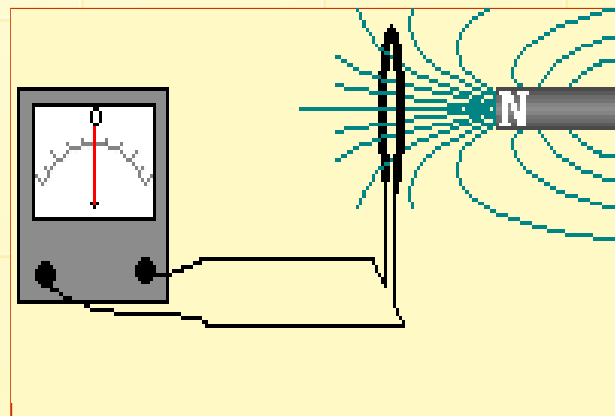
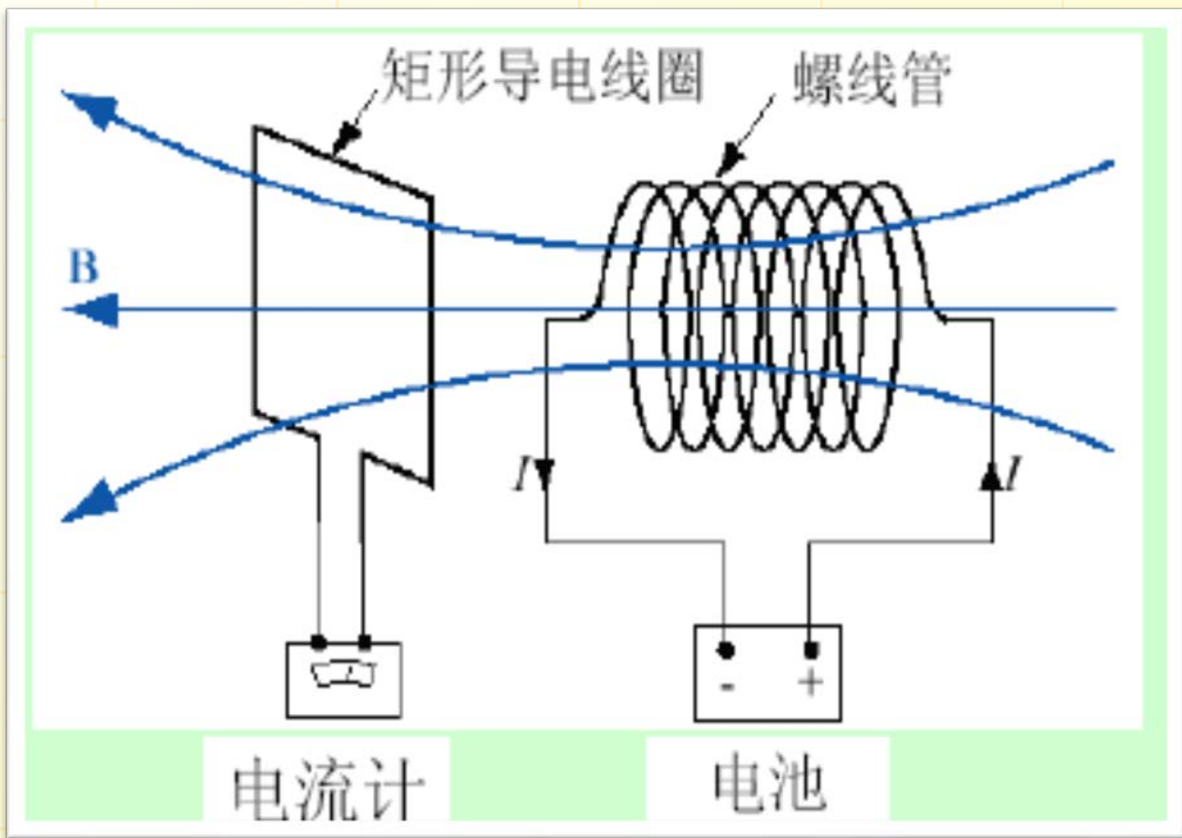
2.1 法拉第电磁感应定律

(Faraday's Law of Electromagnetic Induction)

1) 静电与静磁模型的基本关系

基本关系	静电模型	静磁模型
支配方程	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
本构关系 (线性、各向同性)	$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}$

法拉第电磁感应定律的原理实验装置



2) 电磁感应定律表达式:

$$\varepsilon = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

法拉第电磁感应定律： 感应电动势等于磁通变化率的负值

楞次定律： 判断感应电动势的实际方向

回路中磁通量变化的3种可能性：

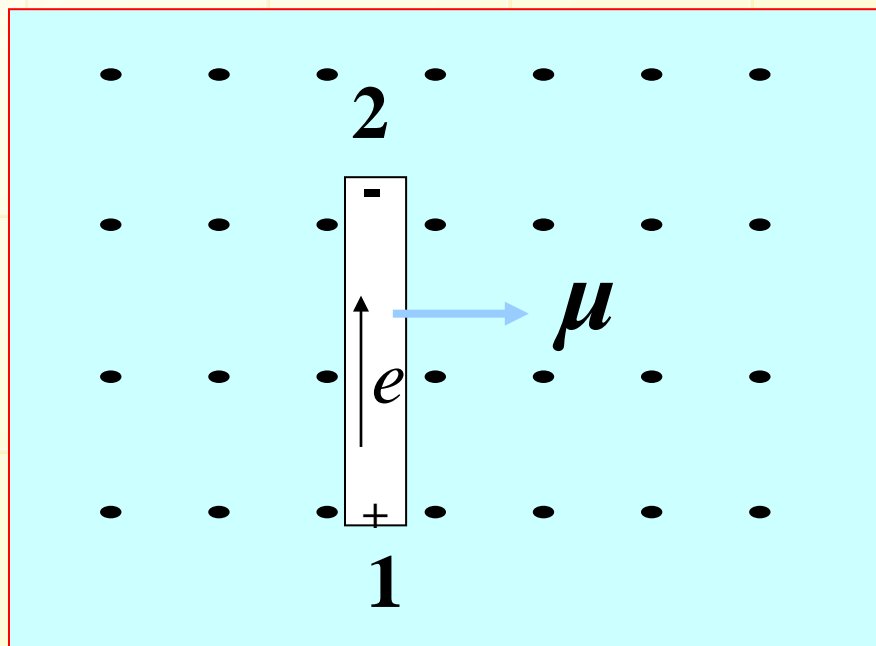
a) 磁场恒定不变，回路运动； $\varepsilon = -Blv$

b) 回路不变，磁场变化； $\varepsilon = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

c) 导线切割磁力线运动，磁场也变化

$$\varepsilon = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

a) 静磁场中的运动导体



作用在单位电荷上的磁场力

$$\mathbf{F}_m/q = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

可看成是：
作用于沿导体的**感应电场**
并产生感应电压

$$\xi = \int_1^2 (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

回路中所产生的感应电动势：

$$\xi = \oint_C (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

(动生电动势)

