数学准备知识

一、标量场和矢量场

二、标量场的梯度

三、矢量场的通量和散度　　　高斯公式（散度定理）

四、矢量场的环量和旋度　　　斯托克斯公式

五、两个零恒等式　以及　亥姆霍兹定理

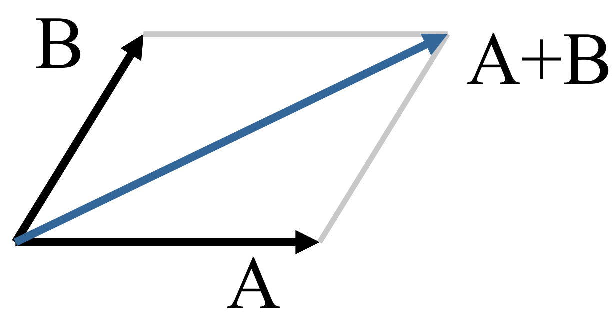
基础：矢量运算

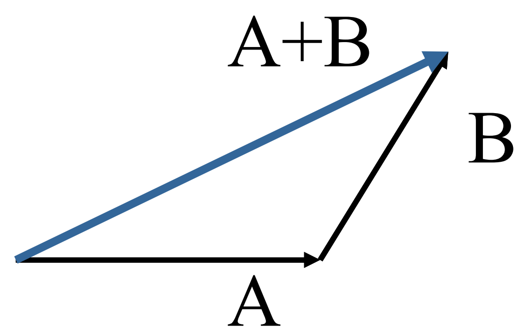
➢ **矢量和标量（Vector and Scalar）**

标量：只有大小没有方向的量 T, V

矢量：既有大小又有方向的量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_R E_R$ $\vec{A} = \vec{a}_A A$

➢ 矢量的加/减法





➢ 矢量的乘法

点乘（点积）：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta_{AB}$$

叉乘（叉积）：

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{a_n}\left|AB\sin\theta_{AB}\right|$$

标量三重积：

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A})=-\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

矢量三重积：

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

（“Back-Cab”法则）

矢量分析

一、标量场和矢量场

1、标量场： 在空间各点存在着一个标量，它的数值是空间位置的函数

$$\Phi = \Phi(x, y, z) \qquad \begin{cases} \text{气压场} \\ \text{温度场} \end{cases}$$

等值面：$\Phi(x, y, z) = \text{常量}$

例：电场中的等势面。

2、矢量场： 在空间各点存在着一个矢量，它的大小和方向是空间位置的函数

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$$

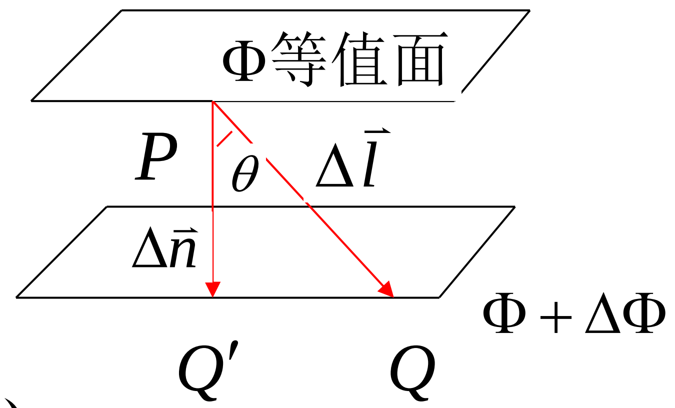
$$\begin{cases} A_x = A_x(x,y,z) \\ A_y = A_y(x,y,z) \\ A_z = A_z(x,y,z) \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{流速场} \\ \text{电场} \end{cases}$

场线：有方向的曲线，切线与该点 $\vec{A}$ 方向相同，线的密度正比于 $\vec{A}$ 的大小

例：电场线

二、标量场的梯度



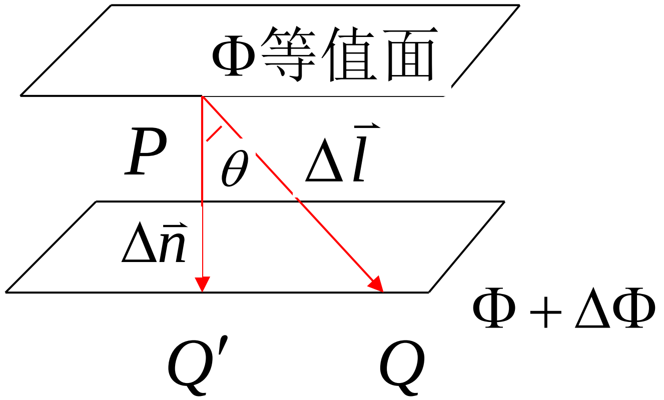
梯度：空间位置函数的变化率

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$ （分三个坐标的变化率）

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta l}$$ ：标量场在P点沿 $\Delta\vec{l}$ 方向的方向微商

