3.1.5 电偶极子和电介质

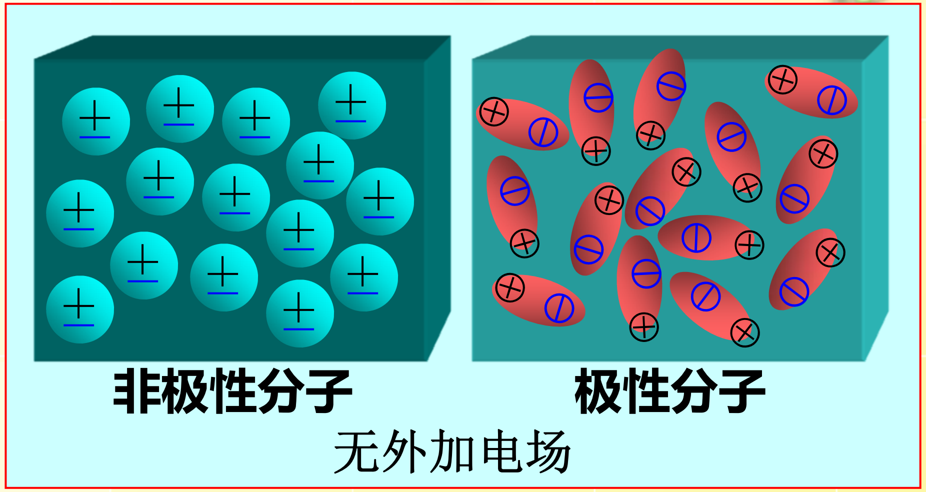
1）电介质的极化

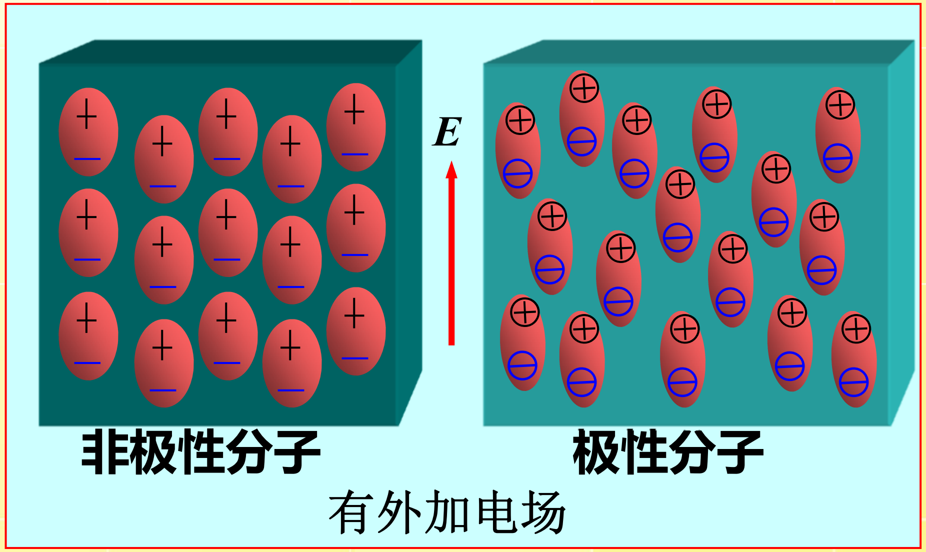
➢束缚电荷

电介质内部的带电粒子被原子/分子内在力或分子间力束缚，这些粒子的电荷称作束缚电荷。

➢极化

电场作用下，介质中非极性分子的束缚电荷发生位移，极性分子的固有电偶极矩的取向趋于电场方向。





位移极化　　取向极化

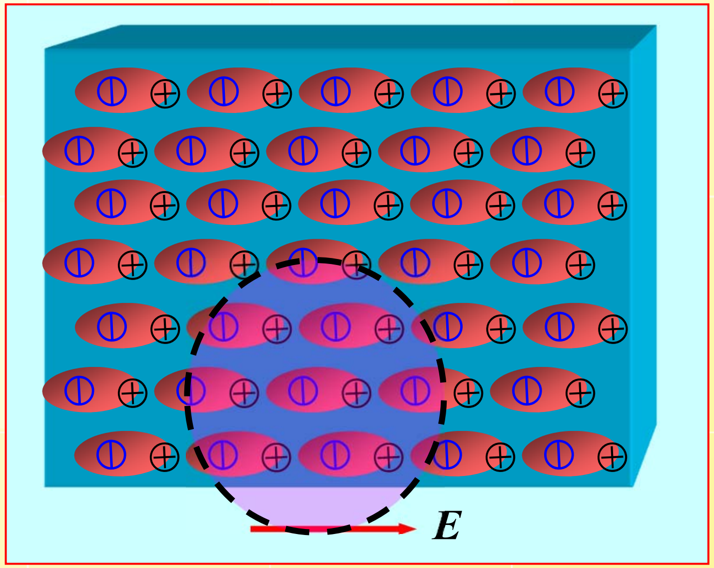
2）极化电介质的等效电荷分布

➢ 极化强度***P***

在外电场作用下，介质中某点处单位体积内的总电偶极矩。

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_k}{\Delta v}$$

（电偶极矩的体密度）



$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$
$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\hat{a}_r 2\cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta)$$

体积元dV内的电偶极矩为 $\mathrm{d}\vec{p}=\vec{P}\mathrm{d}V$

$$\boxed{\mathrm{d}\varphi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

体积V’内，极化对应的电位为

$$\boldsymbol{\varphi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\vec{P}\cdot\hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}V'$$

(其中R是源点到场点的距离)

