第二章　　光的衍射

Diffraction of Light

§ 2.1 光的衍射现象　惠更斯—菲涅耳原理

§ 2.2 菲涅耳半波带 菲涅耳衍射（圆孔和圆屏）

§ 2.3 夫琅禾费单缝衍射

§ 2.4 夫琅禾费圆孔衍射

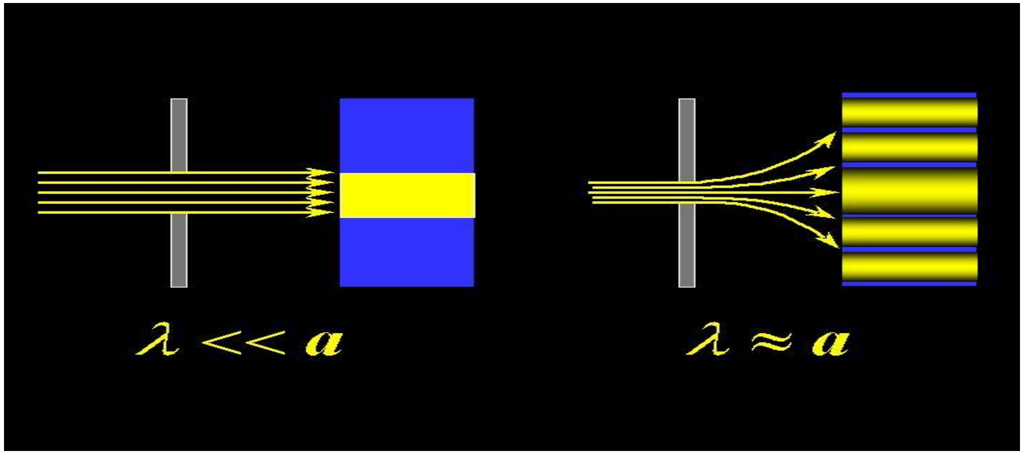
§ 2.5 平面衍射光栅

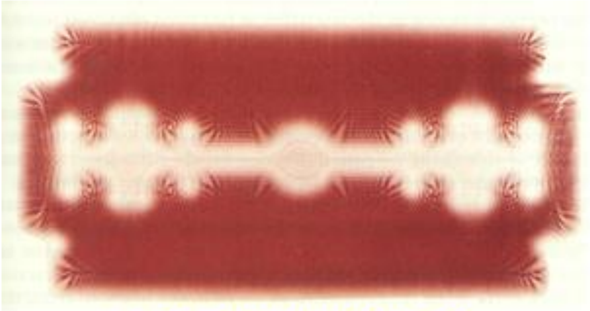
§ 2.6 *晶体对X射线的衍射

§ 2.1 光的衍射现象

一、光的衍射现象

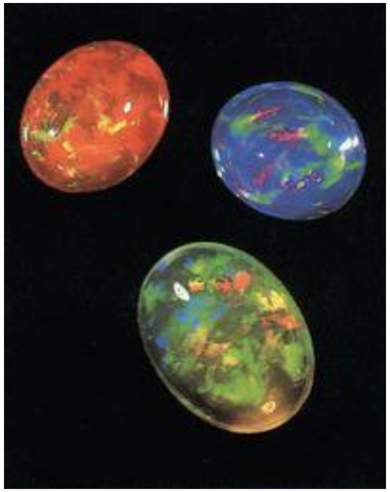
光的衍射： 当光波遇到障碍物时，会偏离几何光学的直线传播而绕行的现象称为光的衍射.

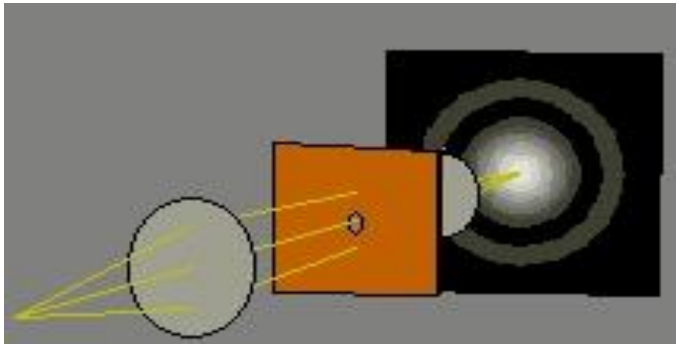


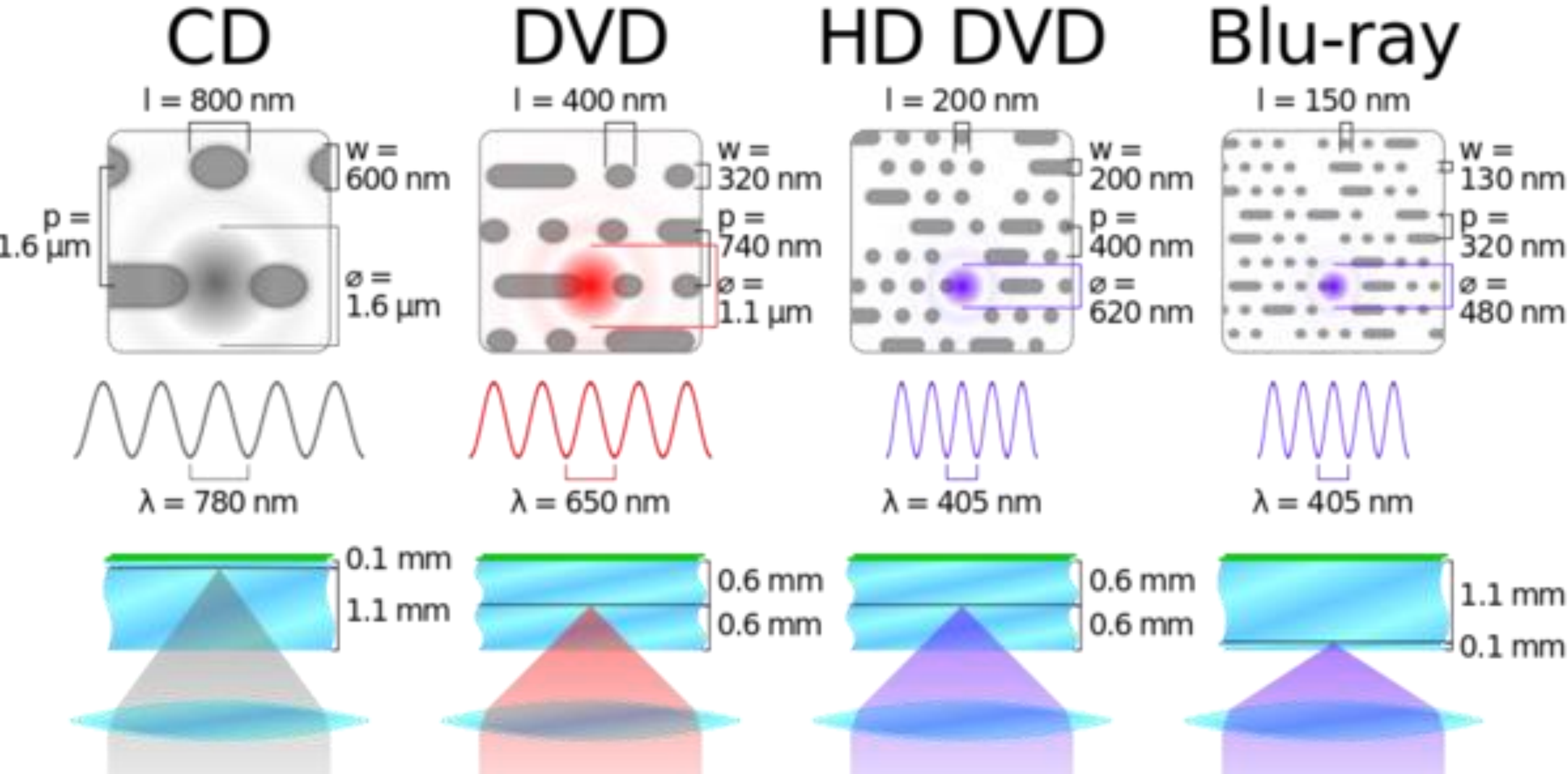


剃须刀片的衍射现象

在欧泊石（opal）的内部，由无数规则的二氧化硅球粒和间隙形成了很多的三维衍射光栅，当光线入射到欧泊石内部时，出现了光线的衍射作用，衍射的角度随波长的变化而变化，从而在不同的角度可见不同的颜色，亦就是所谓的变彩。