$\Delta\vec{n}$ ：P点处等值面的法线

Δn 很小： Φ 和 $\Phi+\Delta\Phi$ 等值面平行



P点处沿 Δn 方向的方向微商最大

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta n}$$

标量场的梯度：沿方向微商最大的方向（即等值面法线方向），数值等于最大的方向微商。

直角坐标： $$grad\Phi=\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

标量场的梯度为矢量，例：电场中电势U为标量场

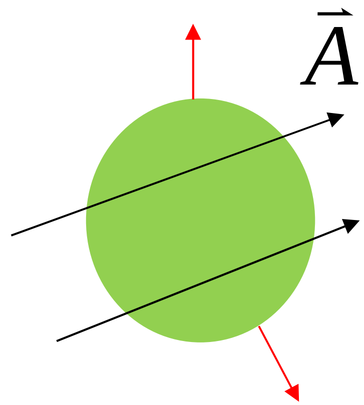
电场强度：　$\vec{E} = -gradU$

直角坐标中：

梯度算子（纳布拉算子）　$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

三、矢量场的通量和散度　　高斯公式



（1）通量定义　$\Phi_A = \iint\limits_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{(S)} A\cdot dS\cos\theta$

$$\Phi_A = \oiint\limits_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

(取闭合曲面S的外法线方向为正)

(2) 散度

$$\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi_A}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{(S)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$$ 标量

直角坐标中：

纳布拉算子（梯度算子）

$$\boxed{\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

$$div\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)$$

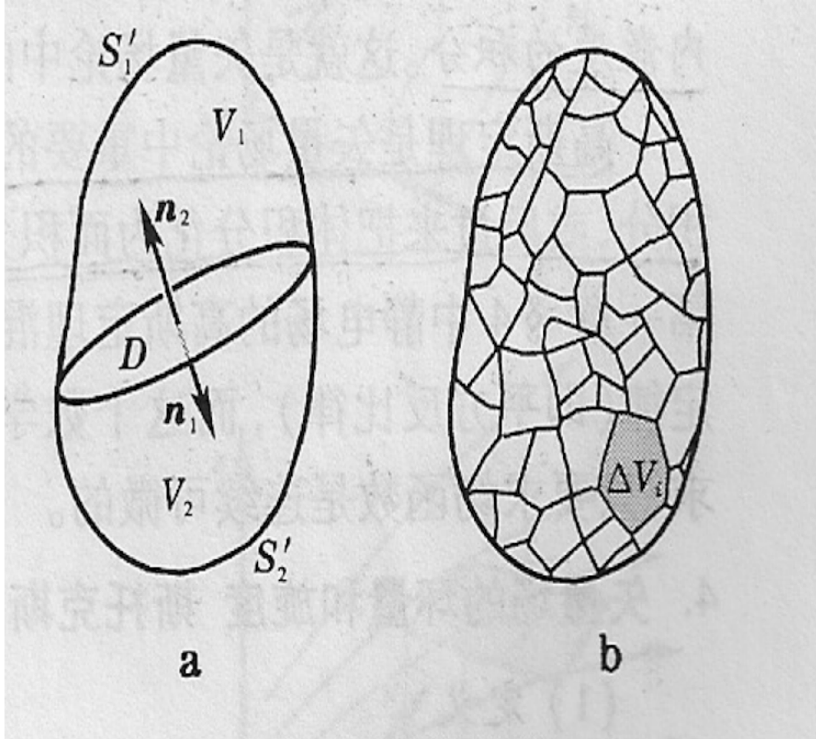
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$ 矢量场各分量分别沿各自方向的变化率

