第三章 电路分析

§1. 电路模拟原理

- 按方式分类

  人工、CAD

- 人 工 分 析 → 实 验 分 析 →CAD分析

人工分析

- 经典分析流程：
- 首先要将电路中的物理器件用其相应的等效电路模型代替;
- 然后，根据描述各元件本身电学特性的关系式，利用基尔霍夫电压或电流定律描述电路各元件之间互联关系，列出整个电路的方程并求解。

实验分析

- 实验分析，即使用实验板、仪器进行IC分析 。

- 局限性：
- 实验分析与实际电路的差异大,实验分析结果往往没有多少实际意义;
- 实验分析具有破坏性;
- 实验分析开销大；
- 实验分析是一种测试手段,不能有效模拟。

CAD分析

- CAD分析主要是对电路的模拟。根据输入电路的拓扑结构和元件的参数，建立电路方程并求解。其实质是将电路拓扑结构根据求解的问题转换成适当的数学关系，然后求解的过程。

CAD电路分析步骤

- ①建立电路元器件的模型
- ②电路拓扑的描述
- ③建立电路方程
- ④编写计算机程序
- ⑤显示计算结果

电路功能分析

- 直流分析、交流稳态分析、瞬态分析、灵敏度分析、容差分析和噪声分析以及温度影响分析等 。

常用定理

- 欧姆定理(VCR-Voltage Current Relationship): I=V/R
- 基尔霍夫定理：
- 电流定律(KCL-Kirchhoff Current Law)：ΣIn=0
- 电压定律(KVL-Kirchhoff Voltage Law)：ΣVn=Ub

乔治·西蒙·欧姆

基尔霍夫,G.R.

- **德国物理学家**
- **乔治·西蒙·欧姆(Georg Simon Ohm，1787~1854)**
- **G.R.基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff，1824~1887)**

常用方法

- **节点电压法;**
- 以节点电压为求解对象的电路计算方法。

- **支路电流法。**
- 以支路电流为求解对象的电路计算方法。

- 节点电压法比支路电流法优越在于它需要直接求解的方程数少于后者。建立节点法所用方程的方法非常简便。现今的电子计算机辅助电路分析程序，多是采用节点电压法编制的。

节点电压法

- **运用定律：VCR和KCL**
- 需要分析的问题就是列出和求解电路方程。对于有N个节点的电路，根据定律可以列出（N-2）元线性关系。N个节点中有一个为参考点（一般是地线点），还有一个偏置电压点（一般是已知节点），它们不需要求解。所以，需要求解的未知节点为N-2个。

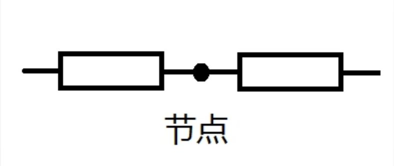
§2. 基本电路分析

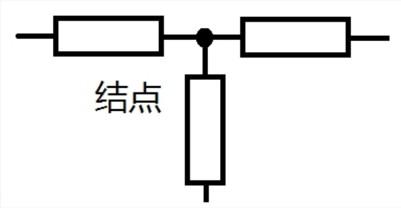
- 线性电路的直流分析；
- 线性电路的交流分析；
- 非线性电路直流、交流分析；
- 瞬态电路分析。

一、线性电路的直流分析

- **节点**

- 通常说的节点是指由三个或三个以上支路的连接点，但我们分析中将连接元件两端的两点也做为节点，即任何元器件的端子均是节点。





- **电流方向**

- KCL中通常取流出节点的电流为正，流入节点的电流为负，从节点流入的电流等于流出的电路。
- 电路方程中电流前的正负号与电流的实际正负无关，这里的正负号只是对一个节点流向的表示。电流的正负值仅指明电流实际方向与参考方向的一致性。

- **线性电路**

- 所谓线性电路是指所有元件都是线性元件，线性元件指的是在其上的电压（电流）可以线性迭加，而事实上，不存在真正的线性电路的元件，只是在一定范围内，电流与电压才呈现线性关系。

