

第6章 傅里叶光学基础

Fundamentals of Fourier Optics

§ 6.1 数学基础知识和傅里叶变换的基本概念

§ 6.2 光波的傅里叶分析

§ 6.3 平面波角谱理论

§ 6.4 透镜的傅里叶变换

§ 6.5 光阿贝成像原理及阿贝—波尔特实验

§ 6.6 光全息术



Joseph Fourier
(1768-1830)
法国科学家
研究领域：数学、物
理、历史

傅里叶变换光学的基本思想：

引入**变换**的概念，将数学上周期信号的傅里叶级数展开应用于光学，对应于将复杂的图像分解为一系列**单频**信息的合成。

光的衍射和干涉最基本的方法：**光的相干叠加**。

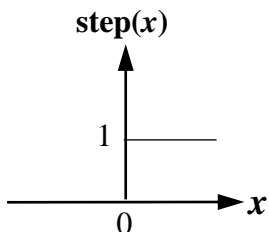
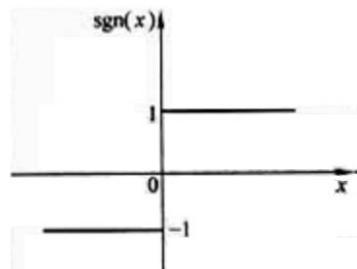
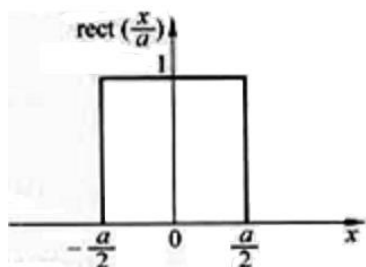
- 从变换的角度：

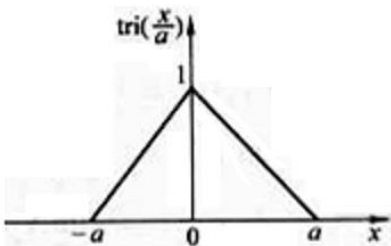
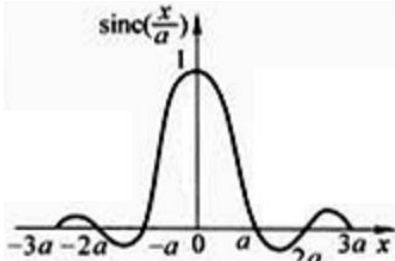
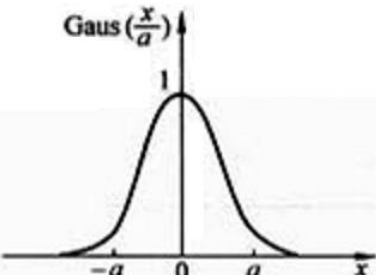
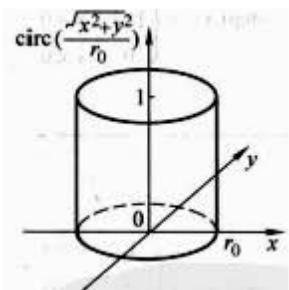
入射波场，遇到障碍物之后，波场中各种物理量重新分布（“波前(函数)重构”）。衍射障碍物将简单的入射场**变换**成了复杂的衍射场。

§ 6.1 数学基础知识和傅里叶变换的基本概念

一、一些常用函数

在现代光学中，常用各种非初等函数和特殊函数来描述光场的分布。

常用函数	定义	图形表示	应用
阶跃函数	$\text{step}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$		直边（或刀口） 的透过率
符号函数	$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$		孔径的一半嵌有 相位板的复振幅 透过率
矩形函数	$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \left \frac{x}{a}\right \leq 1/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$		狭缝或矩孔的透 过率

常用函数	定义	图形表示	应用
三角状函数	$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{ x }{a} & x \leq a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$		光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数
sinc函数	$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sin(\pi x / a)}{\pi x / a}$		狭缝或矩孔的夫琅禾费衍射图样
高斯函数	$\text{Gaus}\left(\frac{x}{a}\right) = \exp\left[-\pi\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$		激光器发出的高斯光束
圆域函数	$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$		圆孔的透过率

二、傅里叶级数的定义

一个**周期性**函数 $g(x)$ ，周期为 T （频率 $f = 1/T$ ），在满足狄里赫利条件（函数在一个周期内只有有限个极值点和第一类不连续点），可以展开为三角傅里叶级数：

$$g(x) = g(x \pm nT), \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ 基波角频率, } n\omega \text{ 高次谐波}$$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right]$$

其系数 $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) dx$ 直流分量

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad \text{余弦分量的幅度}$$

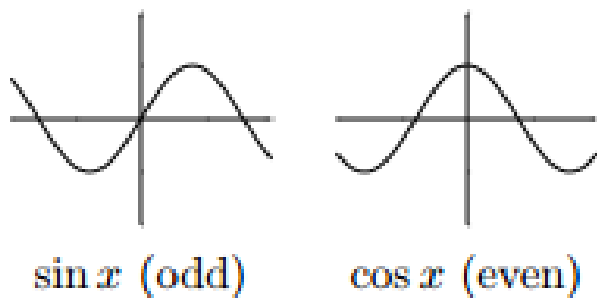
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad \text{正弦分量的幅度}$$

周期信号分解为直流分量 a_0 和各次谐波（ $n\omega$ ）的正余弦分量

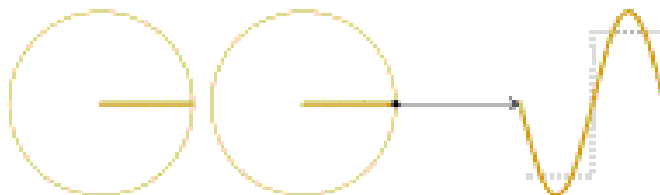
二、傅里叶级数的定义

傅里叶级数的产生过程可以分为以下三步：

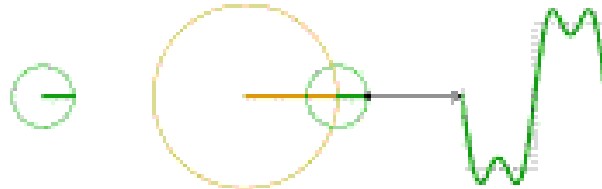
- 1、设想可以把一个周期函数 $g(x)$ 通过最简单的一系列正余弦函数来表示；
- 2、通过变形后用三角级数（含 \sin 和 \cos ）来表示；
- 3、通过积分，把各未知系数用 $g(x)$ 的积分式来表达；



