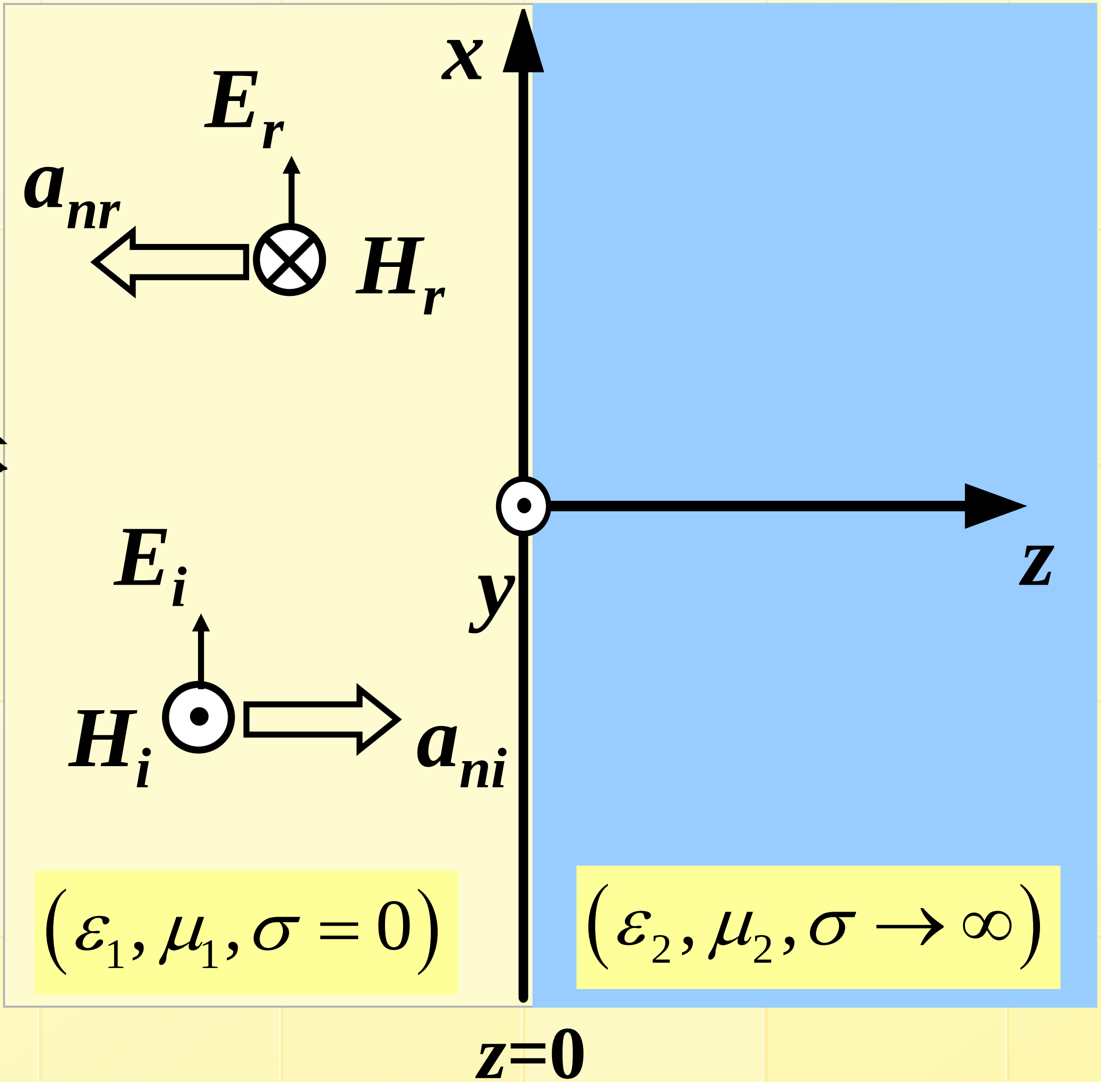
4.6 在理想导体平面边界上的垂直入射

三点假设：

1. 分界面是无限大平面

2. 无损的理想介质/理想导体

3. 线极化（不失一般性）



4.6 在理想导体平面边界上的垂直入射

分析思路

媒质1中的入射波

媒质1中的反射波

媒质1中的合成波 ← 边界条件

合成波性质讨论

媒质1中的合成波

- 相量形式

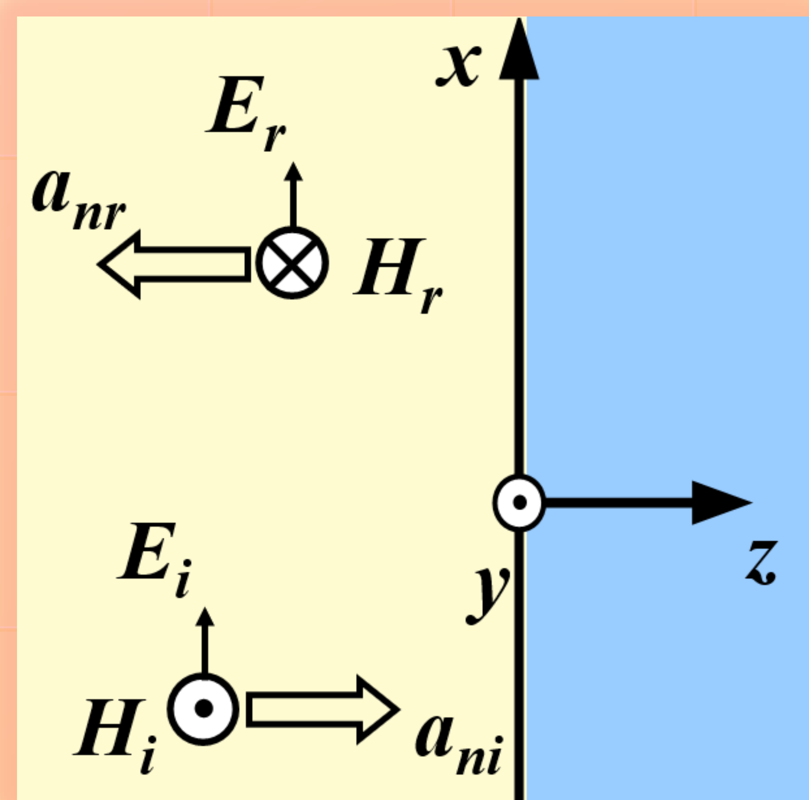
$$\boldsymbol{E}_1(z)=\boldsymbol{a}_x E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}-\boldsymbol{a}_x E_{i0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}=-\boldsymbol{a}_x 2jE_{i0}\sin\beta_1 z$$

$$\boldsymbol{H}_1(z)=\boldsymbol{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}+\boldsymbol{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}=\boldsymbol{a}_y\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos\beta_1 z$$

- 瞬时形式

$$\boldsymbol{E}_1(z,t)=\boldsymbol{a}_x 2E_{i0}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

$$\boldsymbol{H}_1(z,t)=\boldsymbol{a}_y\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t$$