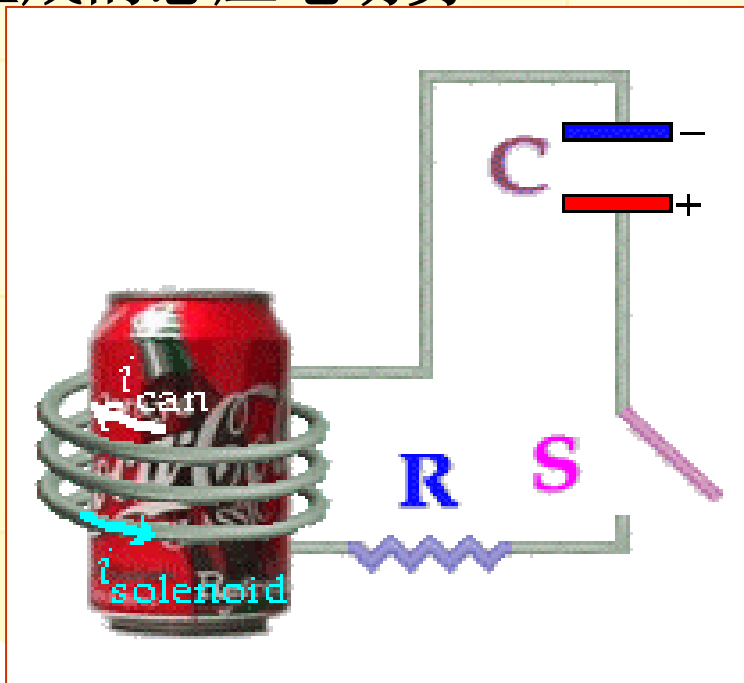
b) 时变磁场中的静止回路

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

ε : 以 C 为围线的回路中生成的感应电动势

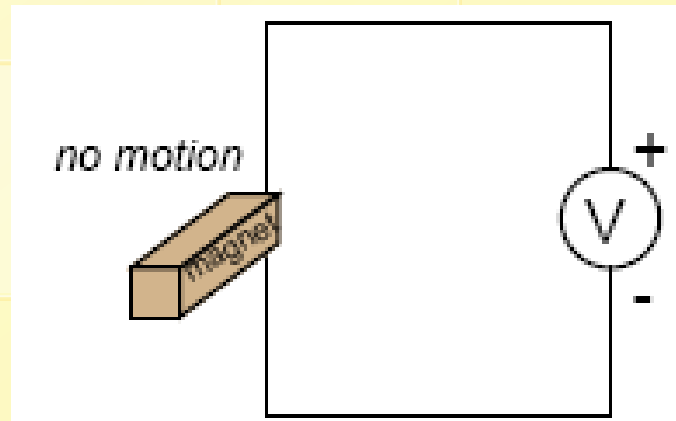
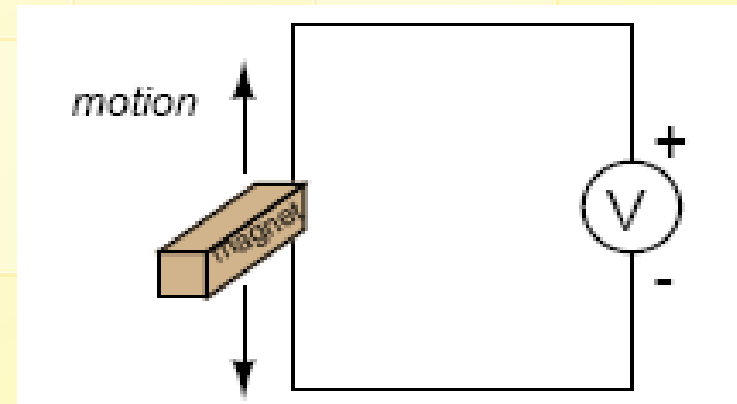
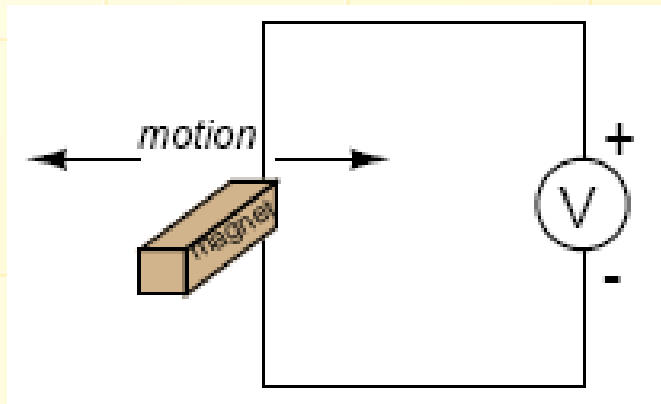
Φ : 和回路交链的磁通

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

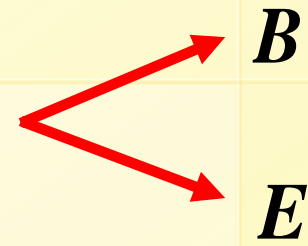


Question:

Which magnet motion past the wire will produce the greatest voltmeter indication: perpendicular, parallel, or no motion at all?



c) 时变磁场中的运动回路

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \text{时变磁场}$$


$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}) \quad \longrightarrow \quad \text{感应电场 } \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

$$\xi = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\boxed{\xi = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

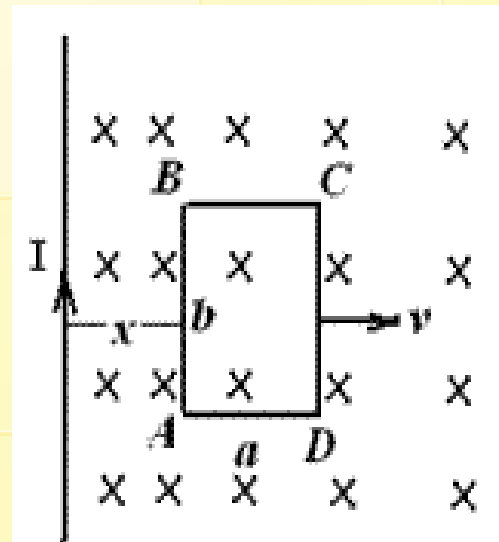
例题：一长直导线载有电流 I ，旁边有一与它共面的矩形线圈，线圈的长边与直导线平行，矩形线圈的边长分别为 a 、 b ，线圈共有 N 匝，若线圈以速度 v 匀速离开直导线，求当矩形线圈与长直导线近的一边相距为 x 时，线圈中的感应电动势的大小和方向。

方法一：用磁通量变化率求

$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

$$\varepsilon = - \frac{d(N\Phi)}{dt} = - \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{x+a}{x} \right) = \frac{\mu_0 N I b a v}{2\pi x(x+a)}$$

根据楞次定律，判断电动势的方向：A-B-C-D-A

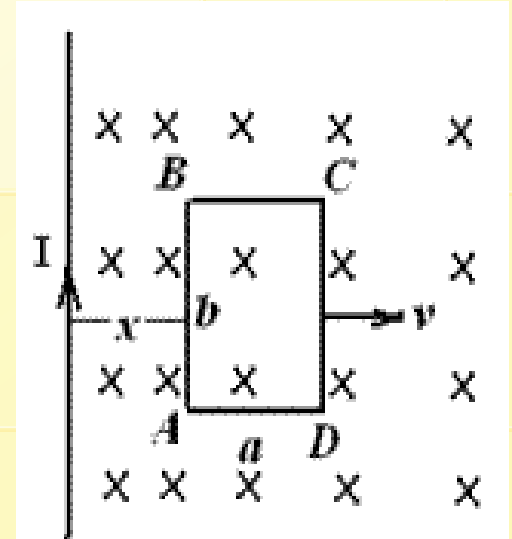


例题：一长直导线载有电流 I ，旁边有一与它共面的矩形线圈，线圈的长边与直导线平行，矩形线圈的边长分别为 a 、 b ，线圈共有 N 匝，若线圈以速度 v 匀速离开直导线，求当矩形线圈与长直导线近的一边相距为 x 时，线圈中的感应电动势的大小和方向。

方法二：用动生电动势求：

$$\varepsilon_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vB(x) \times b = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} bv$$

(其中 $B(x)$ 是 x 位置处的 B 值)



$$\varepsilon_{CD} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -vB(x+a) \times b = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} bv$$

$$\varepsilon = N(\varepsilon_{AB} + \varepsilon_{CD}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) bv = \frac{\mu_0 NI b a v}{2\pi x(x+a)}$$

方向：A-B-C-D-A

例题：前题中，设 $I(t) = I_0 \cos \omega t$ ，求线圈中的电动势。

解：用磁通量的变化率求解：

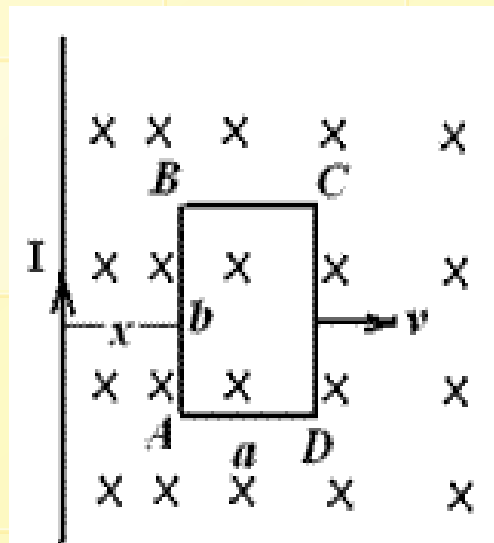
$$d\Phi[x(t), t] = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$$

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi[x(t), t]}{dt} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right),$$

$$\text{其中 } \Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 b I_0 \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

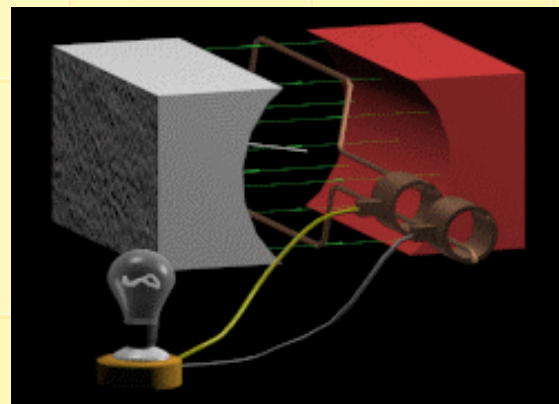
所以，

$$\varepsilon = \frac{N\mu_0 b I_0 a v \sin \omega t}{2\pi x(x+a)} + \frac{N\mu_0 b I_0 \omega \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} = \varepsilon_{\text{动}} + \varepsilon_{\text{感}}$$



【P13例2.1】一个长为 h ，宽度为 w 的固定线圈，位于一随时间变化的均匀磁场中，磁通量密度的表示式为 $\vec{B} = \hat{e}_z B_0 \sin \omega t$ ，设线圈面的法线方向与 z 轴成 θ 角，求线圈中的感生电动势 ε_i

发电机的工作原理



2.2 麦克斯韦方程组(Maxwell's Equations)