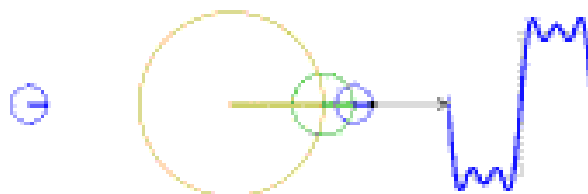
$$\frac{4 \sin \theta}{\pi}$$



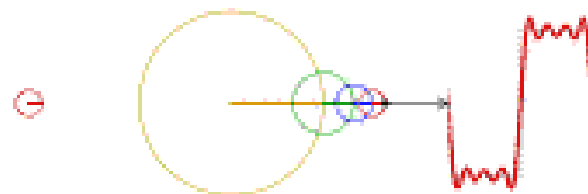
$$\frac{4 \sin 3\theta}{3\pi}$$



$$\frac{4 \sin 5\theta}{5\pi}$$



$$\frac{4 \sin 7\theta}{7\pi}$$



二、傅里叶级数的定义

$$g(x) = g(x \pm nT), \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ 基波角频率, } n\omega \text{ 高次谐波}$$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right]$$

其系数 $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) dx$ 直流分量

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad \text{余弦分量的幅度}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad \text{正弦分量的幅度}$$

复指数形式的傅里叶级数 $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} x\right)$

其中傅里叶系数为 $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \exp\left(-j2\pi \frac{n}{T} x\right) dx$

傅里叶系数 c_n 是频率 $\mu = n/T = nf$ 的函数, 称为**频谱函数**。

三、频谱的概念

一个周期变化的物理量既可以在空间（或时间）域 x 中用 $g(x)$ 描述，也可以在频率域 μ 中用 C_n 描述，两者是等效的。

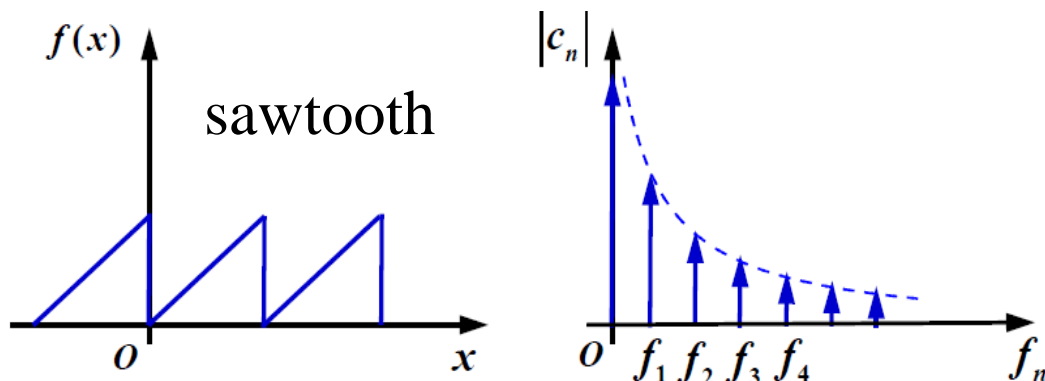
复函数 C_n : **振幅频率** + **相位频率** $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

$$|c_n| = \sqrt{c_n \cdot c_n^*} = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) \quad \varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

周期信号可分解为直流，基波 (ω_0) 和各次谐波 ($\omega = n\omega_0$) 的线性组合。

$|c_n| \sim \mu$ 关系曲线称为**幅度频谱图**

$\varphi_n \sim \mu$ 关系曲线称为**相位频谱图**



锯齿波及它的振幅频谱图形

将一个系统的输入函数展开成傅里叶级数，在频率域中分析各谐波的变化，最后综合出系统的输出函数，这种处理方法称作**频谱分析方法**。

周期信号频谱具有**离散性、谐波性、收敛性**！

四、傅里叶变换

对非周期函数也可以作傅里叶分析, ($T \rightarrow \infty$)。

1. 一维傅里叶变换

非周期函数 $x(t)$ 在整个定义域上满足狄里赫利条件, 在无限区间内 $x(t)$ 绝对可积, 则有

$$t = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{傅里叶变换}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \text{傅里叶反变换}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad \text{一一对应}$$

★ 由傅里叶反变换式可见非周期信号由连续的频率分量 ($e^{j\omega t}$) 组成

频率分量的幅度 $\frac{d\omega}{2\pi} X(j\omega)$ 是无穷小量

$X(j\omega)$ 表示各频率分量 ($e^{j\omega t}$) 幅度的相对大小,

$X(j\omega)$ 就称为频谱密度 (单位频带内的振幅), 简称为频谱

四、傅里叶变换

对非周期函数也可以作傅里叶分析, 只是其频率取值不是离散而是连续的。

2. 二维傅里叶变换

非周期函数 $g(x, y)$ 在整个无限 xy 平面上满足狄里赫利条件, 而且存在 $\int \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| dx dy$, 则有

$$g(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y = F^{-1} \{G(f_x, f_y)\}$$

其中 $G(f_x, f_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy = F \{g(x, y)\}$

$G(f_x, f_y)$ 是函数 $g(x, y)$ 的傅里叶变换(或称为傅里叶频谱), $G(f_x, f_y)$ 的作用类似于傅里叶系数 c_n , 表示各频率成分的权重因子, 描述了各复指数分量的相对幅值和相移

$g(x, y)$ 是频谱函数 $G(f_x, f_y)$ 的傅里叶逆变换。

§ 6.2 光波的傅里叶分析

光波按其波动特征，可分为**简单波(简谐波)**和**复杂波**

几个频率为 ω 的单色平面光波叠加以后，其合成波仍然为同一频率的单色波；
不同频率的单色平面波叠加以后，其合成波是一个复杂波；

一个复杂波能否用若干个单色波的组合表示出来？

——**光波的傅里叶分析：傅里叶级数定理和积分定理**

一、平面波基元函数分析方法

平面 (x, y) 上的任意**复振幅分布** $A(x, y)$ 可用它的**空间频谱函数** $\tilde{A}(f_x, f_y)$ 的逆傅里叶变换表示

$$A(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(f_x, f_y) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y$$