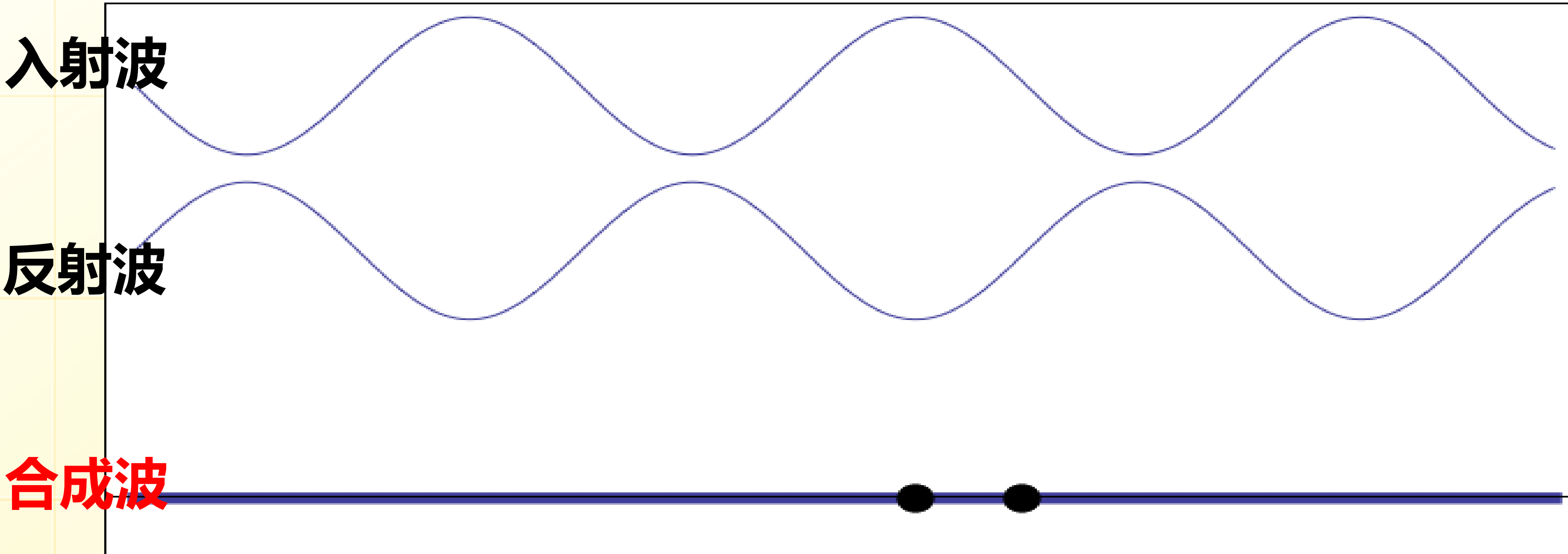


思考：$\vec{S}_{av}=$?

思考：边界处$\boldsymbol{H}_t$连续吗？

思考：该合成波有何特征？

4.6 在理想导体平面边界上的垂直入射

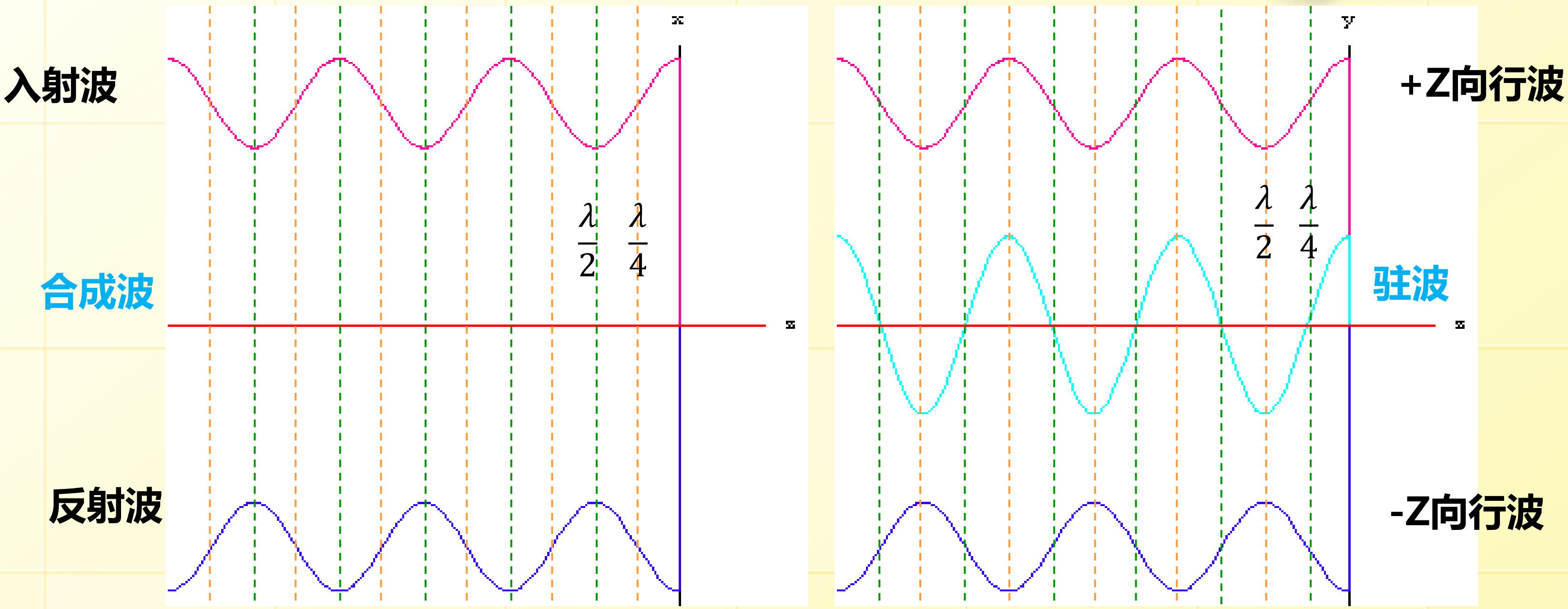


$$E_1(z,t)=\boldsymbol{a}_x 2E_{i0}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

行波(Travelling Wave)：电磁波在空间沿一定方向传播（移动）

驻波(Standing Wave)：电磁波在空间中不传播，存在驻定的波腹点和波节点

4.6 在理想导体平面边界上的垂直入射



电场强度E　　　　磁场强度H

波腹点位置（驻波电场最大值驻定点的位置）： $z_{max} = \dfrac{(2n+1)\lambda_1}{4}$ （n = 0,1,2,3,...）

波节点位置（驻波电场最小值驻定点的位置）： $z_{min} = \dfrac{n\lambda_1}{2}$ （n = 0,1,2,3,...）

- E的波节即为H的波腹，同样，E的波腹即为H的波节，
- E（或H）相邻波节(或波腹）的空间距离为半波长（ 即λ/2 ）；

【例 4.7】 有一个频率为 100 MHz，y 方向极化的均匀平面电磁波从自由空间垂直入射到位于 x 等于零的理想导体平面上。假设入射波电场强度的振幅为 6(mV/m)。求：

