

## ➤ 上次课内容回顾

### § 2.1 光的衍射现象

障碍物尺寸与波长相当时衍射现象明显  
惠更斯—菲涅耳原理

### § 2.2 菲涅尔半波带 菲涅尔衍射

菲涅耳半波带

圆孔衍射、圆屏衍射

波带片

## 本次课内容：

§ 2.3 夫琅禾费单缝衍射（熟练掌握）

§ 2.4 夫琅禾费圆孔衍射（熟练掌握）

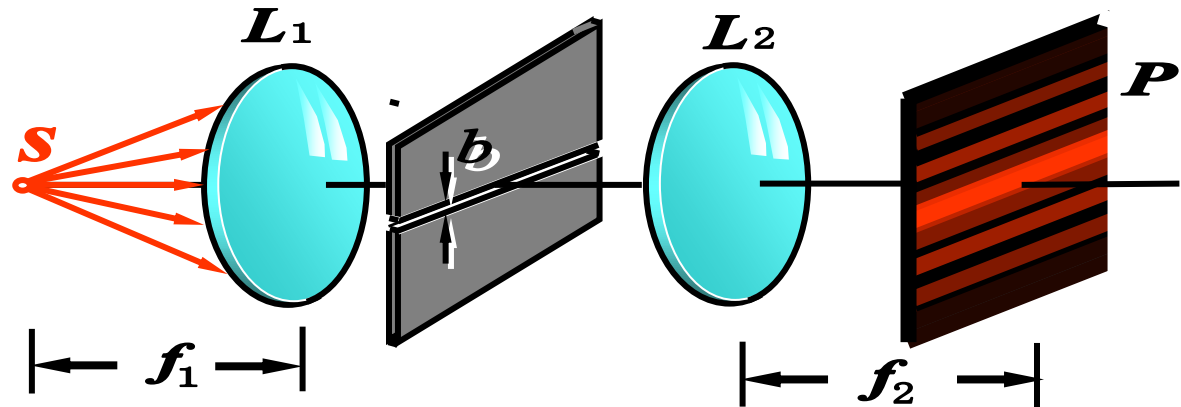
§ 2.5 夫琅禾费多缝衍射（基本掌握）

§ 2.6 平面衍射光栅（熟练掌握）

§ 2.7 \*晶体对X射线的衍射（了解）

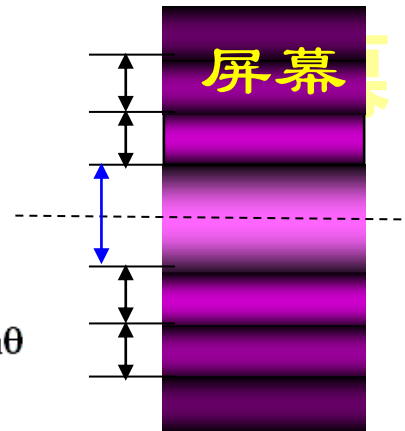
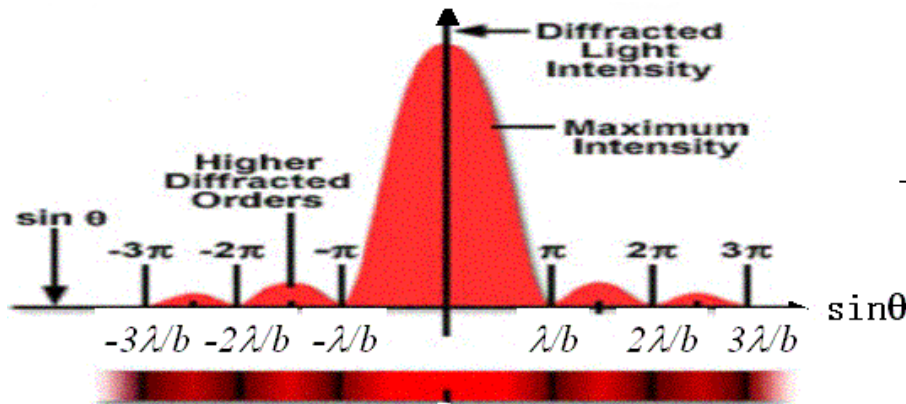
## § 2.3 夫琅禾费单缝衍射

### 一. 实验装置



夫琅禾费单缝衍射 Diffraction by Single Slit

### 衍射图样主要规律：



- (1) 中央亮纹最亮，其宽度是其他亮纹的两倍；其他亮纹的亮度逐渐下降。
- (2) 狭缝越小，条纹越宽
- (3) 波长 $\lambda$ 越大，条纹越宽

$\Delta x \sim \lambda$

## 二、强度的计算(P97 附录2.1)

### 1、B'B上次波振动

$$dE_0 = \frac{A_0}{b} dx \cos \omega t$$

### 2、BD上次波的振动

$$dE = \frac{A_0 dx}{b} \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta - \omega t\right)\right]$$

### 3、P点的振动

$$dE_p = \frac{A_0 dx}{b} \exp\left\{i\left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta + \Delta) - \omega t\right]\right\}$$

### 4、狭缝上所有次波在P的叠加

$$E = \int dE = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)} e^{i\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} + K\Delta - \omega t\right)}$$

$$A_p = A_0 \frac{\sin u}{u} = A_0 \operatorname{sinc} u$$

$$I_p = I_0 \operatorname{sinc}^2 u \quad \text{其中 } u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$

### 三、衍射花样的强度分布

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\sin^2 u}{u^2} \right) = \frac{2 \sin u (u \cos u - \sin u)}{u^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin u = 0 \\ u = \operatorname{tgu} \end{cases}$$

#### (1) 单缝衍射中央最大位置

由  $\sin u = 0$ , 得  $u = 0, u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta, \sin \theta_0 = 0$  即:  $\theta_0 = 0$

在焦点  $P_0$  处,  $I_{P_0} = A_0^2$  光强最大。

#### (2) 单缝衍射最小值的位置

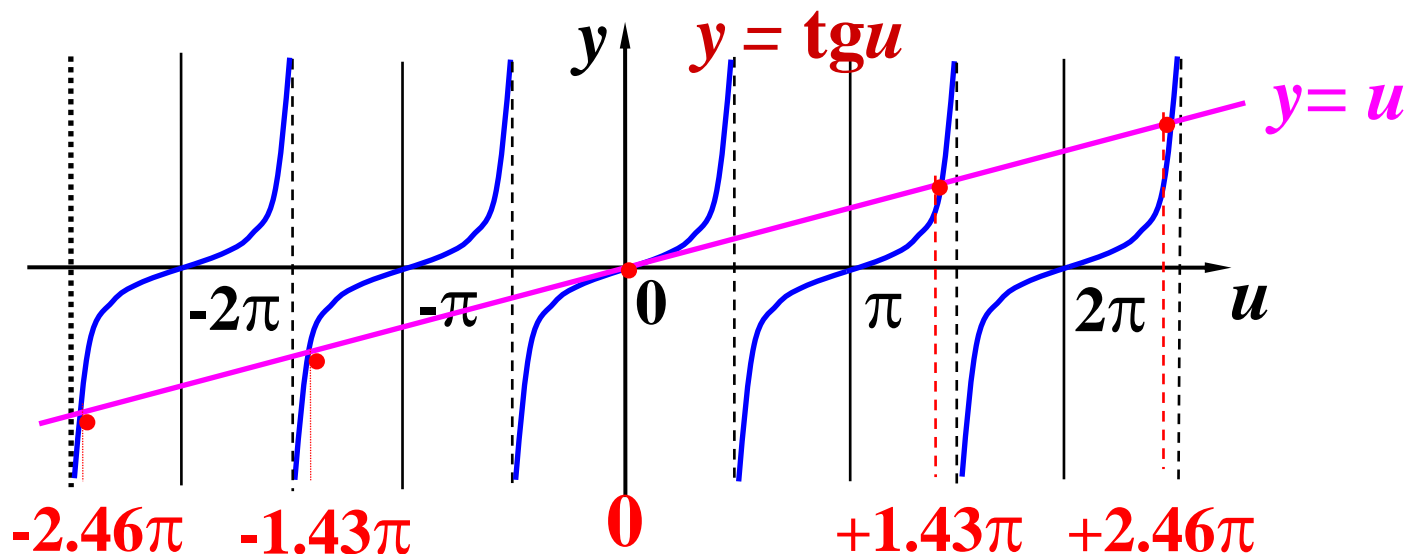
由  $\sin u = 0$ , 得  $u = k\pi$ , 即:  $\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta = k\pi$

得:  $\sin \theta = \frac{k\lambda}{b}, (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$

此时,  $A_P = 0$  屏上这些点是暗的。

#### (3) 单缝衍射次最大的位置

由  $u = \operatorname{tgu}$  决定。作  $y = u, y = \operatorname{tgu}$ , 交点就是方程的解



$$u = 0, u_1 = \pm 1.43\pi, u_2 = \pm 2.46\pi, u_3 = \pm 3.47\pi, u_4 = \pm 4.48\pi \cdots$$

次最大序号	次最大位置	
	$u$	$\sin \theta$
1	$\pm 1.43\pi$	$\pm 1.43\lambda/b \approx \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda}{b}$
2	$\pm 2.46\pi$	$\pm 2.46\lambda/b \approx \pm \frac{5}{2} \frac{\lambda}{b}$
3	$\pm 3.47\pi$	$\pm 3.47\lambda/b \approx \pm \frac{7}{2} \frac{\lambda}{b}$
4	$\pm 4.48\pi$	$\pm 4.48\lambda/b \approx \pm \frac{9}{2} \frac{\lambda}{b}$

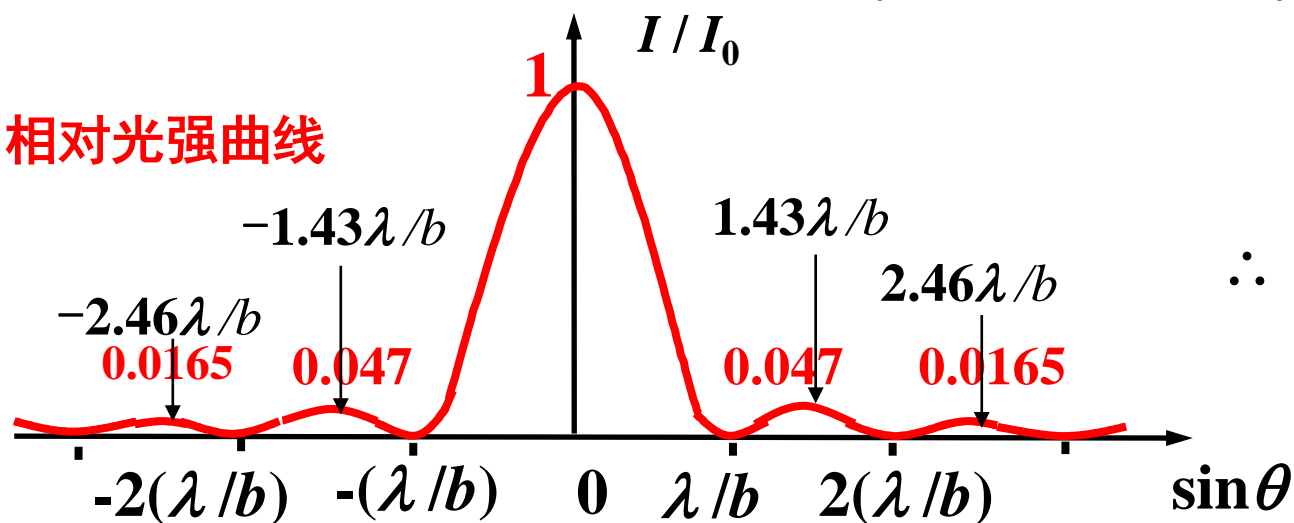
$$\sin \theta_{k_0} \approx \pm \left( k_0 + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b}$$

$$(k_0 = 1, 2, \cdots)$$

## ◆ 强度分布曲线

$$A_1^2 = 0.0472 A_0^2, A_2^2 = 0.0165 A_0^2, A_3^2 = 0.0083 A_0^2 \dots$$

相对光强曲线

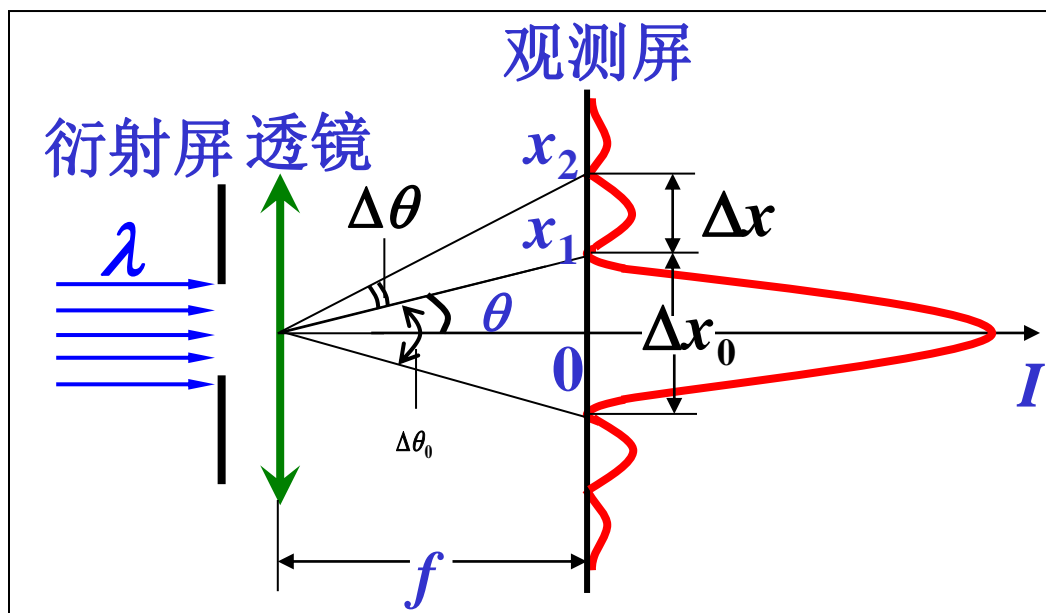


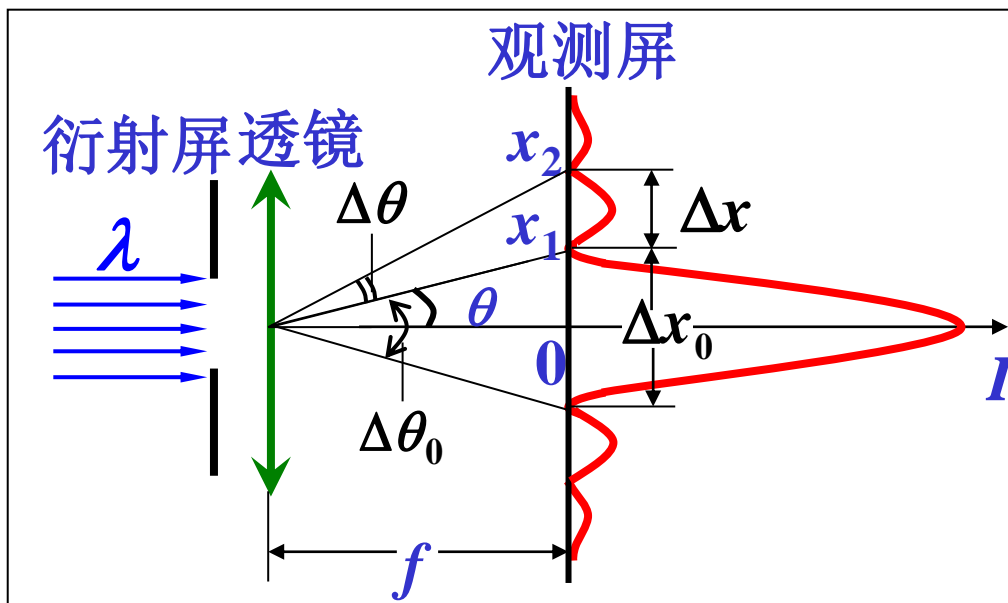
$$\therefore I_{\text{次极大}} \ll I_{\text{主极大}}$$

## 四、单缝衍射花样的特点

(1) 各级最大值光强不相等，第一级次最大值不到中央最大值的5%。

$$A_1^2 = 0.0472 A_0^2$$





最小值位置  $\sin \theta = \frac{k\lambda}{b}$

中央角宽度  $\Delta\theta_0 = 2\frac{\lambda}{b}$

中央线宽度  
 $l = f\Delta\theta_0 = 2f\frac{\lambda}{b}$

(2) 中央亮条纹角宽度为其它亮条纹的二倍。

### ➤ 暗纹条件（各级暗纹位置）

$$\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{b} \quad \theta_k \approx k \frac{\lambda}{b} \quad l_k \approx f \sin \theta_k = f \frac{k\lambda}{b}$$

$$\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k = (k+1)\frac{\lambda}{b} - k\frac{\lambda}{b} = \frac{\lambda}{b} \quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{b} \quad \text{相邻两暗纹角宽度}$$

$$\Delta l = l_{k+1} - l_k \longrightarrow l \approx f \frac{\lambda}{b} = \frac{1}{2} l_{\text{中}} \quad \text{两侧明纹宽度}$$

(3) 各级暗纹等间距，中央明纹宽度为其它明纹宽度的两倍

$$l \approx f \frac{\lambda}{b}$$

(4) 用白光作为光源

$$\frac{\lambda}{b}$$

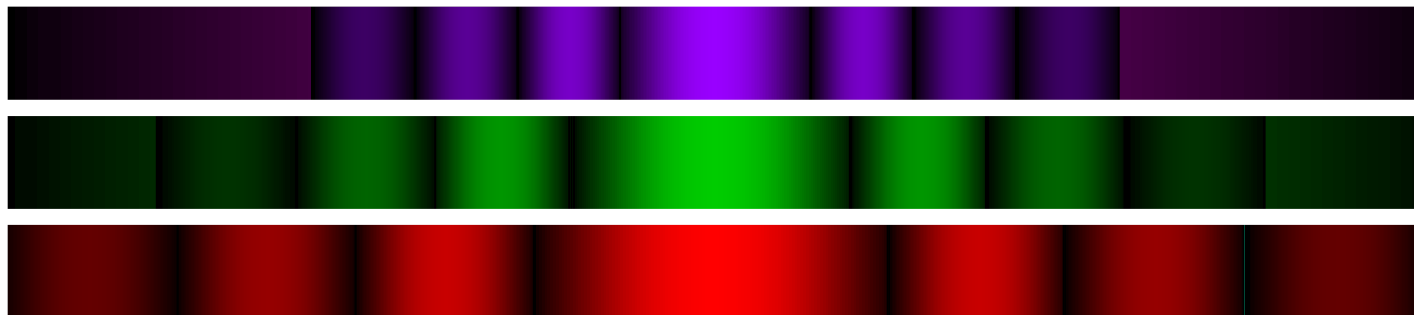
缝宽一定,波长越长,  
则各级衍射角越大,  
中央明纹越宽.