解释

平面 (x, y) 上一个任意光场的复振幅 $A(x, y)$ ，可以表示为一系列**空间频率**为 (f_x, f_y) ，振幅密度为 $\tilde{A}(f_x, f_y)$ 的简谐平面波的线性叠加

振幅密度函数：

$$\tilde{A}(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy$$

在光波的空间傅里叶分析中，三维简谐平面波这种简单波构成了傅里叶分析的基础，称为**基元光波**。这种以三维简谐平面波作为基元光波的分析方法被称为**平面波基元分析法或者余弦基元分析法**。

二、复杂波的分解

复杂波：在时间参量上包含各种时间频率，在空间分布上，等相面具有复杂的形状。

理论依据：波动微分方程的线性性质和波的叠加原理

分解步骤：（1）将空间各考察点处的振动分解为各种时间频率的简谐振动的线性组合，即时间域分解；
（2）将每一个简谐波分解为一系列不同空间频率的平面波的线性组合，即空间域分解；
（3）将复杂波表示为一系列简谐平面波的线性组合。

1、时间域分解

按照傅里叶积分定理，可将复杂波表示为

$$A(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(x, y, z, \nu) \exp(-j2\pi\nu t) d\nu$$

复杂振动的时频谱： $\tilde{A}(x, y, z, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y, z, t) \exp(j2\pi\nu t) dt$

结论

复杂波 $A(x, y, z, t)$ 可以分解为一系列频率为 ν ，振幅密度为 $\tilde{A}(x, y, z, \nu)$ 的简谐波的线性叠加

2、空间域分解

设简谐波复振幅 $\tilde{A}(x, y, z, \nu)$ 的空间频域为 $\tilde{\tilde{A}}(f_x, f_y, f_z, \nu)$, 则有

$$\tilde{\tilde{A}}(f_x, f_y, f_z, \nu) = \iiint \tilde{A}(x, y, z, \nu) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y + f_z z)] dx dy dz$$

$$\tilde{A}(x, y, z, \nu) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{A}}(f_x, f_y, f_z, \nu) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y + f_z z)] df_x df_y df_z$$

结论

复杂波 $\tilde{A}(x, y, z, \nu)$ 被分解为一系列空间频率 (f_x, f_y, f_z) , 振幅密度为 $\tilde{\tilde{A}}(f_x, f_y, f_z, \nu)$ 的简谐平面波的叠加。

注意

1. 做空间分解时, 将 $\tilde{A}(x, y, z, \nu)$ 作为简谐波, 即将 ν 作为常数, 可以不考虑时间位相因子 $\exp(-j2\pi\nu t)$

2. 对于任何简谐波来说, 三个空间频率分量并不独立, 它们和时间频率 ν 之间由速度 ν 相联系, 满足下述关系:

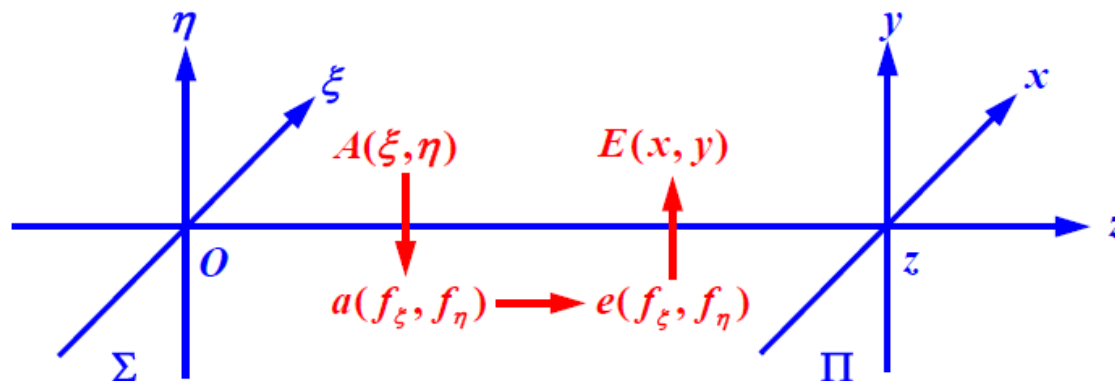
$$f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2 \frac{\text{时间频率}}{\text{速度}}, \quad \text{单位 } \text{m}^{-1}$$

综合时间和空间分解过程, 可将复杂波表示为

$$A(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int \tilde{\tilde{A}}(f_x, f_y, f_z, \nu) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y + f_z z - \nu t)] df_x df_y df_z d\nu$$

§ 6.3 平面波角谱理论

利用复杂波的傅里叶分解，可以处理衍射问题，这就是平面波角谱理论。



衍射的角谱分析方法

平面波角谱理论的基本思想：

1. 对复振幅 $A(\xi, \eta)$ 作傅里叶变换，将其分解为一系列沿不同方向传播的三维简谐平面波， $A(\xi, \eta)$ 的空间频谱为 $a(f_\xi, f_\eta)$
2. 根据 $z=0$ 平面的频谱 $a(f_\xi, f_\eta)$ ，求出在距离 z 处 $(x, y; z)$ 平面上的频谱分布 $e(f_\xi, f_\eta)$
3. 通过对 $e(f_\xi, f_\eta)$ 的反傅里叶变换，也即是传播到 Π 平面上，经历了不同位相延迟的所有平面波相叠加，就可以综合出 Π 平面上衍射图形的复振幅分布 $E(x, y)$

一、角谱的定义

设 $A(\xi, \eta)$ 的空间频谱为 $a(f_\xi, f_\eta)$ ，有

$$A(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(f_\xi, f_\eta) \exp[j2\pi(f_\xi \xi + f_\eta \eta)] df_\xi df_\eta$$

$a(f_\xi, f_\eta)$ 表示复杂波 $A(\xi, \eta)$ 中空间频率为 (f_ξ, f_η) 的平面波成分的复振幅密度，空间频率 (f_ξ, f_η) 决定了该平面波的传播方向

设该平面波波矢的方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ，则有

$$f_\xi = \cos \alpha / \lambda; f_\eta = \cos \beta / \lambda; f_\zeta = \cos \gamma / \lambda,$$

$$f_\zeta = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2}$$

所以， $A(\xi, \eta)$ 的空间频谱 $a(f_\xi, f_\eta)$ 又可以表示为 $a\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$ ，这种用波矢方向余弦表示的空间频谱 $a\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$ ，称为复杂波 $A(\xi, \eta)$ 的