2.2.1 位移电流

问题的提出

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad ???$$

时变场中，矢量恒等式和电流连续性方程矛盾！

解决方法

引入位移电流密度： $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A/m}^2)$

全电流定律

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

除传导电流外，时变电场也激发磁场

全电流

J_c 带电粒子在导电媒质中的运动 $J_c = \sigma E$

J_μ 带电粒子在真空或稀薄气体中的运动 $J_\mu = \rho \mu$

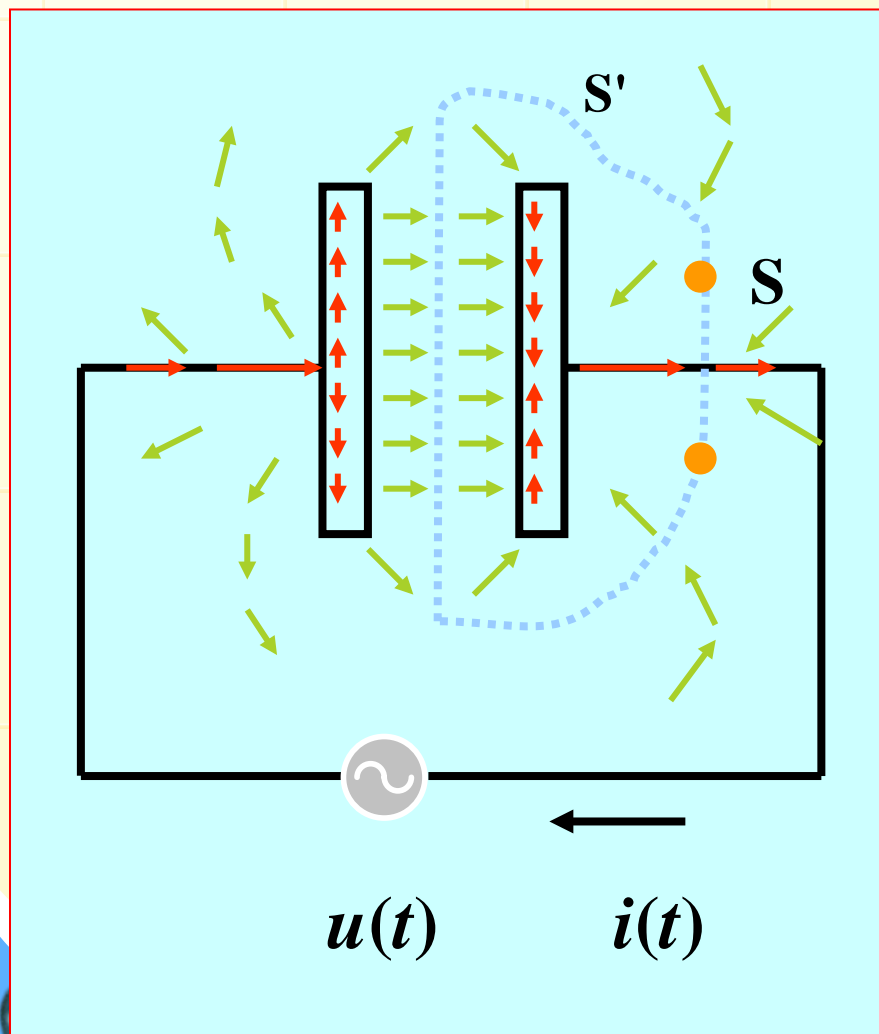
J_d 不代表电荷的移动，
由变化的电场和介质极化引起 $J_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$



思考

试证明通过任意封闭曲面的传导电流密度和位移电流密度的总通量为零

[例2.3]: 已知平板电容器的面积为 S , 相距 d , 介质的介电常数为 ε , 板间电压为 $u(t)$ 。求位移电流 i_D , 传导电流 i_C 与 i_D 的关系?



解: 忽略极板的边缘效应

$$E = \frac{u}{d} \quad D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon u(t)}{d}$$

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d} \left(\frac{du}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned} i_D &= \int_S J_D ds = \frac{\varepsilon S}{d} \left(\frac{du}{dt} \right) \\ &= C \frac{du}{dt} = i_C \end{aligned}$$

2.2.2 麦克斯韦方程组

微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

电磁感应定律

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

全电流定律

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

高斯定理

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

磁通连续性原理

积分形式

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

各方程的独立性

如果把电流连续性方程当作基本方程，只有两个旋度方程独立

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

辅助方程（本构关系）

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

简单媒质：线性、各向同性、均匀

➤ 电磁力（洛伦兹力）

$\vec{B}(r, t)$

电场磁场相互耦合

$\vec{E}(r, t)$

库仑力

可能是非线性项

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

通常是多粒子体系

可能是高速运动

■ 洛伦兹力公式，一般情况下难于严格求解

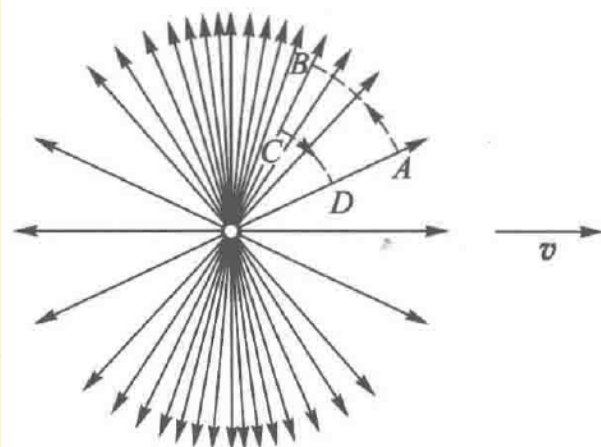
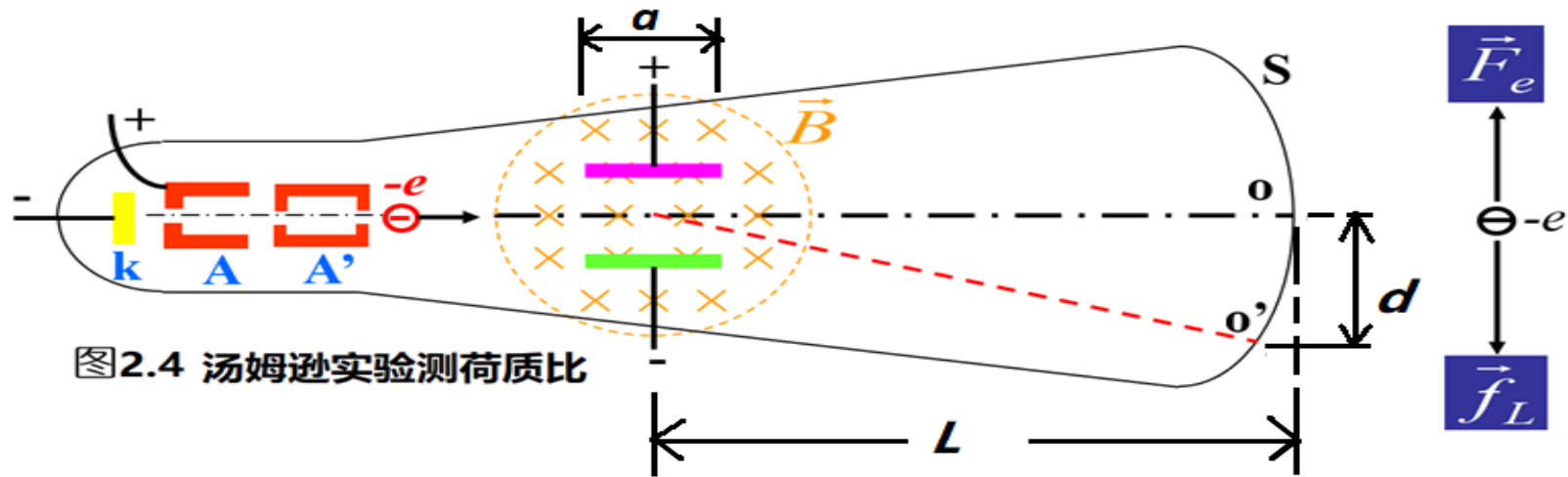


图 4-70 运动电荷的电场线分布

➤ W.Thomson 测荷质比的方法



当 E 和 B 的值适当时, 可使电子束不偏转, 即

$$eE = evB \quad , \quad \text{或} \quad v = \frac{E}{B} \quad (1)$$

切断磁场, 电子在电场作用下偏转,

$$\frac{d}{L} = \frac{eEa}{mv^2} \quad (2)$$

由式(1)、(2)得比荷 $\frac{e}{m} = \frac{Ed}{LaB^2} = 1.7 \times 10^{11} \text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$\frac{e}{m_0} = \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