相对光强

波长  $\lambda$

— 450 nm  
— 550 nm  
— 650 nm

$$a \sin \theta / \lambda$$





### (5) 缝宽变化对条纹的影响

A. 当  $b > \lambda$  且  $\frac{\lambda}{b} \rightarrow 1$  时,  $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,

只存在中央明纹, 屏幕是一片亮。

B. 当  $b \uparrow$  且  $\frac{\lambda}{b} \rightarrow 0$  时,

$\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\theta_k \rightarrow 0$ , 只显出单一的明条纹

只有在  $b \gg \lambda$ , 衍射现象才可忽略不计。

C. 反之,  $b$  越小或  $\lambda$  越大, 衍射现象越明显。

$\Delta y = f \frac{\lambda}{b}$  — 缝宽越小, 条纹间隔越宽。

### (6) 衍射反比率

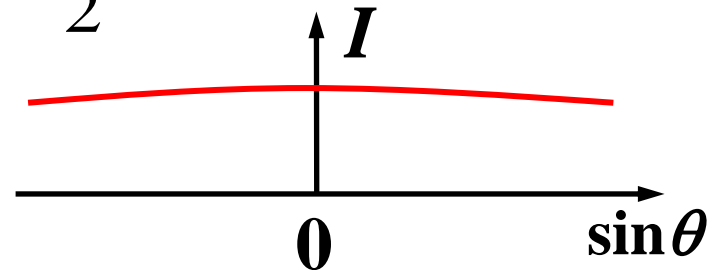
$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{b}$$

a. 障碍物与光波之间的限制与扩展关系。

b. 包含着“放大”。缝宽减小,  $\Delta\theta$  就增大。

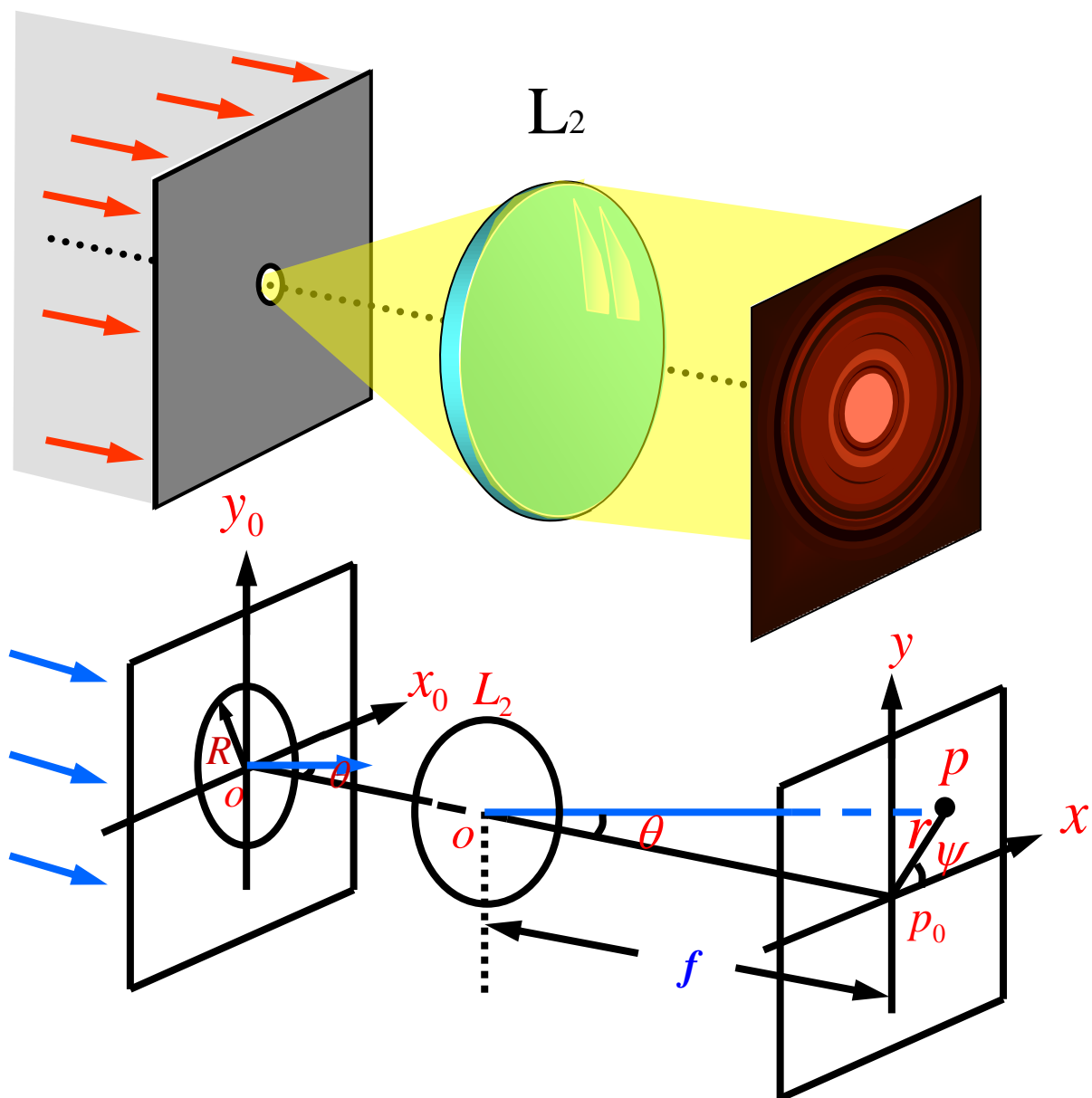
暗纹位置:

$$b \sin \theta_k = k \lambda$$



## § 2.4 夫琅禾费圆孔衍射

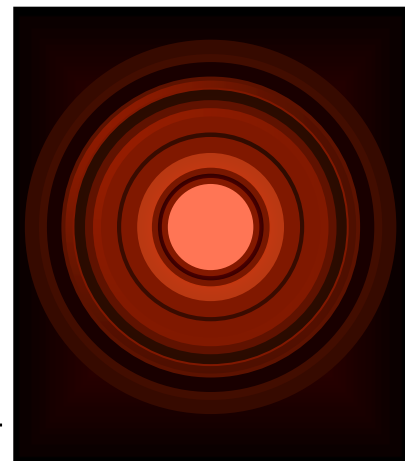
### 一、实验装置



## 二、光强分布 (P99 附录2.2)

$$I_p = A_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{2!}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{m^3}{3!}\right) + \dots \right]^2$$

$$= A_0^2 \left[ \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{(k'+1)!k'!} (m^{k'})^2 \right]^2 = A_0^2 \frac{J_1^2(2m)}{m^2} = I_0 \frac{J_1^2(2m)}{m^2}$$



$m = \pi R \sin \theta / \lambda$   $J_n(x)$ 为贝塞尔函数

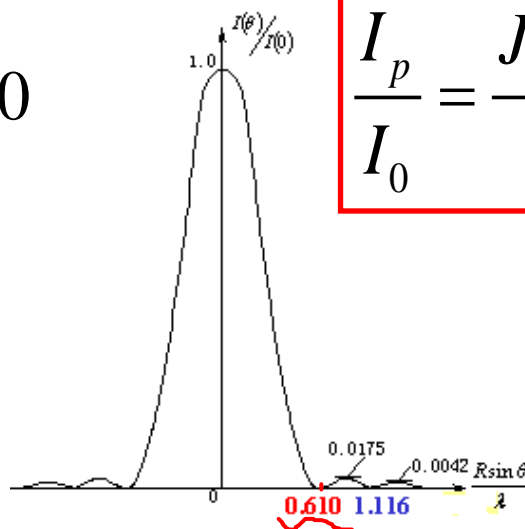
1) 中央最大值位置:  $\sin \theta_0 = 0$

2) 最小值的位置:

$$\sin \theta_1 = 0.610 \frac{\lambda}{R},$$

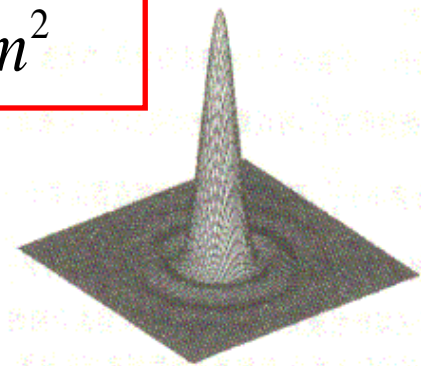
$$\sin \theta_2 = 1.116 \frac{\lambda}{R},$$

$$\sin \theta_3 = 1.619 \frac{\lambda}{R}$$



光强分布曲线

$$\frac{I_p}{I_0} = \frac{J_1^2(2m)}{m^2}$$



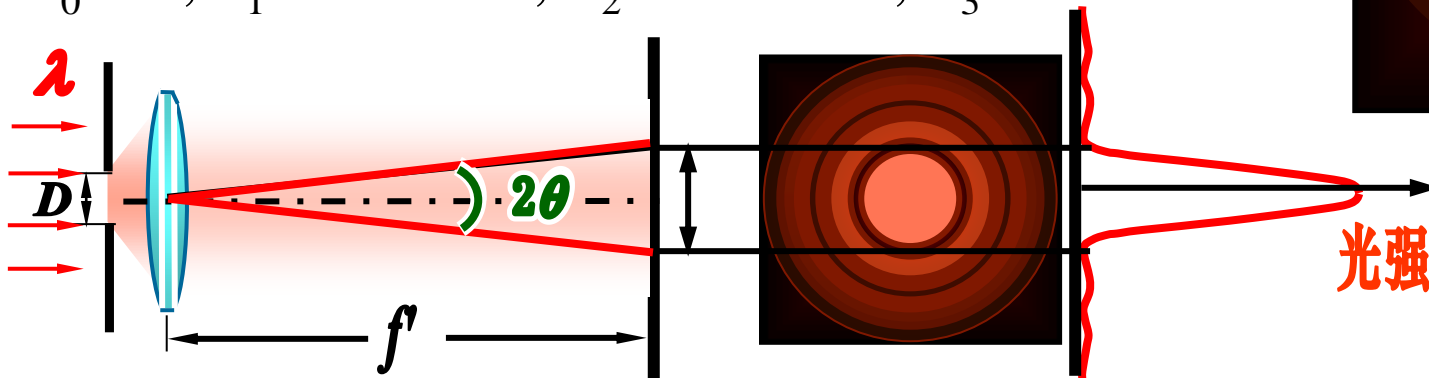
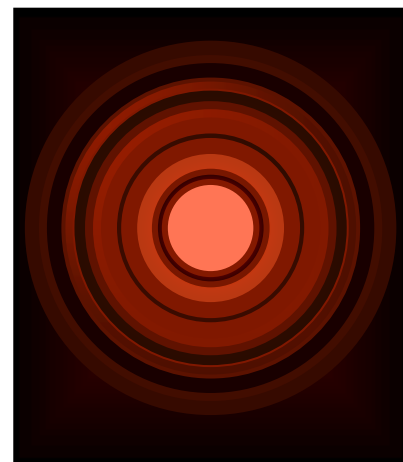
光强二维分布图

3) 最大值的位置为：

$$\sin \theta_{10} = 0.819 \frac{\lambda}{R}, \sin \theta_{20} = 1.333 \frac{\lambda}{R}, \sin \theta_{30} = 1.847 \frac{\lambda}{R}$$

4) 最大值的相对强度为

$$A_0 = 1, A_1 = 0.0175, A_2 = 0.0042, A_3 = 0.0016$$

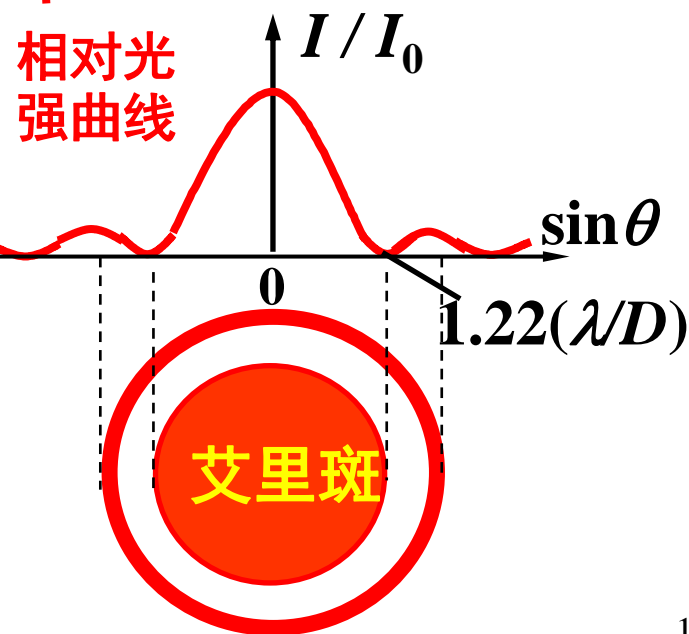


$$\sin \theta = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\text{半角宽度 } \Delta \theta = 1.22 \lambda / D$$

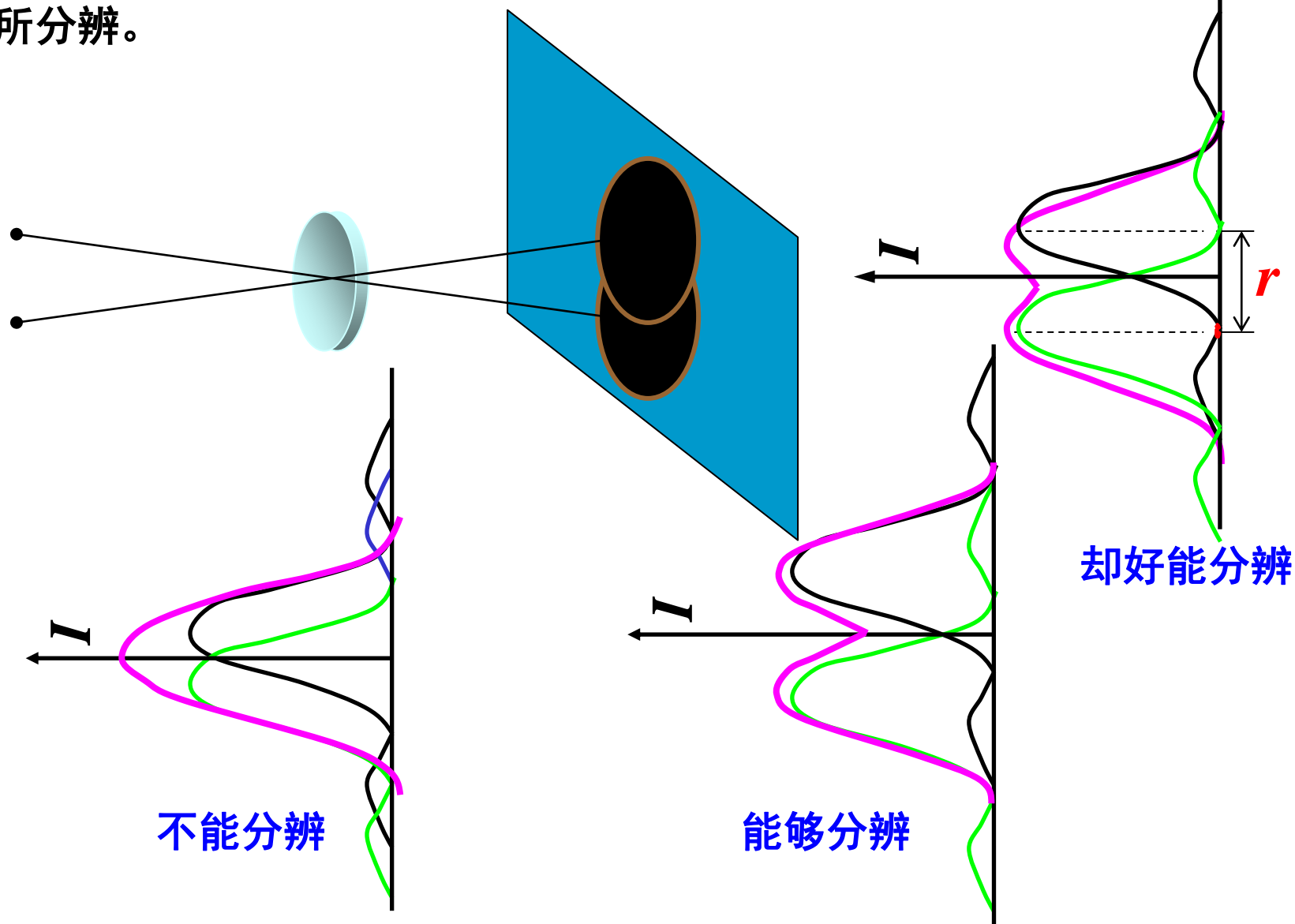
艾里斑的半径为

$$\Delta l \approx f \Delta \theta = 0.61 \frac{\lambda}{R} f = 1.22 \frac{\lambda}{D} f$$