角谱。

空间频率：

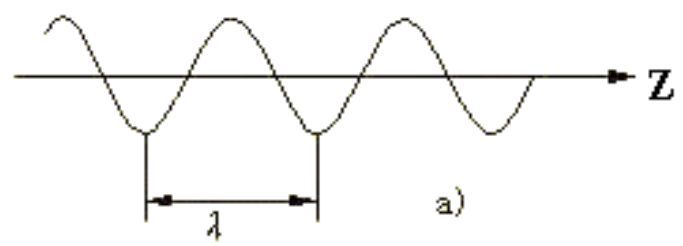
空间呈正弦或余弦变化的物理量在其某一方向上单位距离所包含的空间周期数。

空间频率的表示 →

① 在某一传播方向上（如图a, b）

其空间周期为 λ ,
空间频率为 $1/\lambda$

$$\tilde{E} = A \cdot e^{ikz} = A \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z},$$



② 在 $z=z_0$ 平面上复振幅分布的空间频率

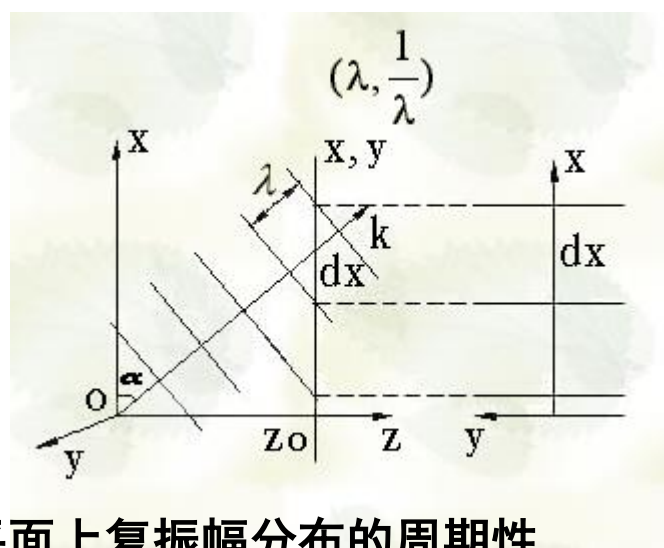
$$\tilde{E} = A \cdot e^{ikx \cos \alpha}$$

$z = z_0$ (xy面) 等相线 $kx \cos \alpha = C$

空间周期: $d_x = \frac{\lambda}{\cos \alpha}, d_y = \infty$

空间频率: $u = \frac{1}{d_x} = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, v = \frac{1}{d_y} = 0$

知: $(u, v) \leftrightarrow (\cos \alpha, \cos \beta)$



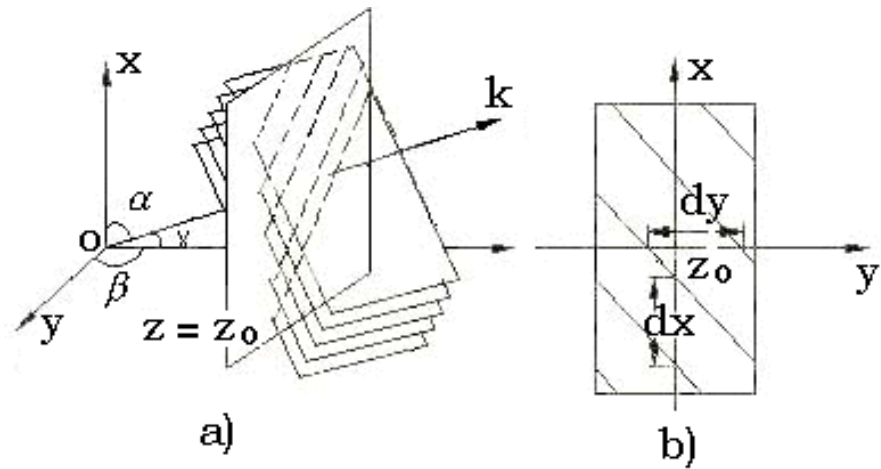
即用一组空间频率 (u, v) 描写平面波在x, y平面上复振幅分布的周期性

平面波: $\tilde{E} = A \cdot e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)}$
 $z = z_0$ 面上等相线

$$k(x \cos \alpha + y \cos \beta) = C$$

$$u = \frac{1}{d_x} = \frac{\cos \alpha}{\lambda} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda}$$

$$v = \frac{1}{d_y} = \frac{\cos \beta}{\lambda} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda}$$



空间频率的意义:

1.空间频率表示复振幅分布的周期性

2.空间频率(u,v)用于描述光波场XY平面上复振幅的一种基本周期分布,也对应着一个沿 $(\cos \alpha = \lambda u, \cos \beta = \lambda v)$ 该方向传播的平面波

3.光波场某一平面上的复振幅分布可以分解成许多不同基本周期分布,则表明包含着许多不同的(u,v)成分,对应着许多不同方向 $(\cos \alpha, \cos \beta)$ 传播的平面波

4.(u,v)也可以表示不同强度分布的空间周期性

二、角谱的传播

$$A(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(f_{\xi}, f_{\eta}) \exp[j2\pi(f_{\xi}\xi + f_{\eta}\eta)] df_{\xi} df_{\eta}$$

表示： $z=0$ 平面的复杂波 $A(\xi, \eta)$ 被分解为一系列空间频率各不相同的三维简谐平面波，其中空间频率 (f_{ξ}, f_{η}) 的简谐平面波成分为

$$a(f_{\xi}, f_{\eta}) df_{\xi} df_{\eta} \exp[j2\pi(f_{\xi}\xi + f_{\eta}\eta)]$$

表示平面波复振幅，实际上是空间频率为 $(f_{\xi}, f_{\eta}, f_{\zeta})$ 的一个三维简谐平面波在 $z=0$ 平面的表达式。

该平面波在自由空间传播过程中，其**等相面**始终是平面。当它从 $(x, y; 0)$ 平面传播到达 $(x, y; z)$ 平面时，其复振幅应表示为

$$a(f_{\xi}, f_{\eta}) df_{\xi} df_{\eta} \exp[j2\pi(f_{\xi}x + f_{\eta}y + f_{\zeta}z)]$$

$$f_{\zeta} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 f_{\xi}^2 - \lambda^2 f_{\eta}^2}$$