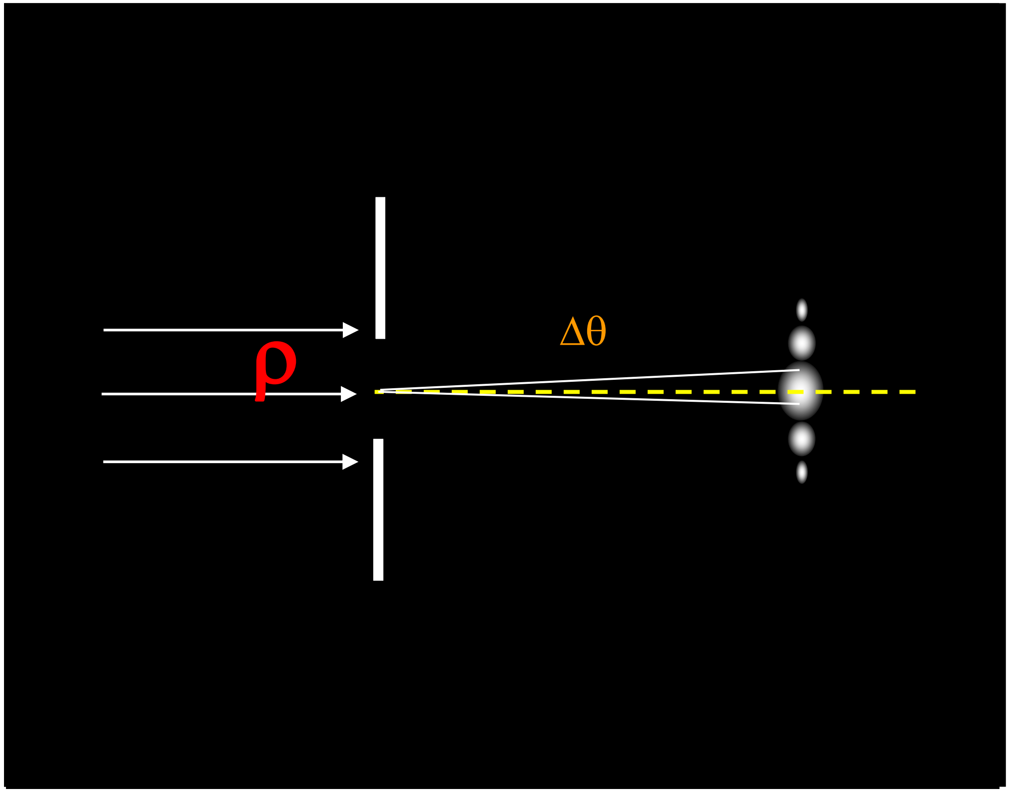




Optical drivers: 光驱

衍射的一般特点：

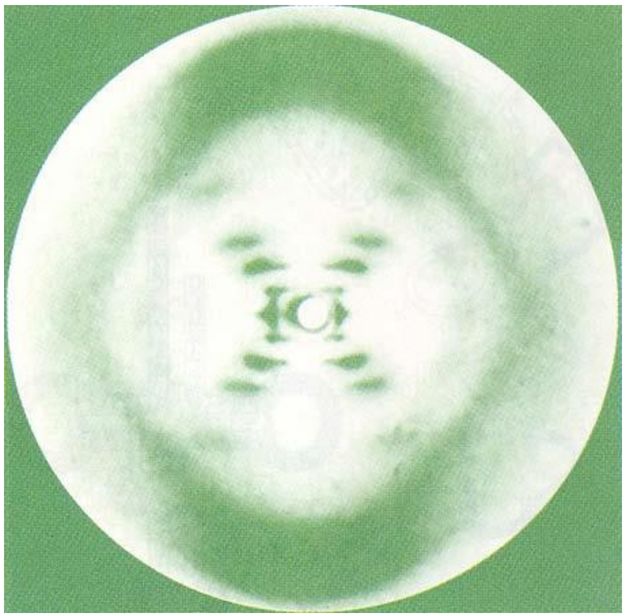
1、限制与展宽



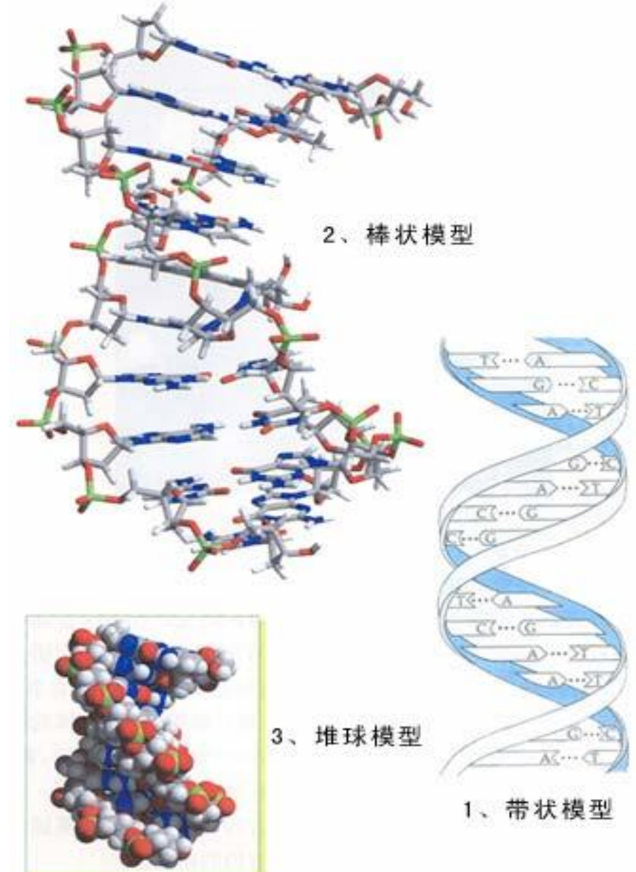
限制尺度、发散角和波长的关系：$\rho \cdot \Delta\theta \sim \lambda$

2、衍射图样和衍射屏的结构一 一对应，结构越细微，相应的衍射图样越扩大。

衍射图样 ⇄ **微结构**



DNA的X光衍射照片



创新需要多学科交叉

克里克、沃森、威尔金斯，1962年 诺贝尔奖。上世纪，研究DNA结构的弗兰克林、威尔金斯、鲍林都是物理学家或化学家，所以，有人说：是物理学“剑走偏锋”，助产了现代生物学。

二、 惠更斯--菲涅耳原理

菲涅耳

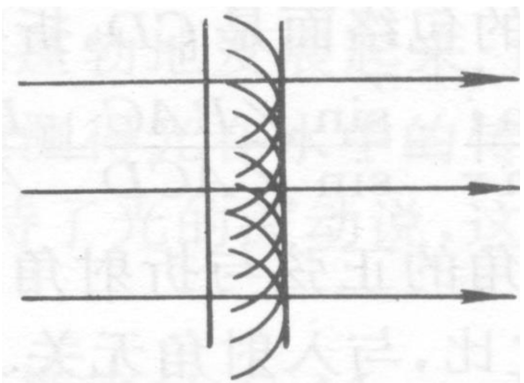
（A. J. Fresnel 1788-1827）

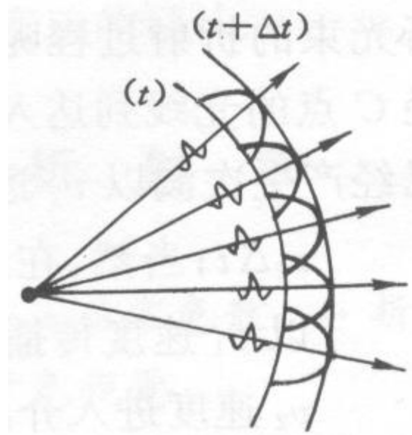
菲涅耳是法国物理学家和铁路工程师。1788年5月10日生于布罗利耶，1806年毕业于巴黎工艺学院，1809年毕业于巴黎桥梁与公路学校。1823年当选为法国科学院院士，1825年被选为英国皇家学会会员。1827年7月14日因肺病医治无效而逝世，终年仅39岁。

菲涅耳的科学成就主要有两个方面。一是衍射。他以惠更斯原理和干涉原理为基础，用新的定量形式建立了惠更斯--菲涅耳原理，完善了光的衍射理论。另一成就是偏振。他与D.F.J.阿拉果一起研究了偏振光的干涉，确定了光是横波（1821）；他发现了光的圆偏振和椭圆偏振现象（1823），用波动说解释了偏振面的旋转；他推出了反射定律和折射定律的定量规律，即菲涅耳公式；解释了马吕斯的反射光偏振现象和双折射现象，奠定了晶体光学的基础。

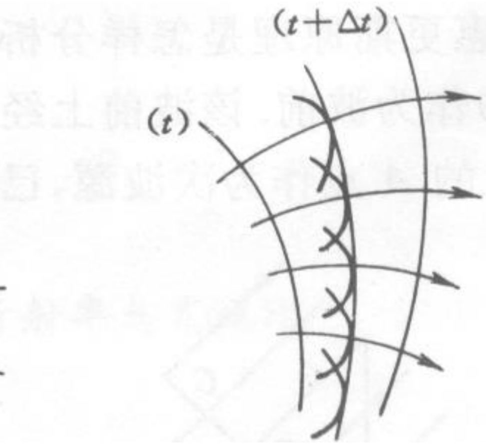
惠更斯原理

光扰动同时到达的空间曲面被称为波面或波前，波前上的每一点都可以看成一个新的扰动中心，称为子波源或次波源，次波源向四周发出次波；**下一时刻的波前是这些大量次波面的公切面，或称为包络面**；次波中心与其次波面上的那个切点的连线方向给出了该处光传播方向。