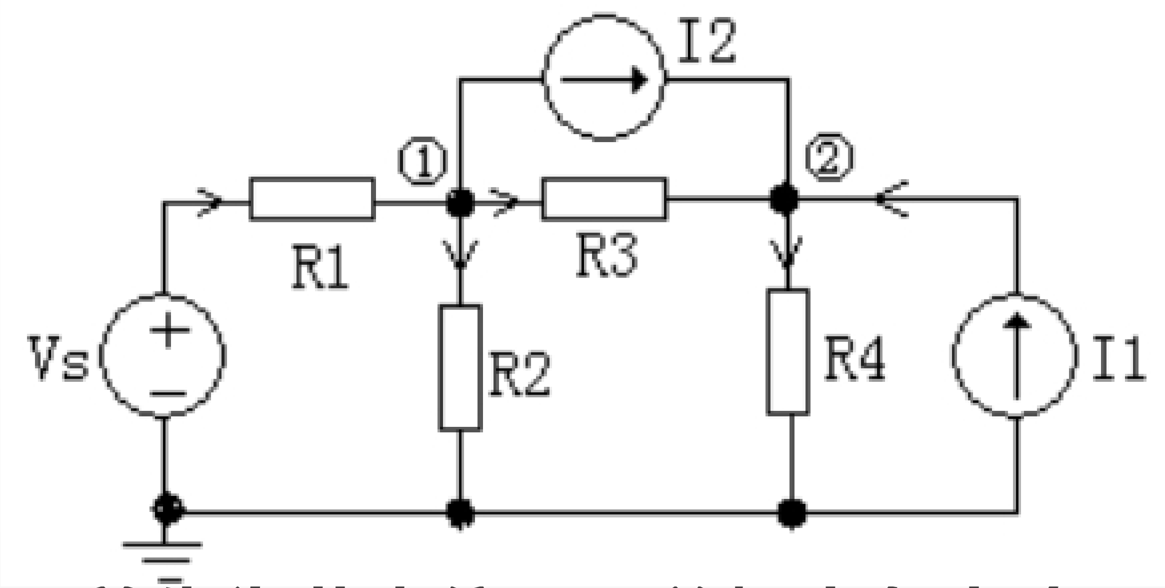
- **直流分析**

- 直流分析也称为直流稳态分析，做直流分析时，电路中的电容视为开路，电感视为短路。网络的节点和支路必须编号。

- **节点电压法**

- 现有的分析常采用节点电压法，以未知节点的电压为变量来构建电路方程。
- 电路网络的节点和支路必须编号。节点的编号从“0”开始，0号节点常为接地点，并作为其它节点电压的参考点。未知节点的编号从“1”开始。

例1 线性电路直流分析



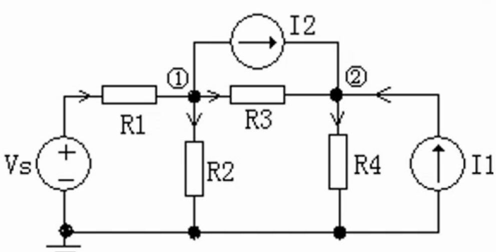
- 首先为节点编号，并标出各支路电流方向，可以看出有两个未知节点，未知节点电压表识为V1，V2。
- 根据KCL定律列出未知节点的电路方程：

$$\begin{cases} \dfrac{V1}{R2}+\dfrac{V1-V2}{R3}+I2-\dfrac{V_S-V1}{R1}=0 \\ \dfrac{V2}{R4}-I2-I1-\dfrac{V1-V2}{R3}=0 \end{cases}$$

例1 线性电路直流分析

(鼠标滑过播放视频)

例1 线性电路直流分析



- 首先为节点编号，并标出各支路电流方向，可以看出有两个未知节点，未知节点电压表识为V1，V2。
- 根据KCL定律列出未知节点的电路方程：

- 整理得：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right)V1-\frac{1}{R3}V2=\frac{V_S}{R1}-I2 \\ -\frac{1}{R3}V1+\left(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}\right)V2=I1+I2 \end{cases}$$

- 写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3} & -\frac{1}{R3} \\ -\frac{1}{R3} & \frac{1}{R3}+\frac{1}{R4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_S}{R1}-I2 \\ I1+I2 \end{bmatrix}$$

- 电路矩阵的一般形式为

  Y*V=I或Yn*Vn=In。
- 显而易见，系数矩阵Y的各元素为导纳量纲，所以Y矩阵又被称为导纳矩阵；未知电压构成了电压的向量；右端构成一个电流向量；这是一个欧姆定律的表现形式。
- 由于是线性电路，Y为常系数矩阵，可以很方便的进行求解。

例1 线性电路直流分析

- 整理得：

$$\begin{cases}(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3})V1-\frac{1}{R3}V2=\frac{V_S}{R1}-I2 \\ -\frac{1}{R3}V1+(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4})V2=I1+I2\end{cases}$$

- 写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3} & -\frac{1}{R3} \\ -\frac{1}{R3} & \frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V1 \\ V2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{V_S}{R1}-I2 \\ I1+I2\end{bmatrix}$$

- 电路矩阵的一般形式为
  Y*V=I或Yn*Vn=In。
- 显而易见，系数矩阵Y的各元素为导纳量纲，所以Y矩阵又被称为导纳矩阵；未知电压构成了电压的向量；右端构成一个电流向量；这是一个欧姆定律的表现形式。
- 由于是线性电路，Y为常系数矩阵，可以很方便的进行求解。

导纳系数矩阵

- 在电路分析的课程中，大家学习过自导纳和互导纳的概念。
- 自导纳：与节点Ni相连的导纳之和；
- 互导纳：是该节点与相邻节点的连接支路上的导纳之和。
- 通过对Y矩阵以及I向量的观察，可以发现：
- Y矩阵：Y矩阵的主对角线上的元素为电路中相应节点上的自导纳，总为正。非主对角线元素为电路节点的互导纳，总为负；
- I向量：I向量元素为各节点相连支路上的独立电源等效电流之和，符号取反 。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3} & -\frac{1}{R3} \\ -\frac{1}{R3} & \frac{1}{R3}+\frac{1}{R4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_S}{R1}-I2 \\ I1+I2 \end{bmatrix}$$

- 对于 导纳m*n矩阵，其元素 a_{ij}

自导纳 $a_{ij}, i=j, i\in(1,n), j\in(1,m)$

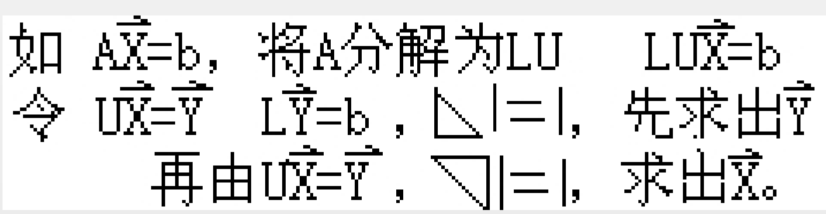
互导纳 $a_{ij}, i\neq j, i\in(1,n), j\in(1,m)$