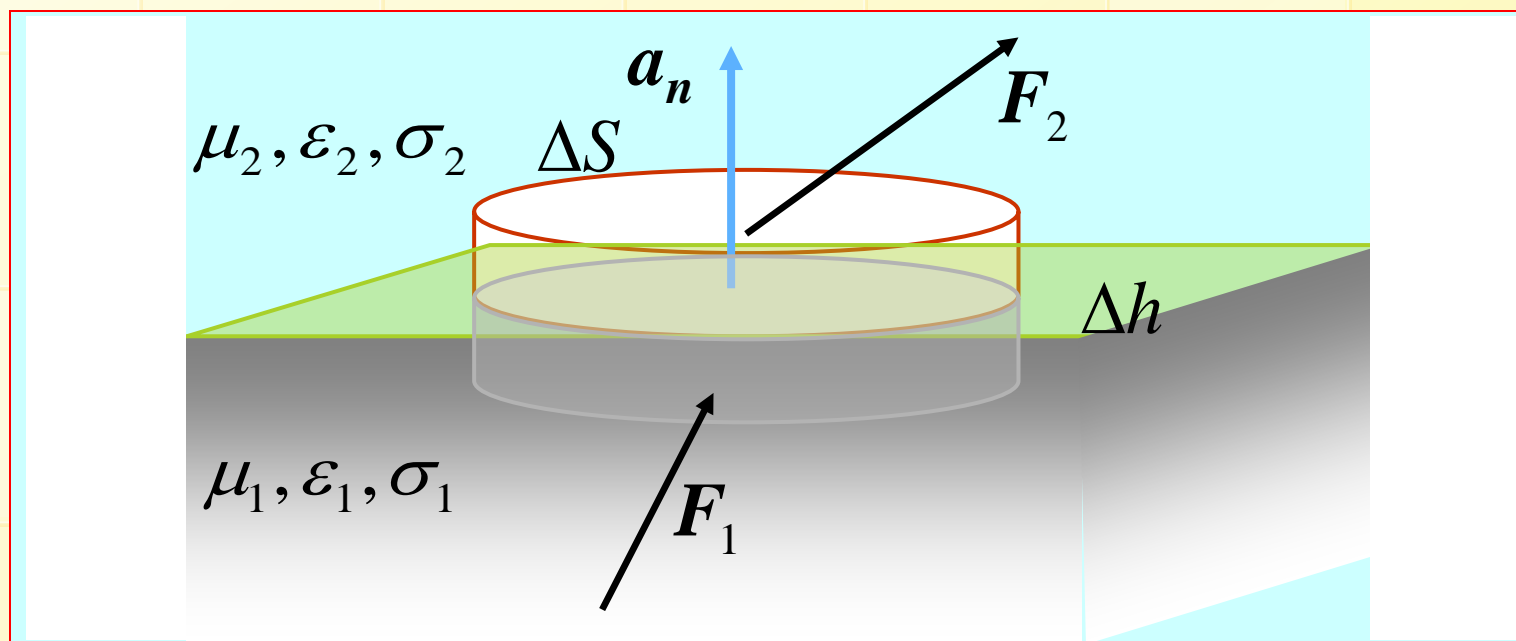
2.3 电磁场边界条件

2.3.1 电磁场边界条件的一般表达式

► 法向边界条件

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

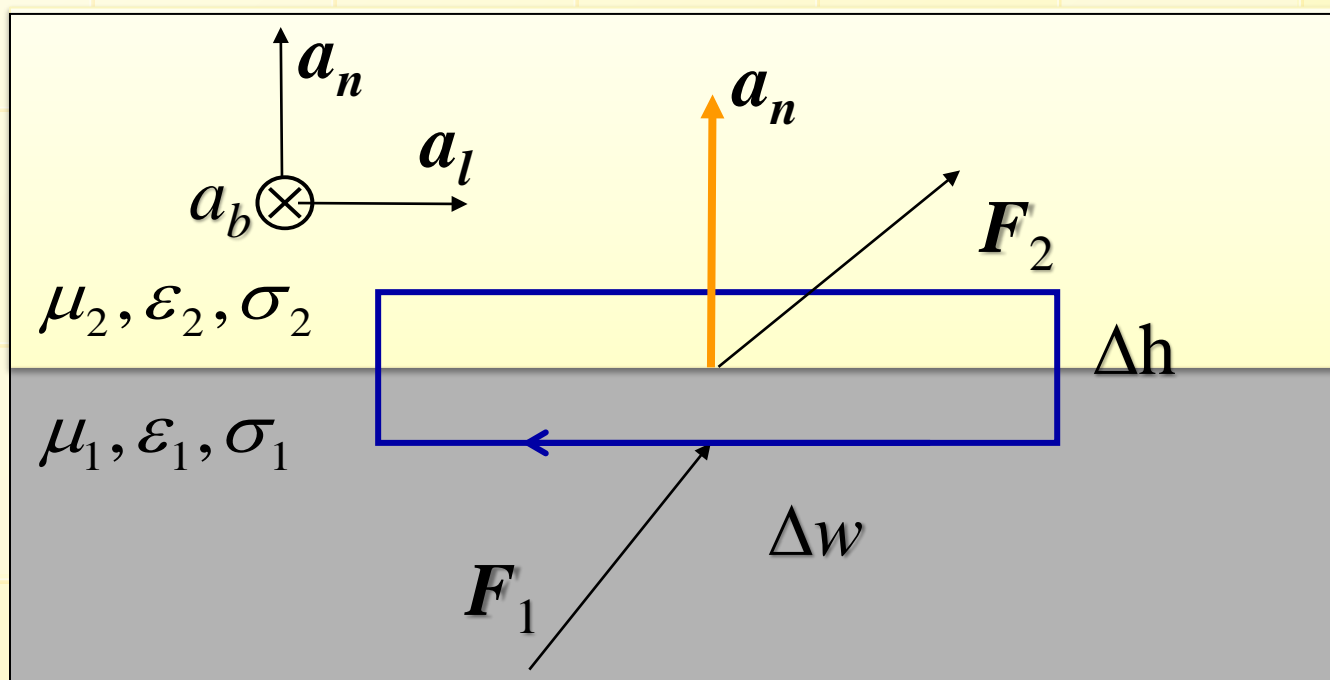
$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

➤ 切向边界条件

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$



$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s$$

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s$$

2.3.2 边界条件的独立性

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s$$

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

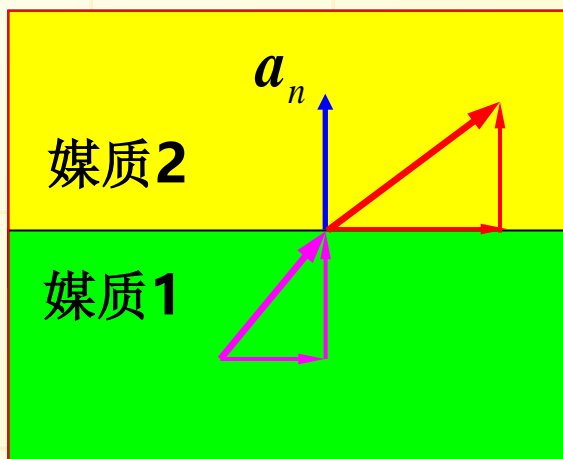
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho dv$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