说明惠更斯原理



非均匀介质中光线弯曲

惠更斯原理的不足：(1) 没有回答光振幅的传播问题
(2) 没有回答光相位的传播问题

惠更斯的次波概念

继承

光波干涉概念

吸取

补充和发展

提出

次波相干叠加的概念

统一了衍射分析的理论框架
惠更斯—菲涅耳原理

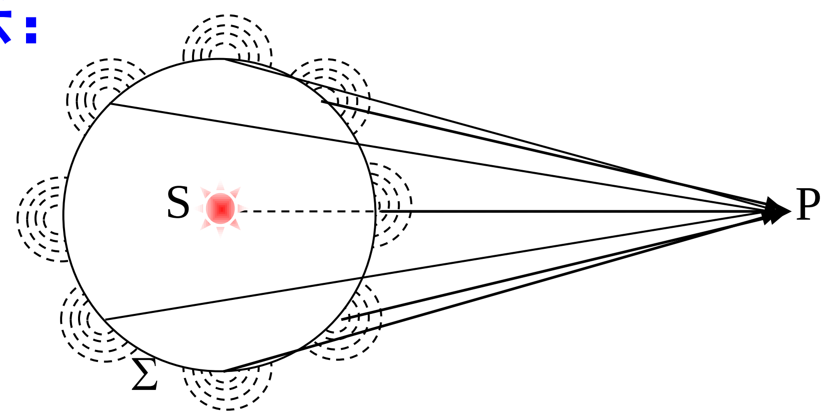
惠更斯—菲涅耳原理

波前上的每个面元都可以看成次波源，它们向四周发射次波；波场中任一场点的扰动都是所有次波源所贡献的次级扰动的相干叠加

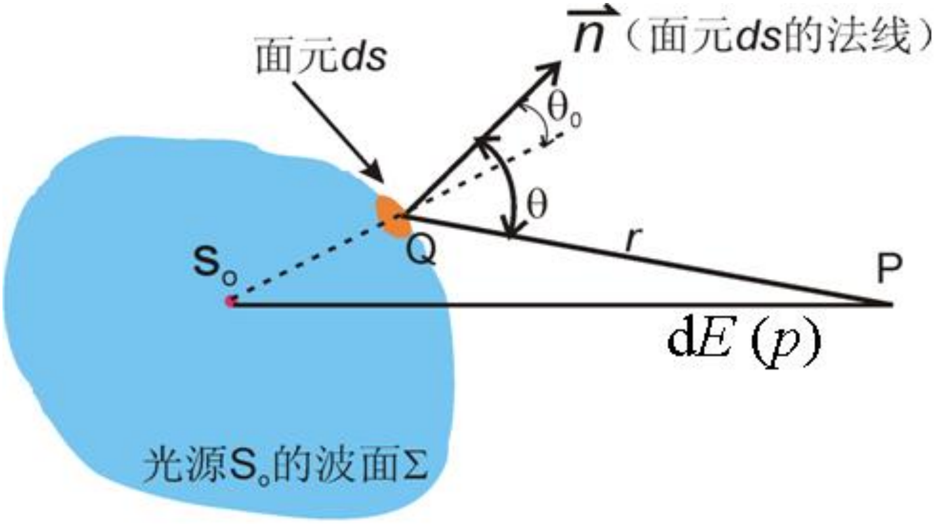
惠更斯—菲涅耳原理的数学表示：

$$\tilde{E}(P)=\oiint_{(\Sigma)} d\tilde{E}(P)$$

$$d\tilde{E}(P)=???$$



Q处面元*ds*处发出的子波对*P*点的贡献为*dE*(*P*), 正比于：



- **Q处面元大小 *ds***
- **倾斜因子$K(\theta)$**
- **Q处的光场振幅分布函数*A*(*Q*)**
- **Q处发出的子波到达*P*点的光振幅 $e^{i(kr-\omega t)}/r$**

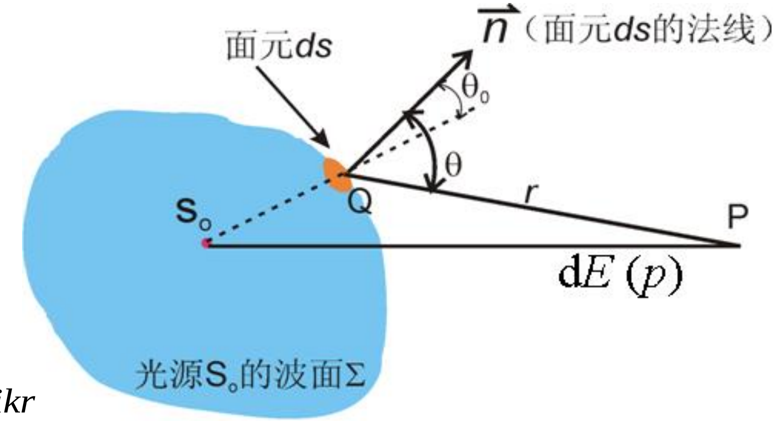
面积元ds 发出的次波在P点的合振动可表示为：

$$dE = c\frac{K(\theta)A(Q)}{r}e^{i(kr-\omega t)}ds$$

$$E = \int_s dE = c\int_s \frac{K(\theta)A(Q)}{r}e^{i(kr-\omega t)}ds$$

或 $$E = c\int_s \frac{K(\theta)A(Q)}{r}\cos(kr-\omega t)ds$$ **--菲涅耳衍射积分**

*基尔霍夫衍射积分公式（补充）



基尔霍夫，(G.R. Kirchhoff, 1824—1887) 德国物理学家。

$$\tilde{E}(P)=\frac{-i}{\lambda}\oiint_{(\Sigma)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{E}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

和菲涅耳的衍射积分公式的主体结构式相同的，基尔霍夫的新贡献是：

（1）明确了倾斜因 $f(\theta_0,\theta)=\dfrac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}$，

闭合面上的各个次波源均对场点扰动有贡献

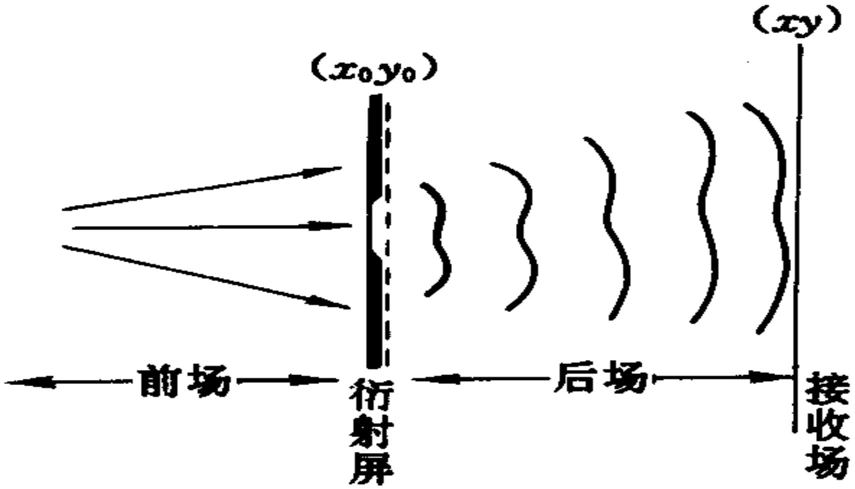
（2）给出了比例系数 $K=\dfrac{-i}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