### 三、光学仪器的分辨率

**瑞利判据：**如果一个点像的衍射图样的中央最亮处刚好与另一个点像的衍射图样的第一级暗环相重合，就认为这两个物点恰好能被这一光学仪器所分辨。



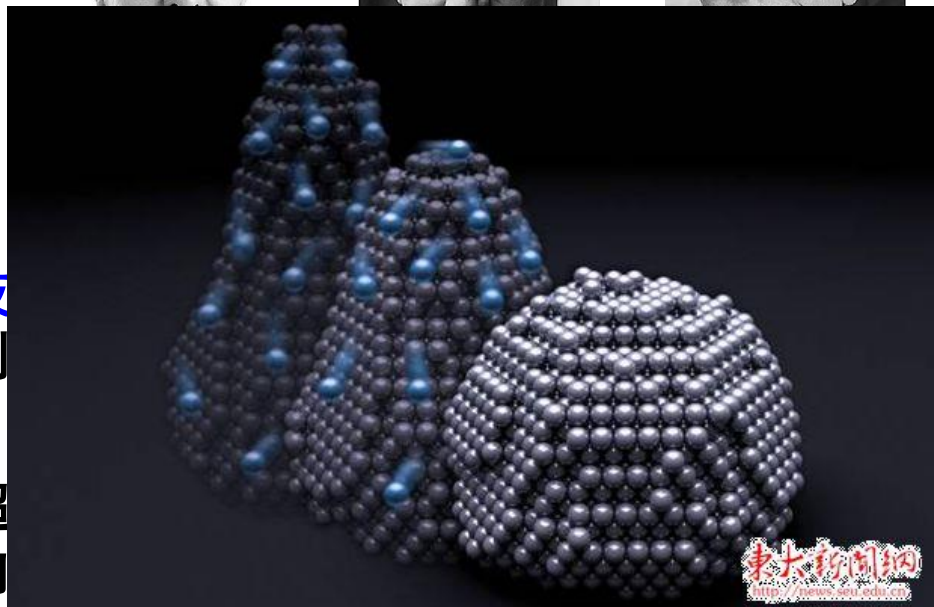
# 知识窗：超分辨荧光显微技术

2014年度诺贝尔化学奖，成就：开发超分辨率显微镜，使人能窥探更微小世界。



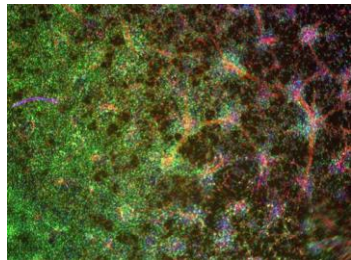
超分辨率荧光显微技术突破传统光学系统极限分辨率的限制，达到纳米级分辨率。

研究的意义：利用超分辨率显微镜研究，如观察活细胞内蛋白质在分子水平表达及编码，对于理解生命过程和疾病发生机理具有重要意义。

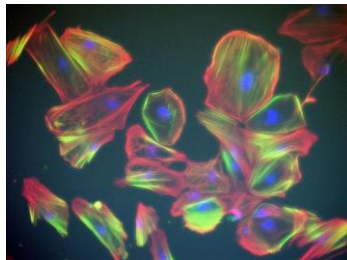


突破传统光学系统极限对光学系统分辨率的极限，达到纳米级分辨率。

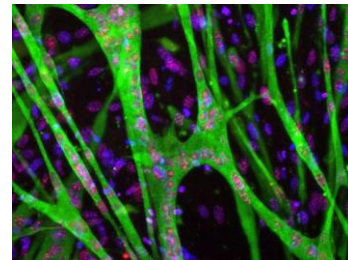
利用超分辨率显微镜研究活体细胞进行研究工作，如观察活细胞内蛋白质功能如何在分子水平表达及编码，对于理解生命过程和疾病发生机理具有重要意义。



MAP2神经元荧光显微图片



血管平滑肌细胞荧光显微图片



成肌细胞荧光显微图片

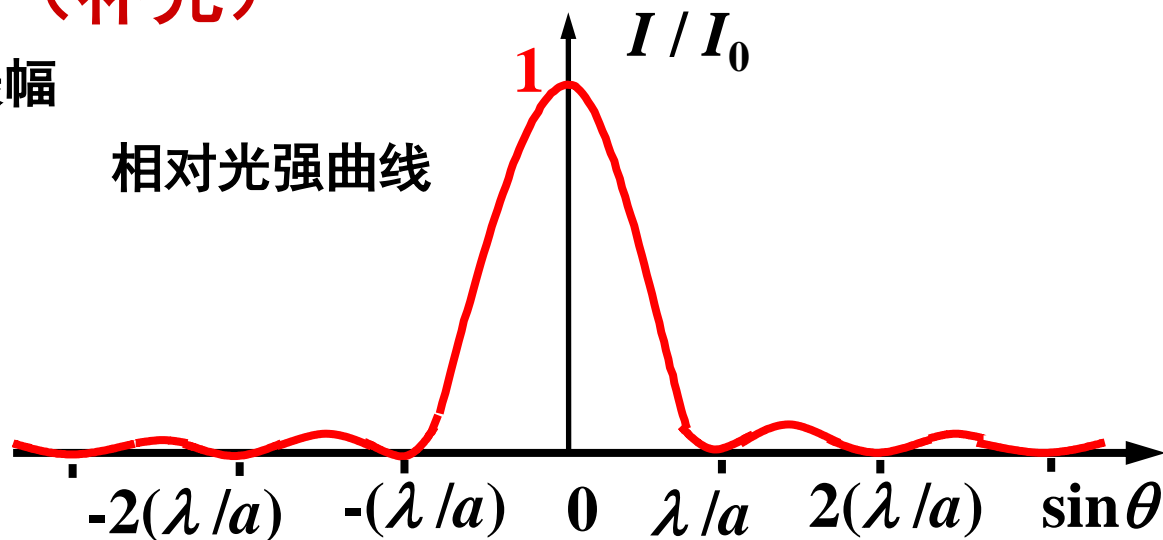
# 夫琅禾费矩孔衍射（补充）

接收屏上任一点 P 的复振幅

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_1$$

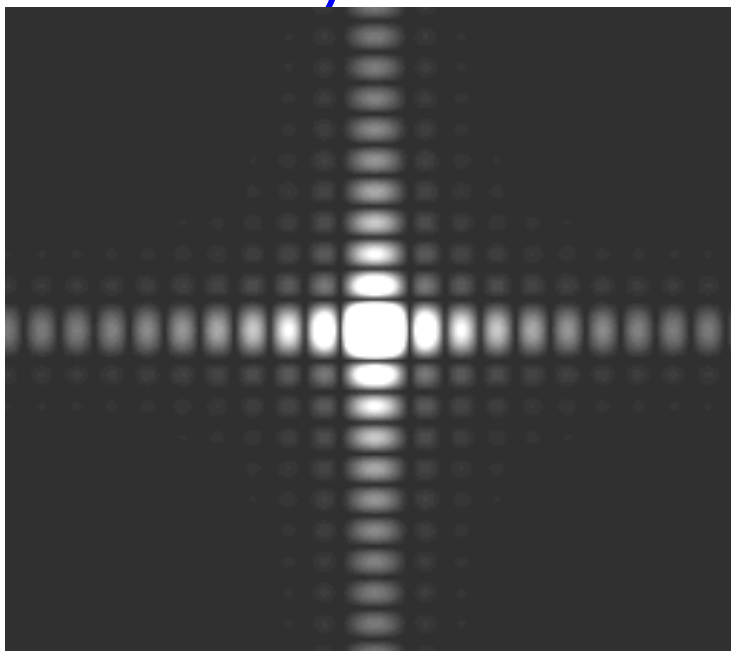
$$\beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta_2$$

相对光强曲线



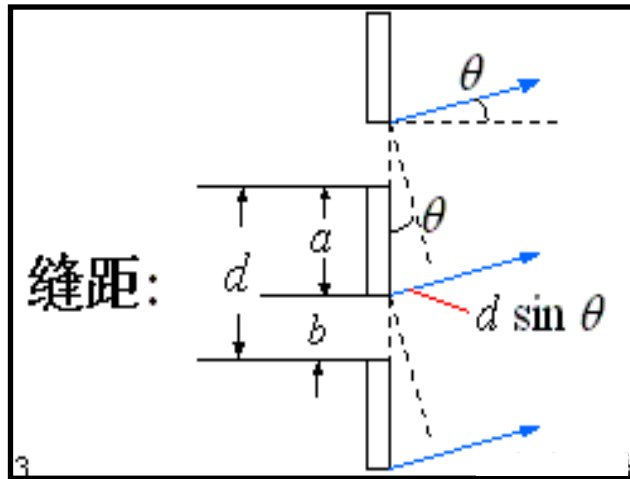
➡  $I_P = I_0 \text{sinc}^2 \alpha \text{sinc}^2 \beta$

方孔夫琅禾费衍射图样

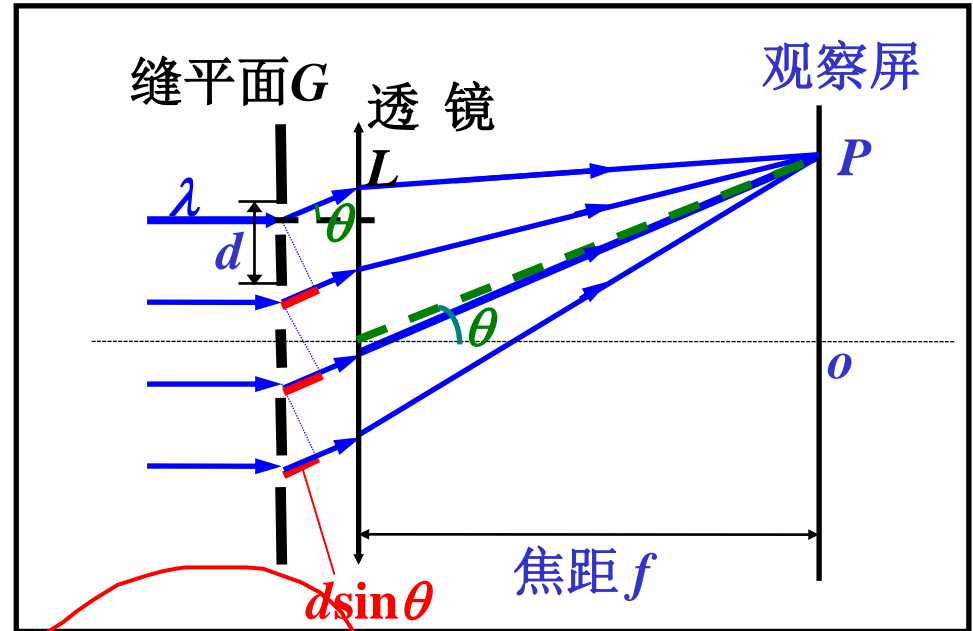


## § 2.5 夫琅禾费多缝衍射

### 一、实验装置



总缝数  $N$ , 缝宽  $b$ , 缝间距  $d$



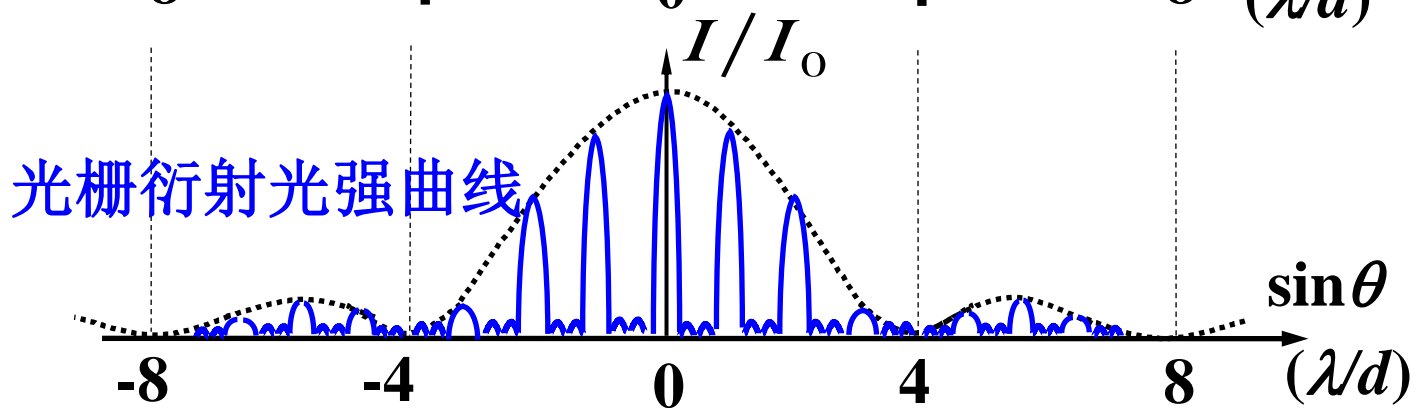
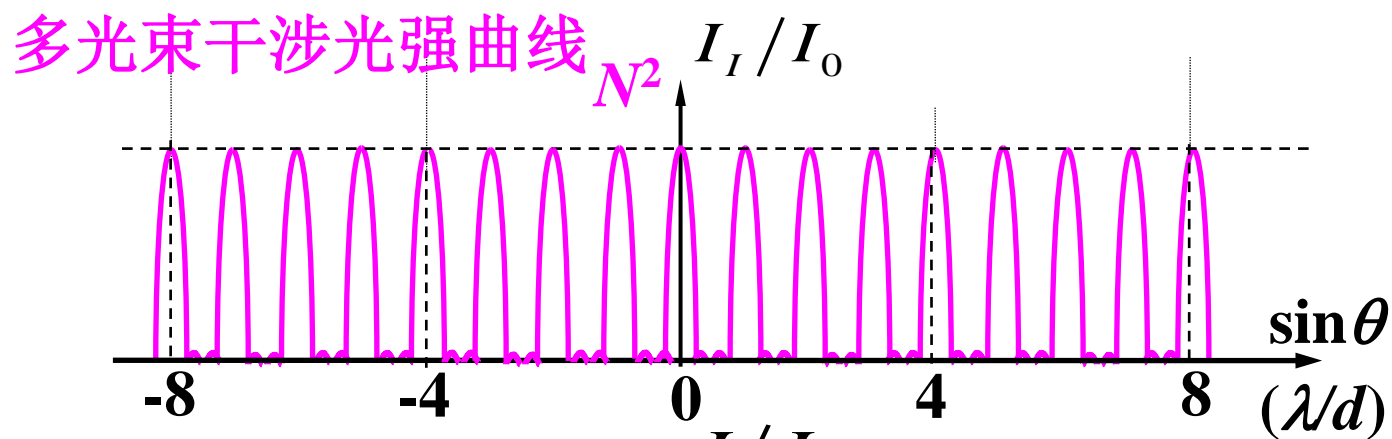
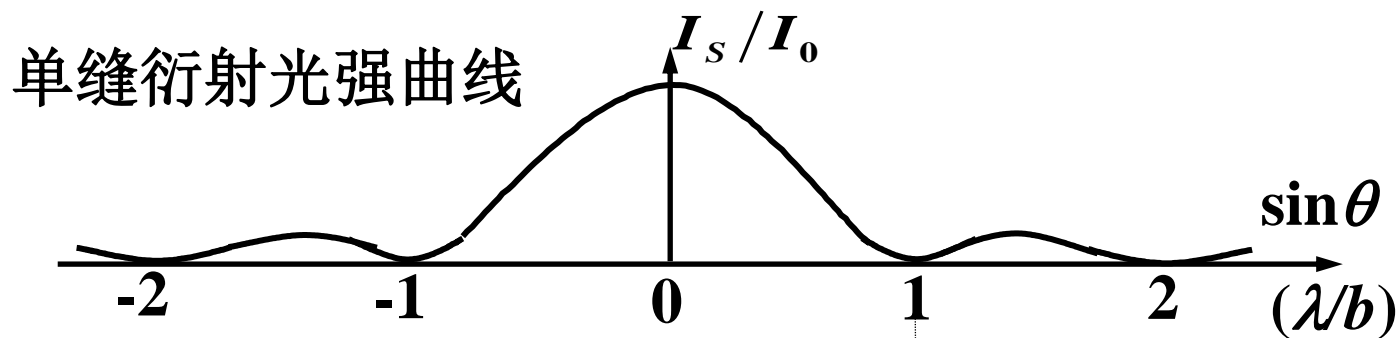
### 二、多缝衍射的强度分布 (P101 附录2.3)

$$A_P = A_0 \frac{\sin \left[ \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right]}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \cdot \frac{\sin N \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

$$\frac{I_2}{I_0^2} = \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 N \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)} = \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 N v}{\sin^2 v}$$