（3）(数学)高斯公式

对于图**a**，各量关系：

$$V_1 + V_2 = V \qquad S_1' + S_2' = S$$

$$S_1 = S_1' + D \qquad S_2 = S_2' + D$$



图B－3 高斯定理的证明

矢量 $\vec{A}$对闭合面**S**的通量$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}}$=$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A1}}$+ $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A2}}$

$$\Phi_{A_1} = \oiint_{(S_1)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1 = \iint_{(S_1')} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(D)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1$$

$$\Phi_{A_2} = \oiint_{(S_2)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_2 = \iint_{(S_2')} \vec{A}\cdot d\vec{S}_2 + \iint_{(D)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_2$$

且 $\displaystyle\iint_{(D)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1 = -\iint_{(D)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_2$

$$\Phi_{A_1} + \Phi_{A_2} = \iint_{(S_1')} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2')} \vec{A}\cdot d\vec{S}_2 = \oiint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \Phi_A$$

如图**b**，把**V**分割成很多的单元： $\displaystyle\Phi_A = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{A_i}$

当 $\Delta V \to 0$ 时：

$$\frac{\oint\!\!\!\oint_{(S_i)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_i}{\Delta V_i} = \nabla\cdot\vec{A}_i$$

$$\therefore \Phi_{A_i} = \oint\!\!\!\oint_{(S_i)} \vec{A}\cdot d\vec{S}_i = (\nabla\cdot\vec{A})_i \Delta V_i$$

$$\Phi_A = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{A_i} = \sum_{i=1}^{n}\left[(\nabla\cdot\vec{A})_i \Delta V_i\right]$$

$$\Phi_A = \iiint_{(V)} \nabla\cdot\vec{A}dV = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

高斯公式：
$$\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{(V)} \nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}V$$

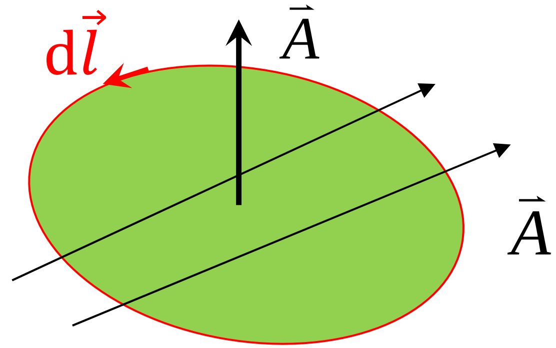
矢量场通过任意闭合曲面**S**的通量等于它的散度在其所包围的体积**V**内的积分。

四、矢量场的环量和旋度　　斯托克斯公式

（1）环量 $\vec{A}\cdot d\vec{l} = Adl\cos\theta$

$$\Gamma_A = \oint_{(L)} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

环路积分方向给定（右手法则）



（2）旋度

$\vec{n}$：右旋半径法线方向

$$(\nabla\times\vec{A})_n = (rot\vec{A})_n = (curl\vec{A})_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Gamma_A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{(L)}\vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

坐标表达式：

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{k}$$

（3）斯托克斯公式

$$(\nabla\times\vec{A})_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{(L)}\vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

$$\Gamma_{L_1} = \oint_{(L_1)}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{(L_1')}\vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_N^M \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$\Gamma_{L_2} = \oint_{(L_2)}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{(L_2')}\vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_N^M \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$\Gamma_{L_1} + \Gamma_{L_2} = \int_{(L_1')}\vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_{(L_2')}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \Gamma_L$$

$$\Gamma_L = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_{L_i} = \sum_{i=1}^{n}(\nabla\times\vec{A})_i\,\Delta\vec{S}_i = \iint_{(S)}(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$\Gamma_L = \oint_{(L)}\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{(S)}(\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

矢量场在任意闭合回路L上的环量等于以它为边界的曲面S上旋度的积分.