$$\frac{1}{R}=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}$$

$$\nabla\frac{1}{R}=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$=-\frac{\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\boldsymbol{a}_R\frac{1}{R^2}$$

因此：

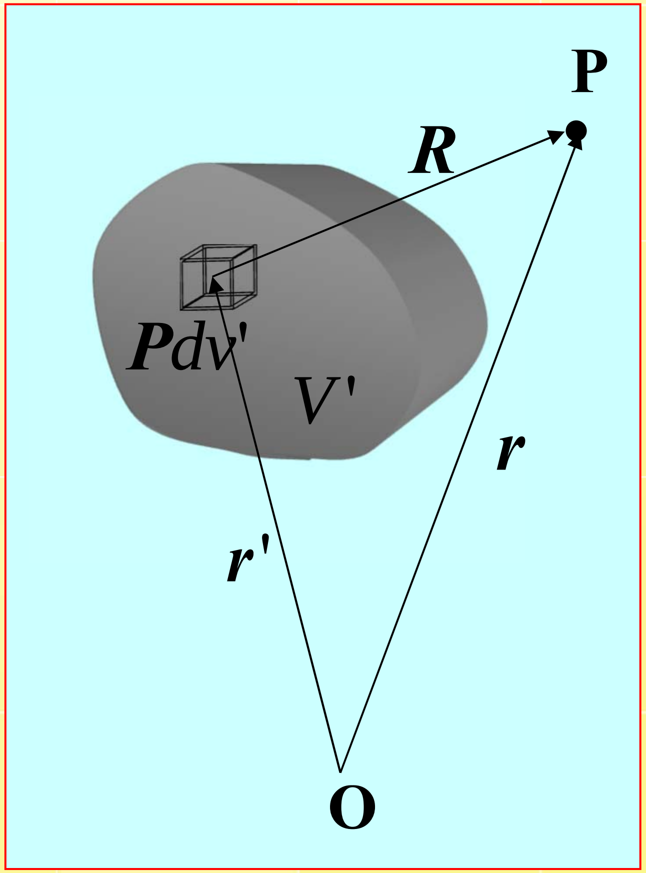
$$\boldsymbol{\varphi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)-\frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{R}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)\mathrm{d}V' - \iiint \frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{R}\mathrm{d}V'\right]$$

$$\varphi = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint\left(\frac{\vec{P}\cdot\hat{a}_n}{R}\right)\mathrm{d}S'} + \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{-\nabla'\cdot\vec{P}}{R}\mathrm{d}V'}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_s}{R}ds' \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho}{R}dv'$$