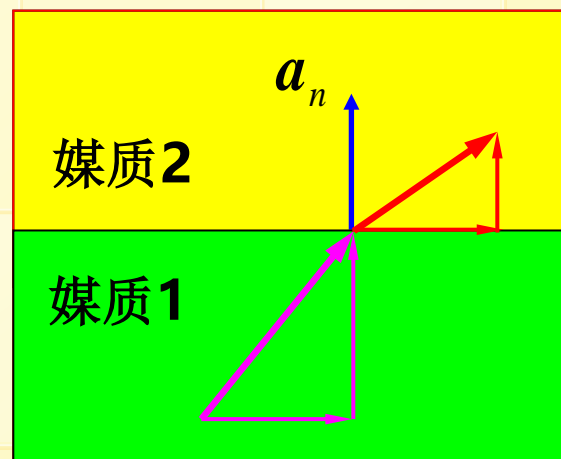
2.3.3 两种常见情况

► 两种无损耗(理想)媒质



D 、 B 的法向分量连续

在两种理想介质分界面上，
没有面电荷和面电流，
即 $J_S = 0$ 、 $\rho_S = 0$



E 、 H 的切向分量连续

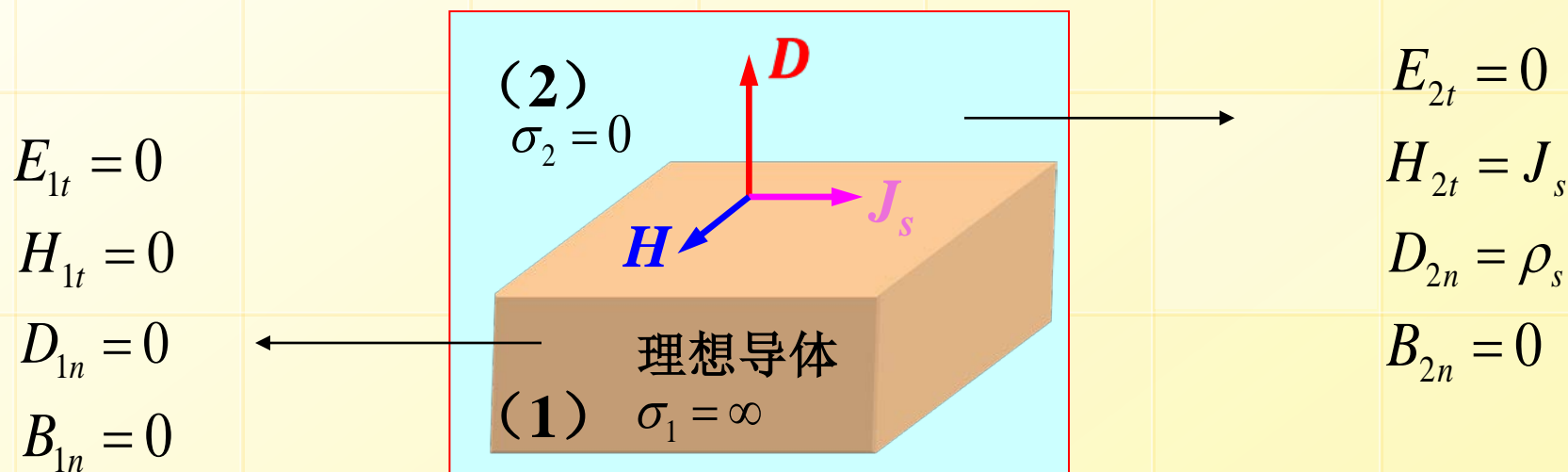
$$a_n \times (E_2 - E_1) = 0$$

$$a_n \times (H_2 - H_1) = 0$$

$$a_n \cdot (D_2 - D_1) = 0$$

$$a_n \cdot (B_2 - B_1) = 0$$

理想介质和理想导体



时变电磁场不可能进入理想导体内部

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s$$

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$



$$\mathbf{a}_n \times \mathbf{E}_2 = 0$$

$$\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s$$

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{B}_2 = 0$$

【例 2.4】 如图 2.7 所示,在横截面为 $a \times b$ 的矩形波导内传输的主模(TE_{10}) 的电场和磁场为 $E = a_y E_y$ 及 $H = a_x H_x + a_z H_z$ 。其中:

$$E_y = -j\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = j\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

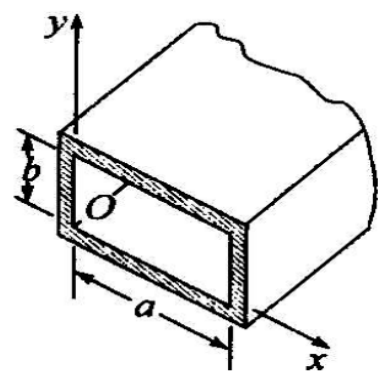


图 2.7 矩形波导截面

上式中 H_0 、 ω 、 μ 和 β 都是常数。设波导内壁为理想导体,求:

(1) 波导的 4 个内壁上的面电荷密度;(2) 面电流密度。

解:

$$\rho_s(x=0) = a_x \cdot \epsilon_0 E = 0$$

$$\rho_s(x=a) = -a_x \cdot \epsilon_0 E = 0$$

$$\rho_s(y=0) = a_y \cdot \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_y = -j\omega\mu\epsilon_0 \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\rho_s(y=b) = -a_y \cdot \epsilon_0 E = -\epsilon_0 E_y = j\omega\mu\epsilon_0 \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

【例 2.4】 如图 2.7 所示,在横截面为 $a \times b$ 的矩形波导内传输的主模(TE_{10}) 的电场和磁场为 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_y$ 及 $\mathbf{H} = \mathbf{a}_x H_x + \mathbf{a}_z H_z$ 。其中:

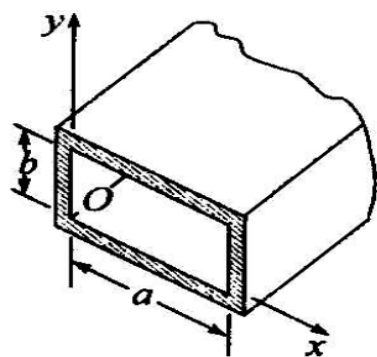


图 2.7 矩形波导截面

$$E_y = -j\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = j\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

上式中 H_0 、 ω 、 μ 和 β 都是常数。设波导内壁为理想导体,求:

(1) 波导的 4 个内壁上的面电荷密度;(2) 面电流密度。

$$\text{解: } \mathbf{J}_s(x=0) = \mathbf{a}_x \times (\mathbf{a}_x H_x + \mathbf{a}_z H_z) \big|_{x=0} = -\mathbf{a}_y H_0$$

$$\mathbf{J}_s(x=a) = -\mathbf{a}_x \times (\mathbf{a}_x H_x + \mathbf{a}_z H_z) \big|_{x=a} = -\mathbf{a}_y H_0$$

$$\mathbf{J}_s(y=0) = \mathbf{a}_y \times (\mathbf{a}_x H_x + \mathbf{a}_z H_z) \big|_{y=0} = \mathbf{a}_x H_0 \cos \frac{\pi x}{a} - \mathbf{a}_z j\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\mathbf{J}_s(y=b) = -\mathbf{a}_y \times (\mathbf{a}_x H_x + \mathbf{a}_z H_z) \big|_{y=b} = -\mathbf{a}_x H_0 \cos \frac{\pi x}{a} + \mathbf{a}_z j\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

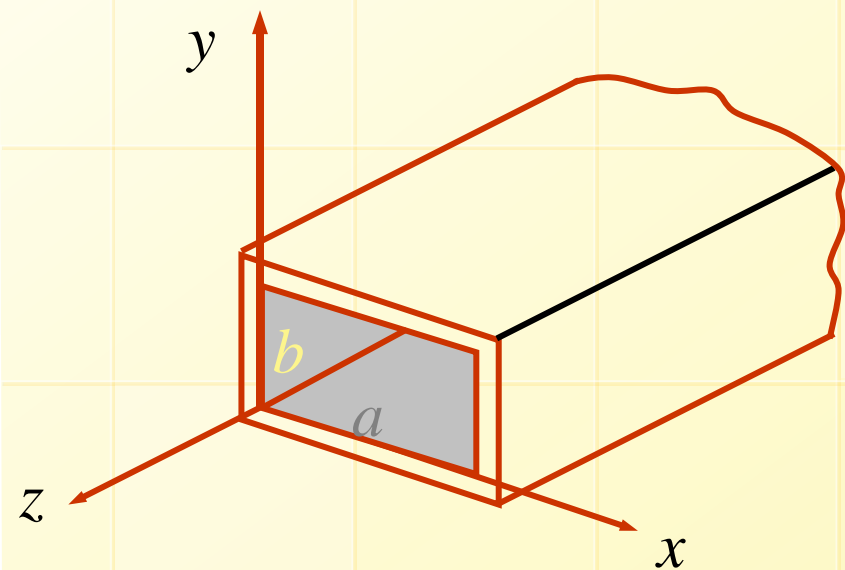
练习

已知内截面为矩形的金属波导中的时变电磁场的各分量为

$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$H_x = H_{x0} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$H_z = H_{z0} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - k_z z)$$



其坐标如图示。试求波导中的位移电流分布和波导内壁上的电荷及电流分布。波导内部为真空。

2.4 电磁场能量关系——坡印亭定理

电磁场具有能量，并且能够“流动”。

推导

由矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

将旋度方程代入

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

简单媒质

ϵ 、 μ 、 σ 不随时间变化

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \sigma E^2$$

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_V \sigma E^2 dv$$

w_e

w_m

欧姆功率密度

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

定义一个新的矢量S:

坡印亭矢量 $S = E \times H$
(Poynting Vector)

$$-\oint_S S \cdot ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_v (w_e + w_m) dv + \int_v \sigma E^2 dv$$