（3）明确指出，积分面（Σ）不限于等相面，可以是隔离光源和场点的任意闭合曲面

衍射的分类：

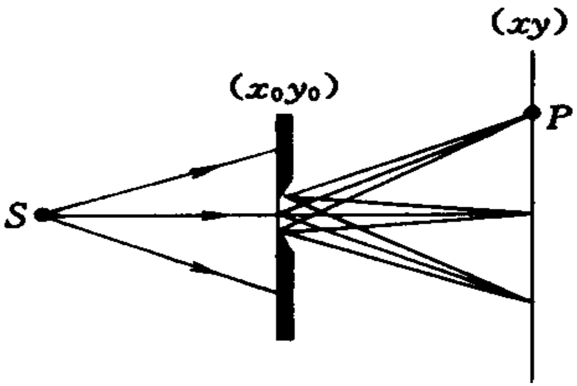
菲涅耳衍射

夫琅禾费衍射

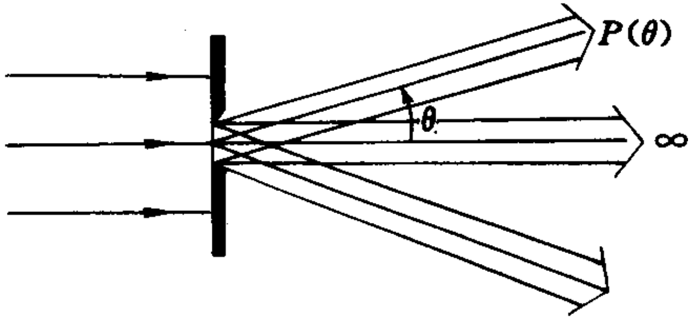


按光源、衍射屏和接受屏三者之间距离的远近将衍射分为两大类：

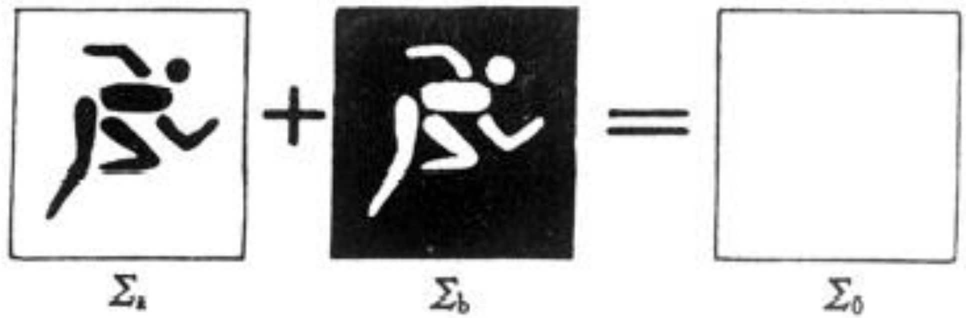
菲涅耳衍射：光源—衍射屏—接受屏之间距离为有限远。



夫琅禾费衍射：光源—衍射屏—接受屏之间距离为无限远。



*衍射巴比涅原理（互补衍射屏） 补充内容



巴比涅原理中的一对互补屏

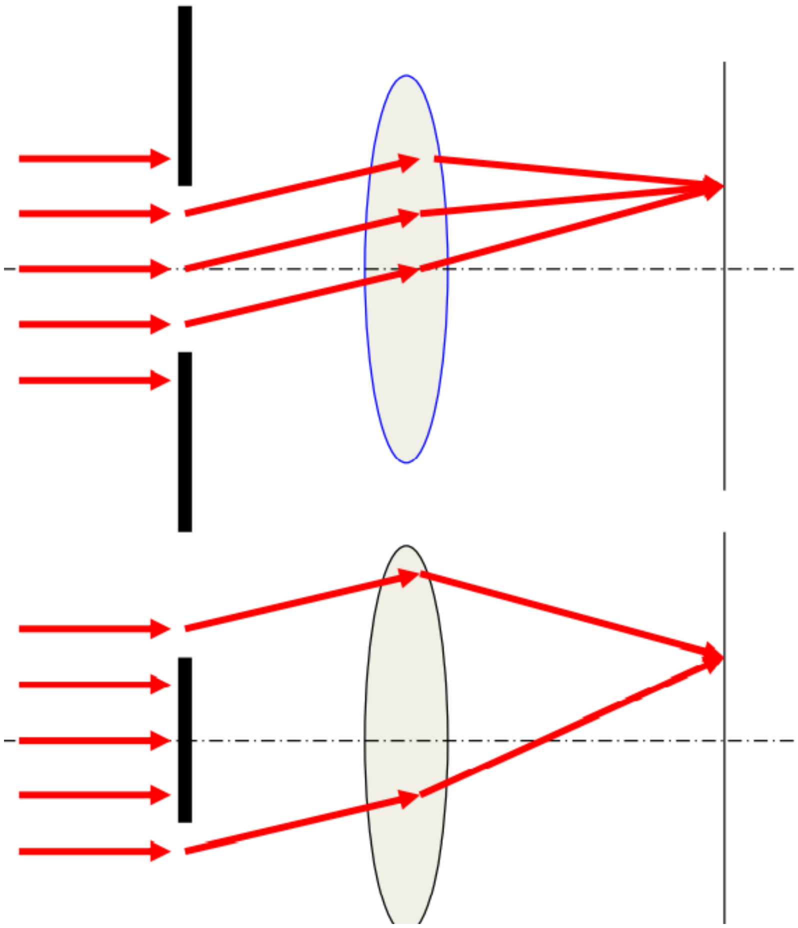
衍射屏 $\Sigma_a+\Sigma_b=\Sigma_0$ 自由畅通

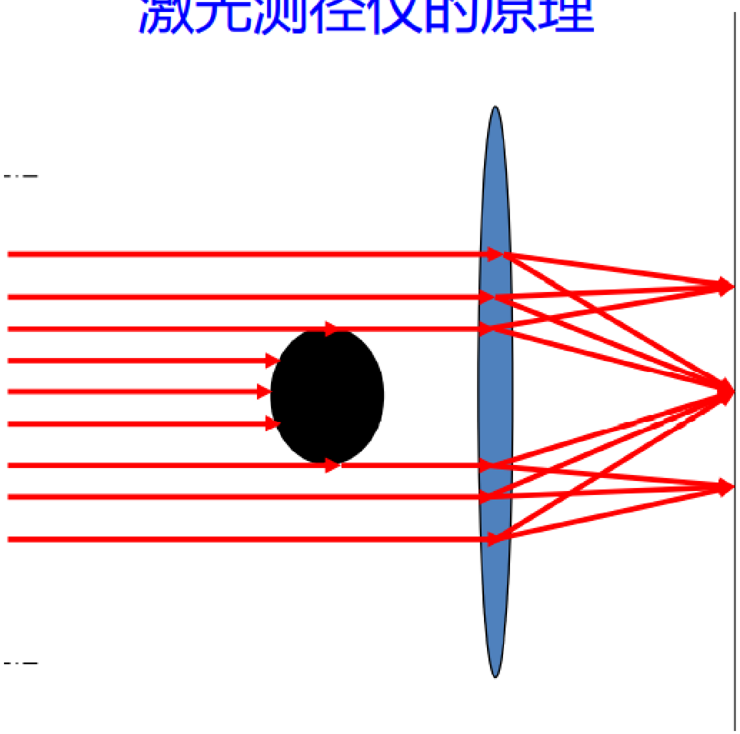
$$\tilde{E}(P)=\frac{-i}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_0=\Sigma_a+\Sigma_b)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{E}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

$$=\frac{-i}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_a)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{E}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS+\frac{-i}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_b)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{E}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

$$\tilde{E}_a(P)\quad+\quad\tilde{E}_b(P)\quad=\quad\tilde{E}(P)$$

细丝与狭缝的衍射花样，除零级中央主极大外，处处相同



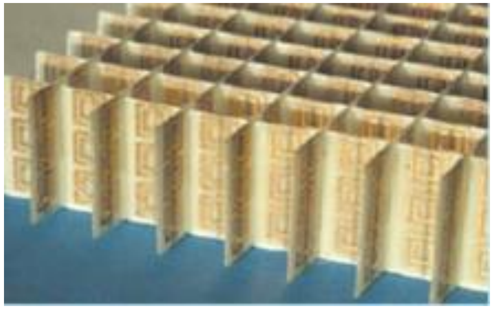


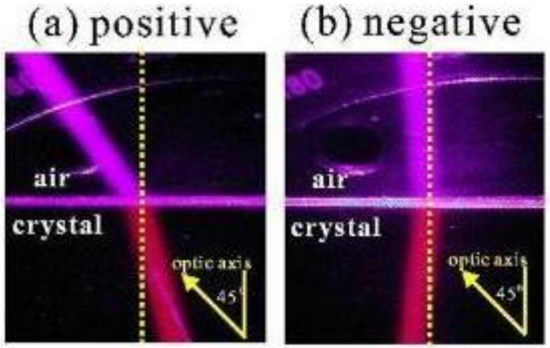
细丝与狭缝具有相同的衍射图 样，因此可以用狭缝的公式计 算细丝的直径。

知识窗：电磁超材料 (metamaterial)

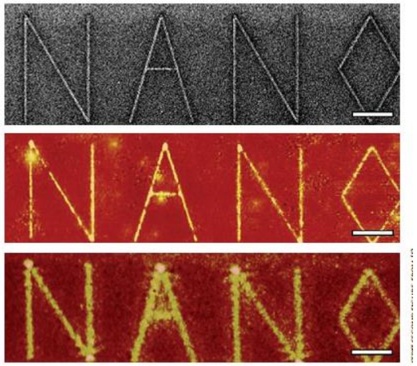
负折射材料 1968年，苏联科学家V. G. Veselago 首次在理论上提出了介电常数和磁导率同时为负数的介质（双负介质或负折射率介质）

构造的超材料：金属和非闭合金属环周期排列构成。

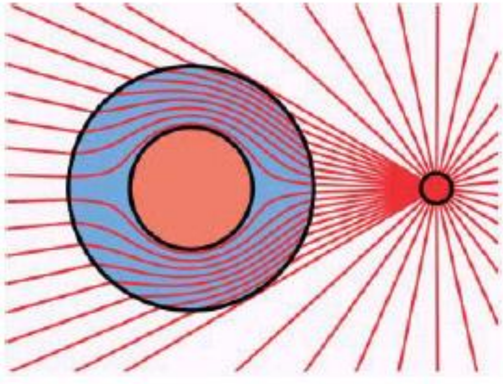




应用：



完美透镜 (perfect lens)

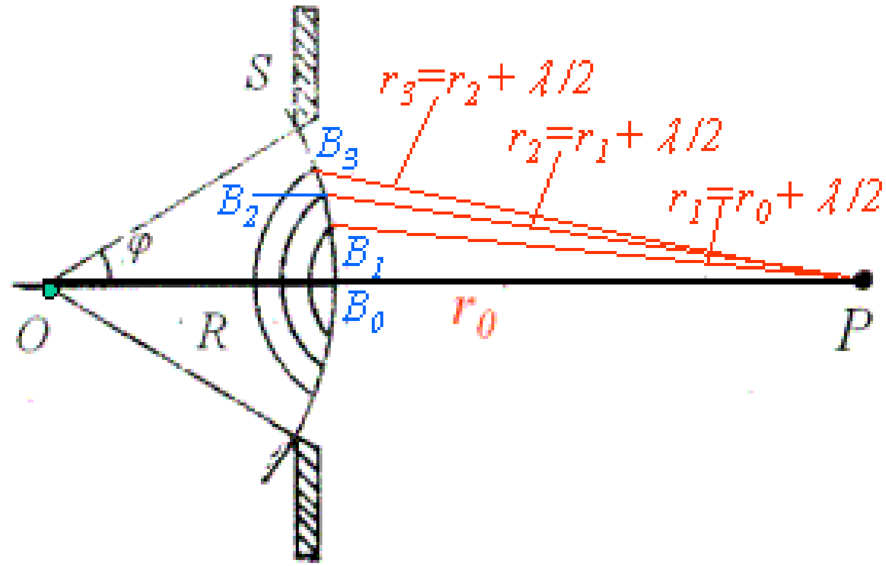


隐身斗篷 (Cloak)