极化面电荷密度 $\rho_{ps} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}_n$

极化体电荷密度 $\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$

➢电介质与极化（束缚）电荷的关系

a）介质均匀时，介质体内净束缚电荷为零

b）非均匀介质中，体内净束缚电荷不为零，存在体束缚电荷

c）介质表面上一定有束缚电荷分布，存在面束缚电荷

思考　电介质的极化对电场的影响？

3） 电通密度和介电常数

自由空间 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{\rho}_{总}}{\varepsilon_0}$ 媒质中 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{\rho_f}+\rho_p)$

由 $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ ，得 $\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\rho$

定义电通密度： $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$

在媒质中：

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho}$$

$$\boxed{\oint_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=Q}$$

当媒质的介电性质为线性和各向同性时

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$$

极化率

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

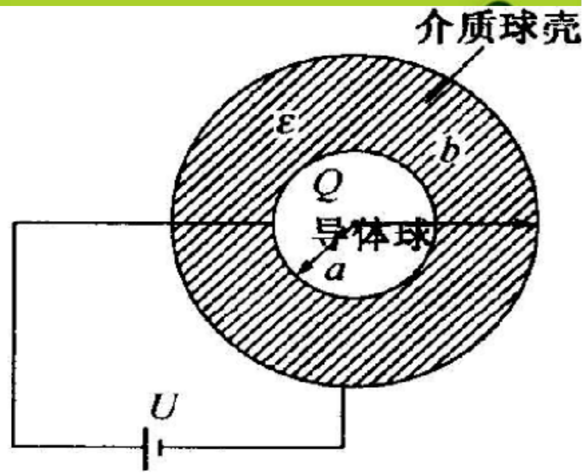
本构关系 $\boxed{\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}}$

相对介电常数（相对电容率） $\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ 绝对电容率

简单媒质：指线性、均匀、各向同性的媒质

- 电介质强度： 电介质材料所能承受（尚未被击穿）的最大电场强度，称为材料的电介质强度

【例3.4】 图3.9所示的半径为a、带有电荷量为Q的导体球，其外面有一个内半径为a，外半径为b，介电常数为ε的介质球壳。求空间任意一点的电场强度$\boldsymbol{E}$，介质中的极化电荷体密度ρ_p和介质球壳表面的极化电荷面密度ρ_{sp}。



解：

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \rho dV$$

$$\boldsymbol{D}=0 \quad (r<a)$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_r \quad (r>a)$$

$$\boldsymbol{E}=0 \quad (r<a)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{a}_r \quad (a<r<b)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_r \quad (r>b)$$

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E})$$
$$=-\nabla\cdot\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\boldsymbol{D}$$
$$=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\cdot\rho=0$$

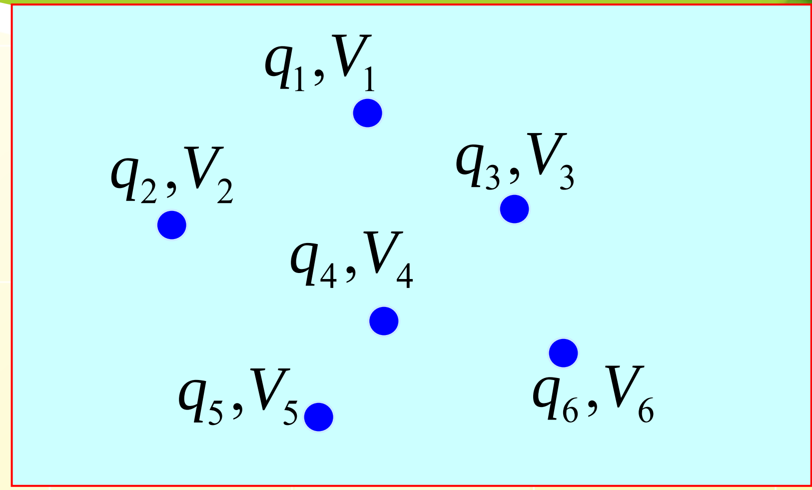
$$\rho_{sp}=\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{P}=\begin{cases}-\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=a}=-\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{Q}{4\pi a^2}\\[2ex] \boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=b}=\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{Q}{4\pi b^2}\end{cases}$$

