

Notas de Álgebra Lineal

Carlos Francisco Flores Galicia.

Capítulo 1

Espacios vectoriales

1.0.1. Espacios vectoriales

1.0.2. Subespacios vectoriales

1.0.3. Combinaciones lineales

Definición 1. Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Se dice que un vector $v \in V$ es combinación lineal de elementos de S , si existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq S$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_n s_n$. Se dice también que v es combinación lineal de $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.

Definición 2. Sea V un espacio vectorial y $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq V$. Definimos al conjunto generado por elementos de S como

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_n s_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K\} \quad (1.1)$$

Esto es, el conjunto generado por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S .

Definición 3. $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$

Teorema 1. Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, entonces $\langle S \rangle \leq V$ y $\langle S \rangle$ es el subespacio de V más pequeño que contiene a S (es decir, que $\langle S \rangle$ es un subconjunto de todos los subespacios de V que contienen a S).

Demostración. Probemos primero que $\langle S \rangle \leq V$. Como $S \neq \emptyset$, al menos $0_V \in \langle S \rangle$. Luego, sean $u, v \in \langle S \rangle$, por tanto u y v son combinaciones lineales de elementos de S , de manera que existen $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_n \in S$ tales que $v = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n$ y $u = b_1 t_1 + \dots + b_n t_n$, con $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in K$. Ahora bien, es claro que $v+u = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n + b_1 t_1 + \dots + b_n t_n$ y $cu = cb_1 t_1 + \dots + cb_n t_n$ pertenecen a $\langle S \rangle$, para cualquier $c \in K$. Por lo tanto $\langle S \rangle \leq V$.

Por otra parte, sea U un subespacio de V que contiene a S . Sea $v \in \langle S \rangle$, entonces $v = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n$, con $a_1, \dots, a_n \in K$ y $s_1, \dots, s_n \in S$, además como

$S \subseteq U$ entonces $v = a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n \in U$, pues los subespacios vectoriales son cerrados bajo la suma y bajo el producto por escalares. Por tanto tenemos que si $v \in \langle S \rangle$ entonces $v \in U$, así que $\langle S \rangle \subseteq U$. \square

Definición 4. Sea $S \subseteq V$. Decimos que S genera a V si $\langle S \rangle = V$. También podemos decir que los elementos de S generan a V .

1.0.4. Dependencia e independencia lineal.

Definición 5. Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq V$. Decimos que S es linealmente dependiente si existe $s \in S$ tal que $s \in \langle S - \{s\} \rangle$.

Teorema 2. Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq V$. S es linealmente dependiente si y solo si existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = 0_V$ y $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ no son todos cero.

Demostración. \Rightarrow Supongamos que S es linealmente dependiente, entonces existe $s \in S$ tal que $s \in \langle S - \{s\} \rangle$, por tanto existen $s_1, s_2, \dots, s_n \in S - \{s\}$ y los escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tales que $s = a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n$. Al sumar $-s$ en ambos lados de la expresión anterior obtenemos $0_V = -s + a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n$, con lo cual se garantiza que no todos los escalares que multiplican a los vectores son cero, pues -1 multiplica a s .

\Leftarrow Supongamos que existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, no todos cero, tales que $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = 0_V$. Puesto que no todos los escalares son cero, supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \neq 0$, por tanto podemos multiplicar en ambos lados de la igualdad anterior por el escalar $\frac{1}{a_1}$. En consecuencia obtenemos $s_1 + \frac{a_2}{a_1}s_2 + \dots + \frac{a_n}{a_1}s_n = 0_V$. Luego, al sumar $-s_1$ y multiplicar por -1 en ambos lados nos queda que $s_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)s_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right)s_n$, esto es, que $s_1 \in \langle S - \{s_1\} \rangle$. Por lo tanto S es linealmente dependiente. \square

Definición 6. Sea $S \subseteq V$. Decimos que S es linealmente independiente si y solo si no es linealmente dependiente.

Por la equivalencia lógica $(P \Leftrightarrow \exists x(Q \wedge S)) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \forall x(Q \Rightarrow \neg S))$, el teorema anterior es equivalente a la siguiente proposición que enunciaremos como corolario.

Corolario 1. Sea $S \subseteq V$. S es linealmente independiente si y solo si para todo $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que si $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = 0_V$ entonces a_1, a_2, \dots, a_n son todos cero.

Demostración. Se sigue del teorema anterior y de la equivalencia lógica $(P \Leftrightarrow \exists x(Q \wedge S)) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \forall x(Q \Rightarrow \neg S))$. \square

Proposición 1. Si $S \subseteq V$ y $0_V \in S$, entonces S es linealmente dependiente.