单缝衍射 缝间干涉因子





### 三、多缝衍射图样强度分布的特征

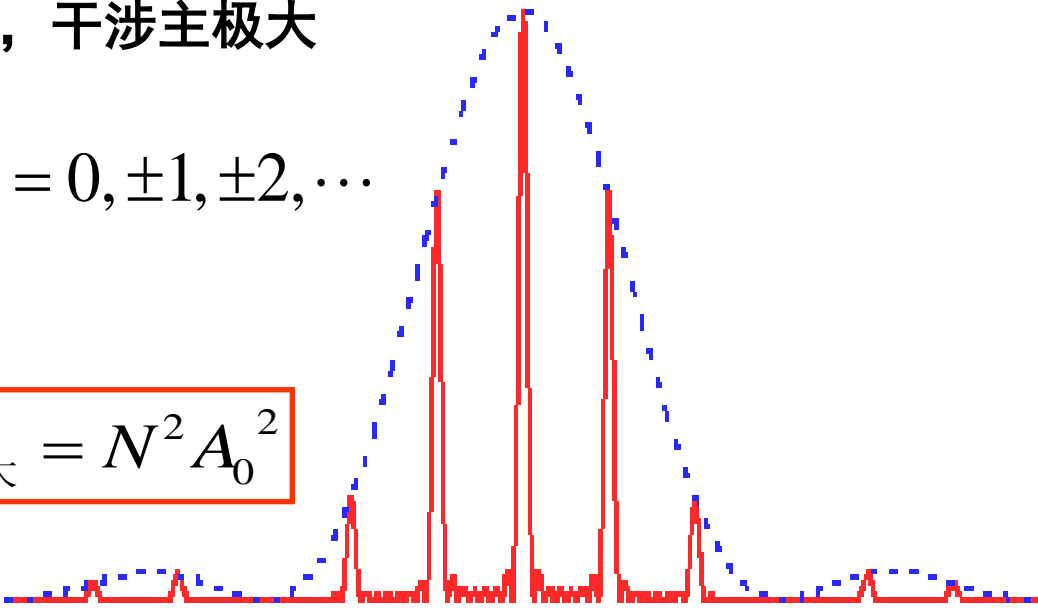
光强  $\frac{I_2}{I_0^2} = \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$

1、 $\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$  分子，分母同为零，干涉主极大

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2j\pi, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2j\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} N\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} = N^2 \rightarrow A_{\text{最大}}^2 = N^2 A_0^2$$

干涉主极大方向  $d \sin \theta = j\lambda$



2、分子为 0，分母不为零，干涉极小 (N-1)

$$\frac{1}{2} N\varphi = j'\pi (j' = \pm 1, \pm 2 \dots) \xrightarrow{\text{条件}}$$

$$\rightarrow A = 0 \quad \text{最小}$$

$$\left( \begin{array}{l} \varphi = 2j' \frac{\pi}{N} \\ j' = \pm 1, \pm 2 \dots \\ j' \neq 0, \pm N, \pm 2N \dots \end{array} \right)$$

3、相邻的主最大之间有  $N-1$  条暗纹和  $N-2$  个次最大。

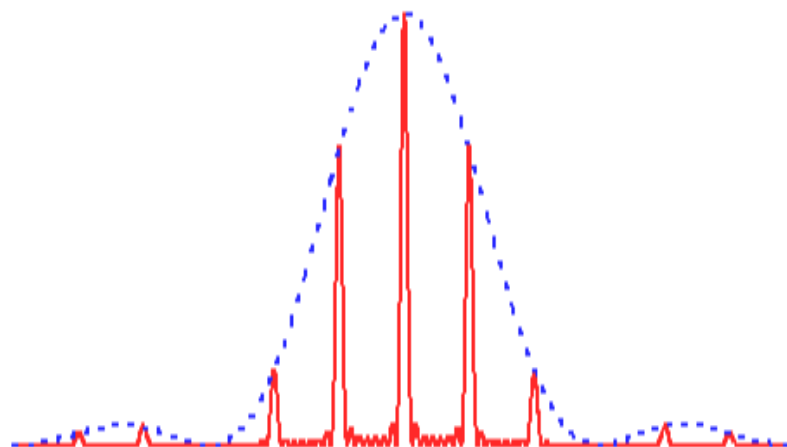
#### 4、主极大间距

$$\sin \theta_{j-1} - \sin \theta_j = \frac{\lambda}{d}$$

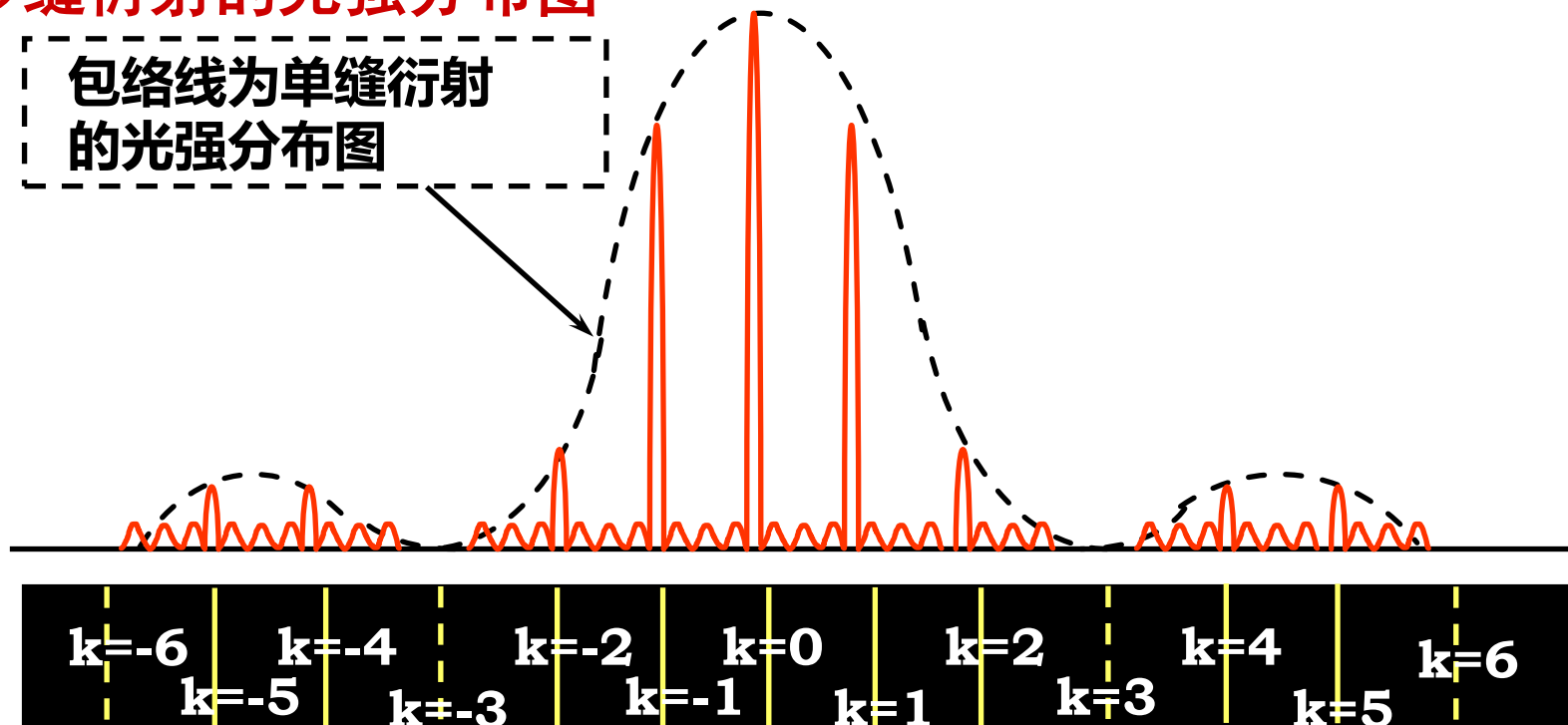
#### 5、条纹角宽度

N越大，条纹角宽度越小，  
主极大越亮越细锐

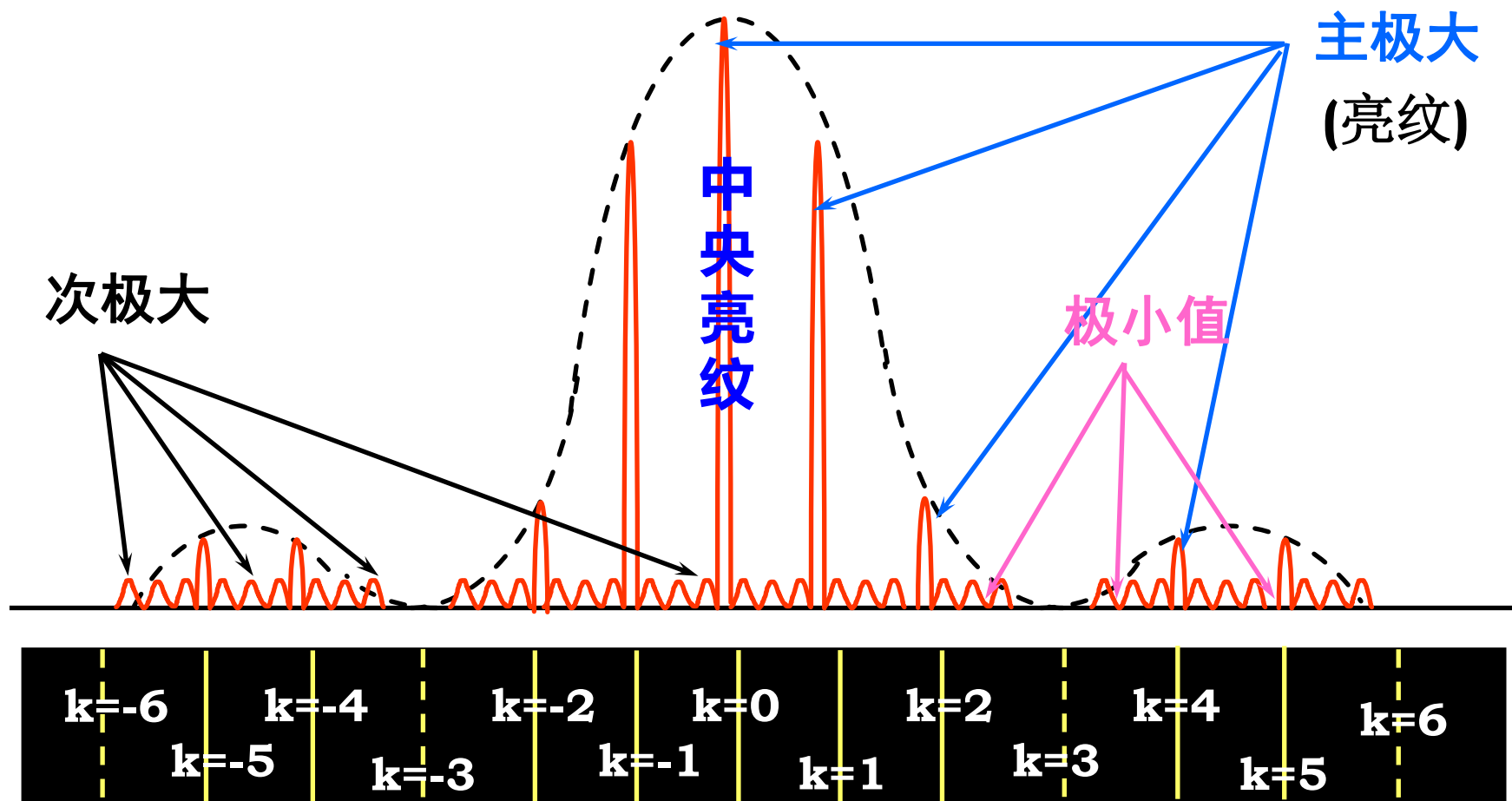
#### 6、强度的分布中保留了单缝衍射的因子。



### 多缝衍射的光强分布图



## 多缝衍射的光强分布图



## 四、双缝衍射

$$\frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

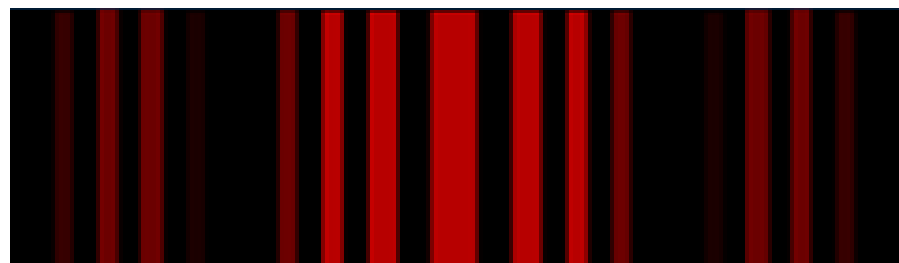
强度分布变为：

$$I_p = \underbrace{\frac{\sin^2(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)}{(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)^2}}_{\text{单缝衍射因子}} \cdot \underbrace{4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}_{\text{双缝干涉因子}}$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$



双光束干涉



双缝衍射

## 五、干涉和衍射的区别和联系

### 1) 联系

干涉衍射作用同时存在。两者的本质都是波的相干叠加。图样都是明暗相间的条纹。

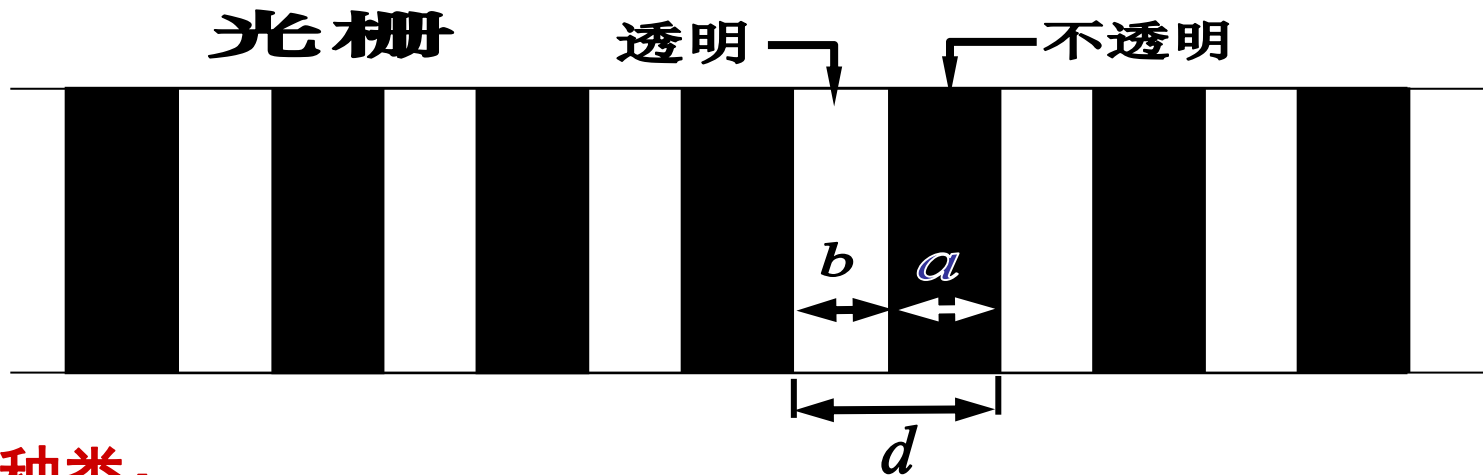
### 2) 区别

- a. 干涉是若干束光的叠加，其光强分布间距均匀
- b. 衍射是无穷多次波相干叠加，光强分布相对集中。

## § 2.6 平面衍射光栅

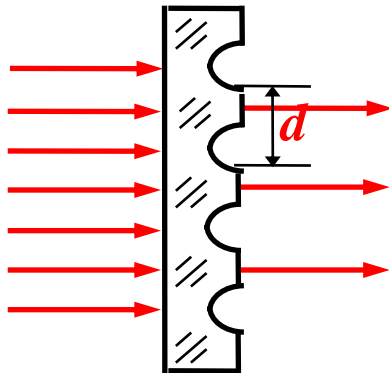
一、衍射光栅：任何具有空间周期性的衍射屏.