4） 静电场中与极化相关的效应

- 压电效应/电致伸缩效应（逆压电效应）
- 铁电效应
- 驻极体效应
- 热释电效应
- 电热效应

3.1.6 电场的能量

- 离散电荷的静电能量



假设对所有带电体从零开始同步缓慢充电

$$\alpha : 0 \rightarrow 1$$

初态		任意时刻		终态
$0,0$	→	$\alpha q_1, \alpha V_1$	→	q_1, V_1
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$0,0$		$\alpha q_k, \alpha V_k$		q_k, V_k
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$0,0$		$\alpha q_n, \alpha V_n$		q_n, V_n

外电源所做的功

$$dW = \sum_{k=1}^{n} (\alpha V_k) d(\alpha q_k) = [\sum_{k=1}^{n} (q_k V_k)] \alpha d\alpha$$

$$W = \int dW = \int_0^1 [\sum_{k=1}^{n} (q_k V_k)] \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_k V_k$$

由能量守恒：

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_k V_k$$

➢分布电荷的静电能量 $W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho V \, dv'$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\phi \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\phi \mathrm{d}V$$

$$\nabla \cdot (\phi\vec{D}) = \phi\nabla \cdot \vec{D} + \nabla\phi \cdot \vec{D}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \nabla \cdot (\phi\boldsymbol{D})\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}V$$

$$\int_V \nabla \cdot (\phi\vec{D})\,\mathrm{d}V = \oint_S \phi\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_s \phi\boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V$$

➢用场量表示静电能

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \, dv$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dv$$

对线性媒质， $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2\,dv \qquad W_e = \frac{1}{2}\int_v \frac{D^2}{\varepsilon}\,dv$$

- 静电能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \qquad w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad w_e = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