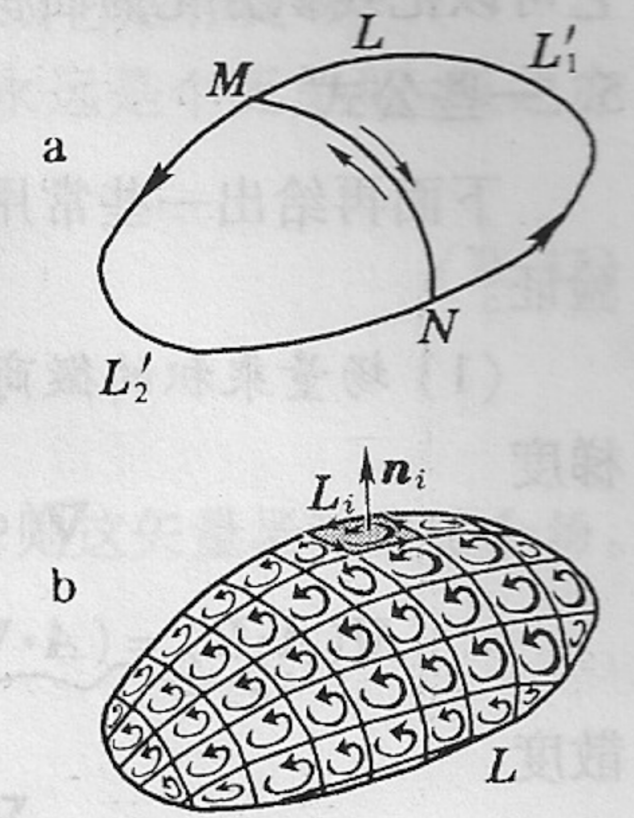


图 B－5 斯托克斯定理的证明

矢量场的种类

（1）有散场和无散场

$\nabla\cdot\vec{B}=0$ 矢量场的散度为0，则称此矢量场为无源场、无散场

$\nabla\cdot\vec{B}\neq 0$ B为有源场、有散场

矢量场的旋度永远是无散的，即：$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad \rightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 无散场可表示为另一个矢量场的旋度

（2）有旋场和无旋场

$\nabla\times\vec{A}=0$ 无旋场 （场线不闭合）

$\nabla\times\vec{A}\neq 0$ 有旋场 （场线闭合）

任何标量场的梯度永远是无旋的，即 $\nabla\times(\nabla\Phi)=0$

若一个矢量场是无旋的，可表示成某个标量场的梯度

$$\nabla\times\vec{A}=0$$

$$\vec{A}=\nabla\Phi$$

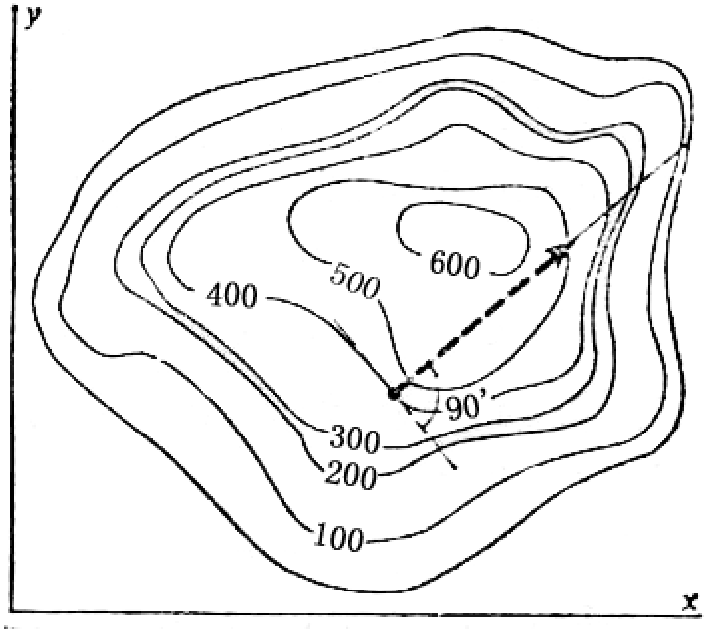
- 标量场和矢量场的表征

形象描绘场分布的工具——场线

（1）标量场：等值线（面）

其方程为：

$$h(x,y,z)=const$$



思考

- 在某一高度上沿什么方向高度变化最快?

（2）矢量场——场线（力线）

场线方程为:

$$\mathbf{A}\times \boldsymbol{dl}=0$$

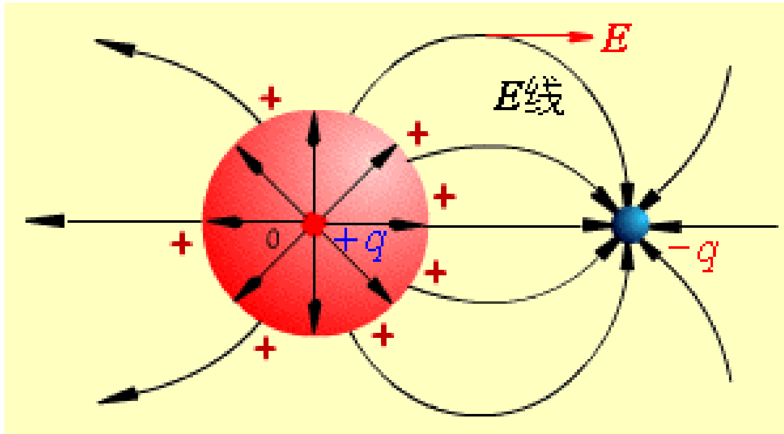


图　矢量线

- 场线某点处的切线方向代表该点处场的方向
- 场线的疏密程度代表该点处场的强度大小

五）两个零恒等式与亥姆霍兹定理

- **1.** 任何标量场的梯度的旋度恒为零：

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

如果一个矢量的旋度为零，则该矢量可以表示为一个标量场的梯度。

- **2.** 任何矢量场的旋度的散度恒为零：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

如果一个矢量的散度为零，则该矢量可以表示为另一个矢量场的旋度。

亥姆霍兹定理（Helmholtz Theorem）

假如一个矢量场的散度和旋度处处给定（或给定边界条件），则这个矢量场就确定了，最多相差一个附加常矢量。

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

$\boldsymbol{F}_1$：无旋场　　$\boldsymbol{F}_2$：无散场

$$\boldsymbol{F} = \nabla V + \nabla \times \boldsymbol{A}$$

附1 拉普拉斯算符∇^2

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V)$$

附2 几个矢量运算恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

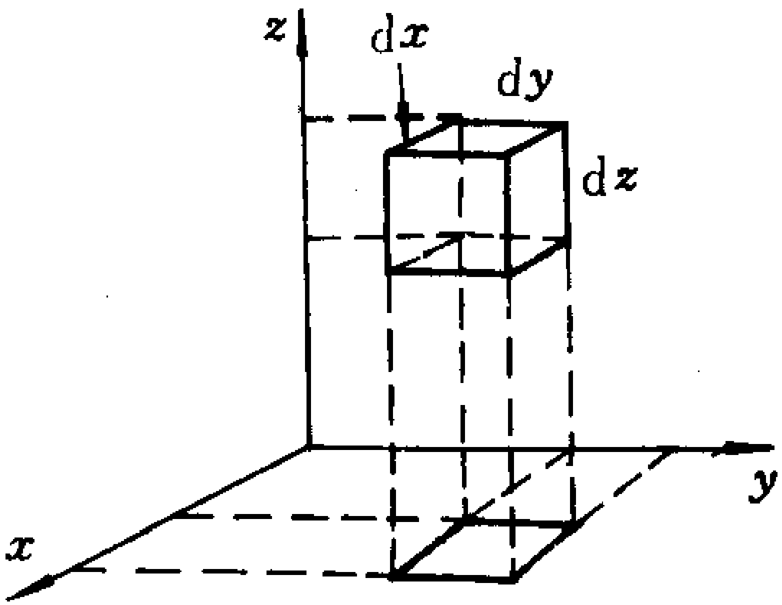
$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \phi) \times \boldsymbol{A} + \phi(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