(1) 入射波电场强度和磁场强度的相量表示式和瞬时表示式；

(2) 反射波电场强度和磁场强度的相量表示式和瞬时表示式；

(3) 在自由空间合成电磁波的电场强度和磁场强度的相量表示式和瞬时表示式。

解： $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \quad (\text{rad/s})$ ， $\beta_1 = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{3} \quad (\text{rad/s})$

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi \quad (\Omega)$$

(1) 入射电磁波的相量 $\boldsymbol{E}_i(x) = \boldsymbol{a}_y 6 \times 10^{-3} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi x/3} \quad (\text{V/m})$

$$\boldsymbol{H}_i(x) = \frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{E}_i(x) = \boldsymbol{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi x/3} \quad (\text{A/m})$$

其瞬时表示式 $\boldsymbol{E}_i(x,t) = \boldsymbol{a}_y 6 \times 10^{-3}\cos\left(2\pi \times 10^8 t - \dfrac{2\pi}{3}x\right) \quad (\text{V/m})$

$$\boldsymbol{H}_i(x,t) = \boldsymbol{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi}\cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right) \quad (\text{A/m})$$

(2) 反射电磁波的相量表示式 $\boldsymbol{E}_r(x) = -\boldsymbol{a}_y 6 \times 10^{-3} e^{+j2\pi x/3}$ (V/m)

$$\boldsymbol{H}_r(x) = \frac{1}{\eta_1}(-\boldsymbol{a}_x) \times \boldsymbol{E}_r(x) = \boldsymbol{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{j2\pi x/3} \quad \text{(A/m)}$$

其瞬时表示式 $\boldsymbol{E}_r(x,t) = -\boldsymbol{a}_y 6 \times 10^{-3} \cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x\right)$ (V/m)

$$\boldsymbol{H}_r(x,t) = \boldsymbol{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x\right) \quad \text{(A/m)}$$

(3) 合成电磁波的相量表示式为

$$\boldsymbol{E}_1(x) = \boldsymbol{E}_i(x) + \boldsymbol{E}_r(x) = -\boldsymbol{a}_y j 12 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \quad \text{(V/m)}$$

$$\boldsymbol{H}_1(x) = \boldsymbol{H}_i(x) + \boldsymbol{H}_r(x) = \boldsymbol{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \quad \text{(A/m)}$$

瞬时表示式 $\boldsymbol{E}_1(x,t) = \boldsymbol{a}_y 12 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \sin(2\pi \times 10^8 t)$ (V/m)

$$\boldsymbol{H}_1(x,t) = \boldsymbol{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} x\right) \cos(2\pi \times 10^8 t) \quad \text{(A/m)}$$