 **z 平面的复振幅分布** $a(f_{\xi}, f_{\eta}) \exp\left[jkz\sqrt{1 - \lambda^2 f_{\xi}^2 - \lambda^2 f_{\eta}^2}\right] df_{\xi} df_{\eta} \exp[j2\pi(f_{\xi}x + f_{\eta}y)]$

$z=0$ 平面的复振幅分布 $a(f_{\xi}, f_{\eta}) df_{\xi} df_{\eta} \exp[j2\pi(f_{\xi}\xi + f_{\eta}\eta)]$

z 平面的角谱： $e(f_{\xi}, f_{\eta}) = a(f_{\xi}, f_{\eta}) \exp\left[jkz\sqrt{1 - \lambda^2 f_{\xi}^2 - \lambda^2 f_{\eta}^2}\right]$

z 平面的角谱: $e(f_\xi, f_\eta) = a(f_\xi, f_\eta) \exp \left[jkz \sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2} \right]$

对 $e(f_\xi, f_\eta)$ 作反傅里叶变换, 即可求出观察面 Π 上衍射场的复振幅

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} e(f_\xi, f_\eta) \exp[j2\pi(f_\xi x + f_\eta y)] df_\xi df_\eta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} a(f_\xi, f_\eta) \exp \left[jkz \sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2} \right] \exp[j2\pi(f_\xi x + f_\eta y)] df_\xi df_\eta \end{aligned}$$

结论

平面波角谱理论的实质是傅里叶分解和综合的过程。即首先将输入函数 $A(\xi, \eta)$ 分解为一系列简谐平面波, 然后再将传播过程中经历了不同相位延迟的平面波成分相加, 最后综合出输出面上衍射的复振幅。

讨论:

$$f_{\xi} = \cos \alpha / \lambda; f_{\eta} = \cos \beta / \lambda; f_{\zeta} = \cos \gamma / \lambda,$$

$$f_{\zeta} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 f_{\xi}^2 - \lambda^2 f_{\eta}^2}$$

(1) 当 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta < 1$ 时, $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$ 是实数。

对于某一确定的 (α, β) , 该式表示沿空间某一确定方向传播的平面波。
当 (α, β) 取不同值时, 该式表示光场中各个角谱分量的传播情况。

该式说明: 经过 z 距离的传播, 光场中各个平面波分量的**振幅不变**,
只是改变了各自的相对相位。

由于各个平面波分量沿不同方向传播, 它们到达给定平面所经过的距离不同, 相位改变也不同。

或者说相位改变量与空间频率(或传播方向)有关。传播方向与 z 轴夹角 γ 越大(α, β 越小), 空间频率越高, 相位延迟越小; 相反, 则相位延迟越大。

(2) 当 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$ 时,

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = j\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1}$$

$$e\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}; z\right) = a\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}; 0\right) \exp\left(-kz\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1}\right)$$

随 z 的增大, 迅速衰减, 在几个波长的距离几乎衰减为0。这些方向上的波动分量称为**倏逝波**。在标量衍射近似条件下, 可忽略不计。

(3) 当 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ 时, $\cos \gamma = 0$

垂直于 z 轴, 在 z 轴方向上的净能流为 0, 对角谱传播无贡献。

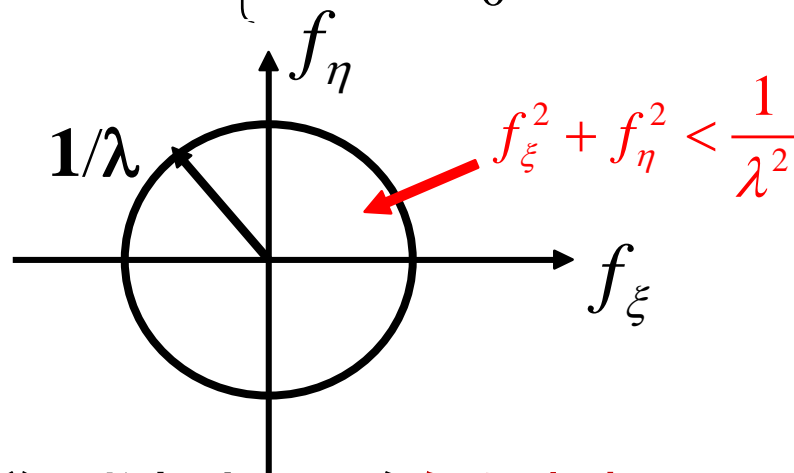
一般情况的角谱传播 $f_\xi = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, f_\eta = \frac{\cos \beta}{\lambda}$

$$e\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}; z\right) = a\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}; 0\right) \exp\left(jkz\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}\right)$$

$$e(f_\xi, f_\eta) = a(f_\xi, f_\eta) \exp\left(jkz\sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2}\right)$$

$e(f_\xi, f_\eta)$ 和 $a(f_\xi, f_\eta)$ 分别看成是线性不变系统输入函数和输出函数的频谱，
则**传递函数**为：

$$H(f_\xi, f_\eta) = \frac{e(f_\xi, f_\eta)}{a(f_\xi, f_\eta)} = \begin{cases} \exp(jkz\sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2}) & \text{当 } f_\xi^2 + f_\eta^2 < \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



它表明，系统的传递函数相当于一个**低通滤波器**，具有有限的带宽，其截止频率为 $1/\lambda$ 。在频域平面上，这个滤波器相当于半径为 $1/\lambda$ 的圆孔区域。

频率小于 $1/\lambda$ ，模为1，对各种频率成分的振幅无影响，但要引入与频率有关的相移。频率大于 $1/\lambda$ ，被截止。

光波衍射传播过程是一个**低频滤波过程**。从空域中来看，比波长 λ 还小的精细结构信息，或者说空间频率高于 $1/\lambda$ 的信息成分，在波长为 λ 的单色平面光波照明下，不能沿 z 方向向前传播。

三、角谱理论的非涅尔近似

角谱传递函数 $H(f_\xi, f_\eta) = \exp \left[jkz \sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2} \right]$

按泰勒级数展开

$$H(f_\xi, f_\eta) = \exp \left\{ jkz \left[1 - \frac{1}{2} (\lambda^2 f_\xi^2 + \lambda^2 f_\eta^2) - \frac{1}{8} (\lambda^4 f_\xi^4 + \lambda^4 f_\eta^4) \cdots \right] \right\}$$