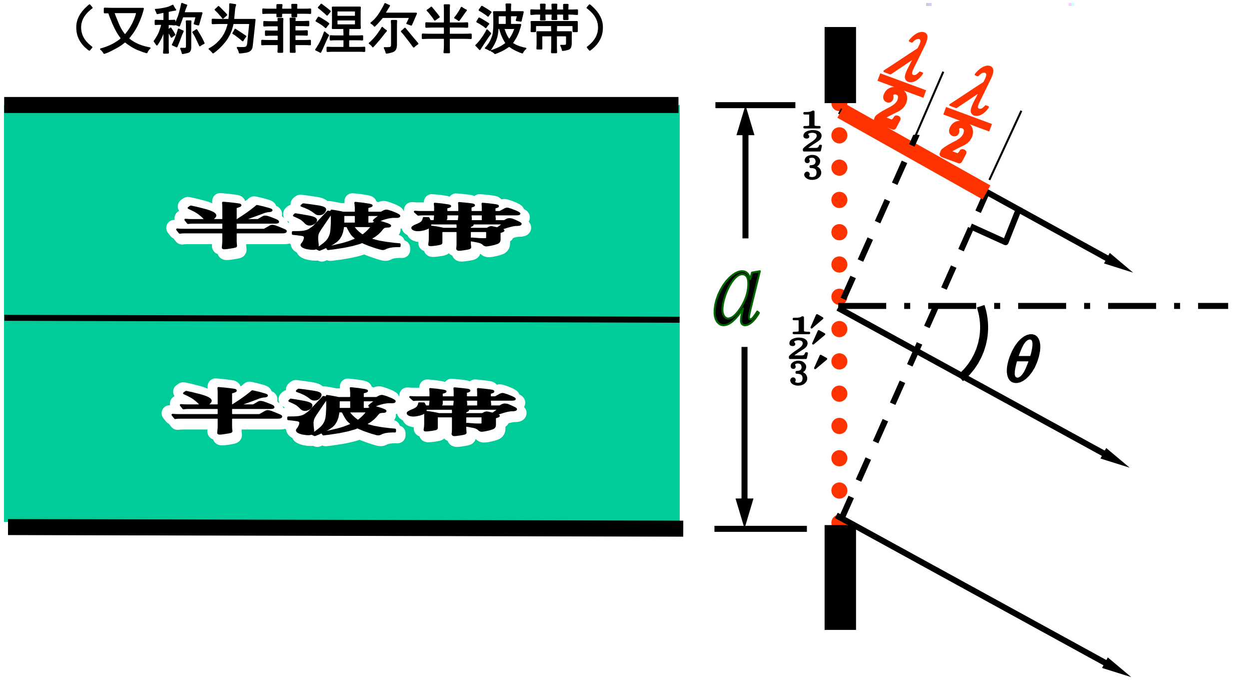
§ 2.2 菲涅尔半波带　菲涅尔衍射

一、菲涅耳半波带

任何两个相邻带所发的次波到达P点时的光程差为 $\lambda/2$，这样分成的环形带叫做**菲涅耳半波带**。

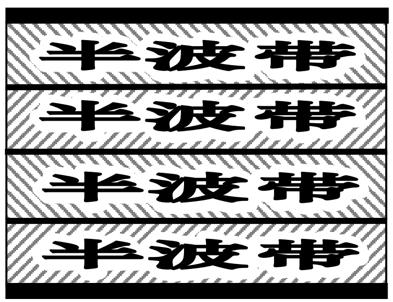


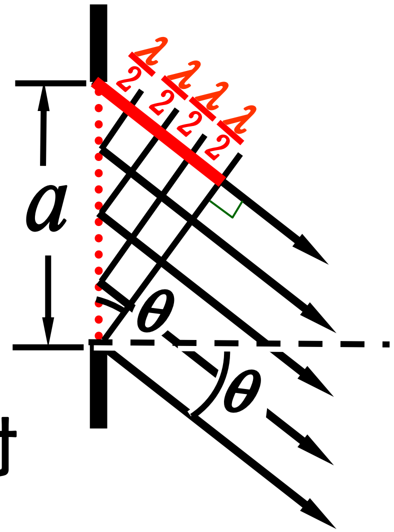
单缝恰好被分成两个“半波带”
（又称为菲涅尔半波带）



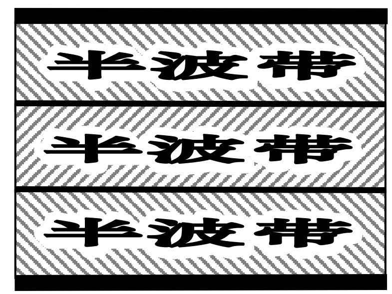
a 两端的子波光程差 δ 恰好为 λ

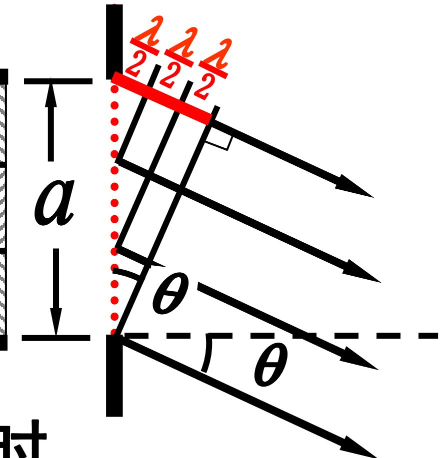
推论： 若 $\delta_{端} = m\dfrac{\lambda}{2}$ m为整数





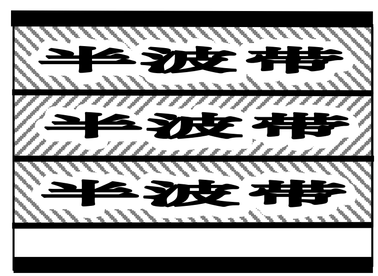
当 m为偶数时
得暗纹





当 m为奇数时
得明纹

不能被分成整数
个半波带的方向



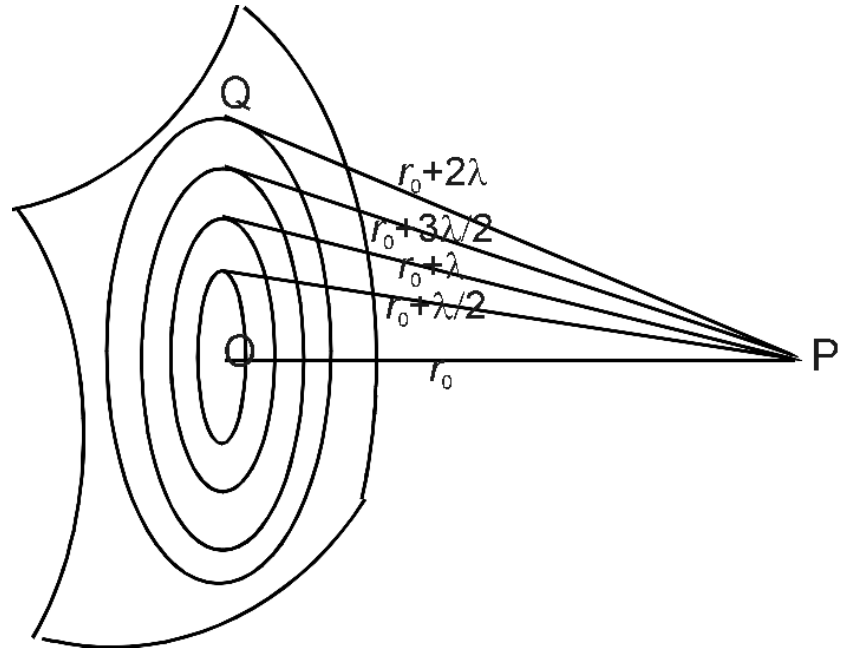
得
非明非暗

二、合振幅的计算

$$E(P)=c\int_s \frac{K(\theta)A(Q)}{r}e^{kr}ds$$

每个半波带对P点贡献为：$E_1, E_2, E_3, \ldots E_k\ldots$

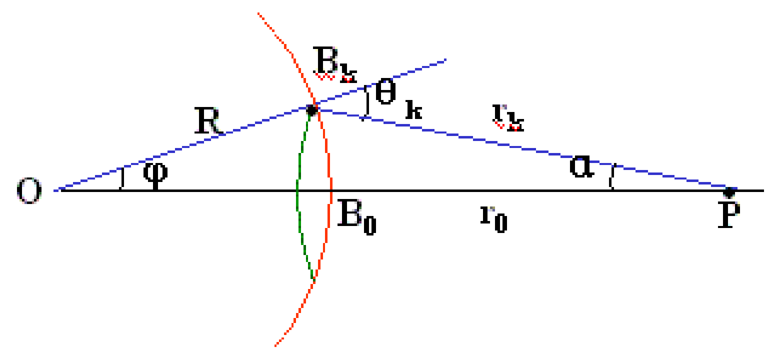
$$\begin{cases} E_k = c\displaystyle\int_{r_0+(k-1)\frac{\lambda}{2}}^{r_0+k\frac{\lambda}{2}} \frac{K(\theta)A(Q)}{r}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r}ds \\ E_P = E_1+E_2+E_3+\cdots+E_k \end{cases}$$



衍射积分 ⟹ 各个波带的贡献之和

$$S=2\pi R^2(1-\cos\varphi)$$

$$\cos\varphi=\frac{R^2+(R+r_0)^2-r_k^2}{2R(R+r_0)}$$



将上列两式分别微分

$$\frac{ds}{r_k}=\frac{2\pi R}{R+r_0}dr_k \quad \boldsymbol{dr_k \approx \frac{\lambda}{2}}$$