4.7 在理想导体平面边界上的倾斜入射

- **入射面**

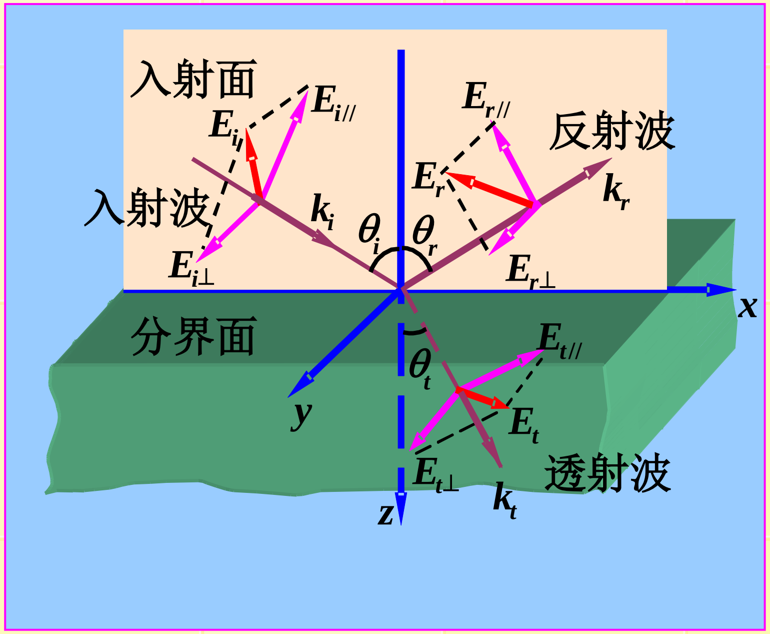
入射波传播方向矢量与边界面的法向矢量所构成的平面。

- **垂直极化（TE mode）**

入射波电场强度垂直于入射面

- **平行极化（TM mode）**

入射波电场强度平行于入射面



4.7 在理想导体平面边界上的倾斜入射

假设：

1. 分界面是无限大平面

2. 无损的理想介质/理想导体

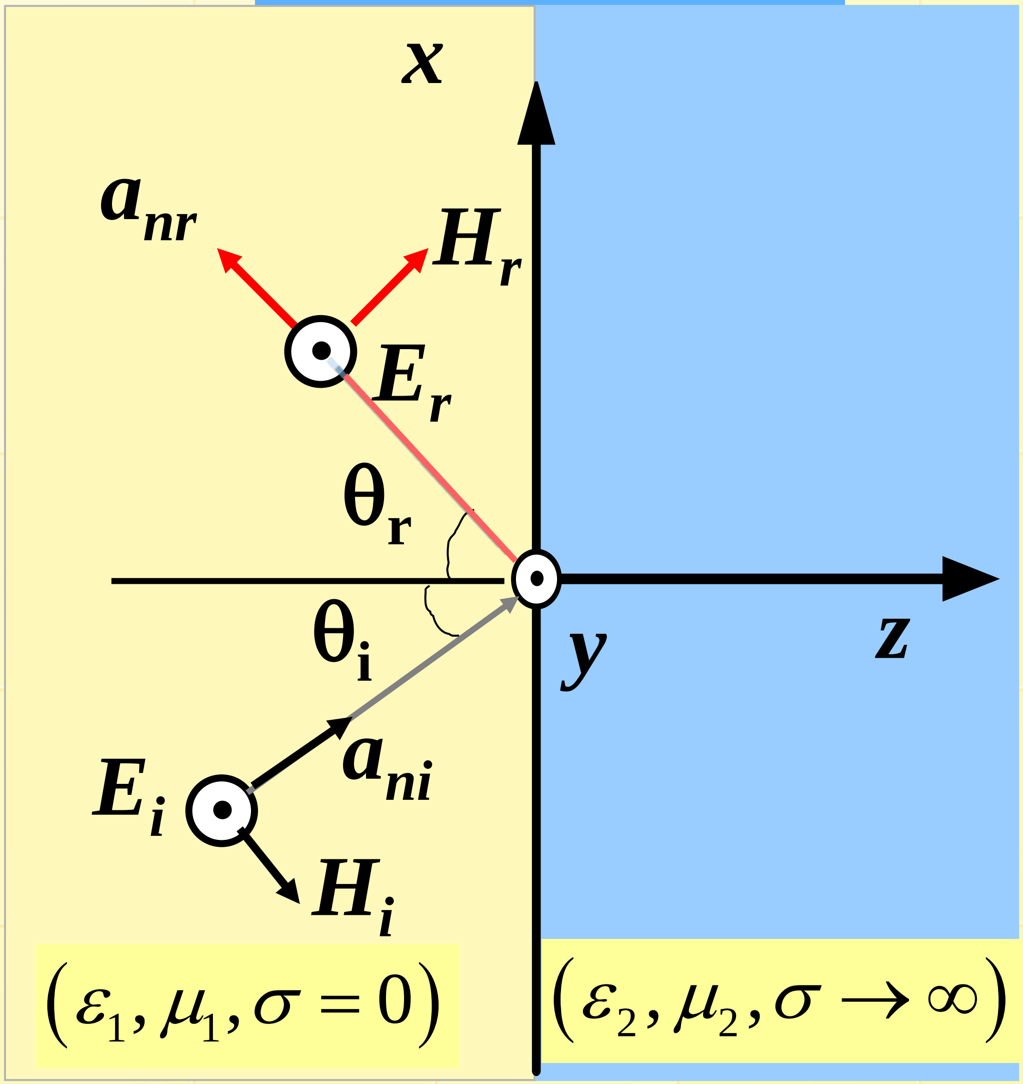
3. 线极化

4. 入射面：XOZ平面

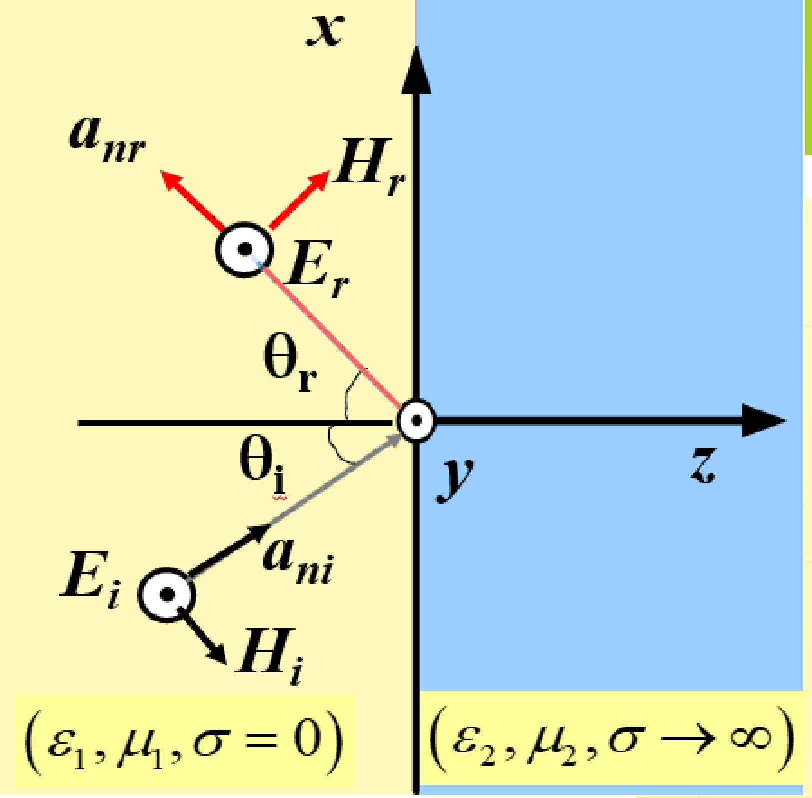
5. a)垂直极化的情况；

b)平行极化的情况。

垂直极化的情况



4.7 在理想导体平面边界上的倾斜入射



入射波矢单位矢量：

$$\boldsymbol{a}_{ni} = \boldsymbol{a}_x \sin\theta_i + \boldsymbol{a}_z \cos\theta_i$$

$$\boldsymbol{E}_i(x,z) = \boldsymbol{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\boldsymbol{H}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_1}[\boldsymbol{a}_{ni} \times \boldsymbol{E}_i(x,z)]$$

$$= \frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\boldsymbol{a}_x \cos\theta_i + \boldsymbol{a}_z \sin\theta_i) e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

反射波矢单位矢量： $\boldsymbol{a}_{nr} = \boldsymbol{a}_x \sin\theta_r - \boldsymbol{a}_z \cos\theta_r$

$$\boldsymbol{E}_r(x,z) = -\boldsymbol{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

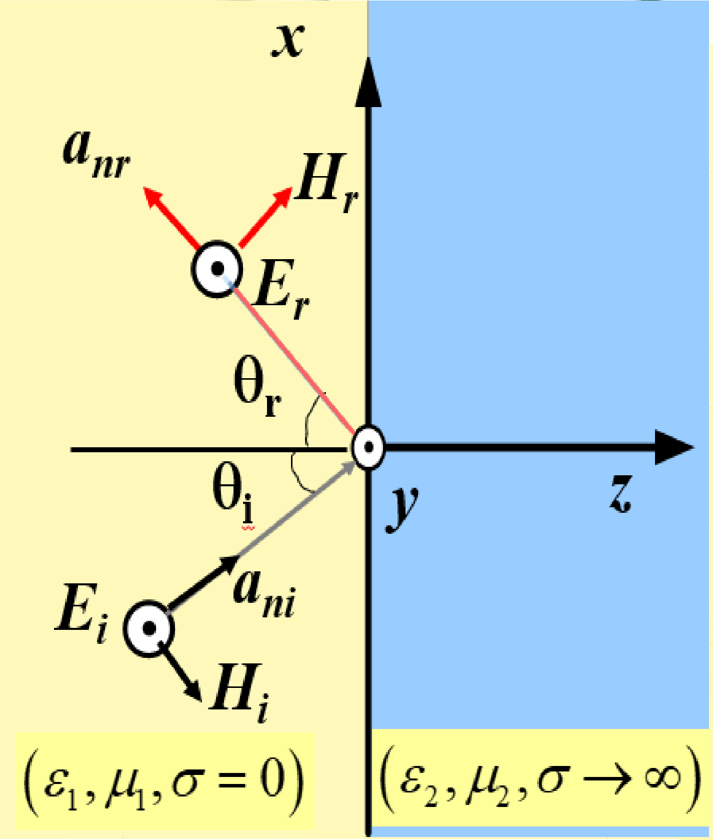
4.7 在理想导体平面边界上的倾斜入射　　垂直极化的情况

边界条件：

$$\boldsymbol{E}_1(x,0)=\boldsymbol{E}_i(x,0)+\boldsymbol{E}_r(x,0)$$

$$=\boldsymbol{a}_y(E_{i0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 x\sin\theta_i}-E_{r0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 x\cos\theta_r})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}E_{r0}=E_{i0}\\ \theta_r=\theta_i\end{cases}$$