菲涅耳近似条件 $z^3 \geq \frac{1}{2\lambda} \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]$

角谱传递函数 $H(f_\xi, f_\eta) = \exp(ikz) \exp \left[j\pi\lambda z (f_\xi^2 + f_\eta^2) \right]$

$$E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(f_\xi, f_\eta) \exp \left[jkz \sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2} \right] \exp[j2\pi(f_\xi x + f_\eta y)] df_\xi df_\eta$$

$$E(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \iint_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \exp \left\{ j \frac{k}{2z} \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right] \right\} d\xi d\eta$$

——菲涅尔衍射积分

注意

计算标量波的衍射问题，既可以菲涅尔衍射积分为基础的球面波理论，也可以应用平面波角谱理论为基础的平面波理论。

四、角谱理论的夫琅和费近似

角谱传递函数 $H(f_\xi, f_\eta) = \exp \left[jkz \sqrt{1 - \lambda^2 f_\xi^2 - \lambda^2 f_\eta^2} \right]$

按泰勒级数展开

$$H(f_\xi, f_\eta) = \exp \left\{ jkz \left[1 - \frac{1}{2} (\lambda^2 f_\xi^2 + \lambda^2 f_\eta^2) - \frac{1}{8} (\lambda^4 f_\xi^4 + \lambda^4 f_\eta^4) \cdots \right] \right\}$$

夫琅和费近似条件 $z \gg \frac{k}{2} (\xi^2 + \eta^2)_{\max}$

角谱传递函数 $H(f_\xi, f_\eta) = \exp(ikz)$

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \iint_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{x}{\lambda z} \xi + \frac{y}{\lambda z} \eta \right) \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \times F \left\{ A(\xi, \eta) \right\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} \end{aligned}$$

——夫琅和费衍射积分

利用上面的夫琅和费衍射积分可以确定一些经典孔径的夫琅和费衍射图样，例如圆孔、矩形孔、单缝以及多缝结构（如光栅）等。

§ 6.4 透镜的傅里叶变换

一、薄透镜的位相变换因子

透镜的主要作用有两种：（1）成像，（2）相位变换

透镜——相位变换作用
傅里叶变换的条件

透镜前： $u_l(\xi, \eta) = A_1(\xi, \eta) \exp[j\Phi_1(\xi, \eta)]$

透镜后： $u_l'(\xi, \eta) = A_2(\xi, \eta) \exp[j\Phi_2(\xi, \eta)]$

透过率函数：

$$T_l(\xi, \eta) = \frac{A_2}{A_1} \exp[j\Phi(\xi, \eta)] = \begin{cases} a(\xi, \eta) \exp[j\Phi(\xi, \eta)], & R < D/2 \\ 0, & R > D/2 \end{cases}$$

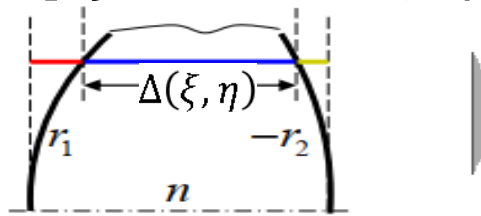
$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi_2(\xi, \eta) - \Phi_1(\xi, \eta)$$

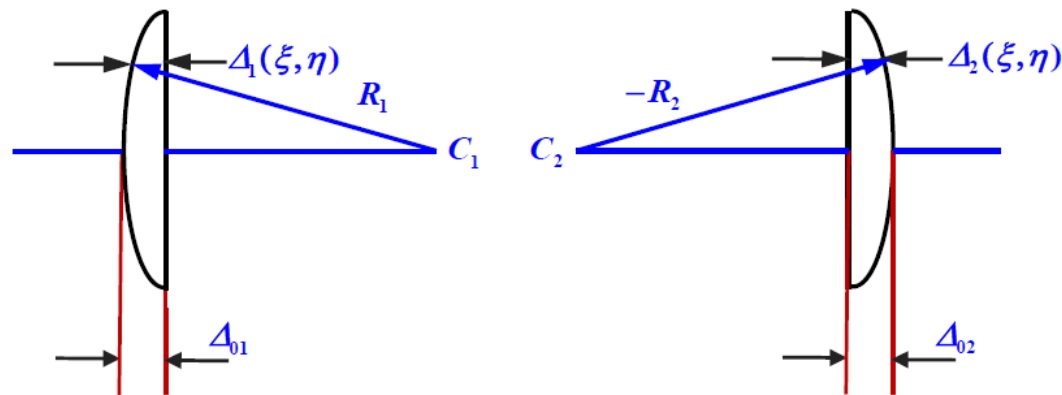
D —透镜直径, $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

无吸收、反射能量损耗时： $a(\xi, \eta) = A_2 / A_1 = 1$

$$T_l(\xi, \eta) = \exp[j\Phi(\xi, \eta)] = \exp[jk\Delta_0] \exp[jk(n-1)\Delta(\xi, \eta)]$$

透镜相位变换函数





应用几何光学方法，可计算透镜前后两段空气隙厚度差：

$$\Delta(\xi, \eta) = \Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta) = \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_2^2}} \right)$$

对于薄透镜，如果傍轴近似成立，即 $\sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2}} \approx 1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R^2}$

厚度函数： $\Delta(\xi, \eta) = \Delta_0 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