解电路方程

- 线性方程的求解比较容易，对于简单的结构，用行列式即可求解，但当节点方程较多时，就必须通过矩阵求解方程。常用的方法有高斯消去法和LU分解法。

- **高斯(Gauss)消去法**
- 高斯(Gauss)消去法是利用矩阵运算，将某些矩阵元素消去后形成三角阵来求解。

- **LU分解法**
- LU分解、利用矩阵运算，将矩阵化为上下三角阵L与上三角矩阵U的乘积。

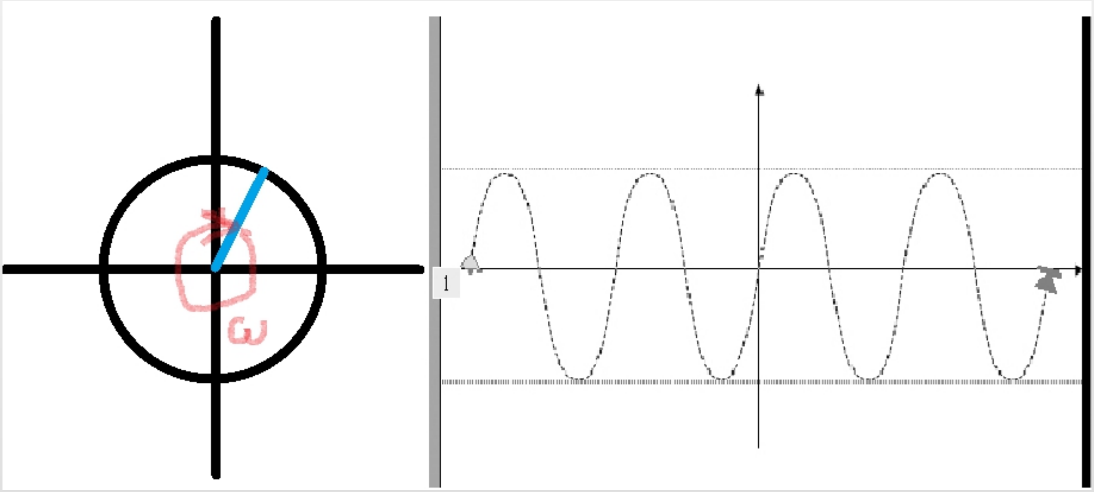


节点电压法存在的问题

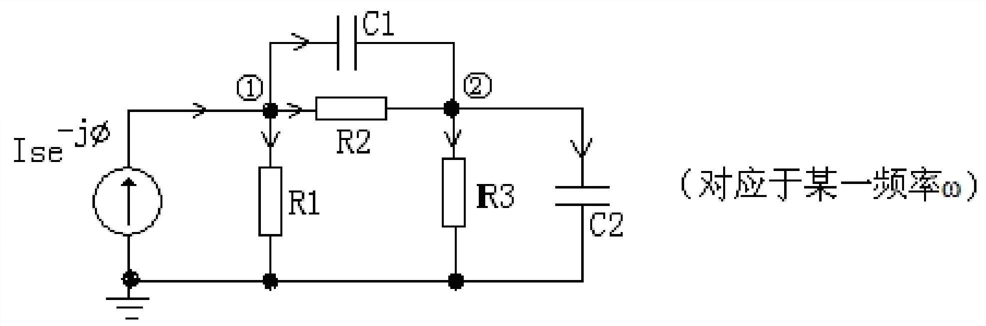
- 节点法方程阶数较低，方法简单，但不能直接处理独立源支路、阻抗为0支路以及流控器件，因此又有改进节点法被应用于电路模拟。改进节点法把元件分为三类：①导纳描述元件；②不用导纳描述元件，如独立电压源、电感、互感等；③独立电流源。
- 这里的重点还是在于用节点电压法求解电路方程，改进节点法不作要求。

二、线性电路的交流分析

- 节点电压分析公式也适用于交流稳态分析，交流分析对于每一需求的频率ω都需要建立支路导纳，求解节点方程。
- 直流分析和交流稳态分析的主要差别是：在交流分析中Y和所有数都是复数，即系数矩阵Y，电流向量I和电压向量V都会是复数矩阵和复数向量，所需求解的方程是一个复数方程。此外，通常要考虑求解频带内的一系列的频率点，对每个频率点都要进行完整的分析。



例2 线性电路交流分析



- 首先为节点编号，并标出各支路电流方向，可以看出有两个未知节点，未知节点电压表识为V1，V2。
- 以Is表示电流源的交流稳态电流，以RC1，RC2表示相应电容的交流稳态阻抗。根据节点得到以下方程：

$$
\begin{cases}
-I_S + \dfrac{V1-V2}{R_{C1}} + \dfrac{V1}{R1} + \dfrac{V1-V2}{R2} = 0 \\
-\dfrac{V1-V2}{R2} - \dfrac{V1-V2}{R_{C1}} + \dfrac{V2}{R3} + \dfrac{V2}{R_{C2}} = 0
\end{cases}
$$

- 整理得：

$$
\begin{cases}
(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R_{C1}})V1-(\frac{1}{R2}+\frac{1}{R_{C1}})V2=I_S \\
-(\frac{1}{R2}+\frac{1}{R_{C1}})+(\frac{1}{R_{C1}}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}+\frac{1}{R_{C2}})V2=0
\end{cases}
$$