反射波的相量表达式：

$$\boldsymbol{E}_r(x,z)=-\boldsymbol{a}_y E_{i0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}$$

$$\boldsymbol{H}_r(x,z)=\frac{1}{\eta_1}[\boldsymbol{a}_{nr}\times\boldsymbol{E}_r(x,z)]$$

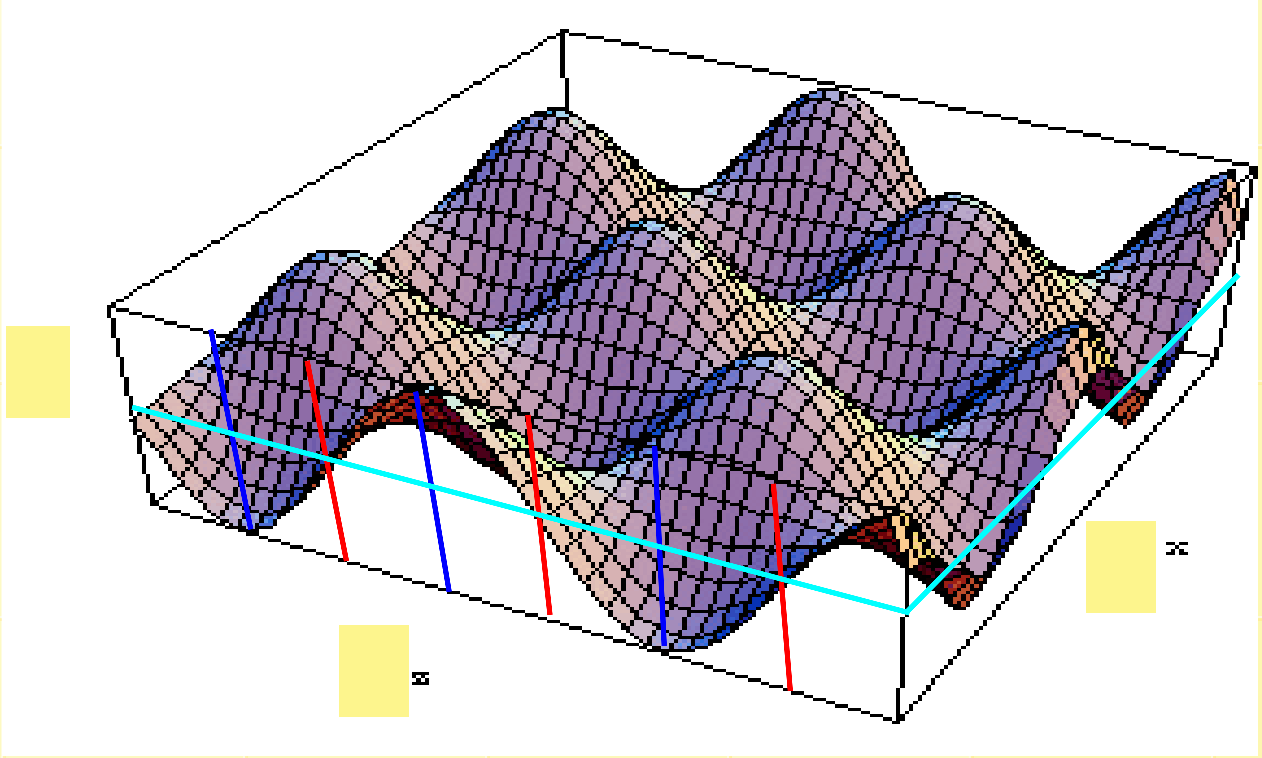
$$=\frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\boldsymbol{a}_x\cos\theta_i-\boldsymbol{a}_z\sin\theta_i)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}$$

媒质1中的合成波（教材P100）

$$E_{1y} = -2jE_{i0}\sin(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$H_{1x} = -\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos\theta_i\cos(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$H_{1z} = -\frac{2E_{i0}}{\eta_1}j\sin\theta_i\sin(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$



- 合成波在z方向上呈驻波分布，z方向上传播的平均功率为零；
- 合成波沿x方向呈行波分布，相速为 $v_{xp} = \dfrac{\omega}{\beta_{1x}} = \dfrac{\omega}{\beta_1 \sin\theta_i}$ ；
- 等振幅面平行于分界面，等相位面垂直于分界面，合成波为非均匀平面波；
- 合成波的电场在 $z = -\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ 处为零点，在这些位置处插入垂直于z轴的导体板，不会改变此导体板与原理想导体之间的场分布，其间沿x向传播的电磁波在传播方向上没有电场分量，只有磁场分量，因此称为横电波（TE波）

【例 4.8】角频率为 ω、垂直极化的均匀平面波，从空气中以入射角 θ_i 投射到一个无限大的理想导体板上。求：(1) 导体板上的感应电流；(2) 在媒质 1 中的时间平均坡印亭矢量。

解：(1) 假设理想导体板位于 $z=0$ 的平面，

$$\boldsymbol{E}_1(x,z)=-\boldsymbol{a}_y \mathrm{j}2E_{i0}\sin(\beta_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$\boldsymbol{H}_1(x,z)=-2\frac{E_{i0}}{\eta_1}[\boldsymbol{a}_x\cos\theta_i\cos(\beta_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$+\boldsymbol{a}_z \mathrm{j}\sin\theta_i\sin(\beta_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 x\sin\theta_i}]$$

在导体板的分界面上，电场强度 $\boldsymbol{E}_1(x,0)=0$，磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_1(x,0)=-\frac{E_{i0}}{\eta_0}(\boldsymbol{a}_x 2\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 x\sin\theta_i}$$

【例 4.8】角频率为 ω、垂直极化的均匀平面波，从空气中以入射角 θ_i 投射到一个无限大的理想导体板上。求：(1) 导体板上的感应电流；(2) 在媒质 1 中的时间平均坡印亭矢量。

解（续上页）：

导体板的面电流密度 $\boldsymbol{J}_s(x) = \boldsymbol{a}_{n2} \times \boldsymbol{H}_1(x,0)$