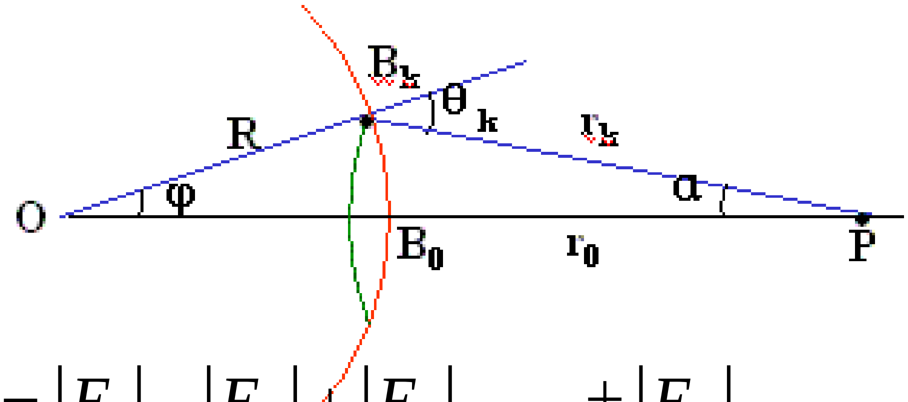
$$E_k(P)=(-1)^k CK(\theta)e^{-ikr_0}$$

***k* 个半波带：**

$$E_P = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_k$$

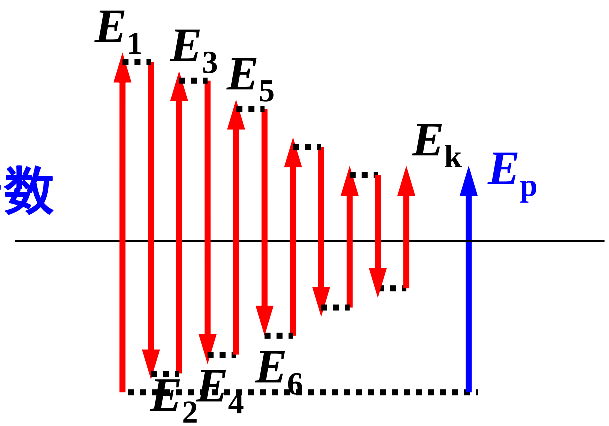
$$\because \quad K(\theta) = (1+\cos\theta)/2$$

随 *k* 的增大而变小

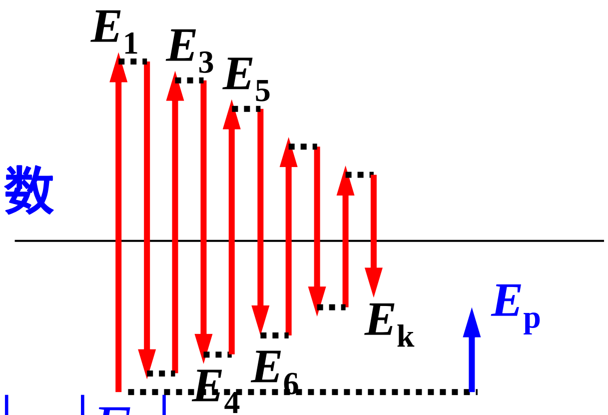


$$\Rightarrow \quad \therefore \quad |E_{k+1}| < |E_k| \qquad |E_P| = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \cdots \pm |E_k|$$

_k_ 为奇数



_k_ 为偶数



(a) *k*=奇数时 $\Rightarrow$ $$|E_P| = \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_k|}{2}$$

(b) *k*=偶数时 $\Rightarrow$ $$|E_P| = \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_k|}{2}$$

P50:矢量和

$$|E_P| = \frac{|E_1|}{2} \pm \frac{|E_k|}{2} \qquad A_k = \frac{1}{2}(a_1 \pm a_k)$$

三、菲涅耳衍射（圆孔和圆屏）

1、圆孔衍射

$$R_{hk}^{\ 2}=r_k^2-(r_0+h)^2$$

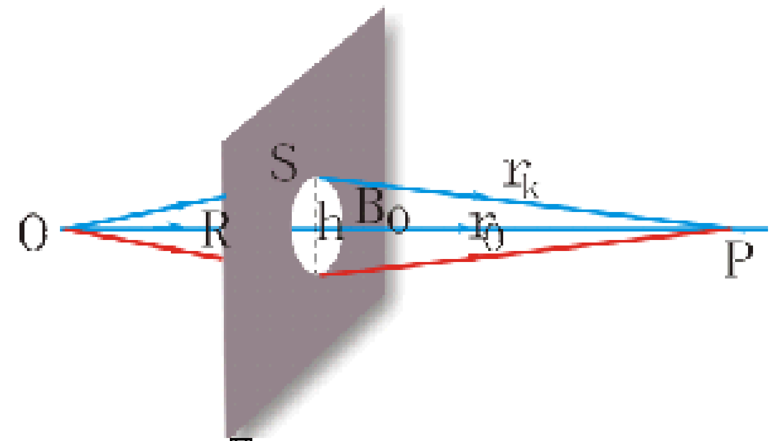
$$R_{hk}^{\ 2}=R^2-(R-h)^2=2Rh-h^2$$

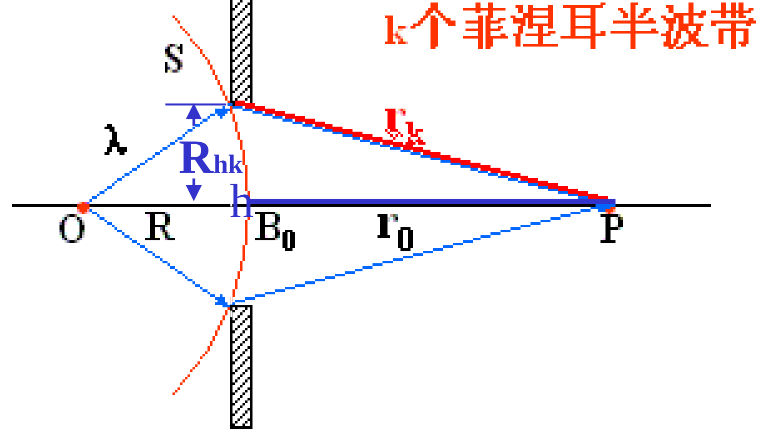
$$\Longrightarrow\ h=\frac{r_k^{\ 2}-r_0^{\ 2}}{2(R+r_0)}$$

$$r_k^{\ 2}-r_0^{\ 2}\approx k\lambda r_0$$

$$R_{hk}^{\ 2}\approx r_k^{\ 2}-r_0^{\ 2}-2r_0h=k\frac{r_0R}{R+r_0}\lambda$$

$$k=\frac{R_{hk}^{\ 2}(R+r_0)}{\lambda r_0R}=\frac{R_{hk}^{\ 2}}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{R}\right)$$





$$\xrightarrow{R\to\infty}\quad R_{hk}=\sqrt{kr_0\lambda}$$

$$\boxed{k=\frac{R_{hk}^2}{\lambda r_0}}$$

讨论：

▲ 1. 对 P 点若 S 恰好分成 K 个半波带：

$$A_k = \frac{1}{2}(a_1 \pm a_k) \begin{cases} \text{奇数} & A_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_k) \quad \text{最大} \\ \text{偶数} & A_k = \frac{1}{2}(a_1 - a_k) \quad \text{最小} \end{cases}$$

▲ 2. 对 P 点若 S 中含有不完整的半波带：

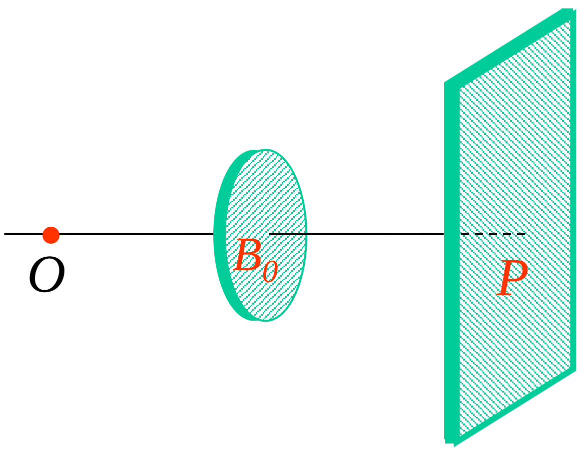
$$\frac{1}{2}(a_1 - a_k) < A_k < \frac{1}{2}(a_1 + a_k)$$ 光强介于最大/最小间

▲ 3. 若 不用光阑（$R_{hk} \to \infty$）整个波面完全不被遮蔽：

$\theta \uparrow \to a_k \downarrow$ ➡ $\underset{\theta \to \pi}{a_k \to 0}$ ➡ $\underset{\rho_k \to \infty}{A_p} = \frac{a_1}{2}$

2、圆屏衍射

泊松亮斑(Poisson spot)：数学家泊松(粒子学说的信奉者)利用惠更斯—菲涅耳衍射原理，计算出圆屏衍射中心竟会是一亮斑，这在泊松看来是十分荒谬的，影子中间怎么会出现亮斑呢？这差点使得菲涅尔的论文中途夭折。但菲涅耳的同事阿拉果(F. Arago)在关键时刻坚持要进行实验检测，结果发现真的有一个亮点如同奇迹一般地出现在圆盘阴影的正中心，位置亮度和理论符合得相当完美。