第三章 静态场
——恒定电流场

- 电流和电流密度
- 电流连续性方程
- 恒定电流场的基本方程
- 恒定电流场的边界条件
- 恒定电流场与静电场的比拟

3.1.7 恒定电流场

1） 电流

- 三种电流

传导电流——电荷在导电媒质中的定向运动

对流电流——带电粒子在真空或稀薄气体中的定向运动

位移电流——随时间变化的电场

流过S面的电流 $$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$ 电流是一个标量

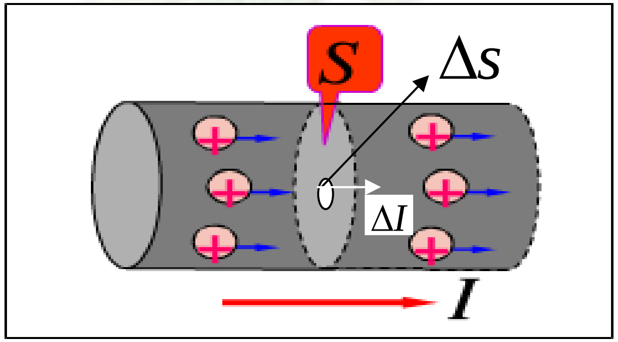
- 恒定电流

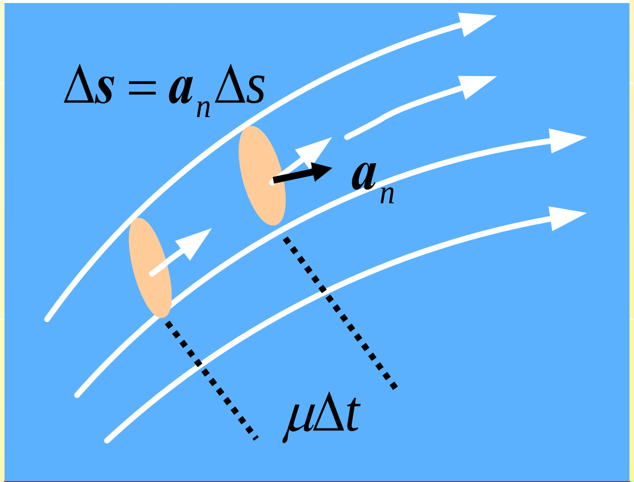
$$I = \frac{dq}{dt} = 常数$$ $\longrightarrow$ 流过S面的q和t成正比

2）电流密度

电流密度矢量J：大小为垂直于正电荷运动方向的单位面积上通过的电流，方向为正电荷运动方向。

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} \boldsymbol{a}_I$$





考虑一种载流子的稳定运动

Δt内通过面元的电荷量

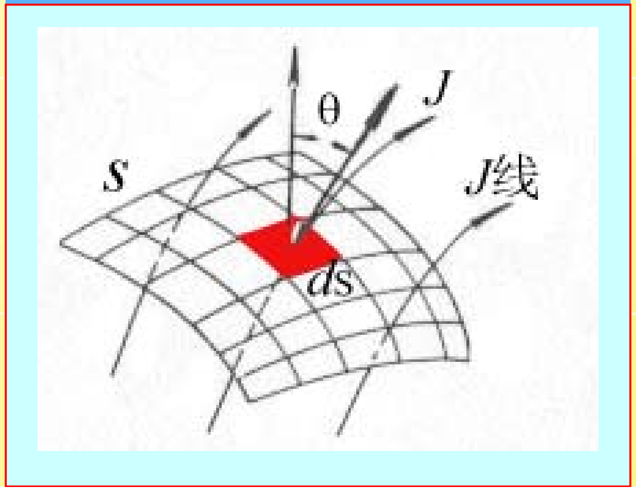
$$\Delta Q = Nq[(\boldsymbol{\mu}\Delta t) \cdot \Delta \boldsymbol{s}]$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\boldsymbol{\mu} \cdot \Delta \boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{J} = Nq\boldsymbol{\mu} \quad (\mathrm{A/m^2})$$

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta \boldsymbol{s}$$

$$\boxed{I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} \quad (\mathrm{A})}$$



$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{J} = Nq\boldsymbol{\mu} \\ &Nq \to \rho \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{\mu} \ (\mathrm{A/m^2})$$

对流电流 $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{\mu}$

传导电流 $\boldsymbol{J} = \sum_i N_i q_i \boldsymbol{\mu}_i$

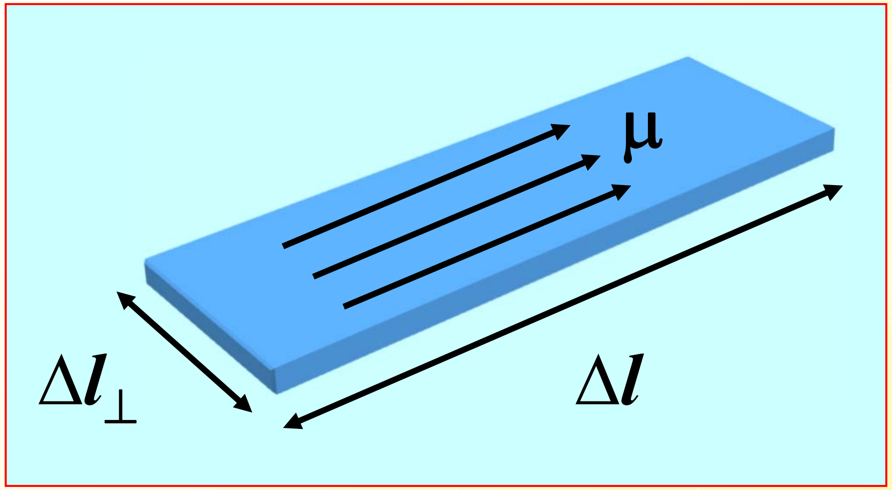
对于各向同性的导体材料，传导电流满足：

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$$

欧姆定律

思考1　不同电流分布的电流密度如何表示?