$d = a + b$  称为光栅常数,  $1/d$  光栅密度

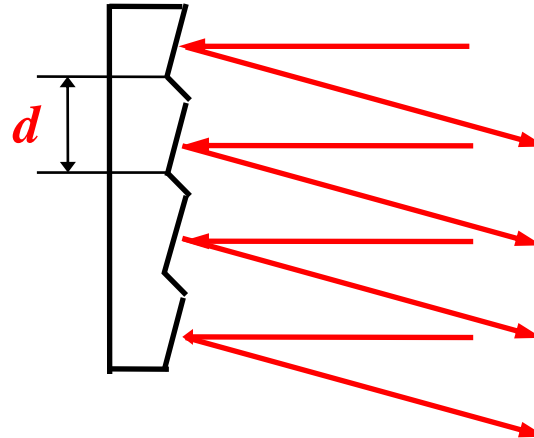


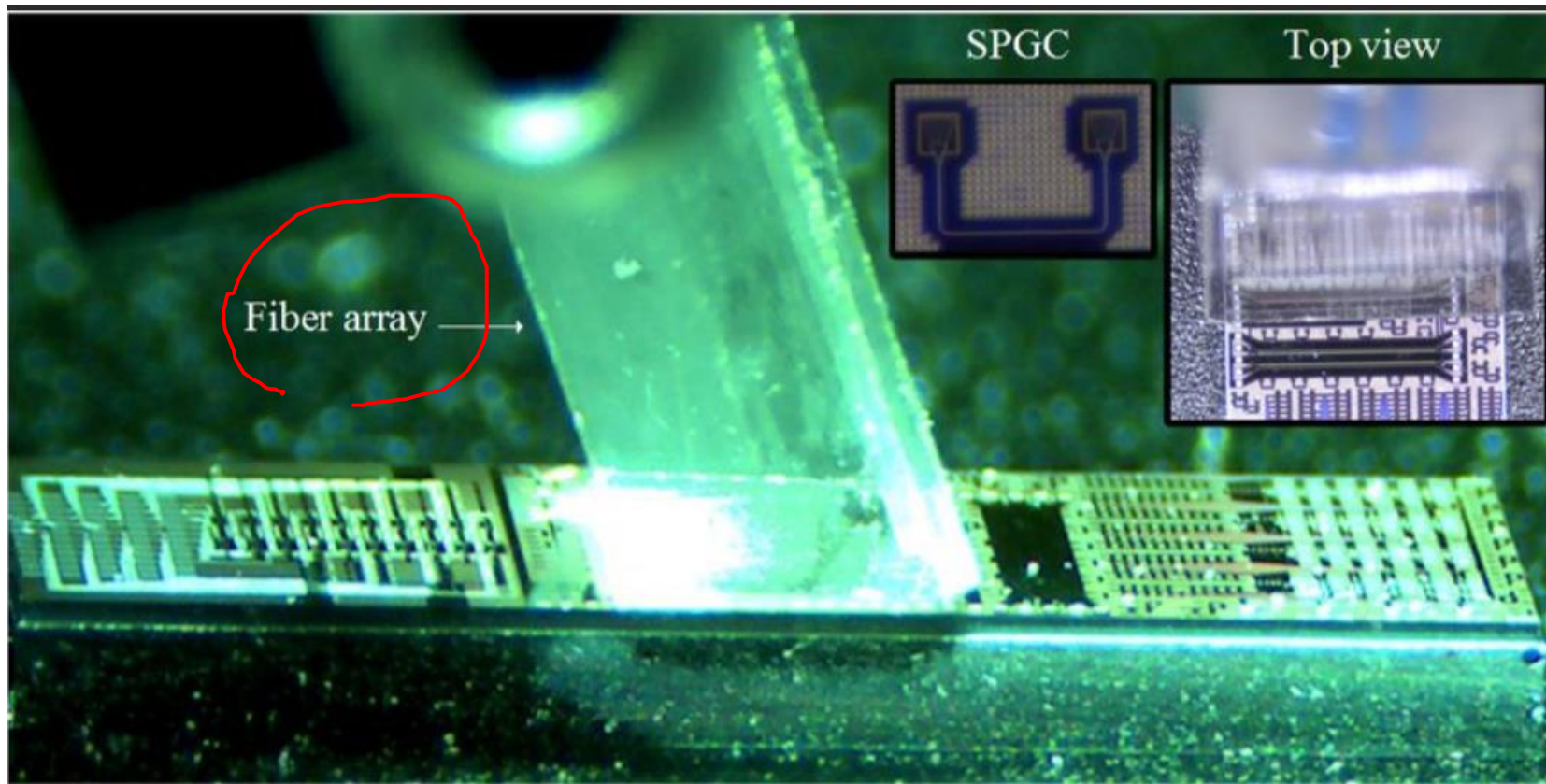
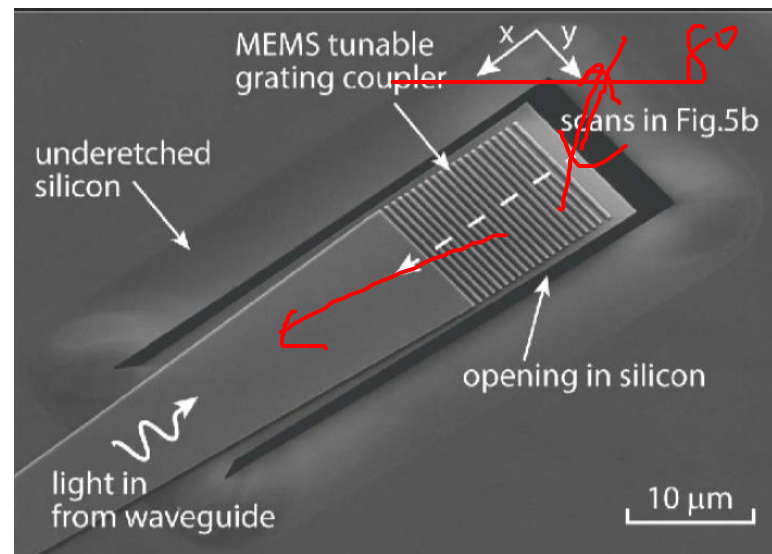
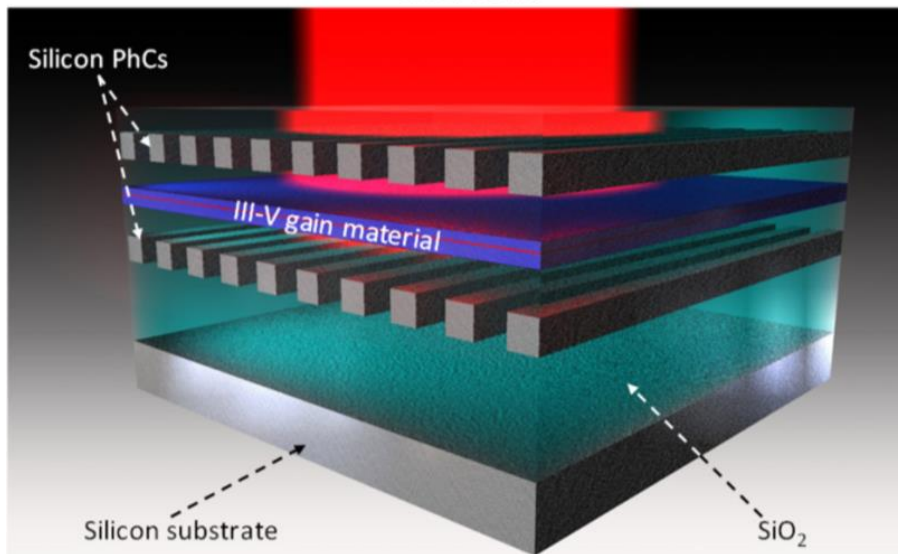
二、种类：

透射光栅



反射光栅 (DVD, etc.)





### 三、光栅方程

正入射时:  $d \sin \theta = j\lambda$ , ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

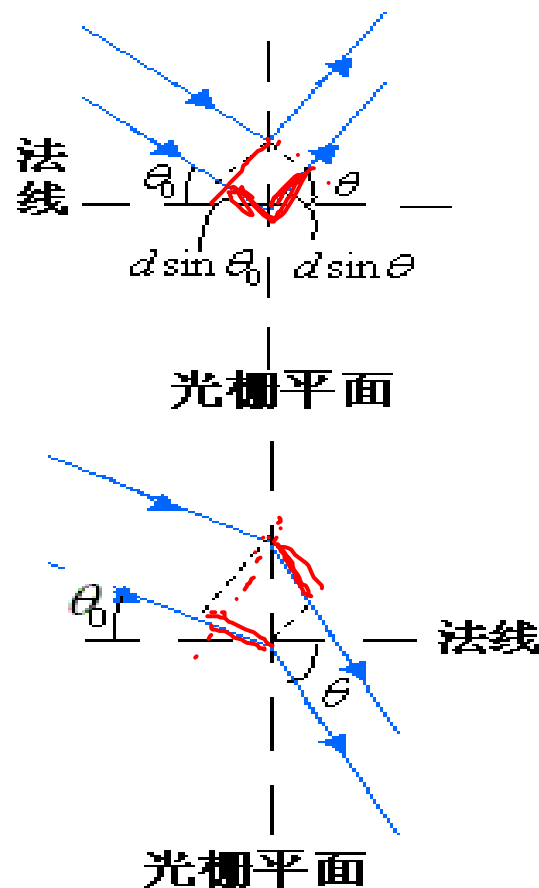
$j$  称为谱线级数, 衍射角  $\theta$ 。

当光束以倾斜角  $\theta_0$  入射

$d(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = j\lambda$ , ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

入射光与衍射光在法线同侧, 取+;

入射光与衍射光在法线异侧, 取-。

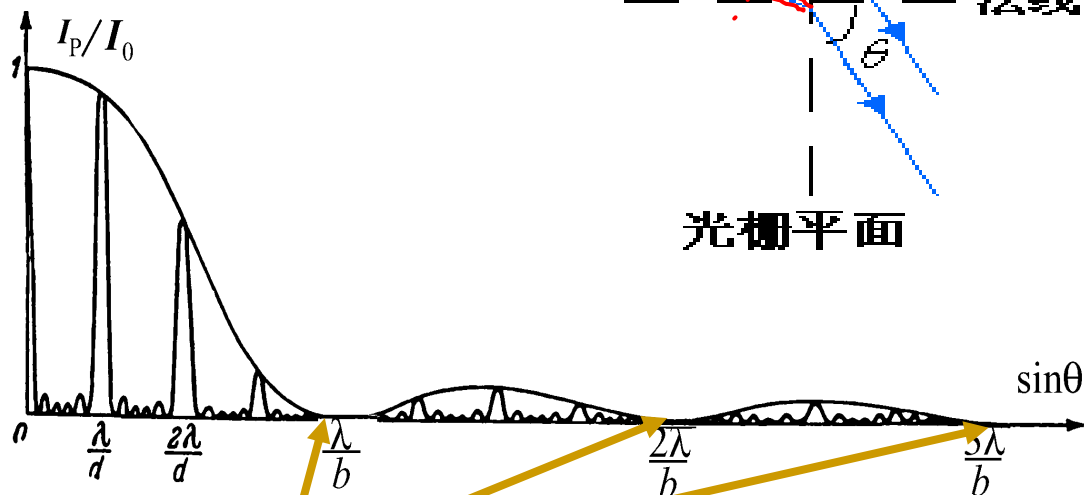


### 四、谱线的缺级

干涉极大:  $d \sin \theta = j\lambda$

衍射极小:  $b \sin \theta = j'\lambda$

$\frac{d}{b} = \frac{j}{j'}$  为两整数之比时, 缺级



当  $d=kb$  时: ( $k=2,3,4,\dots$ ) 缺级 干涉极大与衍射极小重合

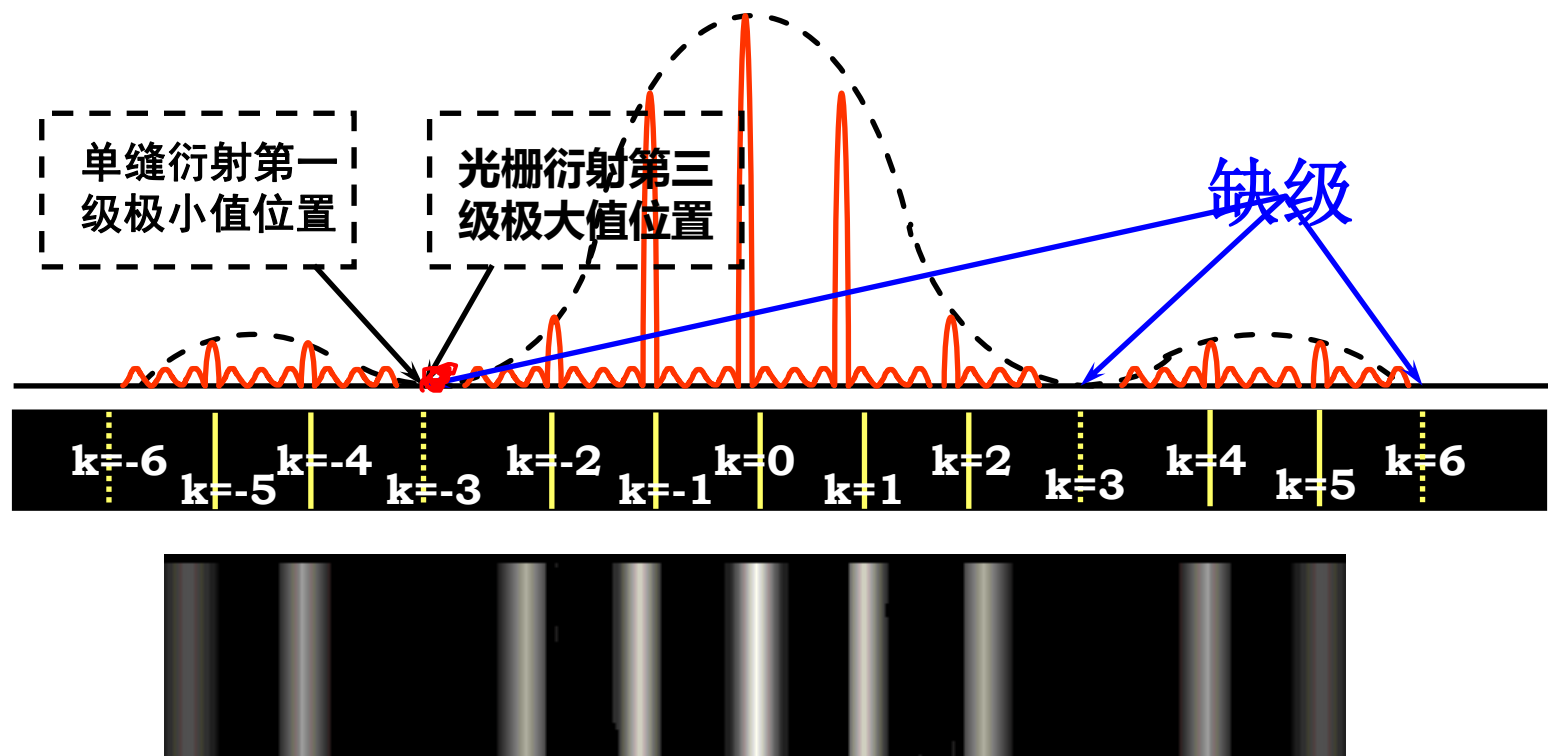


对于  $j$  级主极大,  $A_j = A_0 \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \cdot \frac{\sin N(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}$

$$A_j = \frac{A_0 N}{\pi j} \cdot \frac{d}{b} \cdot \sin\left(\frac{j\pi b}{d}\right)$$

第  $j$  级谱线的振幅  
 $= k\pi$

可见：当  $jb/d = k, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  时,  $A_j = 0$  即：  $j$  级谱线消失



## 五、谱线的半角宽度

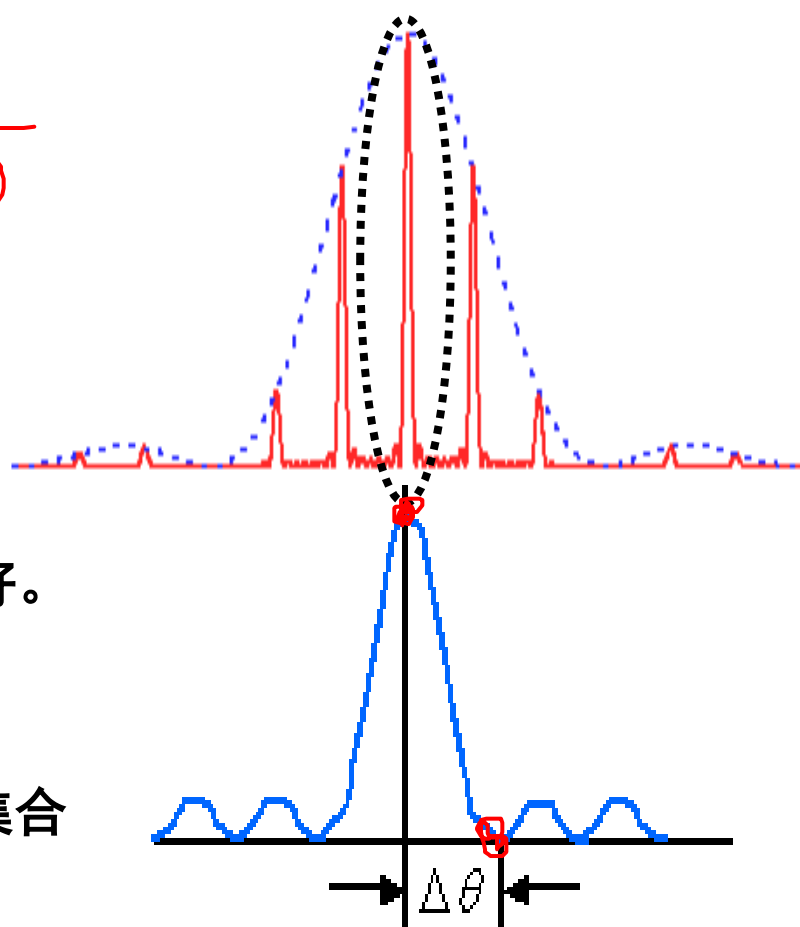
$$\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\frac{\lambda}{D}$$

$$\Delta(\sin\theta) = \cos\theta\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