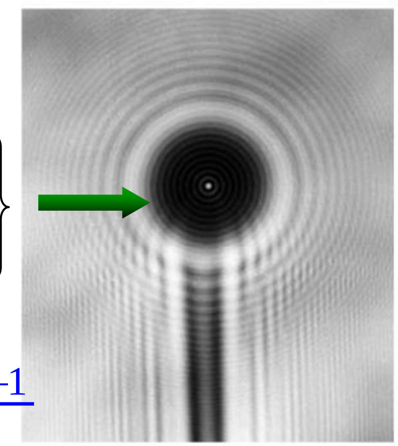


***P* 点的振幅：**

圆屏遮蔽了个 K 半波带

从 K+1 个半波带

到最后的半波带（$a_\infty \to 0$）



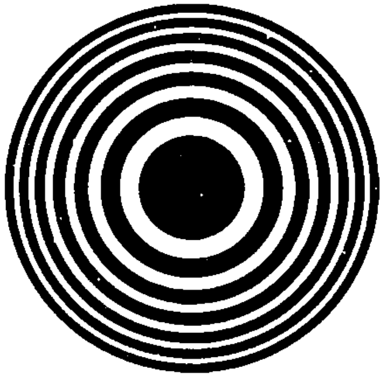
在 P 点合振幅为：$A = \dfrac{a_{k+1}}{2}$

圆屏的面积↓，a_{k+1}↑，到达 P 点的光愈强。

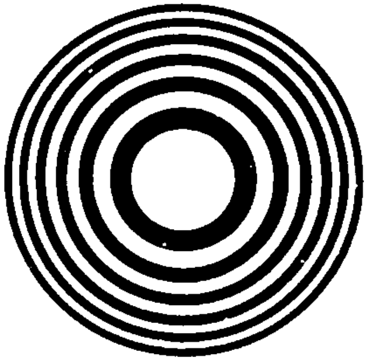
圆屏几何影子的中心永远有光（泊松点）

四、波带片

1、波带

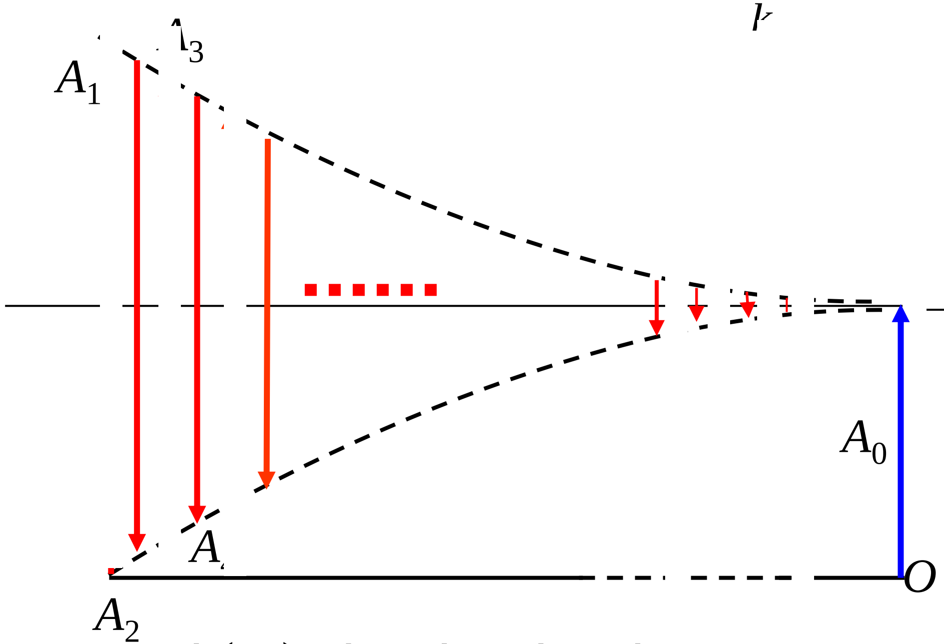


开放偶数半波带

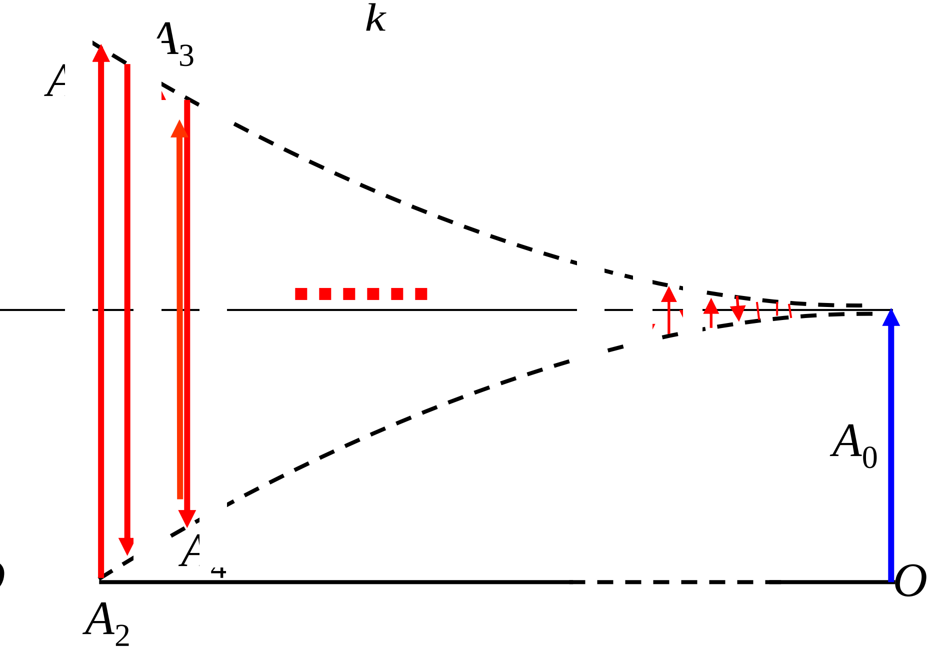


开放奇数半波带

$$A_k=\sum_k a_{2k} \quad \text{或} \quad A_k=\sum_k a_{2k+1}$$



$A(P_0)=A_2+A_4+A_6+A_8+\ldots$

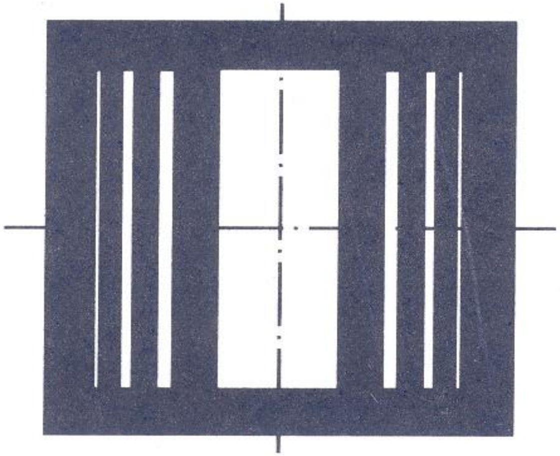


$A(P_0)=A_1+A_3+A_5+A_7+\ldots$

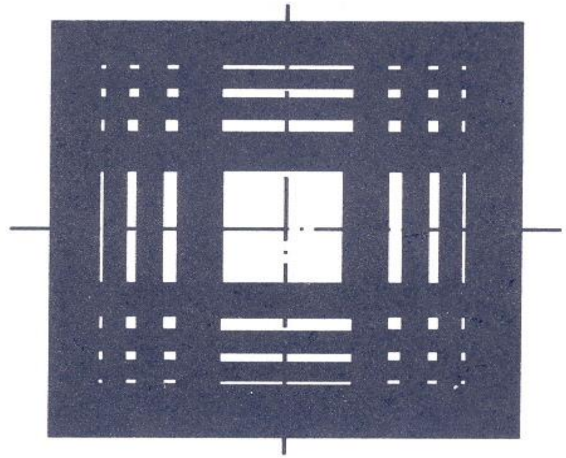
例：20个半波带，1、3、5、……、19共10个奇数半波带透光，2、4、6、……、20共10个偶数半波带涂黑，场点的光强

$$A' = A_1 + A_2 + \ldots + A_{19} \approx 10A_1 = 20A$$

$$I' = (A')^2 = 400A^2$$



长条形波带片



方形波带片

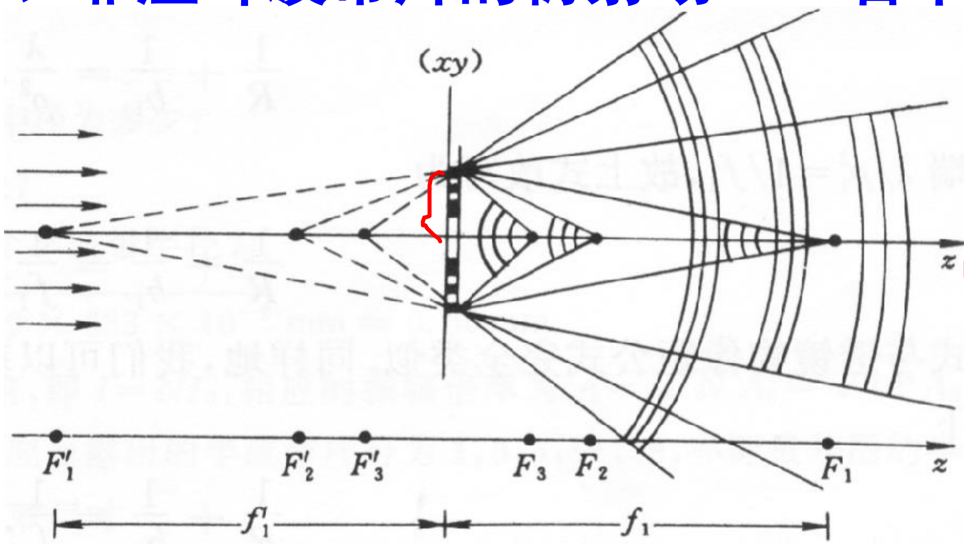
2、波带片的制作

- **制作方法一：**

  先在白纸上画出半径正比于序数k的平方根的一组同心圆，然后用照相机进行两次的拍摄和缩小底片即为波带片。

- **制作方法二：** 镀膜，光刻腐蚀工艺

3、菲涅耳波带片的衍射场——若干实焦点和虚焦点



菲涅尔波带片衍射产生实焦点和虚焦点

$$k = \frac{R_{hk}^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_1^2} \xrightarrow{R\to\infty} f_1 = b = \frac{\rho_1^2}{k\lambda}$$