$$-\oint_S S \cdot ds = \frac{d}{dt} (W_e + W_m) + P_\Omega$$

某时刻通过某闭合面
流入其体积的功率

区域中电场和磁
场储能的增加率

欧姆功率损耗，
变为焦耳热的电
磁能量



思考

坡印亭定理的微分形式？一般媒质的坡印亭定理？

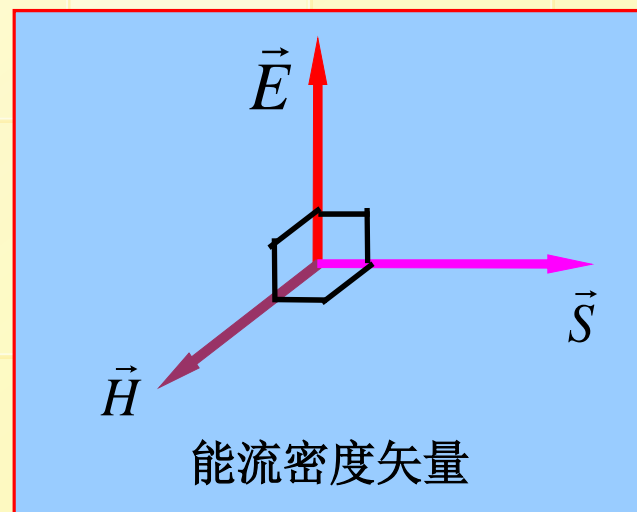
坡印亭矢量

描述时变电磁场中电磁能量传输的一个重要物理量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

方向——该点功率流的方向

大小——通过垂直于该点功率流方向的单位面积的电磁功率



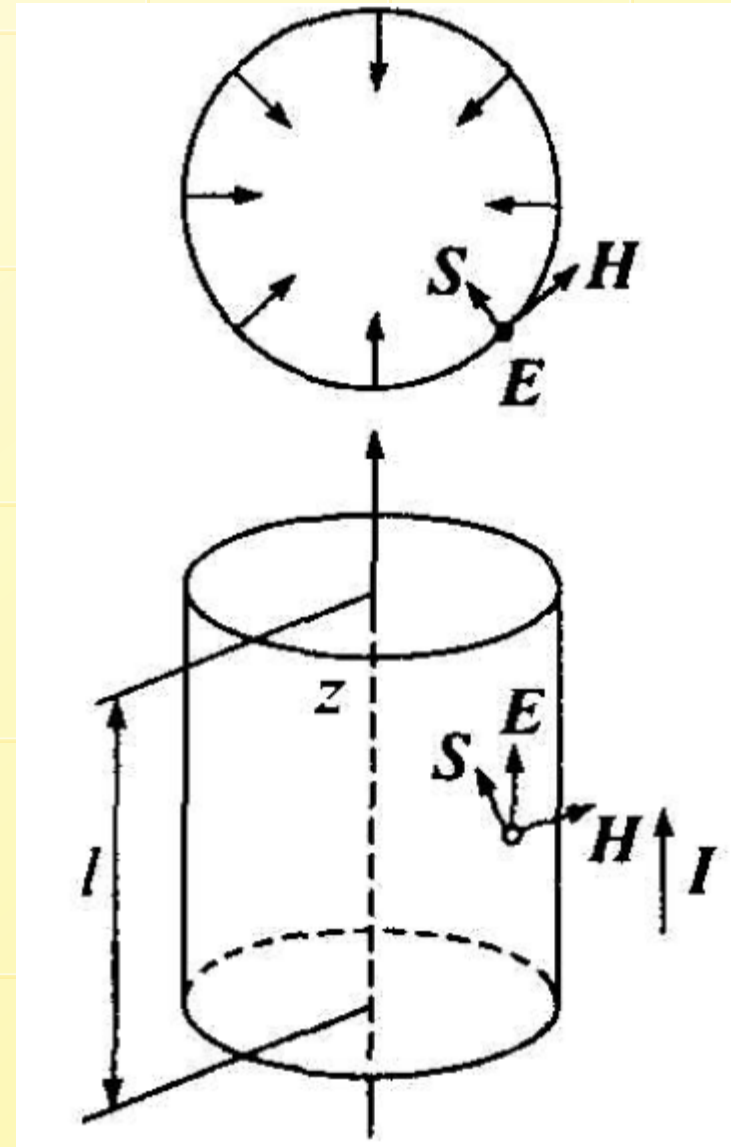
电磁功率流密度/能流密度



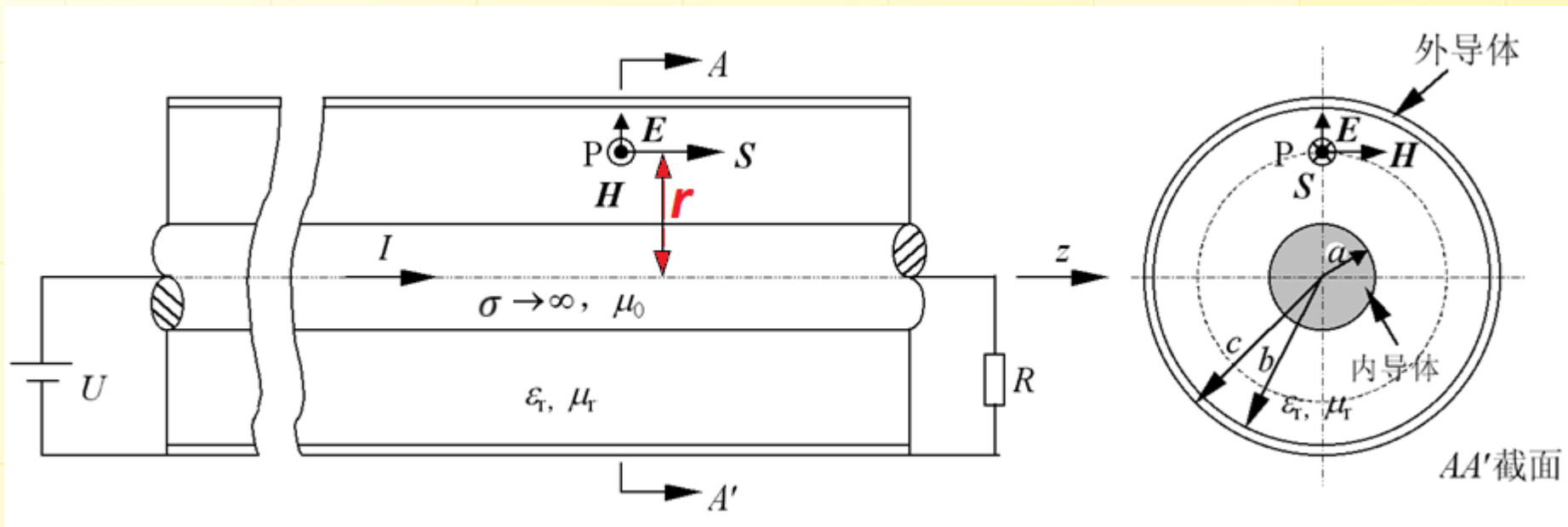
思考

$S(t)$ 是否一定代表有电磁能量的流动？

【例题2.5】 试求一段载有直流电流 I 的长直导线（半径为 b ，电导率为 σ ）**表面**的坡印廷矢量，并验证坡印廷定理。



【例题2.6】 图示同轴电缆内外半径分别为 a 和 b ，两个导体之间为空气，假设导体载有直流电流 I ，导体之间电压为 U ，求能流密度矢量（坡印廷矢量）和传输功率。



同轴电缆横截面中 E 、 H 、 S 的分布

时变磁场的测量

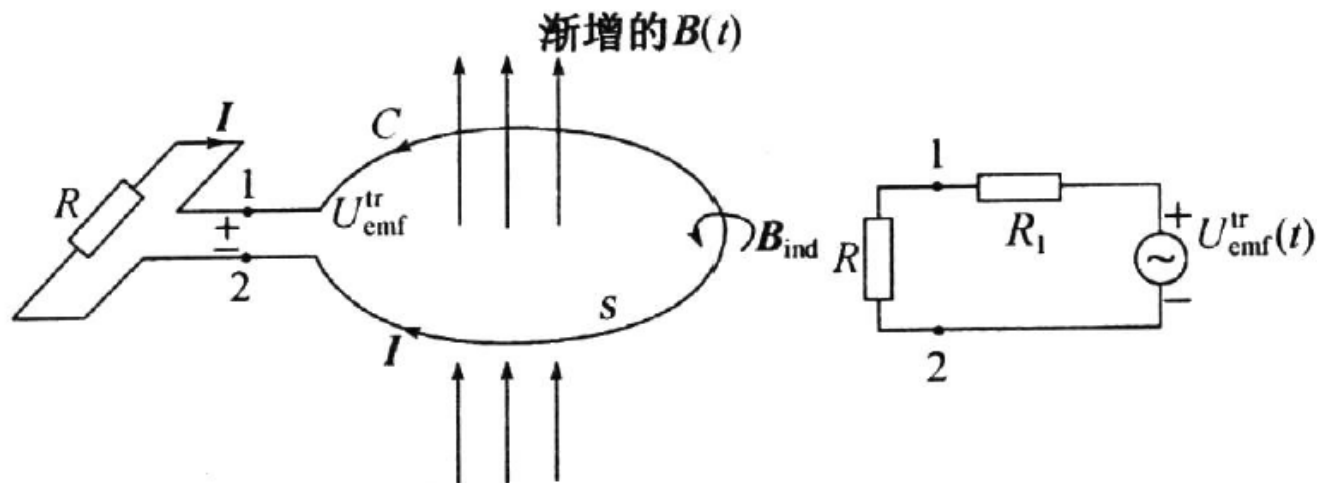


图 2.10 利用一个探测线圈测量外加磁场的法向分量

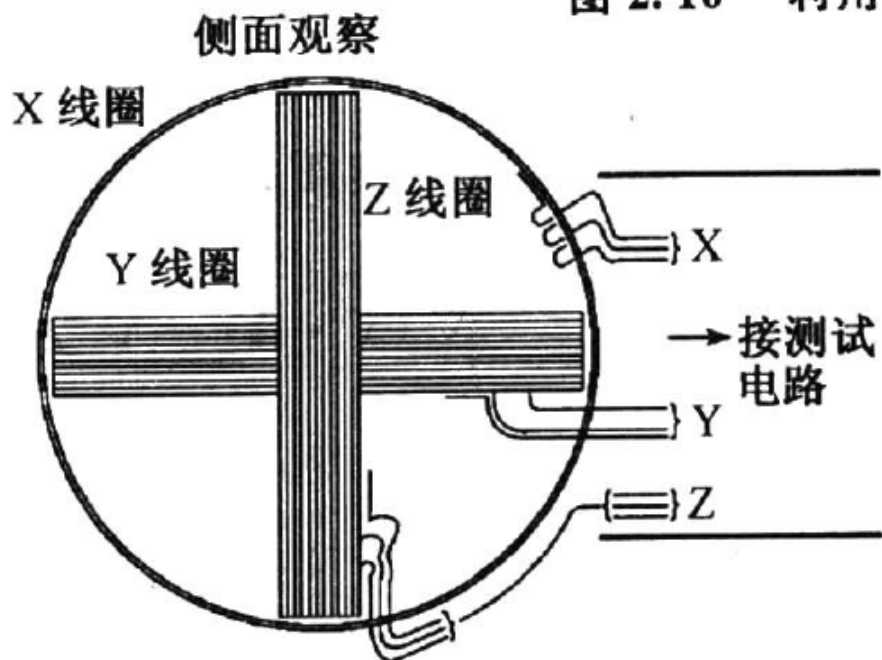


图 2.11 利用 3 组线圈测量时变磁场

2.5 时变电磁场位函数

定义

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$ 可定义: $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