- 写成矩阵形式：

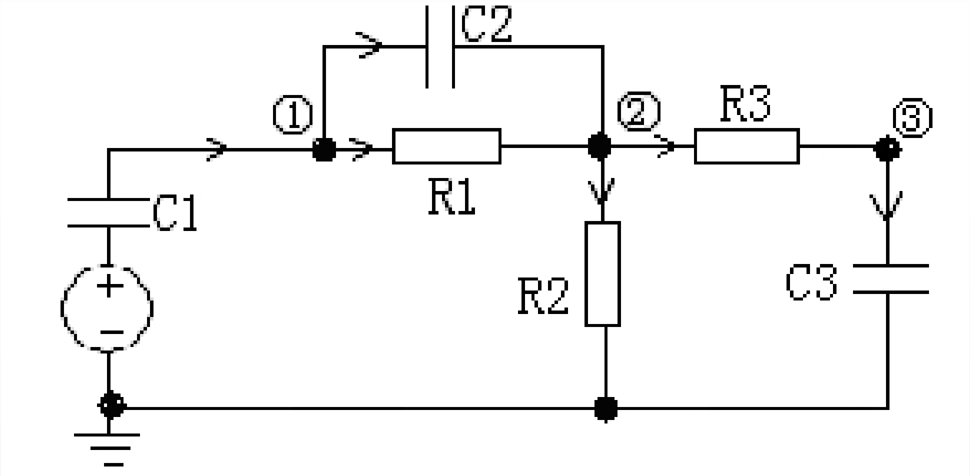
$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R_{C1}} & -\frac{1}{R2}-\frac{1}{R_{C1}} \\
-\frac{1}{R2}-\frac{1}{R_{C1}} & \frac{1}{R_{C1}}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}+\frac{1}{R_{C2}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} I_S \\ 0 \end{bmatrix}
$$

- 电路矩阵形式仍然为Y*V=I或Yn*Vn=In。
- 以上只是交流稳态的一个方程，事实上，在一定交流频率ω下，电容容抗为，电感的感抗为jωL。电流源的幅值只与相位Φ有关，记为。这样节点的矩阵如下：

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+j\omega C1 & -\frac{1}{R2}-j\omega C1 \\
-\frac{1}{R2}-j\omega C1 & \frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}+j\omega(C1+C2)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} I_{se}^{-j\phi} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

- 交流分析中，储能元件的交流导纳均与ω有关，电流也为复数值。这是要解的方程为复数方程。根据对不同的频率点进行分别的计算，可以求得电路的频率特性。
- 交流分析的结果达到满足要求的一定的频率宽度即可，求解频率点的多少与精度有关。

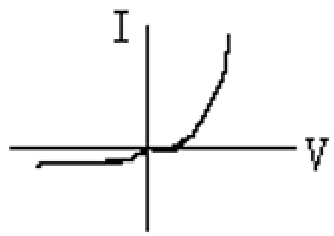
导纳矩阵与电路拓扑



$$\begin{bmatrix} j\omega C1 + j\omega C2 + \frac{1}{R1} & -(j\omega C2 + \frac{1}{R1}) & 0 \\ -(j\omega C2 + \frac{1}{R1}) & j\omega C2 + \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} & -\frac{1}{R3} \\ 0 & -\frac{1}{R3} & \frac{1}{R3} + j\omega C3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{se}{}^{-j\phi} \cdot j\omega C1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

二、非线性电路的直流分析

- 非线性电路是指包含有非线性元件的电路，如二极管、三级管、场效应管等等。它们的电流、电压呈非线性关系。
- 例如二极管，其I～V特性如图所示，电流与电压是指数关系，是非线性的元件。



$$J_D = I_s\left(e^{V_D/V_t} - 1\right)$$

$V_t = \frac{KT}{q}$ 为热电势，K为玻尔兹曼常数，T为绝对温度，q为电子电量。常温下为V_t=26mv。

V_D为二极管电压降

- 求解这类非线性电路，通常难得有解析式，常用数值方法求解，最常用的为牛顿-拉夫森迭代（Newton-Raphson Algorithm），简称N-R法。

牛顿-拉夫森的求解实例

不失一般性，$f(x)=4x^3+5x-3$

如果x^*为以上方程的解，则$f(x^*)=0$，而其它$f(x)\neq 0$。令$x^{(0)}$为x^*的初始估计值，通常$f(x^{(0)})\neq 0$；令$x^{(1)}= x^{(0)}+\Delta x^{(0)}$表示$x^*$的第一次修正值，把$f(x^{(1)})=f(x^{(0)}+\Delta x^{(0)})$用泰勒级数展开：

$$f(x^{(0)}+\Delta x^{(0)}) = f(x^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x^{(0)}} \Delta x^{(0)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x^{(0)}} (\Delta x^{(0)})^2 + \cdots$$

假设$\Delta x^{(0)}$很小，$(\Delta x^{(0)})^2$及其高次项可以忽略不记，则

$$f(x^{(0)}+\Delta x^{(0)}) \approx f(x^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x^{(0)}} \Delta x^{(0)}$$

假设$x^{(1)}$是正确的解，则有$f(x^{(1)})=0$

∴ $$f(x^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x^{(0)}} \Delta x^{(0)} = 0$$

即

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{f(x^{(0)})}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}}$$