f_1称为主焦距，ρ_1是由f_1的设计要求而确定的。

$$\overbrace{1\quad 2\quad 3}^{\overset{1}{\downarrow}}\quad \overbrace{4\quad 5\quad 6}^{\overset{2}{\downarrow}}\quad \overbrace{7\quad 8\quad 9}^{\overset{3}{\downarrow}}\cdots$$

$$\rho_1 = \sqrt{3}\rho_1'，\quad \rho_1' = \frac{\rho_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f_2 = \frac{\rho_1'^2}{\lambda} = \frac{\rho_1^2}{3\lambda} = \frac{f_1}{3}$$

$$\overbrace{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}^{\overset{1}{\downarrow}}\quad \overbrace{6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10}^{\overset{2}{\downarrow}}\quad \overbrace{11\quad 12\quad 13\quad 14\quad 15}^{\overset{3}{\downarrow}}\cdots$$

$$\rho_1 = \sqrt{5}\rho_1''，\quad \rho_1'' = \frac{\rho_1}{\sqrt{5}} \Rightarrow f_3 = \frac{\rho_1''^2}{\lambda} = \frac{\rho_1^2}{5\lambda} = \frac{f_1}{5}$$

焦点处衍射强度分析？

4、波带片衍射成像—类似透镜成像公式

菲涅耳波带片有若干实焦点和虚焦点，它既具有汇聚透镜的功能，又具有发散透镜的功能，当物点发射球面波照明波带片时，可以产生若干实像和虚像，成像公式类似与透镜成像：

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_k}，\quad 其中k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3\ldots$$

□例题： 对于一张经典菲涅耳波带片的制作，提出两点要求:(a)对λ=633nm的光，其第一焦距f_1=400mm，(b)主焦点的光强为自由光强的10^4倍。

$A=\frac{A_1}{2}$

问：(1) 待制作的波带片的第一个半波带的半径为多少？

(2) 这张波带片的至少应该有多大的有效半径？

解 （1）根据第一焦距公式，$f_1=b=\rho_1^2/\lambda$ 得：

50μm

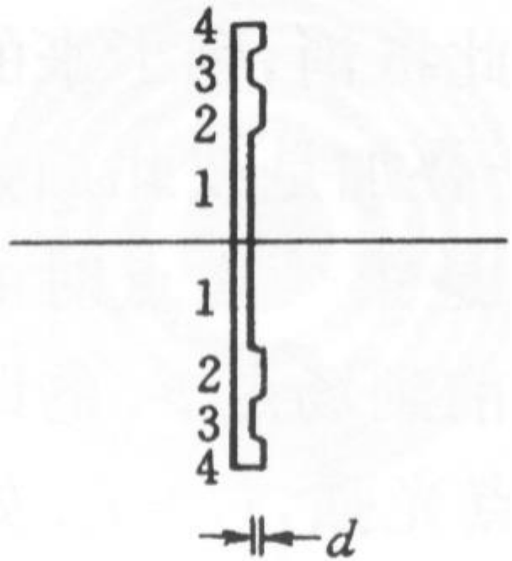
$$\rho_1=\sqrt{f_1\lambda}=\sqrt{400\times633\times10^{-6}}\approx0.50mm$$

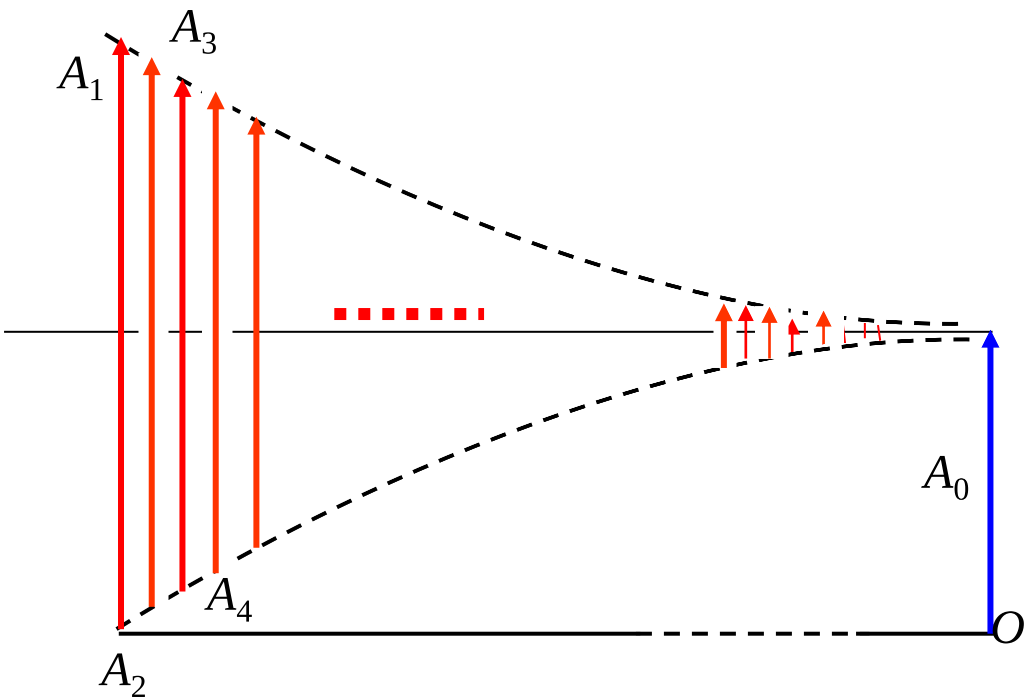
（2）焦点光强I为自由光强I_0的N倍，即$I=NI_0$，相应的振幅 $A=\sqrt{N}A_0$，此题：$A=\sqrt{N}A_0=\sqrt{10^4}A_0=100A_0=50A_1$，有一半的半波带被遮掩，如果漏出奇数半波带，1，3，5…99,如果漏出偶数，2，4，6…100，所以最外围的半波带的序号为99或100，它决定了波带片的有效尺度：

$$\rho_k=\sqrt{k}\rho_1，\quad \rho_{100}=\sqrt{100}\rho_1=5.0mm，\quad \rho_{99}=\sqrt{99}\rho_1\approx5.0mm$$

5、*现代波带片（补充）

(1) 全透明浮雕型波带片





浮雕型波带片 $(n-1)d=(2m+1)\dfrac{\lambda_0}{2}$

$\tilde{U}(P_0)=A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots$ 入射光通量没有损失，焦点或像点的光振幅是经典波带片的2倍，光强为4倍。

(2) 余弦式波带片

它是通过球面波和平面波干涉制作的，其光照时的透过函数为正弦或余弦式，具有更好的聚焦性能，只有一个实焦点和一个虚焦点。

波带片与普遍透镜比较

优点： （1）长焦距的波带片比普遍透镜易制作，

（2）可将点光源成像为+字亮

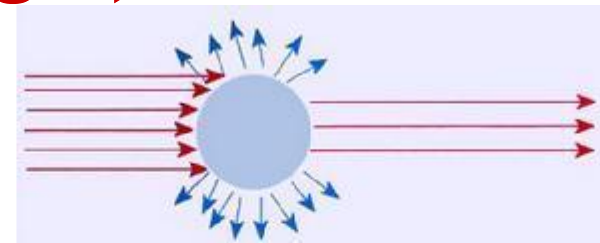
（3）面积大，轻便，可折迭。

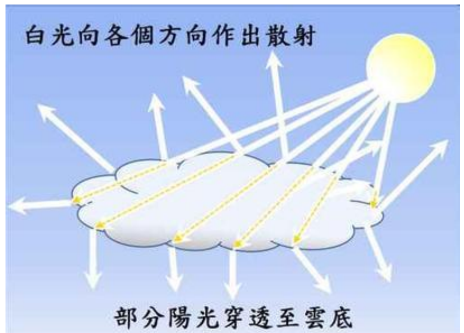
缺点： （1）f'与 λ 有关，色差很大。

（2）除 f'外，尚有 $\frac{1}{3}f', \frac{1}{5}f' \cdots$ 多个焦距的存在。

➢知识窗：光散射 (Scatter of light)

光散射：当光在物质中传播时，物质中存在的不均匀性（如悬浮微粒、密度起伏）也能导致光的散射（简单地说，即光向四面八方散开）。





光散射分类：

瑞利散射：当微粒的线度远小于光的波长时的散射

米氏散射：当粒子的直径与辐射的波长相当时发生的散射

拉曼散射：在光的散射过程中，如果分子的状态也发生改变，则入射光与分子交换能量的结果可导致散射光的频率发生改变

布里渊散射：因物质中存在以声速传播的压强起伏而引起的光的散射。

➢小结

§ 2.1 光的衍射现象

障碍物尺寸与波长相当时衍射现象明显

惠更斯—菲涅耳原理

§ 2.2 菲涅尔半波带　菲涅尔衍射

菲涅耳半波带

圆孔衍射、圆屏衍射

波带片

➢下次课内容：

§ 2.3 夫琅禾费单缝衍射

§ 2.4 夫琅禾费圆孔衍射

§ 2.5 夫琅禾费多缝衍射

§ 2.6 平面衍射光栅

§ 2.7 *晶体对X射线的衍射