将麦克斯韦方程 \mathbf{B} 、 \mathbf{E} 改成 \mathbf{A} 、 V :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

移项得:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

2.5 时变电磁场位函数

定义

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

波动方程（达朗贝尔方程）

矢量位 \mathbf{A} 的非齐次波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}$$

标量位 V 的非齐次波动方程

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

2.6 电路基本定律与电磁场方程组的相互联系

电路的基本定律可以从麦克斯韦方程组导出。

简化电路的假设：

- 1) 传导电流限制在导线中，电路的最大几何尺寸远小于交变电源的波长[准静态]；在电路中没有电磁能量辐射；
- 2) 电阻产生焦耳损耗，电感和电容的能耗不计；
- 3) 位移电流只存在于电容元件中；
- 4) 磁场只存在于电感元件中。

从麦克斯韦方程到基尔霍夫电压、电流定理

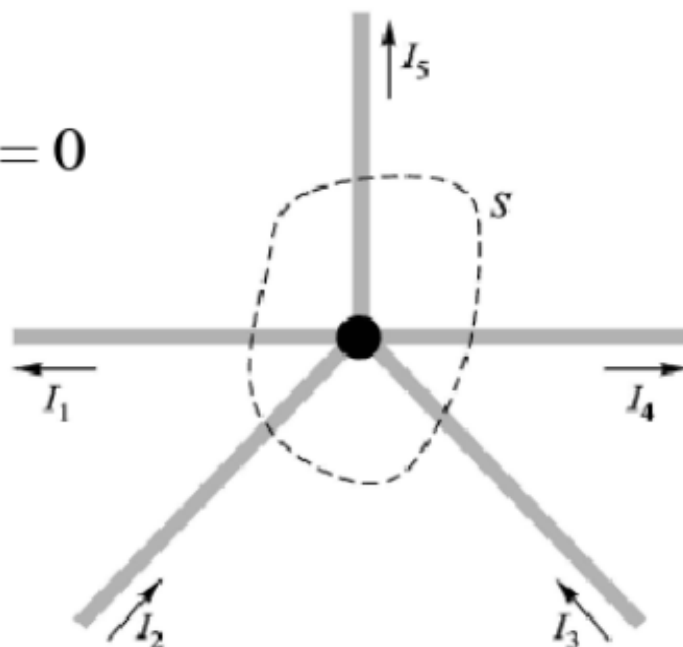
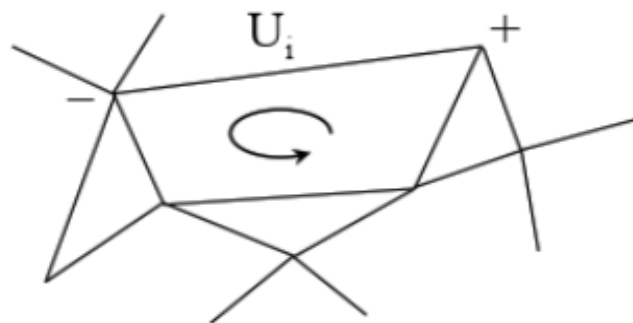
❖ 当 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$

❖ 或所研究对象线度比波长小得多时

$$\oint_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0 \rightarrow \Sigma U = 0$$

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho_v dV = 0 \rightarrow \Sigma I = 0$$

❖ 这就是基尔霍夫定律，它是我们分析低频电路的理论基础。



➤ 场与路的一些对应关系

电路中电压 U 和电流 I 是某一物理区域中电磁场的总和：

$$U = \int_l \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad I = \oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l}$$

	场	路
电场强度	\bar{E}	电压 U
磁场强度	\bar{H}	电流 I
功率流密度	$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$	功率 $P = UI$
电阻导体	$\bar{J} = \sigma \bar{E}$ $p_\sigma = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$	$I = \frac{U}{R}$ $P = \frac{U^2}{R} = I^2 R$
电容器	$\bar{J}_d = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$	$I = C \frac{dU}{dt}$ $W_e = \frac{1}{2} C U^2$
电感	$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$	$W_m = \frac{1}{2} L I^2$

2.7 准静态电磁场

在时变电磁场中,如果忽略磁通量密度的变化 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$,称为电准静态场。它的基本方程组为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &\approx 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

在电准静态场中,电场强度 \mathbf{E} 和电位移通量密度 \mathbf{D} 的方程与静电场中的对应方程形式完全一样。但是在电准静态场中, \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 都是时间函数,它们与源 ρ 之间具有瞬时对应关系。因此在每一时刻,场和源的关系类似于静电场中场和源的关系。如果知道电荷分布,就可以利用静电场的公式计算 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 。

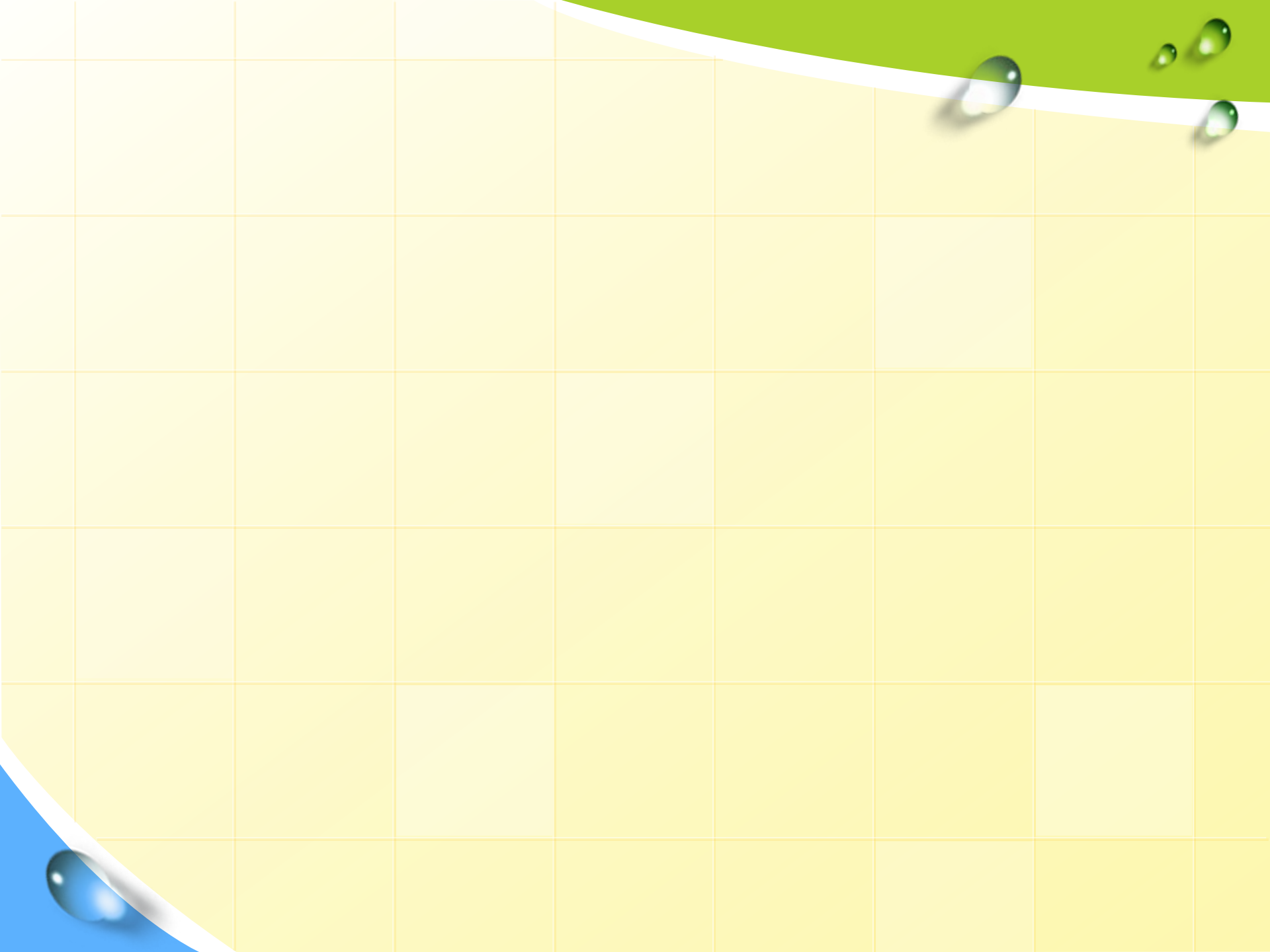
2.7 准静态电磁场

在时变电磁场中,如果忽略电通量密度的变化 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$,称为磁准静态场。它的基本