----透镜的焦距公式

透镜的位相变换因子

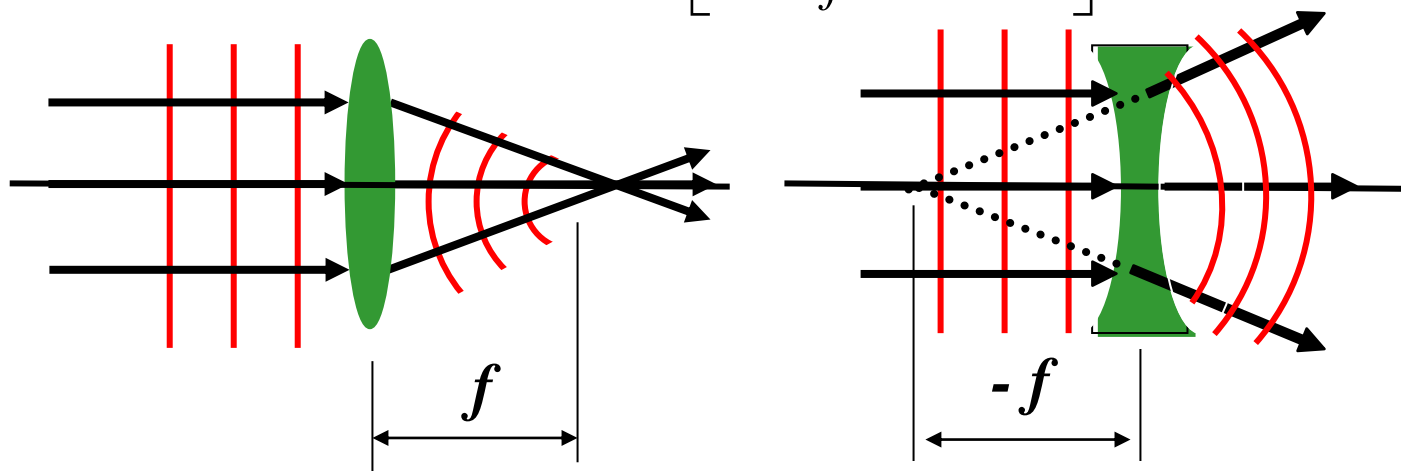
$$T_l(\xi, \eta) = \exp(jkn\Delta_0) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (\xi^2 + \eta^2) \right]$$

结论

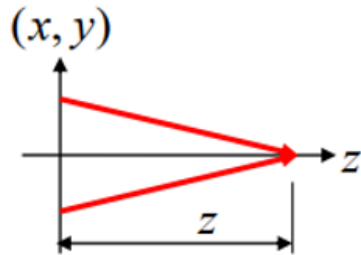
在傍轴条件下理想薄透镜的相位变换函数具有纯二次型的相位因子。

例题：设入射平面波振幅为 A ，并将 L 平面处相位取作零，经透镜后
出射光波的复振幅为：

$$T'_l(\xi, \eta) = AT(\xi, \eta) = A \exp \left[-j \frac{k}{2f} (\xi^2 + \eta^2) \right]$$



$$T_l'(\xi, \eta) = AT(\xi, \eta) = A \exp \left[-j \frac{k}{2f} (\xi^2 + \eta^2) \right]$$

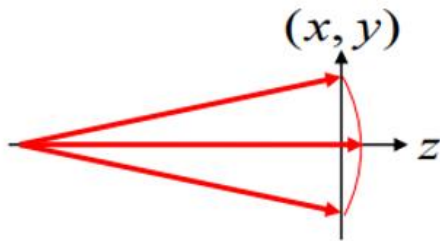


会聚

$$\exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right]$$

1. 会聚透镜 $f > 0$

表示中心在光轴上距透镜为 f 处**会聚球面波**；



发散

$$\exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right]$$

2. 发散透镜 $f < 0$

表示中心在光轴上距透镜为 f 处**发散球面波**。

二、透镜的傅里叶变换性质

1. 平面波照明, 物体位于透镜之前

物体的傅里叶光谱 $t(f_\xi, f_\eta)$

透过物体的光波的傅里叶谱 $t'(f_\xi, f_\eta)$

$$t'(f_\xi, f_\eta) = \exp(jkd_0) \exp[-j\pi\lambda d_0(f_\xi^2 + f_\eta^2)] t(f_\xi, f_\eta)$$

透镜后焦面 Π 上的复振幅分布 $E(x, y)$
等于透镜入瞳面上物体的夫琅和费衍射

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{E_0}{j\lambda f} \exp[jk(f + \frac{x^2 + y^2}{2f})] \iint_{-\infty}^{+\infty} T'(\xi', \eta') \exp[-j2\pi(f_\xi \xi' + f_\eta \eta')] d\xi' d\eta' \\ &= \frac{E_0}{j\lambda f} \exp[jk(f + \frac{x^2 + y^2}{2f})] t'(f_\xi, f_\eta) \end{aligned}$$

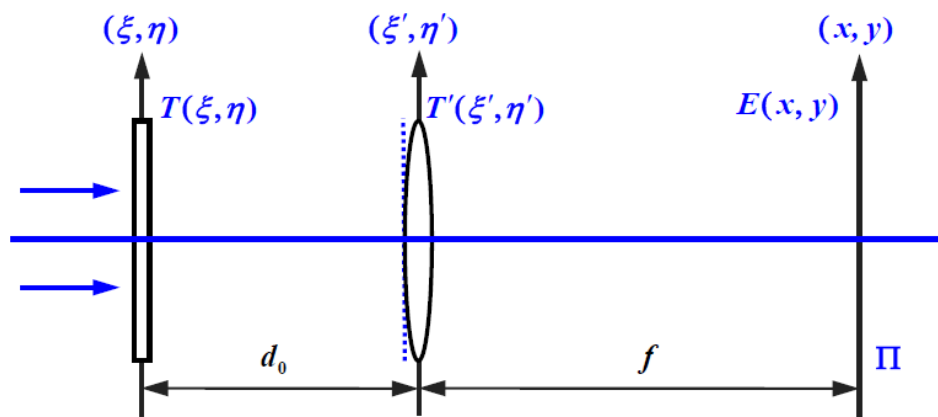
得:

$$E(x, y) = g(x, y) \iint_{-\infty}^{+\infty} T(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_\xi \xi + f_\eta \eta)] d\xi d\eta$$

$$\text{其中 } g(x, y) = \frac{E_0}{j\lambda f} \exp[jk(d_0 + f)] \exp[j\frac{k}{2f}(1 - \frac{d_0}{f})(x^2 + y^2)]$$