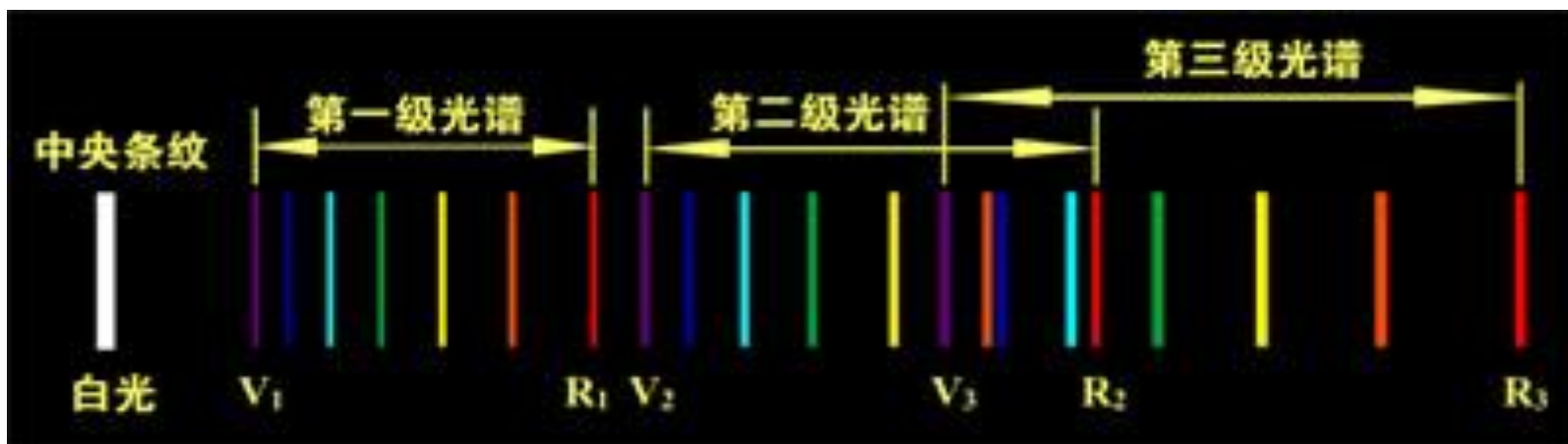
$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta}$$

$Nd$  愈大,  $\Delta\theta$  愈小, 谱线愈窄, 锐度愈好。

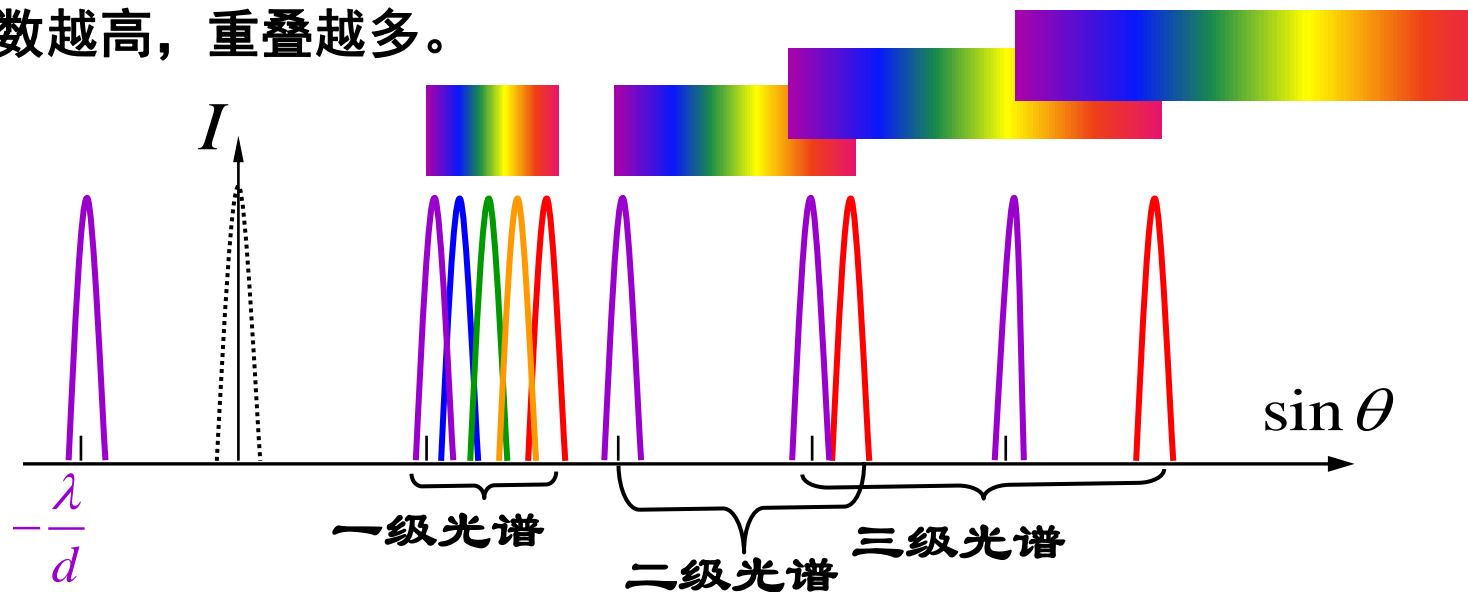


## 六、光栅光谱

复色光入射, 波长不同的同级谱线集合构成的一组谱线称为光栅光谱。



级数越高，重叠越多。



## 1、光栅的色散(P190)

(1) 角色散率

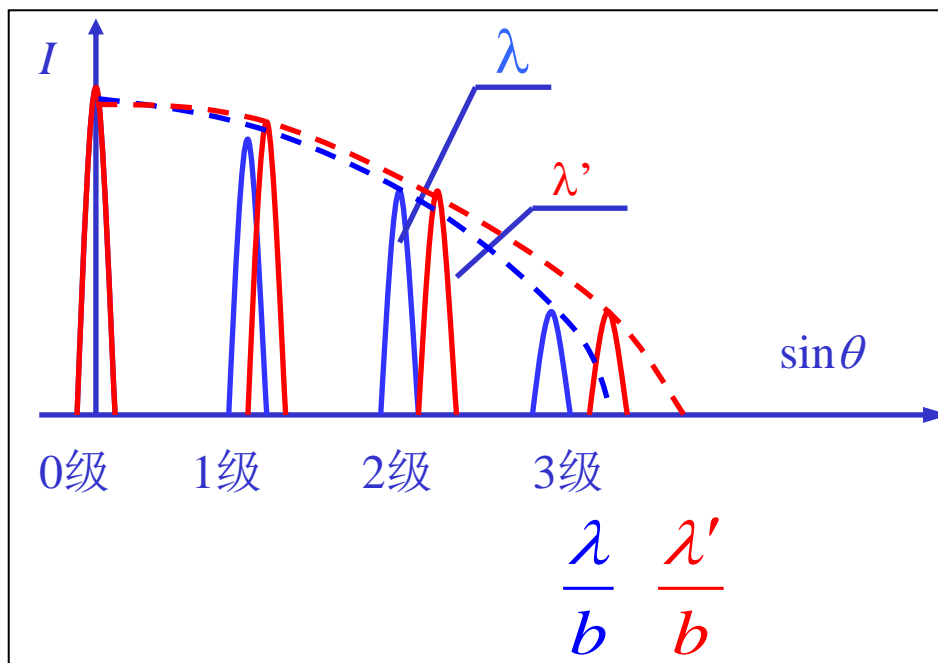
$$d\theta / d\lambda = j / d \cos \theta$$

$$j = 0, d\theta / d\lambda = 0$$

零级光谱无色散

(2) 线色散率

$$fd\theta / d\lambda = dl / d\lambda$$



## 2. 光栅的色分辨本领 (P187)

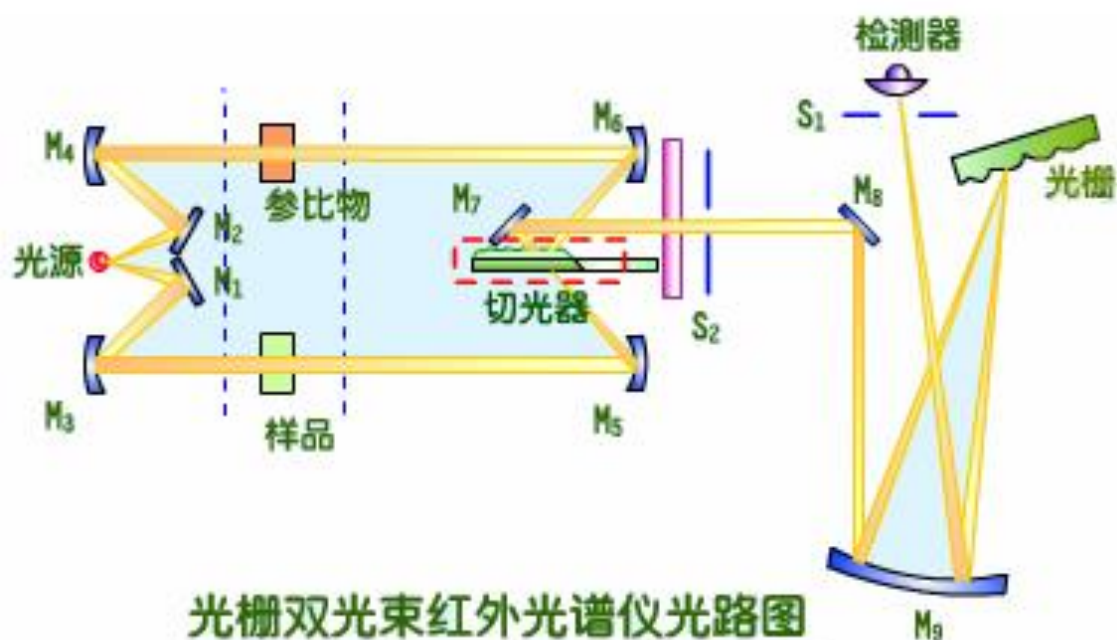
由Rayleigh判据, 分辨率极限

$$d \sin \theta = j(\lambda + \delta\lambda) = (j + \frac{1}{N})\lambda$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN}$$