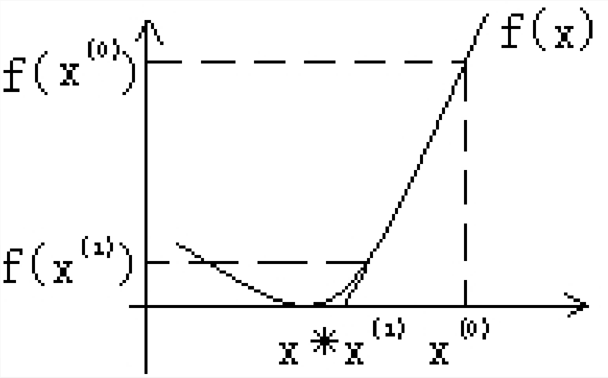
即

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}}$$

- 设 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}$ 为第 $(k+1)$ 次估计值，$x^{(k)}$ 为第k次估计值，则有

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^{(k)}}}$$

- 上式即为牛顿-拉夫森的表达式，其几何意义如下图所示。



- 由于真实解x*一般是不知道的，所以无法判断第k次的估计值与x*值差多少，但可根据 $|x^{(k+1)}-x^{(k)}|$ 的大小来判别是否趋近于真实解，当趋近于真实解时，此误差值应越来越小。通常当 $|x^{(k+1)}-x^{(k)}|<\varepsilon$ 时（根据精度要求，ε为任意小的正数），即可认为迭代过程结束

(鼠标滑过播放视频)

牛顿-拉夫森的求解实例

不失一般性，$f(x)=4x^3+5x-3$

如果x^*为以上方程的解，则$f(x^*)=0$，而其它$f(x)\neq 0$。令$x^{(0)}$为x^*的初始估计值，通常$f(x^{(0)})\neq 0$；令$x^{(1)}= x^{(0)}+\Delta x^{(0)}$表示$x^*$的第一次修正值，把$f(x^{(1)})=f(x^{(0)}+\Delta x^{(0)})$用泰勒级数展开：

$$f(x^{(0)}+\Delta x^{(0)})=f(x^{(0)})+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}\Delta x^{(0)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x^{(0)}}(\Delta x^{(0)})^2+\cdots$$

假设$\Delta x^{(0)}$很小，$(\Delta x^{(0)})^2$及其高次项可以忽略不记，则

$$f(x^{(0)}+\Delta x^{(0)})\approx f(x^{(0)})+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}\Delta x^{(0)}$$

假设$x^{(1)}$是正确的解，则有$f(x^{(1)})=0$

$\therefore$ $$f(x^{(0)})+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}\Delta x^{(0)}=0$$

即

$$\Delta x^{(0)}=-\frac{f(x^{(0)})}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}}$$

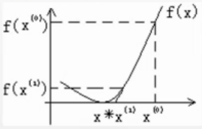
即

$$x^{(1)}=x^{(0)}-\frac{f(x^{(0)})}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(0)}}}$$

- 设$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}$为第$(k+1)$次估计值，$x^{(k)}$为第$k$次估计值，则有

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^{(k)}}}$$

- 上式即为牛顿-拉夫森的表达式，其几何意义如下图所示。



- 由于真实解x^*一般是不知道的，所以无法判断第k次的估计值与x^*值差多少，但可根据$|x^{(k+1)}-x^{(k)}|$的大小来判别是否趋近于真实解，当趋近于真实解时，此误差值应越来越小。通常当$|x^{(k+1)}-x^{(k)}|<\varepsilon$时（根据精度要求，ε为任意小的正数），即可认为迭代过程结束

如采用N—R法求解$f(x)=4x^3+5x-3$

解：设$x^{(0)}=2$，$f(2)=39$

则$x^{(1)}=1.26$，$f(1.26)=11.30$

则$x^{(2)}=0.791$，$f(0.791)=2.94$

而真实解为0.500，若取$\varepsilon=0.5$，则$|0.791-1.26|=0.469<0.5$，迭代结束。

请注意，上述求解过程中的导数用的是偏导数，主要为说明它也可用于多元函数。

- 如对2元函数f（x_1， x_2），按上面介绍的方法：
- $x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\Delta x_1^{(k)}$ $x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\Delta x_2^{(k)}$
- 在（$x_1^{(0)}$， $x_2^{(0)}$）处展开泰勒级数

$$f(x_1,x_2)=f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})+\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}\Delta x^{(0)}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\ 2}}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}(\Delta x^{(0)})+\cdots$$

- 略去二次以上的高次项，上式为：

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2)\\&=f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})+(\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_1^{(1)}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_2^{(1)})-(\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_1^{(0)}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_2^{(0)})\end{aligned}$$

- 第一项和第三项为常数。
- 对于非线性方程组 $\begin{cases}f_1(x_1,x_2)=0\\f_2(x_1,x_2)=0\end{cases}$
- 有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_1^{(1)}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_2^{(1)}=(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_1^{(0)}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_2^{(0)})-f_1^{(0)}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_1^{(1)}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_2^{(1)}=(\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_1^{(0)}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}x_2^{(0)})-f_2^{(0)}\end{cases}$$

- 其系数矩阵J（$x_1^{(0)}$， $x_2^{(0)}$）称为雅可比（Jacobi）矩阵。

$$J(x_1^{(0)},x_2^{(0)})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\bigg|_{x_1^{(0)},x_2^{(0)}}\end{bmatrix}$$