面电流——电流在薄层内流动



面电流密度

$$\boldsymbol{J}_s = \rho_s \boldsymbol{\mu}$$

线电流：　$\boldsymbol{I} = \rho_l \boldsymbol{\mu}$　$(= \boldsymbol{\lambda\mu} = \boldsymbol{\eta\mu})$

思考2　电流元?

3） 电流连续性方程

➢ 电荷守恒定律：

任一封闭系统的电荷总量不变，即任意一体积内的电荷增量必定等于流进这个体积的电荷量。

闭合面流出去的电流 = 该体积中电荷的减少率

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (\mathrm{A/m^3})}$$

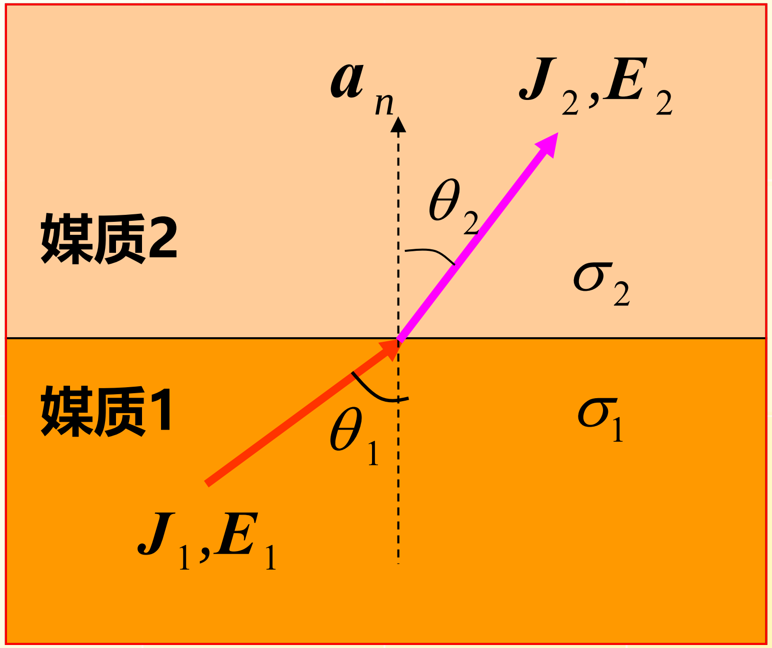
电流连续性方程（**Continuity Equation**）

对于恒定电流，电荷密度不随时间变化 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$

4）恒定电流场的基本方程

微分形式	积分形式
$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$	$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$

5）恒定电流场的边界条件



$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ J_{1n} = J_{2n} \end{cases}$$

思考　两种有损媒质以及良导体与不良导体的边界？

6）恒流场与静电场的比拟

	静电场（$\rho = 0$ 区域）	恒流场（电源外）
基本方程	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0,\quad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0,\quad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$
	$\nabla\cdot\vec{D} = 0,\ \nabla\times\vec{E} = 0$	$\nabla\cdot\vec{J} = 0,\quad \nabla\times\vec{E} = 0$
本构关系	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{J} = \sigma\vec{E}$
位函数	$\vec{E} = -\nabla\varphi,\qquad \nabla^2\varphi = 0$	$\vec{E} = -\nabla\varphi,\qquad \nabla^2\varphi = 0$
边界条件	$E_{1t} = E_{2t}\qquad D_{1n} = D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t}\qquad J_{1n} = J_{2n}$
	$\varphi_1 = \varphi_2,\quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$	$\varphi_1 = \varphi_2,\quad \sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$

对应物理量	静电场	$\vec{E}$	$\vec{D}$	φ	q	ε	C
	恒定电场	$\vec{E}$	$\vec{J}$	φ	I	σ	G