色分辨本领

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = jN$$

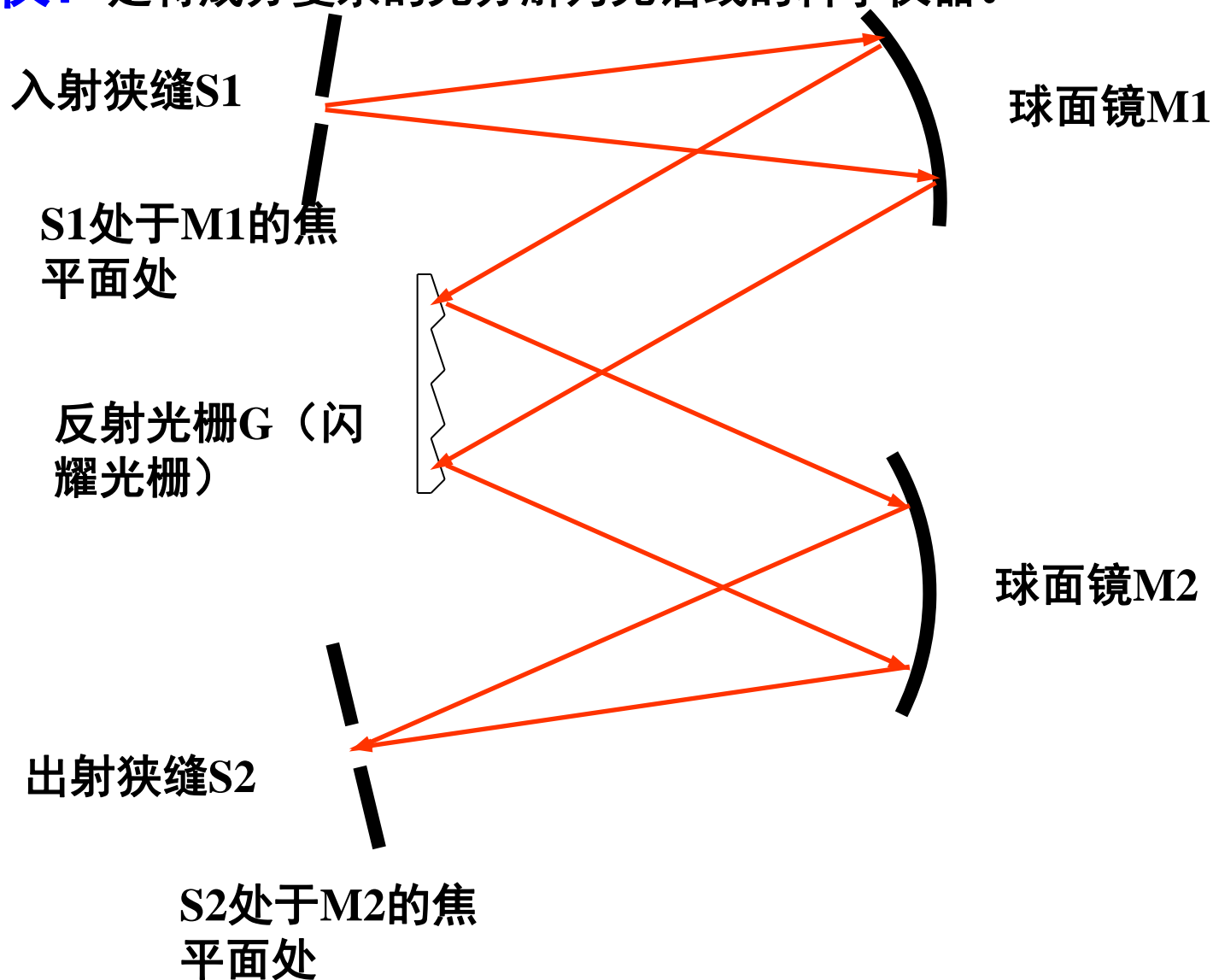


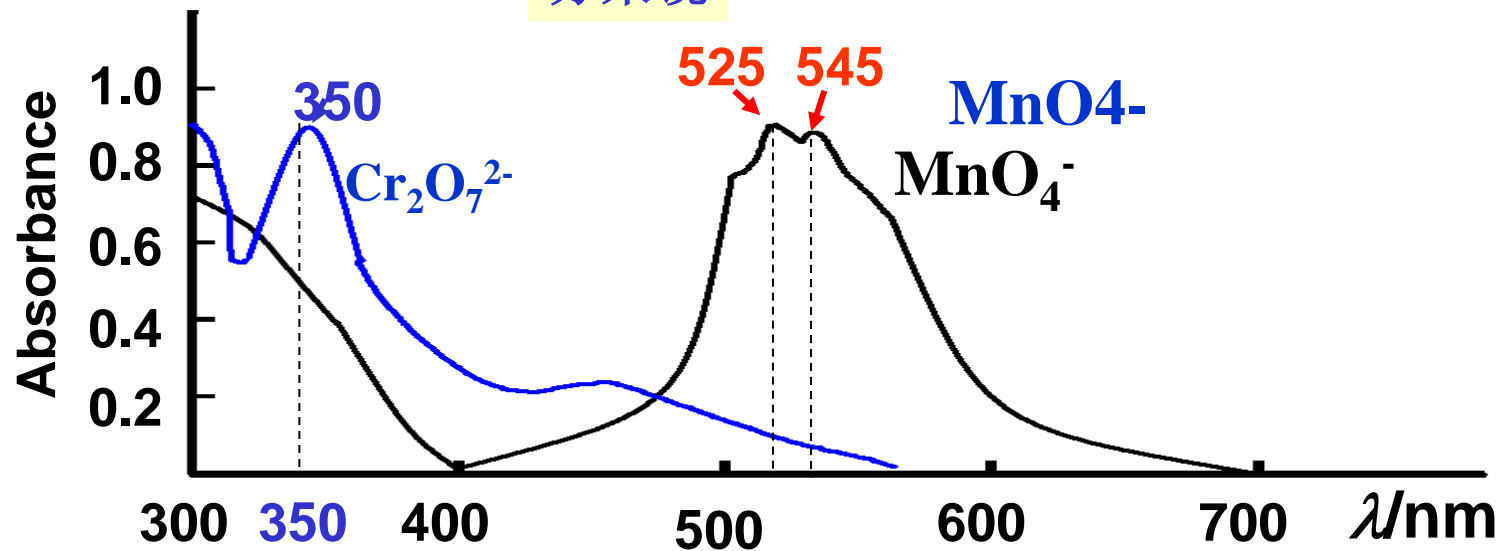
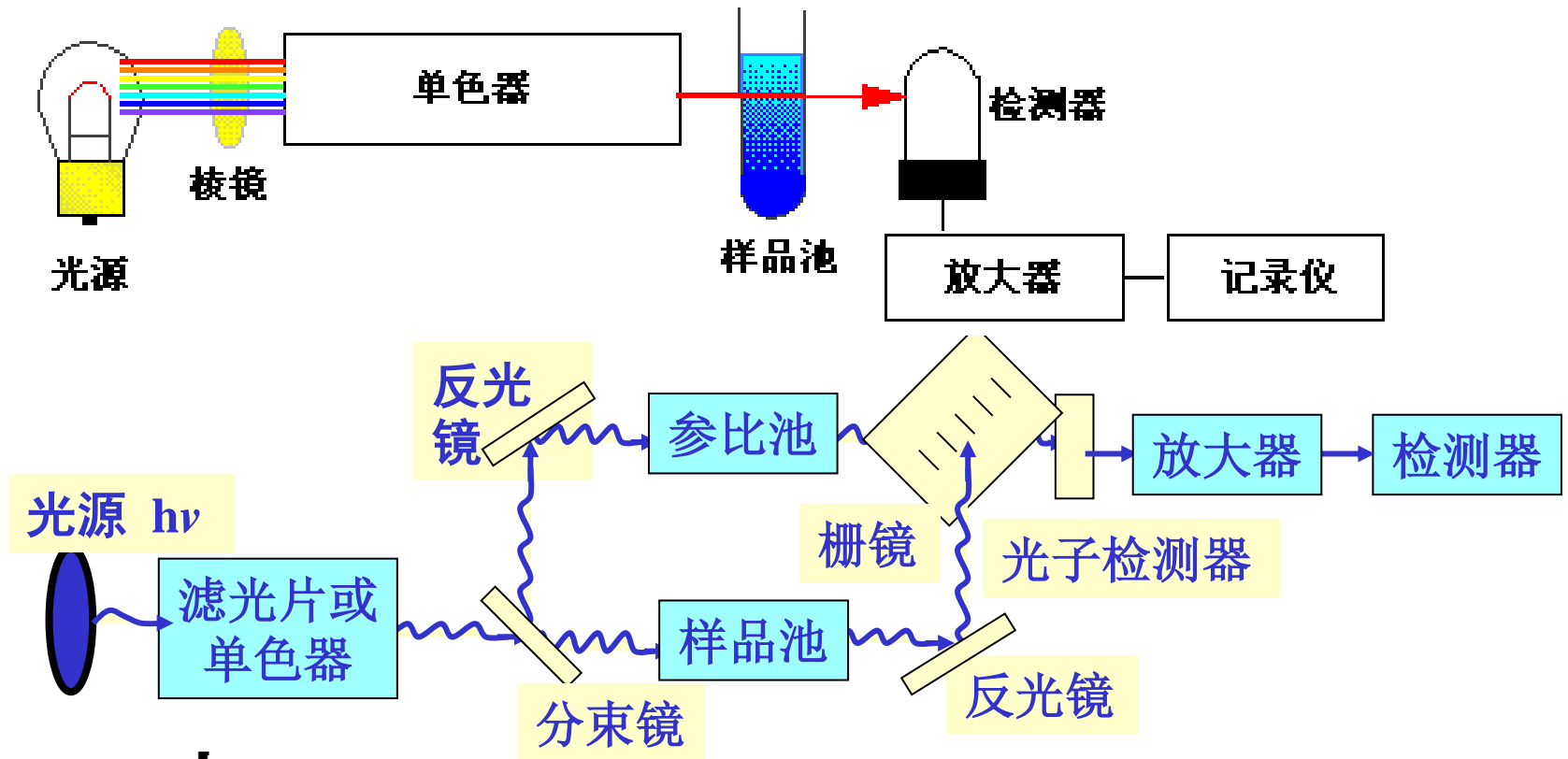
光栅双光束红外光谱仪光路图



## 七、光栅的应用

**光栅光谱仪：**是将成分复杂的光分解为光谱线的科学仪器。





## 2、闪耀光栅

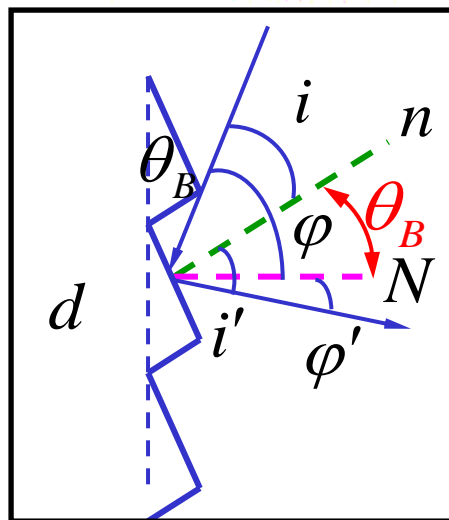
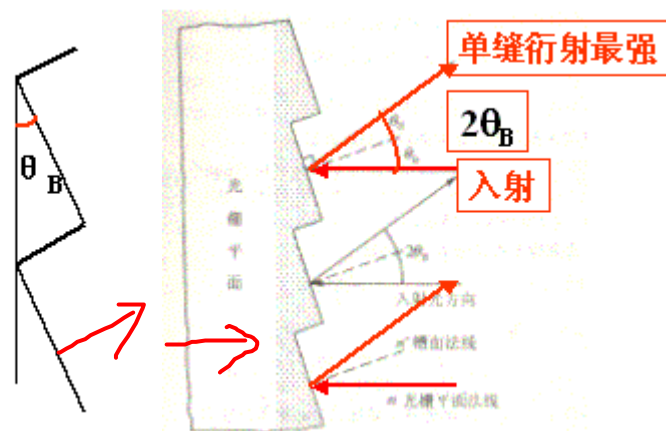
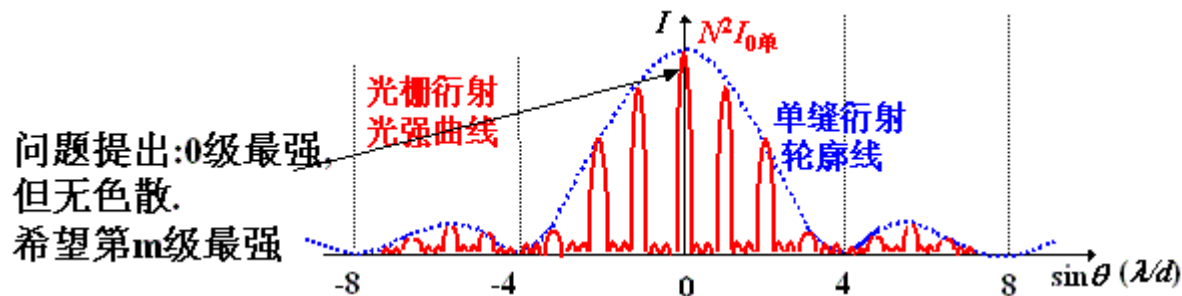
闪耀光栅则实现了单缝衍射中央最大值的位置从没有色散的零级光谱转移到其他有色散的光谱级上。

**结果：** 分光作用的光谱仪，  
能量利用小

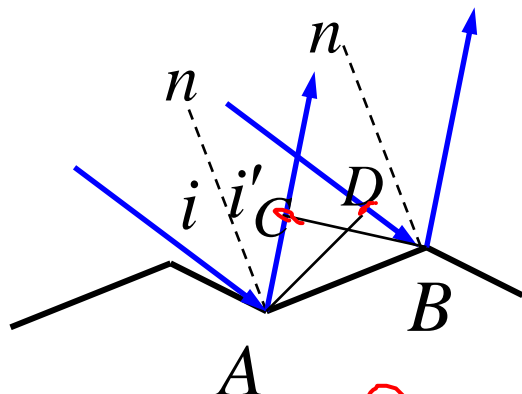
**目的：** 使二主极大方向分开

**闪耀光栅：** 通过刻槽的形状实现  
光栅平面法向  $N$ ，槽面法向  $n$   
相邻两槽对应点距离  $d$

$\varphi$  和  $\varphi'$  --对光栅平面法线  
 $i$  和  $i'$  --对槽平面法线



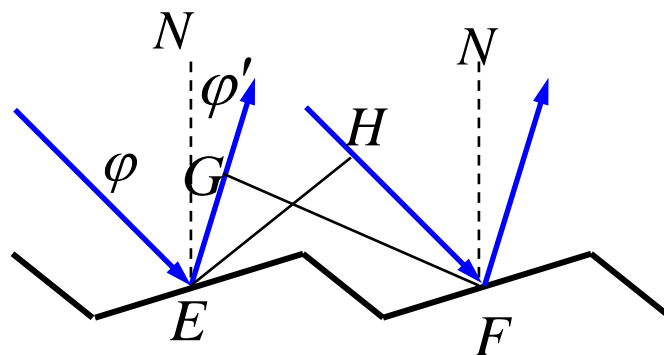
单缝衍射



$$\Delta = BD - AC = a(\sin i - \sin i')$$

位相差  $\delta = ka(\sin i - \sin i')$

多缝干涉



$$\Delta' = FG - EG = d(\sin \varphi - \sin \varphi')$$

位相差  $\delta' = kd(\sin \varphi - \sin \varphi')$

当  $\beta = K\pi$ , ( $K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 产生极大

平面反射光栅的光栅方程

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi') = K\lambda \quad (K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

多单元干涉零级极大  $K = 0 \rightarrow \varphi = \varphi'$

单元衍射零级极大  $\alpha = 0 \rightarrow i = i'$



两种效应的零级极大分离

出现在对光栅平面满足反射定律的方向

出现在对槽面满足反射定律方向



$$\because \varphi = i + \theta_B, \varphi' = i' - \theta_B$$

$$\Delta' = d(\sin(i + \theta_B) - \sin(i' - \theta_B))$$

对于闪耀方向  $i = i'$   $\Delta' = 2d \cos i \sin \theta$

多槽干涉主极大的谱线级次

## 讨论

$$2d \cos i \sin \theta = K \lambda$$

1) 平行光沿槽面法线方向入射

闪耀级次发生在  $2d \sin \theta = K \lambda$

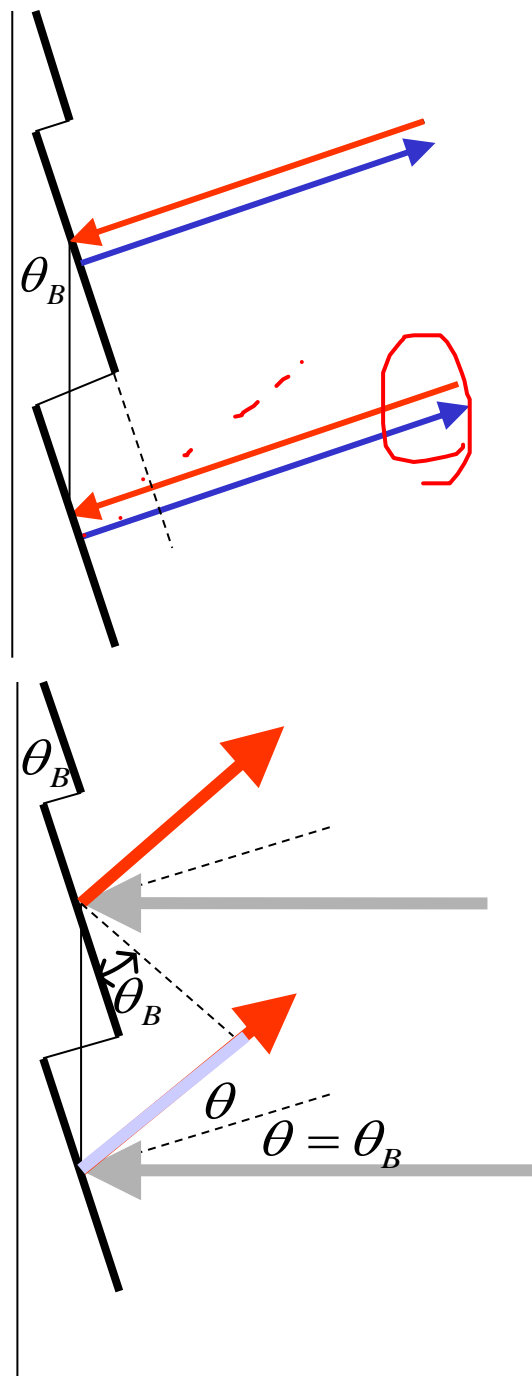
2) 平行光沿光栅平面法线入射

对槽面法线反射光与入射方向有  $2\theta_B$  夹角

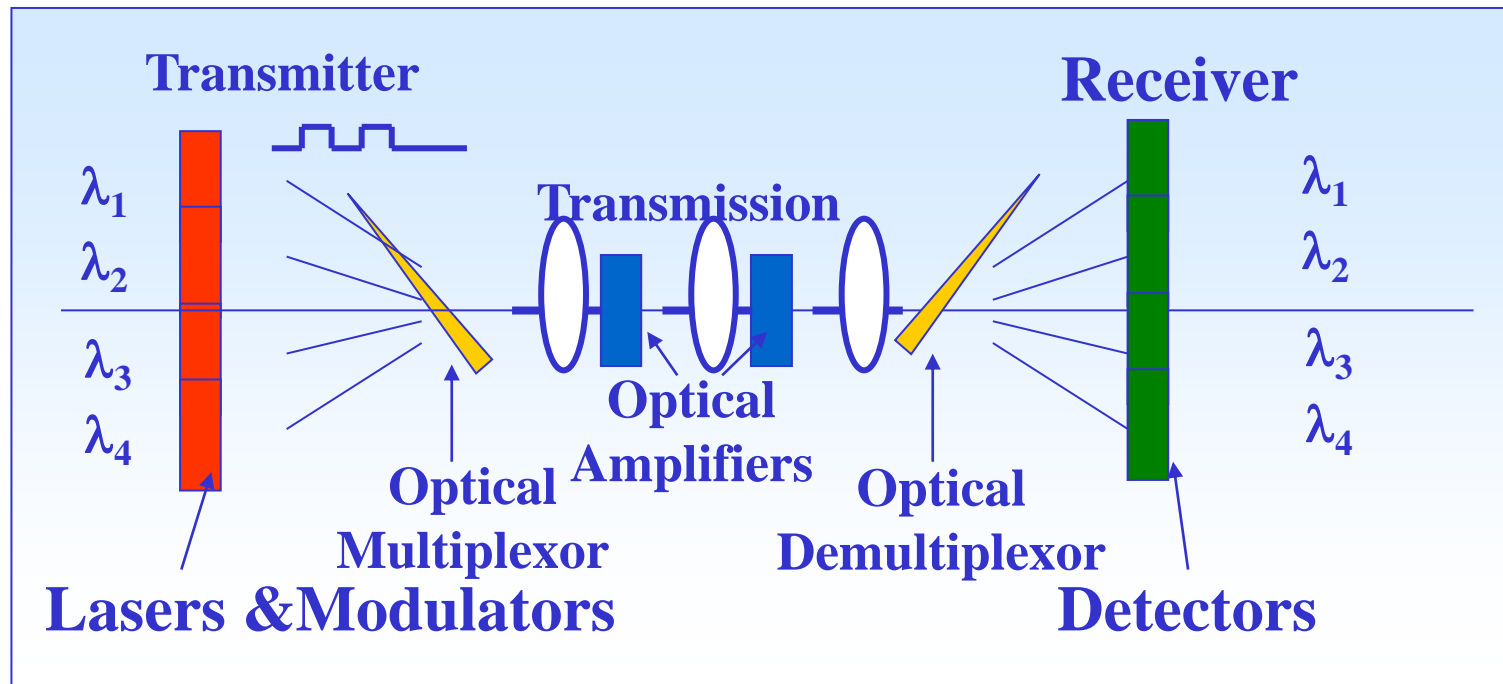
$$\Delta' = d \sin 2\theta_B$$

主极大位于  $d \sin 2\theta_B = K \lambda$

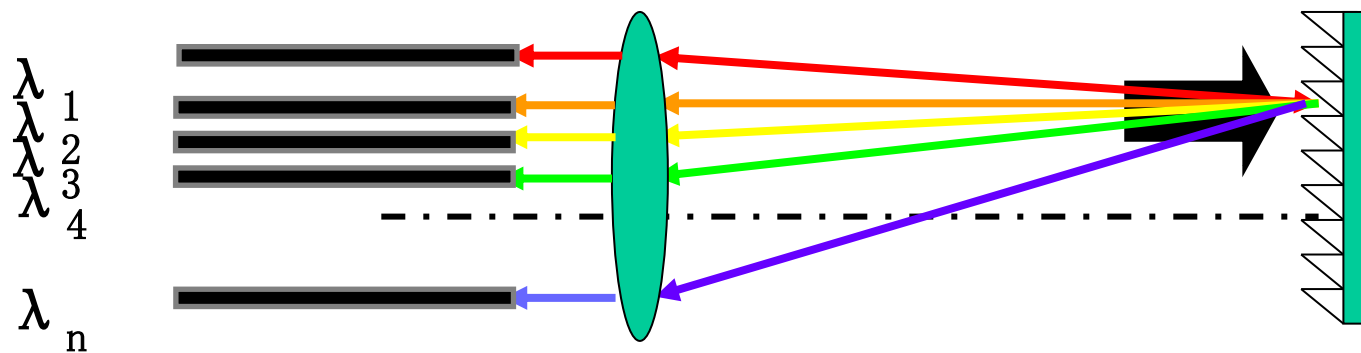
当  $d$  和  $\theta_B$  给定时, 闪耀级次和闪耀波长满足反比关系