- ∴有矩阵方程 $J^{(0)}\vec{x}^{(1)}=J^{(0)}\vec{x}^{(0)}-\vec{f}(x^{(0)})$

- 若有可k+1次迭代，则：

$$J^{(k)}\vec{x}^{(k+1)} = J^{(k)}\vec{x}^{(k)} - \vec{f}(x^{(k)})$$

- 可见，雅可比矩阵亦为常系数矩阵。求解此线性方程组，可得第一次猜值$x_1^{(1)}$与$x_2^{(1)}$；将此猜值代入迭代，又可以得到第二次猜值$x_1^{(2)}$与$x_2^{(2)}$；依此类推，通过解一系列线性方程组，可得到足够精确的解。直到$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| < \varepsilon$，这里$x^{(k)}$或$x^{(k+1)}$为向量，‖　‖表示向量矩阵范数，以此数作为判别迭代是否收敛的标准。
- 对于N个节点，用J（$x^{(k)}$）表示f（$x^{(n)}$)的雅可比矩阵在第k次迭代时的值。雅可比矩阵通常表示为：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- 用泰勒级数展开的实质目的：将非线性方程转化为线性方程，求数值解。对每一个节点的值都要满足精度要求，进行迭代求解。

牛顿-拉夫森迭代（N-R法）的主要步骤

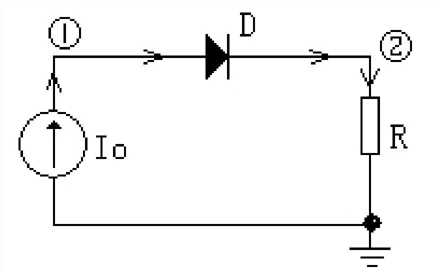
①将非线性函数在 $x_1^{(0)}+\Delta x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}+\Delta x_2^{(0)}$，…，$x_n^{(0)}+\Delta x_n^{(0)}$附近展开成泰勒级数，且去掉高次项，将非线性函数转化为线性函数。

- ②由不同的m获得一组线性方程组，即将一组非线性方程组转化为线性方程组求解。根据初值 $\vec{x}_m^{(0)}$，可得到 $\vec{x}_m^{(1)}$
- 将 $f_m(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})^T$
- 作为初值，求解线性方程组可获得第二次猜值

$$x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})^T$$

- ③当 $\| x(k+1)-x(k) \| < \varepsilon$ 时，迭代完成。
- 用以上三步解题，目的是将一组非线性方程组转化为一系列线性方程组来求解。

非线性电路分析



- 根据二极管I-V关系 $I_D = I_s(e^{V_D/V_t} - 1)$
- 标注图示电路的未知节点，列出各节点的方程组：

$$\begin{cases} I_S(e^{\frac{V1-V2}{Vt}} - 1) - I_0 = 0 \\ \dfrac{V2}{R} - I_S(e^{\frac{V1-V2}{Vt}} - 1) = 0 \end{cases}$$

- 这是一组非线性方程，可看作为： $\begin{cases} f_1(V_1, V_2) = 0 \\ f_2(V_1, V_2) = 0 \end{cases}$

- 对二极管的电流方程 $I_D = I_s(e^{V_D/V_t} - 1)$

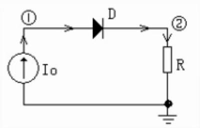
- 求导得到： $\partial I_D = I_s(e^{V_D/V_t} - 1)$

- 求解各组方程的偏微分系数:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial V_1} = \dfrac{I_s}{V_t} Exp(\dfrac{V_1 - V_2}{V_t}) = \dfrac{\partial I_D}{\partial V_D} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial V_2} = -\dfrac{I_s}{V_t} Exp(\dfrac{V_1 - V_2}{V_t}) = -\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial V_1} = -\dfrac{I_s}{V_t} Exp(\dfrac{V_1 - V_2}{V_t}) = -\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial V_2} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{I_s}{V_t} Exp(\dfrac{V_1 - V_2}{V_t}) = \dfrac{1}{R} + \dfrac{\partial I_D}{\partial V_D} \end{cases}$$

非线性电路分析
(鼠标滑过播放视频)

非线性电路分析1



- 根据二极管I-V关系 $I_D = I_s(e^{V_D/V_t} - 1)$
- 标注图示电路的未知节点，列出各节点的方程组：

$$\begin{cases} I_S(e^{\frac{V1-V2}{Vt}} - 1) - I_0 = 0 \\ \frac{V2}{R} - I_S(e^{\frac{V1-V2}{Vt}} - 1) = 0 \end{cases}$$

- 这是一组非线性方程，可看作为：$\begin{cases} f_1(V_1,V_2) = 0 \\ f_2(V_1,V_2) = 0 \end{cases}$
- 对二极管的电流方程 $I_D = I_s(e^{V_D/V_t} - 1)$
- 求导得到： $\partial I_D = I_s(e^{V_D/V_t} - 1)$
- 求解各组方程的偏微分系数:

- 令：

$$\begin{cases} f_1(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}) = I_S(Exp(\frac{V_1^{(0)} - V_2^{(0)}}{V_t} - 1)) - I_0 \\ f_2(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}) = \frac{V_2^{(0)}}{R} - I_S(Exp(\frac{V_1^{(0)} - V_2^{(0)}}{V_t} - 1)) \end{cases}$$