Demostración. □

Teorema 3. *El conjunto \emptyset es linealmente independiente*

Demostración. Supongamos que \emptyset es linealmente dependiente, entonces existe $s \in \emptyset$ tal que $s \in \langle \emptyset - \{s\} \rangle$. Como $s \in \emptyset$ entonces por definición del conjunto vacío se cumple que $s \neq s$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el conjunto \emptyset es linealmente independiente. □

Lemma 4. *Si V es un K -espacio vectorial y $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$, entonces $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$.*

Demostración. □

Teorema 5. *Sea V un K -espacio vectorial y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 también lo es.*

Demostración. Supongamos que S_1 es linealmente dependiente, entonces existe $s \in S_1$ tal que $s \in \langle S_1 - \{s\} \rangle$. Luego, como $S_1 \subseteq S_2$ entonces $S_1 - \{s\} \subseteq S_2 - \{s\}$, y por el lema anterior $\langle S_1 - \{s\} \rangle \subseteq \langle S_2 - \{s\} \rangle$, por lo que $s \in \langle S_2 - \{s\} \rangle$, luego S_2 es linealmente dependiente. □

Corolario 2. *Sea V un K -espacio vectorial y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_2 es linealmente independiente entonces S_1 también lo es.*

Demostración. La demostración se sigue de hacer la contrapositiva del teorema anterior. □

1.0.5. Bases y dimensiones.

Definición 7. *Sea $\beta \subseteq V$. Decimos que β es una base para V si y solo si β es linealmente independiente y $\langle \beta \rangle = V$.*

Teorema 6. *Sea V un espacio vectorial y $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ un subconjunto de V . Luego β es una base para V si y sólo si cada vector $v \in V$ puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de vectores de β , es decir, puede ser expresado de la forma $v = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, para escalares únicos $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$.*

Demostración. \Rightarrow Supongamos que β es una base para V . Sea $v \in V$, entonces $v \in \langle \beta \rangle$, así que existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que $v = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. Ahora, supongamos que también $v = c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_nb_n$, con $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$. Entonces es claro que $v - v = 0_V = (a_1 - c_1)b_1 + (a_2 - c_2)b_2 + \dots + (a_n - c_n)b_n$. Ya que β es linealmente independiente, $a_1 - c_1 = 0, a_2 - c_2 = 0, \dots, a_n - c_n = 0$, en consecuencia $a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_n = c_n$, por lo tanto la representación de v como combinación lineal de β es única.

\Leftarrow Supongamos que cada vector $v \in V$ puede ser expresado como una combinación lineal de vectores de β con los escalares únicos $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$. Por

lo tanto $\langle \beta \rangle = V$. Probemos ahora que β es linealmente independiente. Tenemos que el elemento 0_V puede ser expresado como $0_V = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, y puesto que esta manera es única, se tiene que cada escalar a_1, a_2, \dots, a_n debe ser 0, por lo tanto β es linealmente independiente, y en consecuencia β es una base. \square

Teorema 7. *Si V es un espacio vectorial y $S \subseteq V$ tal que S es finito y genera a V , entonces existe $S' \subseteq S$ tal que S' es una base para V .*

Demostración. Si $S = \emptyset$ o $S = \{0_V\}$ entonces $V = \{0_V\}$ y como \emptyset es subconjunto de cualquier conjunto, entonces S es una base para V . De lo contrario, V tendrá al menos un elemento v_1 no nulo. Nótese que $\{v_1\}$ es un conjunto linealmente independiente. Continúese, si es posible, escogiendo elementos $v_2, v_3, \dots, v_r \in V$ tales que $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r\}$ sea linealmente independiente. Puesto que S es finito, se llegará al punto en el que $S' = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r\}$ sea un subconjunto de S linealmente independiente, de manera que al agregar otro elemento de S a S' , éste sea linealmente dependiente. Demostremos ahora que S' es una base para V . Como S' es linealmente independiente, basta mostrar que es generador de V , pero como $\langle S \rangle = V$, es suficiente demostrar que $S \subseteq \langle S' \rangle$. Sea $v \in S$. Si $v \in S'$, entonces $v \in \langle S' \rangle$. Por otro lado, si v no está en S' , la anterior construcción mostraría que $S' \cup \{v\}$ es linealmente dependiente. Así, $v \in \langle S' \rangle$, y por tanto $S \subseteq \langle S' \rangle$. \square