### 3、衍射光栅波分复用器、滤波器



衍射光栅滤波器:当多色光束射入**衍射光栅**时，每个波长分量朝空间内不同的点衍射。从而把不同的波长光分开，还能构成 $1 \times N$ 波长解复用器。

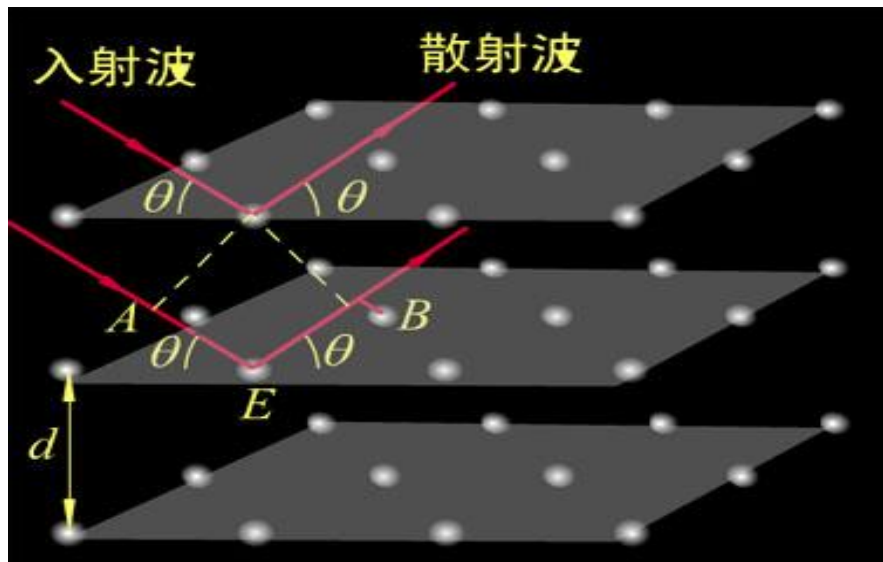
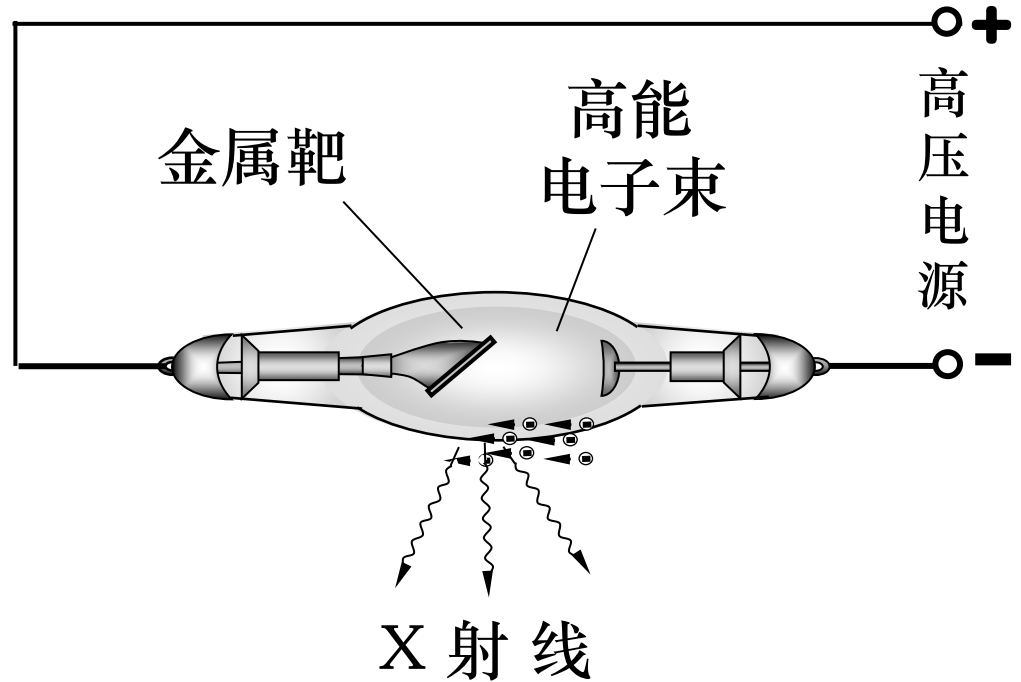


## § 2.7 \*晶体对X射线的衍射

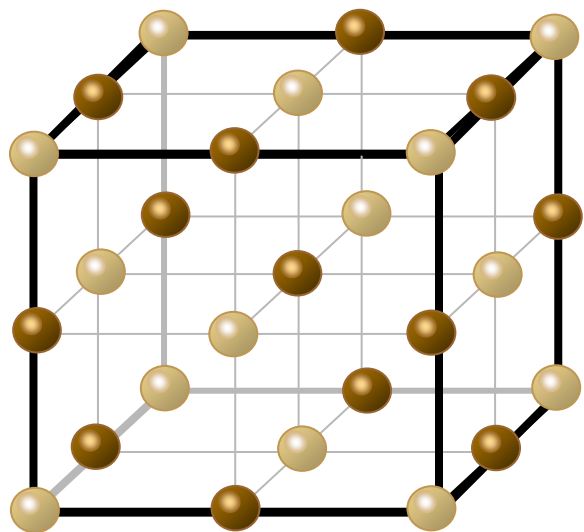
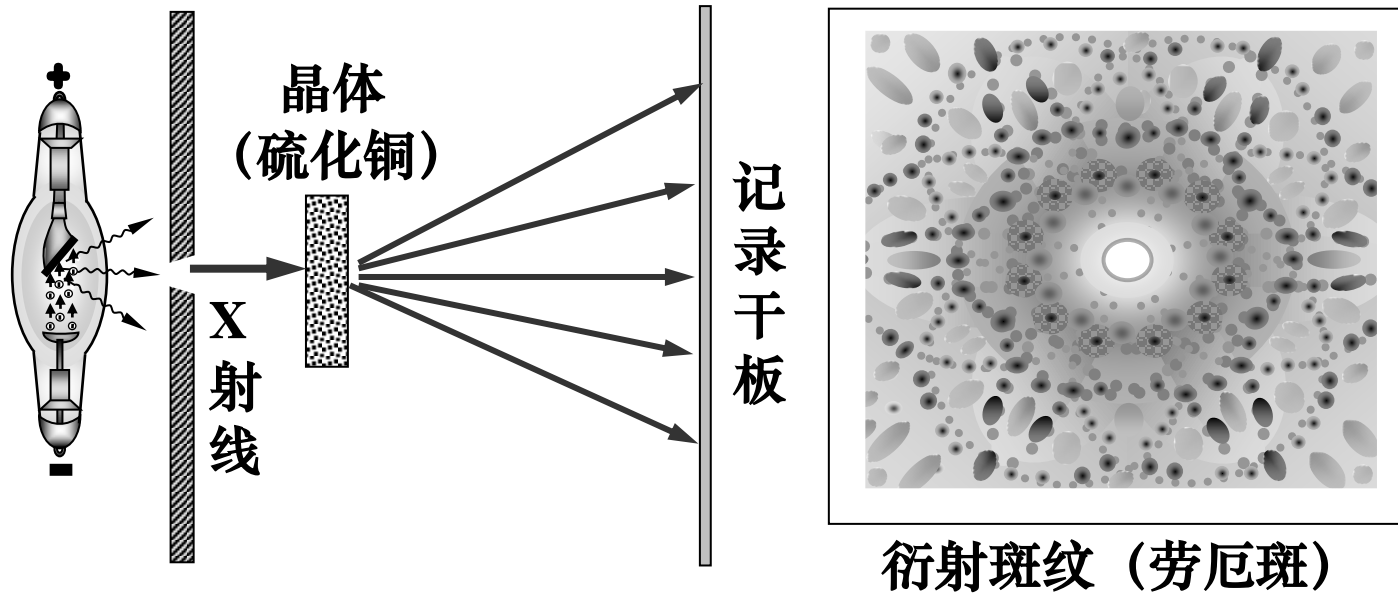


伦 琴

1901年获首届诺贝尔  
物理学奖



## 劳厄的 X 射线衍射实验原理图



氯化钠晶体

● 氯离子

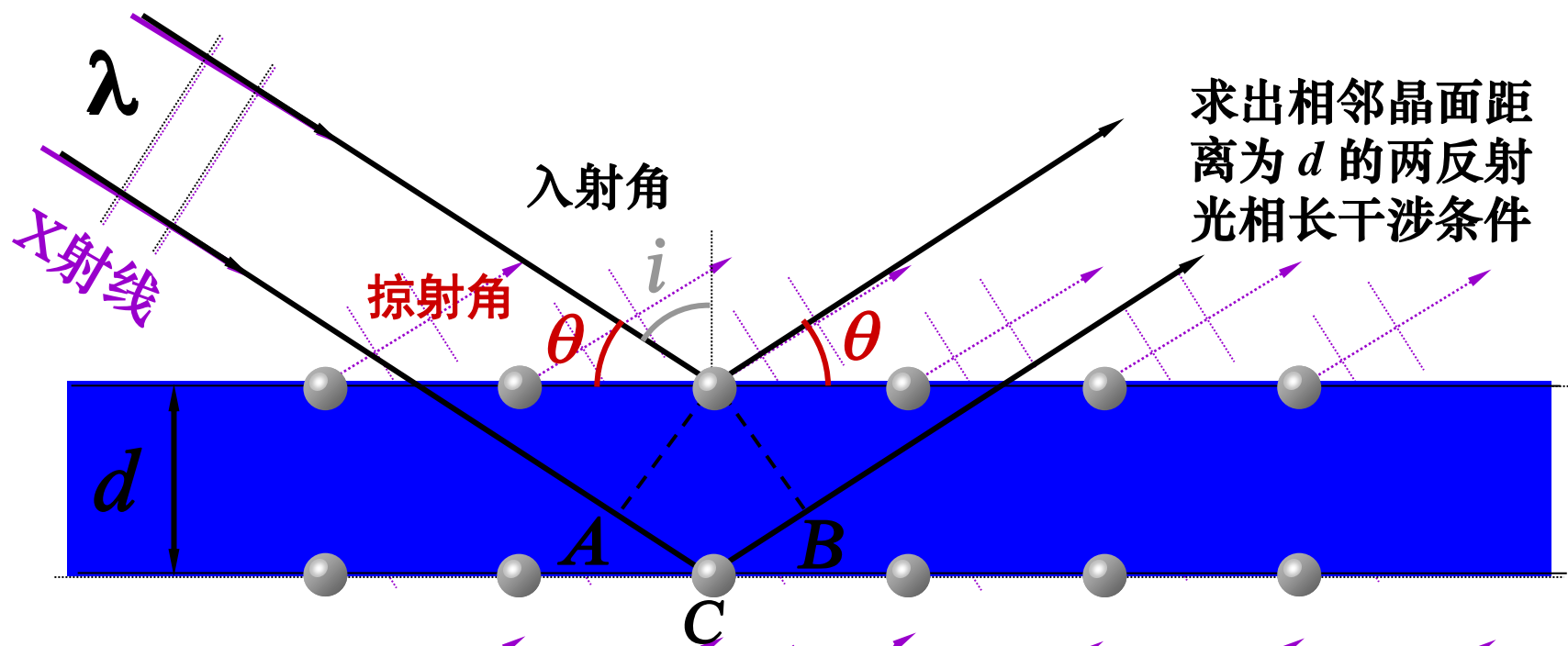
$\text{Cl}^-$

● 钠离子

$\text{Na}^+$

晶体结构中的三维空间点阵

# 面间点阵散射波的干涉



求出相邻晶面距离为  $d$  的两反射光相长干涉条件

层间两反射光的光程差

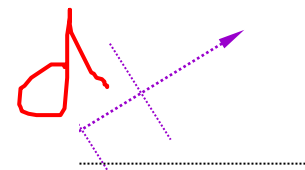
$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cos i = 2d \sin \theta$$

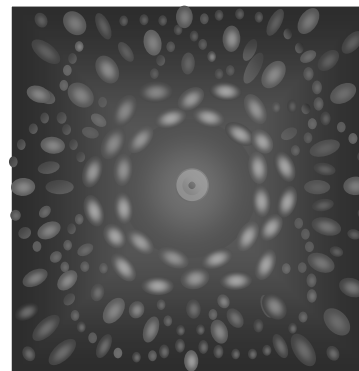
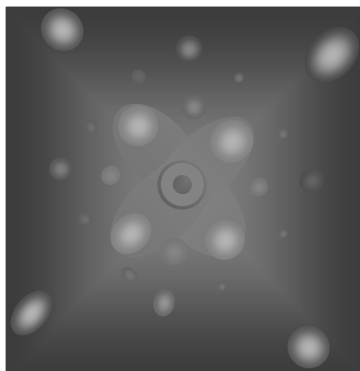
相长干涉得亮点的条件

$$2d \sin \theta = j\lambda$$

$(j = 1, 2, \dots)$

布喇格定律  
或布喇格条件





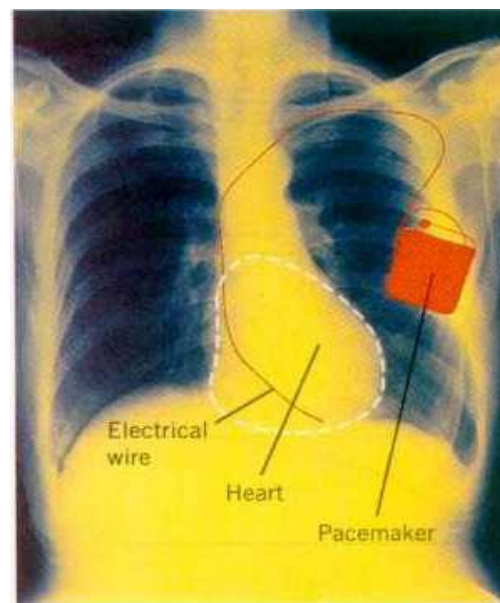
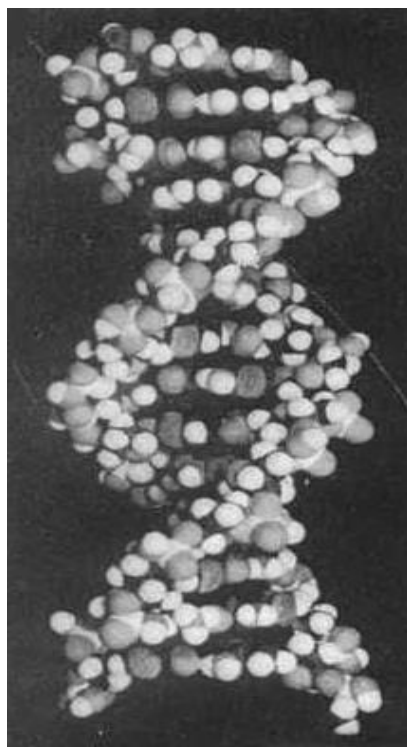
NaCl 单晶的X 射线衍射斑点

石英 (SiO<sub>2</sub>) 的X 射线衍射斑点

## X射线的应用

1. 已知  $\theta, \lambda$  可测  $d$  ——X射线晶体结构分析.
2. 已知  $\theta, d$  可测  $\lambda$  ——X射线光谱分析.

1953年英国的威尔金斯、沃森和克里克用X射线的结构分析得到了DNA的双螺旋结构，荣获了1962年度诺贝尔生物和医学奖。

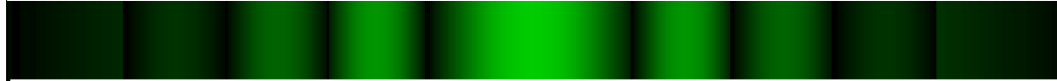


This X-ray photograph shows a heart pacemaker that has been implanted surgically.

## ➤ 小结

### § 2.3 夫琅禾费单缝衍射

条纹分布特点:



### § 2.4 夫琅禾费圆孔衍射

艾里斑的半径为  $\Delta l = 1.22\lambda f / D$

### § 2.5 夫琅禾费多缝衍射

多缝衍射=单缝衍射+多缝干涉

### § 2.6 平面衍射光栅

光栅方程:  $d \sin \theta = j\lambda$ , ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

### § 2.7 \*晶体对X射线的衍射

## ➤ 下次课内容:

第三章 傅里叶光学基础

第2章作业(P111):

2-4, 2-6, 2-7, 2-11, 2-14, 2-15, 2-17, 2-23