- 则有：

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial V_1}\Big|_{(k)} V_1^{(k+1)} + \frac{\partial f_1}{\partial V_2}\Big|_{(k)} V_2^{(k+1)} = \frac{\partial f_1}{\partial V_1}\Big|_{(k)} V_1^{(k)} + \frac{\partial f_1}{\partial V_2}\Big|_{(k)} V_2^{(k)} - I_S(Exp(\frac{V_1^{(k)} - V_2^{(k)}}{V_t} - 1)) + I_0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial V_1}\Big|_{(k)} V_1^{(k+1)} + \frac{\partial f_2}{\partial V_2}\Big|_{(k)} V_2^{(k+1)} = \frac{\partial f_2}{\partial V_1}\Big|_{(k)} V_1^{(k)} + \frac{\partial f_2}{\partial V_2}\Big|_{(k)} V_2^{(k)} - \frac{V_2^{(k)}}{R} + I_S(Exp(\frac{V_1^{(k)} - V_2^{(k)}}{V_t} - 1)) \end{cases}$$

- 得：

$$\begin{cases} \frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} V_1^{(k+1)} - \frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} V_2^{(k+1)} = \frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} (V_1^{(k)} - V_2^{(k)}) - I_D^{(k)} + I_0 = \frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} V_D^{(k)} - I_D^{(k)} + I_0 \\ -\frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} V_1^{(k+1)} + (\frac{1}{R} + \frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)}) V_2^{(k+1)} = -\frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} V_D^{(k)} + \frac{1}{R} V_D^{(k)} - \frac{1}{R} V_D^{(k)} + I_D^{(k)} \end{cases}$$

- 如令 $\frac{\partial I_D}{\partial V_D}\Big|_{(k)} = G_D^{(k)} = \frac{I_S}{V_t} Exp(\frac{V_D^{(k)}}{V_t})$
- 则有：

$$\begin{cases} G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} - G_D^{(k)} V_2^{(k+1)} = G_D^{(k)} V_D^{(k)} - I_D^{(k)} + I_0 \\ -G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} + (\frac{1}{R} + G_D^{(k)}) V_2^{(k+1)} = -G_D^{(k)} V_D^{(k)} + I_D^{(k)} \end{cases}$$

- 再令 $I_D^{(k)} - G_D^{(k)} V_D^{(k)} = I_{Di}^{(k)}$

$$\Big\{ G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} - G_D^{(k)} V_2^{(k+1)} = I_0 - I_{Di}^{(k)}$$

- 令：

$$\begin{cases} f_1(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}) = I_S(Exp(\dfrac{V_1^{(0)} - V_2^{(0)}}{V_t} - 1)) - I_0 \\ f_2(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}) = \dfrac{V_2^{(0)}}{R} - I_S(Exp(\dfrac{V_1^{(0)} - V_2^{(0)}}{V_t} - 1)) \end{cases}$$

- 则有：

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial V_1}\right|_{(k)} V_1^{(k+1)} + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial V_2}\right|_{(k)} V_2^{(k+1)} = \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial V_1}\right|_{(k)} V_1^{(k)} + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial V_2}\right|_{(k)} V_2^{(k)} - I_S(Exp(\dfrac{V_1^{(k)} - V_2^{(k)}}{V_t} - 1)) + I_0 \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial V_1}\right|_{(k)} V_1^{(k+1)} + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial V_2}\right|_{(k)} V_2^{(k+1)} = \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial V_1}\right|_{(k)} V_1^{(k)} + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial V_2}\right|_{(k)} V_2^{(k)} - \dfrac{V_2^{(k)}}{R} + I_S(Exp(\dfrac{V_1^{(k)} - V_2^{(k)}}{V_t} - 1)) \end{cases}$$

- 得：

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} V_1^{(k+1)} - \left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} V_2^{(k+1)} = \left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} (V_1^{(k)} - V_2^{(k)}) - I_D^{(k)} + I_0 = \left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} V_D^{(k)} - I_D^{(k)} + I_0 \\ -\left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} V_1^{(k+1)} + (\dfrac{1}{R} + \left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)}) V_2^{(k+1)} = -\left.\dfrac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} V_D^{(k)} + \dfrac{1}{R} V_D^{(k)} - \dfrac{1}{R} V_D^{(k)} + I_D^{(k)} \end{cases}$$

- 如令

$$\left.\frac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{(k)} = G_D^{(k)} = \frac{I_S}{V_t} Exp(\frac{V_D^{(k)}}{V_t})$$

- 则有：

$$\begin{cases} G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} - G_D^{(k)} V_2^{(k+1)} = G_D^{(k)} V_D^{(k)} - I_D^{(k)} + I_0 \\ -G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} + (\dfrac{1}{R} + G_D^{(k)}) V_2^{(k+1)} = -G_D^{(k)} V_D^{(k)} + I_D^{(k)} \end{cases}$$

- 再令

$$I_D^{(k)} - G_D^{(k)} V_D^{(k)} = I_{Di}^{(k)}$$

- 则：

$$\begin{cases} G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} - G_D^{(k)} V_2^{(k+1)} = I_0 - I_{Di}^{(k)} \\ -G_D^{(k)} V_1^{(k+1)} + (\dfrac{1}{R} + G_D^{(k)}) V_2^{(k+1)} = I_{Di}^{(k)} \end{cases}$$