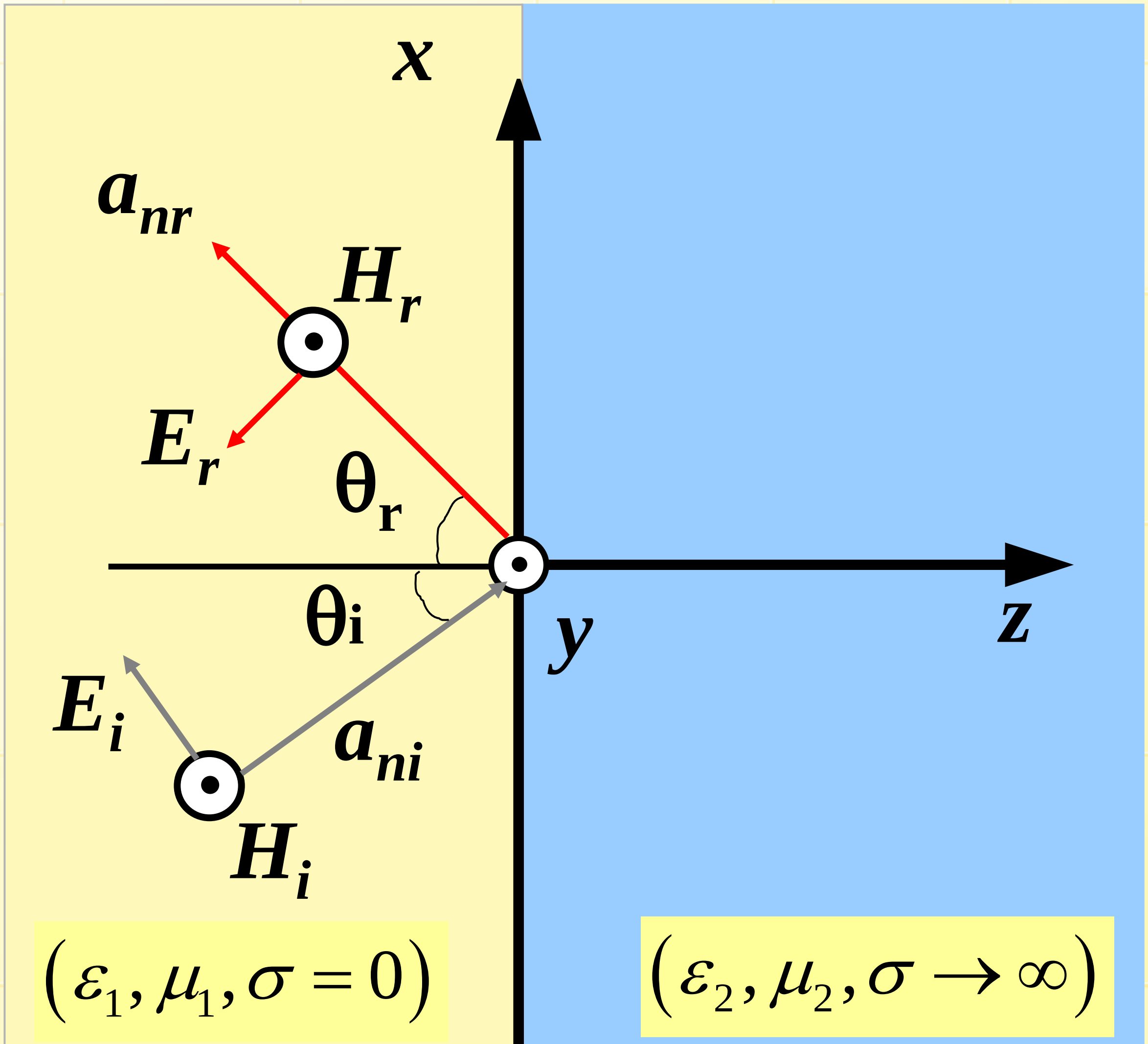
$$= (-\boldsymbol{a}_z) \times (-\boldsymbol{a}_x) \frac{E_{i0}}{\eta_0} 2\cos\theta_i e^{-j\beta_0 x \sin\theta_i}$$

$$= \boldsymbol{a}_y \frac{E_{i0}}{60\pi} \cos\theta_i e^{-j\frac{\omega}{c} x \sin\theta_i}$$

(2) 在媒质 1 中的时间平均坡印亭矢量为

$$P_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_1(x,z) \times \boldsymbol{H}_1^*(x,z)] = \boldsymbol{a}_x 2 \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} \sin\theta_i \sin^2\beta_{1z} z$$

平行极化的情况：



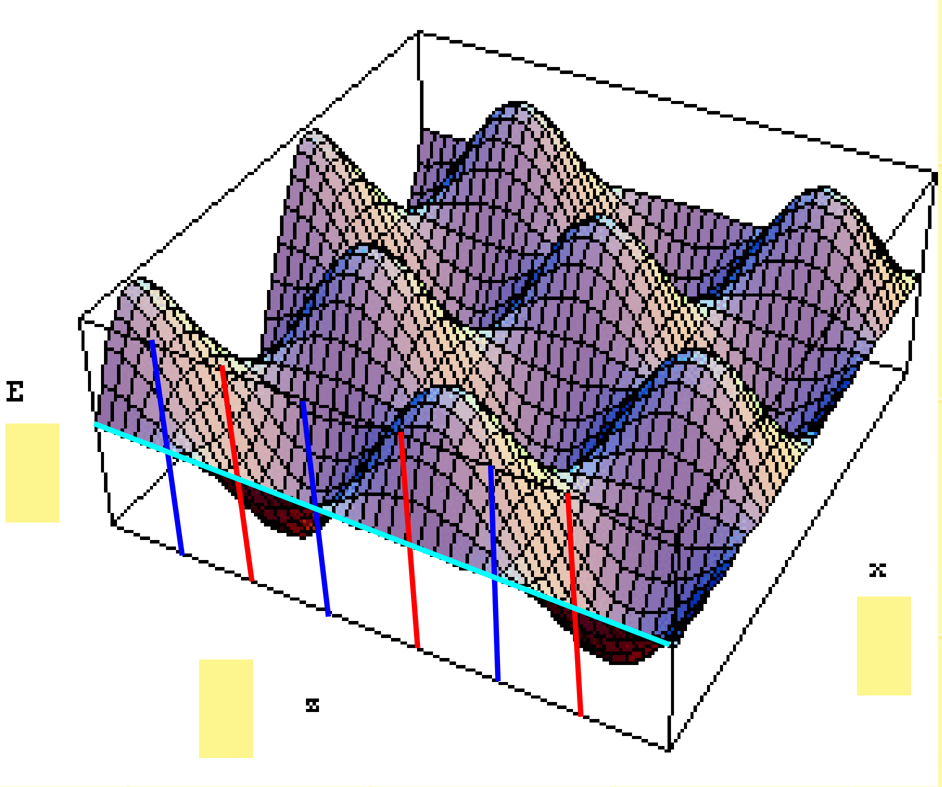
x
a_{nr}
H_r
E_r
θ_r
θ_i
y
z
E_i
a_{ni}
H_i
$(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma = 0)$
$(\varepsilon_2, \mu_2, \sigma \to \infty)$

媒质1中的合成波（教材P102）

$$E_{1_x} = -2jE_{i0}\cos\theta_i \sin(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$E_{1_z} = -2E_{i0}\sin\theta_i \cos(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$H_{1y} = \frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$