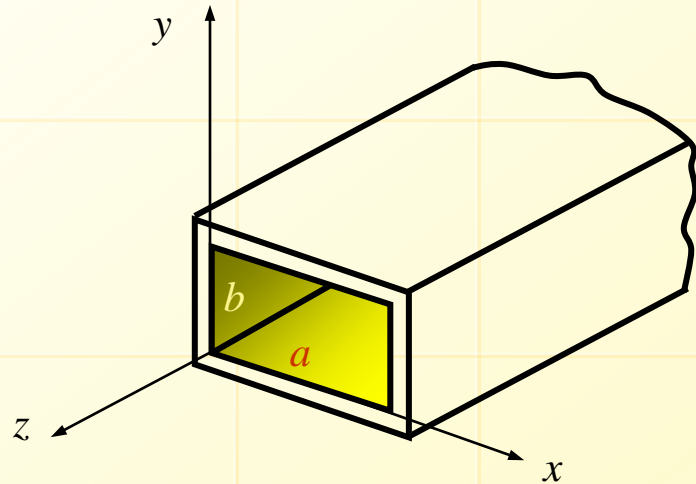
方程组为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} &\approx \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

在磁准静态场的近似条件下,磁场强度 \mathbf{H} 和磁通量密度 \mathbf{B} 所满足的方程与静磁场中的方程完全一样。因此,只要知道电流分布 \mathbf{J} ,就可以利用恒定磁场的公式计算 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 。



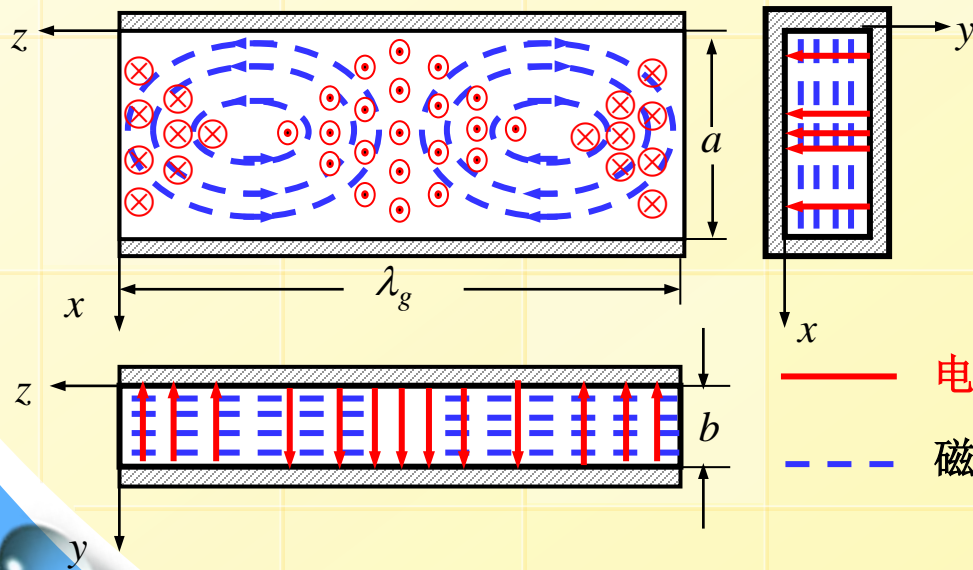
例 已知内截面为 $a \times b$ 的矩形金属波导中的时变电磁场的各分量为



$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$H_x = H_{x0} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$H_z = H_{z0} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - k_z z)$$



其坐标如图示。试求波导中的位移电流分布和波导内壁上的电荷及电流分布。波导内部为真空。

解 ① 由前式求得位移电流为

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -e_y E_{y0} \omega \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - k_z z)$$

② 在 $y=0$ 的内壁上

$$\rho_s = \mathbf{e}_y \cdot (\varepsilon \mathbf{E}_y) = \varepsilon E_y$$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_y \times (\mathbf{H}_x + \mathbf{H}_z) = -e_z H_x + e_x H_z$$

在 $y=b$ 的内壁上

$$\rho_s = -\mathbf{e}_y \cdot (\varepsilon \mathbf{E}_y) = -\varepsilon E_y$$

$$\mathbf{J}_s = -\mathbf{e}_y \times (\mathbf{H}_x + \mathbf{H}_z) = e_z H_x - e_x H_z$$

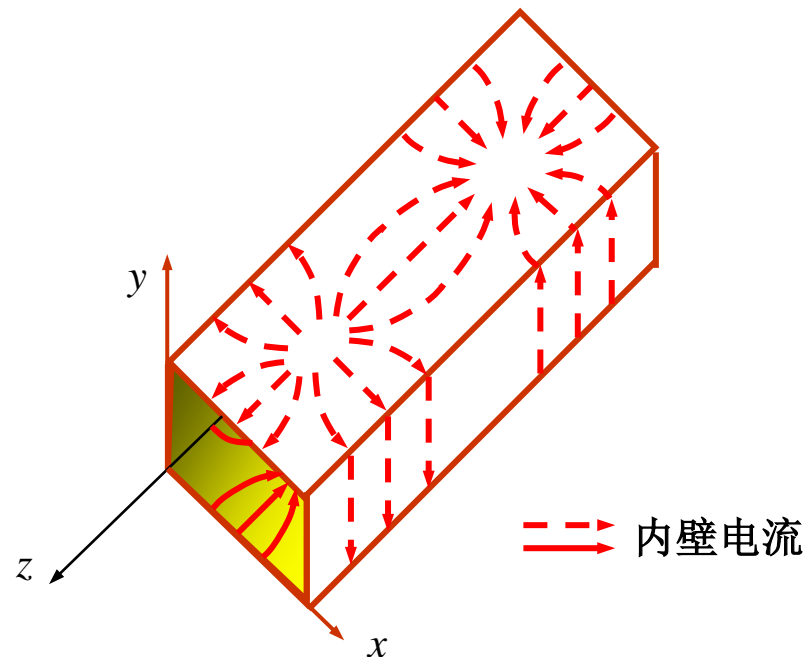
在 $x=0$ 的侧壁上 $H_x=0$,

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z H_{z0} \sin(\omega t - k_z z) = -\mathbf{e}_y H_{z0} \sin(\omega t - k_z z)$$

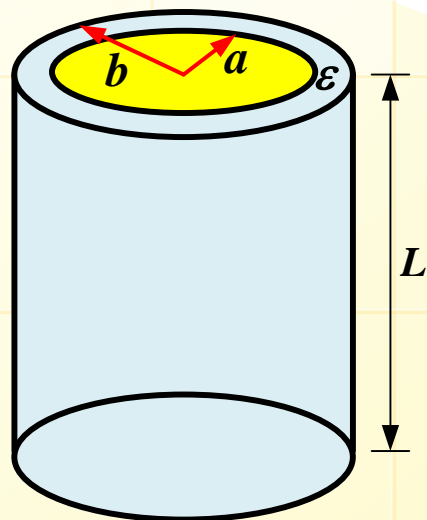
在 $x=a$ 的侧壁上, $H_x=0$

$$\mathbf{J}_S = -\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z (-H_{z0} \sin(\omega t - k_z z)) = -\mathbf{e}_y H_{z0} \sin(\omega t - k_z z)$$

在 $x=0$ 及 $x=a$ 的侧壁上, 因 $E_y=0$, 所以 $\rho_S=0$ 。



同轴电缆内外
层之间电压为
 U , 求此间的
 E



设 q

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi\rho L D_\rho = q$$

$$\vec{D} = \frac{q\hat{\rho}}{2\pi L\rho} \quad \vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{q\hat{\rho}}{2\pi\epsilon L\rho}$$

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{q d\rho}{2\pi\epsilon L\rho} = \frac{q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{b}{a}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho} \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho}$$

$$C = \frac{q}{V} = 2\pi\epsilon L \ln \frac{a}{b}$$

设 I

$$\iint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = J 2\pi\rho L = I$$

$$\vec{J} = \frac{I\hat{\rho}}{2\pi L\rho} \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{I\hat{\rho}}{2\pi\sigma L\rho}$$

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I d\rho}{2\pi\sigma L\rho} = \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln \frac{b}{a}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho} \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho}$$

$$G = \frac{I}{V} = 2\pi\sigma L \ln \frac{a}{b}$$