- ∴有矩阵形式

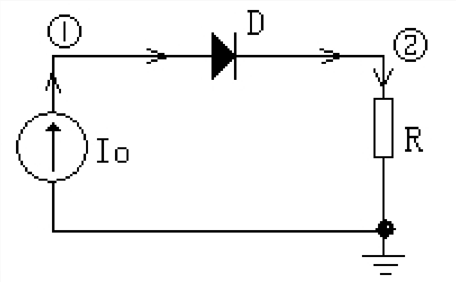
$$\begin{bmatrix} G_D^{(k)} & -G_D^{(k)} \\ -G_D^{(k)} & \dfrac{1}{R} + G_D^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(k+1)} \\ V_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 - I_{Di}^{(k)} \\ I_{Di}^{(k)} \end{bmatrix}$$

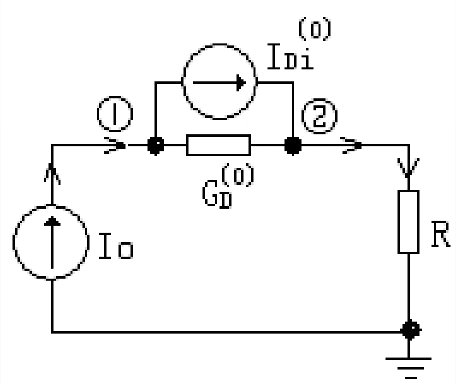
• 显然，对于k=0，有以下矩阵表达式：

$$\begin{bmatrix} G_D^{(0)} & -G_D^{(0)} \\ -G_D^{(0)} & \frac{1}{R}+G_D^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 - I_{Di}^{(0)} \\ I_{Di}^{(0)} \end{bmatrix}$$

• 根据前面的线性电路的分析，把 G_D

• 看成导纳矩阵，可以画出电路图的等效电路。





• 按等效电路图写出电路方程：

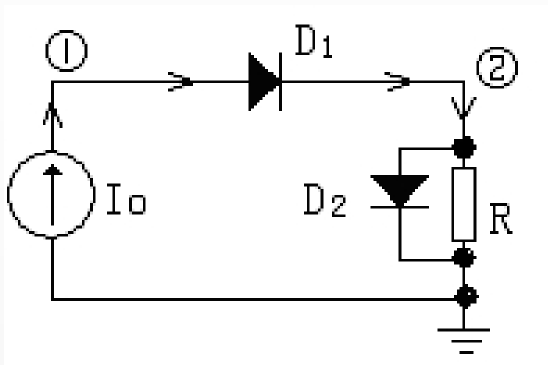
$$\begin{cases} -I_0 + I_{Di}^{(0)} + G_D^{(0)}(V_1^{(1)} - V_2^{(1)}) = 0 \\ -I_{Di}^{(0)} - G_D^{(0)}(V_1^{(1)} - V_2^{(1)}) + \dfrac{V_2^{(1)}}{R} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_D^{(0)}V_1^{(1)} - G_D^{(0)}V_2^{(1)} = I_0 - I_{Di}^{(0)} \\ -G_D^{(0)}V_1^{(1)} + (\dfrac{1}{R} + G_D^{(0)})V_2^{(1)} = I_{Di}^{(0)} \end{cases}$$

• 可见 $I_{Di}^{(0)}$ 与 $G_D^{(0)}$ 的并联完全可代替二极管，电导 $G_D^{(0)}$ 与电流源 $I_{Di}^{(0)}$ 的并联称为二极管的伴随模型。

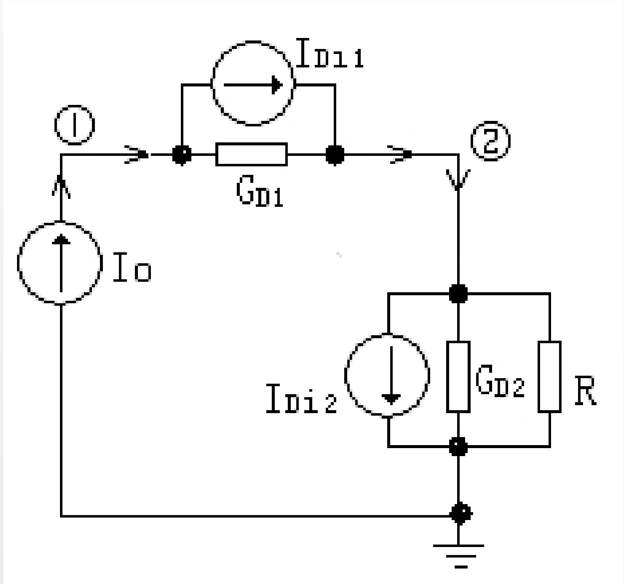
矩阵方程\电路图\电路模型图之间的关系

电路



电路原型

电路模型



物理模型

矩阵方程

数学模型

$$\begin{bmatrix} G_{D1}^{(0)} & -G_{D1}^{(0)} \\ -G_{D1}^{(0)} & G_{D1}^{(0)}+G_{D2}^{(0)}+\dfrac{1}{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_0-I_{Di1}^{(0)} \\ I_{Di1}^{(0)}-I_{Di2}^{(0)} \end{bmatrix}$$

非线性电路的交流分析

- 以上论述的是非线性电路的直流分析，对非线性电路的交流分析也与此类似，不过要考虑容抗与感抗，且伴随模型也有所变化，其分析步骤：

①在某一频率ω下，求等效非线性电路方程组;

②按直流分析方法进行迭代，求得伴随模型等效电路，求得一组近似值;

③改变ω，重复上述步骤，直到满足一个频带宽度。