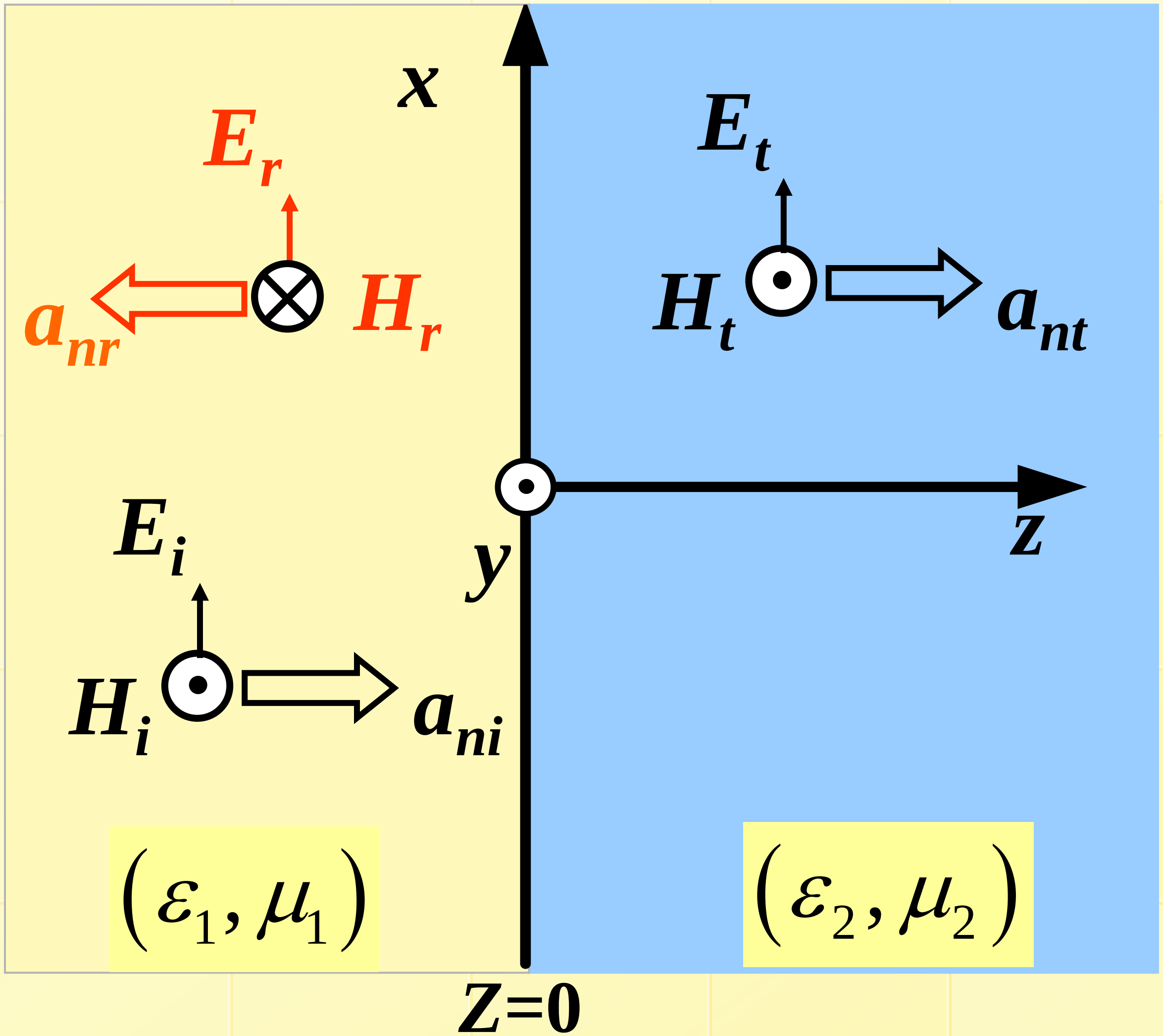
- 合成波在z方向上呈驻波分布；

- 合成波沿x方向呈行波分布，相速为 $v_{xp}=\dfrac{\omega}{\beta_{1x}}=\dfrac{\omega}{\beta_1\sin\theta_i}$；

- 等振幅面平行于分界面，等相位面垂直于分界面，合成波为非均匀平面波；

- 合成波在 $z=-\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ 处电场的x分量为零，在这些位置处插入垂直于z轴的导体板，将形成平行板波导，其间传播的电磁波在传播方向上没有磁场分量，只有电场分量，因此称为横磁波（TM波）。

4.8 在电介质平面边界上的垂直入射



- 分析思路

媒质1中的入射波

媒质1中的反射波

媒质2中的透射波

媒质1中的合成波

边界条件

合成波性质讨论

合成波性质讨论

透射反射系数的推导（教材P104）

反射系数

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

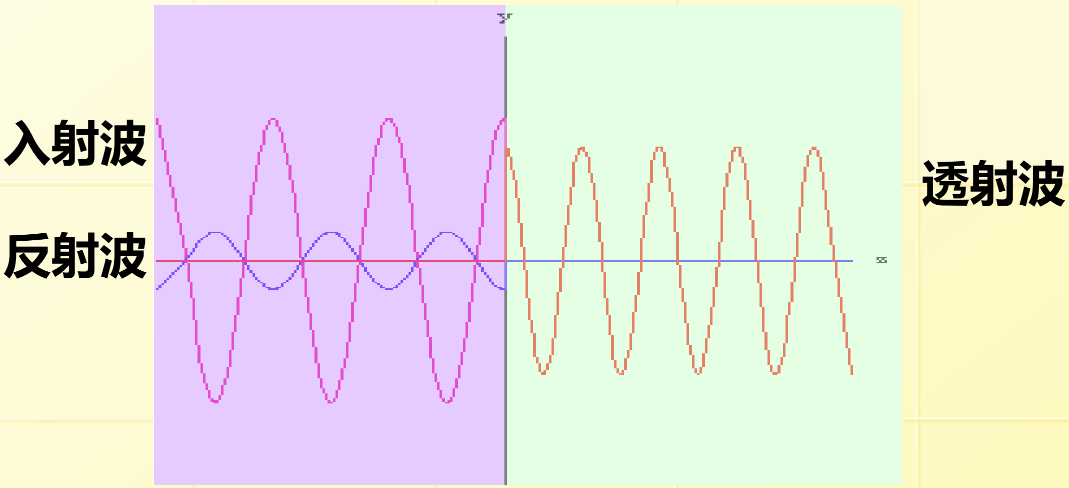
透射系数

$$\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\boxed{1 + \Gamma = \tau}$$

思考　试求理想导体的Γ和τ？

对理想介质表面的垂直入射



合成波：

$$\vec{E}_1(z) = \boldsymbol{a}_x E_{im}\left(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}\right)$$

$$= \boldsymbol{a}_x E_{im}\left[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z} + \Gamma\left(e^{j\beta_1 z} - e^{-j\beta_1 z}\right)\right]$$