附3 正交坐标系及其变换

1）笛卡尔坐标系（直角坐标系）

在直角坐标系中，坐标变量为（***x***，***y***，***z***）



线元（微分长度）：

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz$$

面元（微分面积）：

$$d\mathbf{S}_x = \mathbf{a}_x dydz$$

$$d\mathbf{S}_y = \mathbf{a}_y dxdz$$

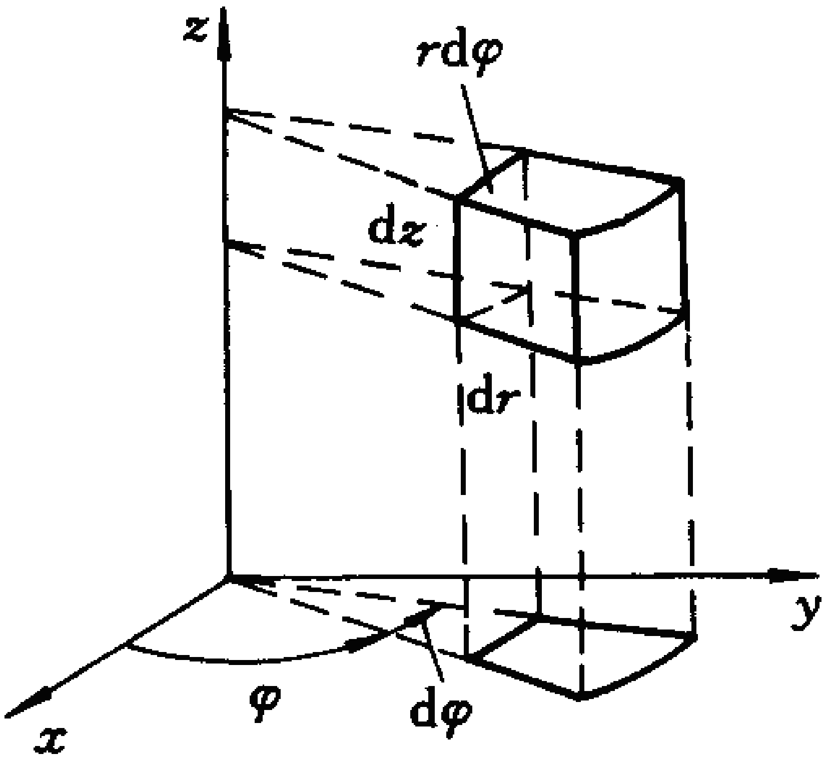
$$d\mathbf{S}_z = \mathbf{a}_z dxdy$$

体元（微分体积）：

$$dV = dxdydz$$

2）圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，坐标变量为 (r, φ, z)



线元：

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\varphi r d\varphi + \mathbf{a}_z dz$$

面元：
$$d\mathbf{S}_r = \mathbf{a}_r r d\varphi dz$$

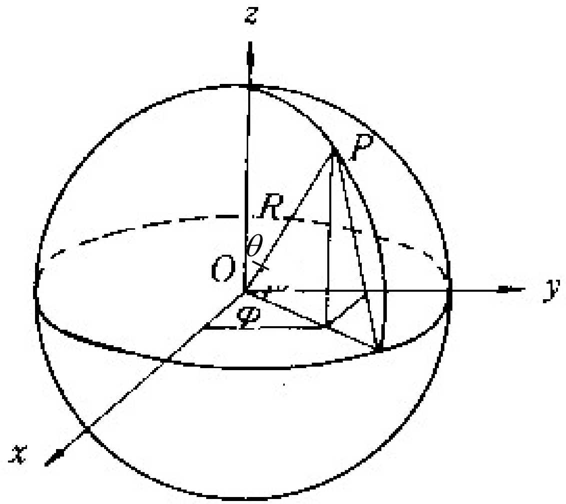
$$d\mathbf{S}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi dr dz$$

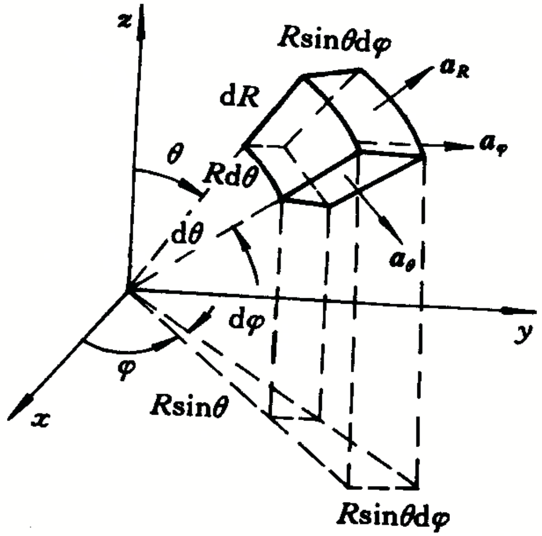
$$d\mathbf{S}_z = \mathbf{a}_z r dr d\varphi$$

体元：
$$dV = r dr d\varphi dz$$

3）球坐标系

在球坐标系中，坐标变量为 (R,θ,φ)





线元：

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_R dR + \mathbf{a}_\theta R d\theta + \mathbf{a}_\varphi R\sin\theta d\varphi$$

面元：$$d\mathbf{S}_R = \mathbf{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\mathbf{S}_\theta = \mathbf{a}_\theta R\sin\theta dR d\varphi$$

$$d\mathbf{S}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi R dR d\theta$$

体元：$$dV = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$$

教材**P6**：三种坐标系之间的相互转换