结论

透镜后焦面上的光场分布等于物体振幅透射系统 $T(\xi, \mu)$ 的傅里叶变换与一个复系数 $g(x, y)$ 的乘积



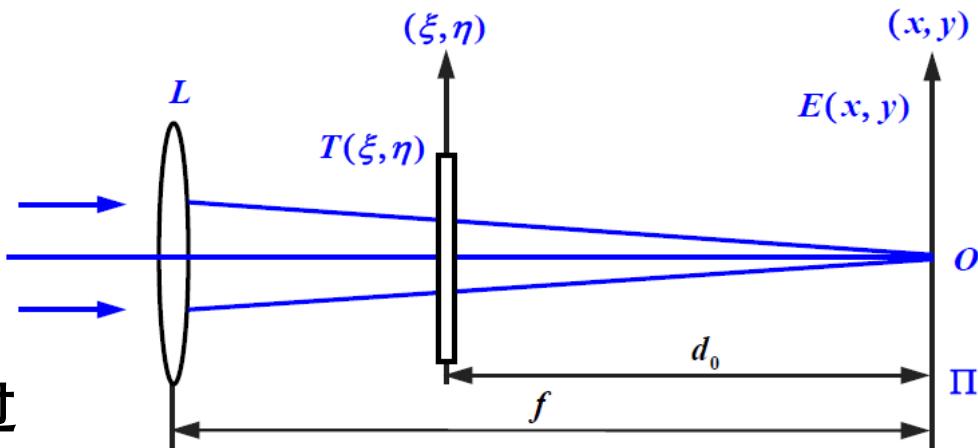
物体位于透镜之前的傅里叶变换

2. 平面波照明, 物体位于透镜之后

透过物体的光波复振幅

$$A(\xi, \eta) = A_0 \exp[-j \frac{k}{2d_0} (\xi^2 + \eta^2)] T(\xi, \eta)$$

透镜焦面 Π 上的光场可看做是透过物体光波的非涅耳衍射



物体位于透镜之后的傅里叶变换

$$E(x, y) = g(x, y) \int \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_\xi \xi + f_\eta \eta)] d\xi d\eta$$

其中 $g(x, y) = \frac{A_0}{j\lambda d_0} \exp \left[jk \left(d_0 + \frac{x^2 + y^2}{2d_0} \right) \right]$

$$t(f_\xi, f_\eta) = F[T(\xi, \mu)]$$

$$f_\xi = \frac{x}{\lambda f}, f_\eta = \frac{y}{\lambda f}$$

结论

物体位于透镜之后时, 焦平面 Π 上的光场分布仍然等于物体振幅透射系数 $T(\xi, \mu)$ 的傅里叶变换与一个复系数 $g(x, y)$ 的乘积

注意

在物体位于透镜之后的光路中, 无论 d_0 等于何值, 复系数 $g(x, y)$ 中的二次位相因子 $\exp[jk(x^2 + y^2)/(2d_0)]$ 都不能消除, 因此这种光路无法实现 $T(\xi, \mu)$ 的准确傅里叶变换。

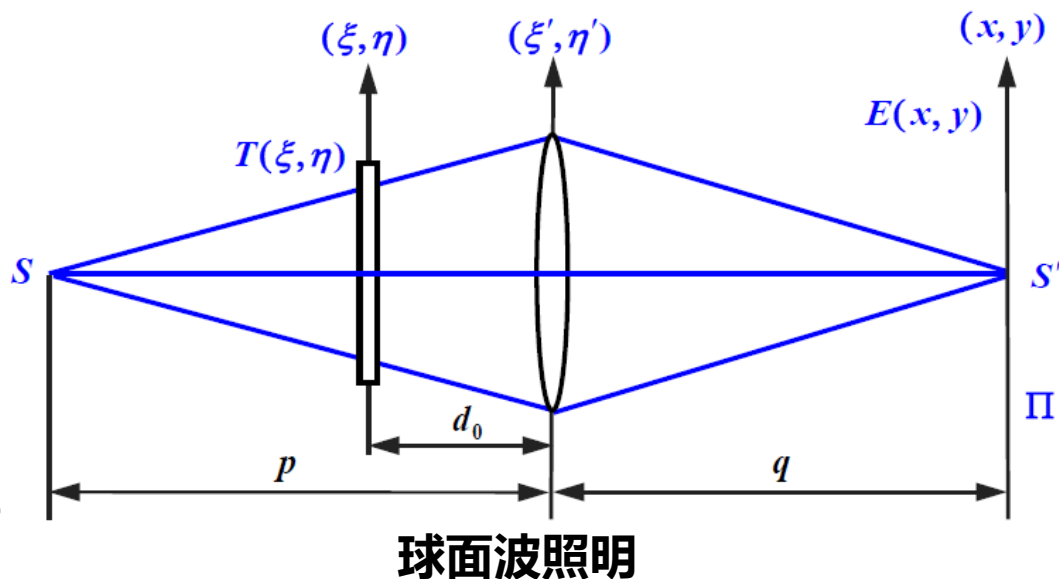
3. 球面波照明

S 点发出的单色球面波在物平面 (ξ, η) 上的振幅分布

$$A_0 \exp \left[jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2(p - d_0)} \right]$$

透过物体的光波复振幅分布为

$$A_0 \exp \left[jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2(p - d_0)} \right] T(\xi, \eta)$$



到达透镜孔径平面的光波复振幅

$$u_l(\xi', \eta') = \frac{A_0}{j\lambda d_0} \exp \left[jk \left(d_0 + \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2d_0} \right) \right] \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2(p - d_0)} \right] T(\xi, \eta) \exp \left[jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2d_0} \right] \exp \left[-j \frac{k}{d_0} (\xi \xi' + \eta \eta') \right] d\xi d\eta$$

透镜出射的光波复振幅分布

$$u_l'(\xi', \eta') = u_l(\xi', \eta') \exp \left[-j \frac{k}{2f} (\xi'^2 + \eta'^2) \right]$$

可得 (x, y) 平面光波的复振幅分布

$$E(x, y) = c \exp \left[jk \frac{(f - d_0)(x^2 + y^2)}{2[(f - d_0)q + fd_0]} \right] \iint_{-\infty}^{\infty} T(\xi, \eta) \exp \left[-jk \frac{f(x\xi + y\eta)}{q(f - d_0) + fd_0} \right] d\xi d\eta$$

当 $d_0 = f$ 时, 得

$$E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} T(\xi, \eta) \exp \left[-j2\pi(f_\xi \xi + f_\eta \eta) \right] d\xi d\eta$$

准确的傅里叶变换关系!

意义 只用单个傅里叶变换透镜可同时完成傅里叶变换和反傅里叶变换

➤ 小结

§ 6.1 数学基础知识和傅里叶变换的基本概念

§ 6.2 光波的傅里叶分析

§ 6.3 平面波角谱理论

§ 6.4 透镜的傅里叶变换

➤ 下次课内容：

§ 6.5 光阿贝成像原理及阿贝—波尔特实验

§ 6.6 光全息术

第2章作业(P102-103)第二部分：

2-1, 2-2, 2-8, 2-9, 2-13, 2-16