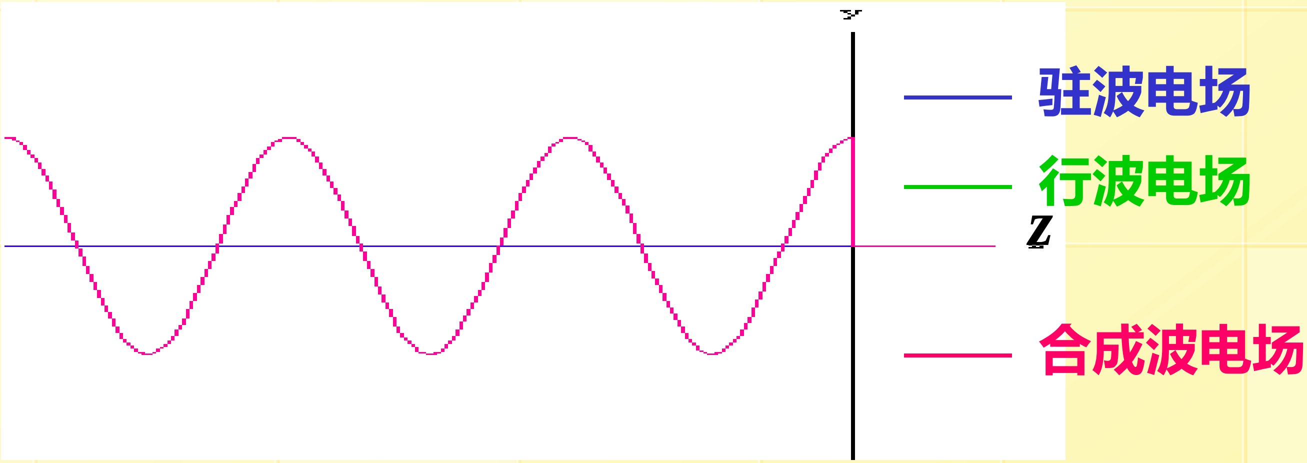
$$= \boldsymbol{a}_x E_{im}\left[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma\sin(\beta_1 z)\right]$$

➢媒质1中：

$$\boldsymbol{E}_1(z)=\boldsymbol{a}_x E_{i0}\left[\tau e^{-j\beta_1 z}+\Gamma 2j\sin(\beta_1 z)\right]$$

$$\boldsymbol{H}_1(z)=\boldsymbol{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1}\left[\tau e^{-j\beta_1 z}-2\Gamma\cos(\beta_1 z)\right]$$

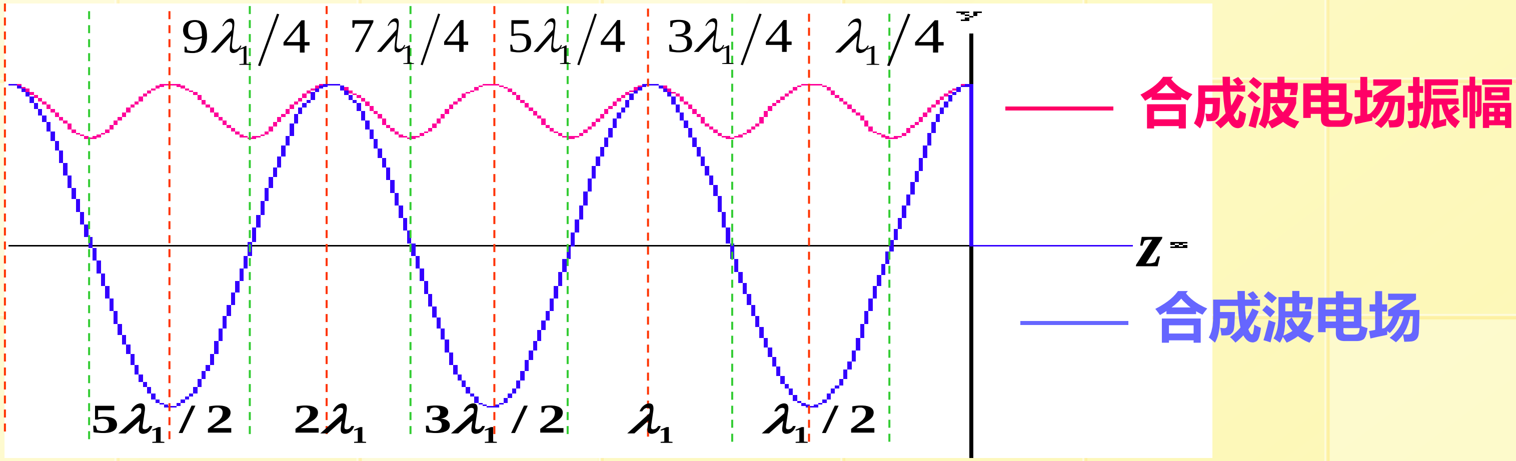
行驻波：既有行波成分又有驻波成分的电磁波。



媒质1中场可改写为:

$$\boldsymbol{E}_1(z)=\boldsymbol{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}\left(1+\Gamma e^{2j\beta_1 z}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_1(z)=\boldsymbol{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}\left(1-\Gamma e^{2j\beta_1 z}\right)$$



$$(\Gamma>0)$$

驻波比 驻波电场强度的最大值和最小值之比。

$$S = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

当 $\Gamma = 0$ 时，$S = 1$，为行波。

当 $\Gamma = \pm 1$ 时，$S = \infty$，是纯驻波。

当 $0 < |\Gamma| < 1$时，$1 < S < \infty$，为混合波。

S 越大，驻波分量越大，行波分量越小；

- 媒质2中：

$$\boldsymbol{E}_2(z) = \boldsymbol{a}_x \tau E_{i0} e^{-j\beta_2 z}$$

$$\boldsymbol{H}_2(z) = \boldsymbol{a}_y \frac{\tau E_{i0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}$$

媒质2中的电磁波是无衰减的行波。

平均能流密度

入射波：$$\boldsymbol{S}_i^{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i^*]=\boldsymbol{a}_z\frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1}$$

反射波：$$\boldsymbol{S}_r^{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r^*]=-\boldsymbol{a}_z\frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1}|\Gamma|^2$$

媒质1：$$\boldsymbol{S}_1^{av}=\boldsymbol{S}_i^{av}+\boldsymbol{S}_r^{av}=\boldsymbol{S}_i^{av}(1-|\Gamma|^2)$$

媒质2（透射波）：$$\boldsymbol{S}_2^{av}=\boldsymbol{a}_z\frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_2}|\tau|^2=\frac{\eta_1}{\eta_2}|\tau|^2\boldsymbol{S}_i^{av}=\boxed{T_p}\boldsymbol{S}_i^{av}$$

$$\boldsymbol{S}_1^{av}=\boldsymbol{S}_2^{av}$$

功率透射系数

练习题：一均匀平面波从自由空间垂直入射到某介质表面，在自由空间形成行驻波，其驻波比为2.7，介质平面有电场最小点，求介质的介电常数。