Notas de Álgebra Lineal

Carlos Francisco Flores Galicia.

Capítulo 1

Espacios vectoriales.

1.0.1. Espacios vectoriales

1.0.2. Subespacios vectoriales

1.0.3. Combinaciones lineales

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Un vector $v \in V$ es combinación lineal de elementos de S, si existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, ..., s_n\} \subseteq S$ y escalares $a_1, a_2, ...a_n \in K$ tal que $v = a_1s_1 + a_2s_2 + ... + a_ns_n$. Se dice también que v es combinación lineal de $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$.*

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial y $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subseteq V$. El conjunto generado por S es $\langle S \rangle = \{a_1s_1 + a_2s_2 + ... + a_ns_n : a_1, a_2, ...a_n \in K\}$. Esto es, el conjunto generado por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S.*

Definición 3. $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, entonces $\langle S \rangle \leq V$ y $\langle S \rangle$ es el subespacio de V más pequeño que contiene a S (es decir, que $\langle S \rangle$ es un subconjunto de todos los subespacios de V que contienen a S).*

Demostración. Probemos primero que $\langle S \rangle \leq V$. Como $S \neq \emptyset$, al menos $0_V \in \langle S \rangle$. Luego, sean $u, v \in \langle S \rangle$, por tanto u y v son combinaciones lineales de elementos de S, de manera que existen $s_1, s_2, ...s_n, t_1, t_2, ..., t_n \in S$ tales que $v = a_1s_1 + ... + a_ns_n$ y $u = b_1t_1 + ... + b_nt_n$, con $a_1, ...a_n, b_1, ..., b_n \in K$. Ahora bien, es claro que $v+u = a_1s_1 + ... + a_ns_n + b_1t_1 + ... + b_nt_n$ y $cu = cb_1t_1 + ... + cb_nt_n$ pertenecen a $\langle S \rangle$, para cualquier $c \in K$. Por lo tanto $\langle S \rangle \leq V$.

Por otra parte, sea U un subespacio de V que contiene a S. Sea $v \in \langle S \rangle$, entonces $v = a_1s_1 + ... + a_ns_n$, con $a_1, ..., a_n \in K$ y $s_1, ..., s_n \in S$, además como $S \subseteq U$ entonces $v = a_1s_1 + a_2s_2 + ... + a_ns_n \in U$, pues los subespacios vectoriales son cerrados bajo la suma y bajo el producto por escalares. Por tanto tenemos que si $v \in \langle S \rangle$ entonces $v \in U$, así que $\langle S \rangle \subseteq U$. $\square$

Definición 4. *Sea $S \subseteq V$. Decimos que S genera a V si $\langle S \rangle = V$. También podemos decir que los elementos de S generan a V.*

1.0.4. Dependencia e independencia lineal.

Definición 5. *Sea $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subseteq V$. Decimos que S es linealmente dependiente si existe $s \in S$ tal que $s \in \langle S - \{s\} \rangle$.*

Teorema 2. *Sea $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subseteq V$. S es linealmente dependiente si y solo si existen $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tal que $a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_n s_n = 0_V$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ no son todos cero.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que S es linealmente dependiente, entonces existe $s \in S$ tal que $s \in \langle S - \{s\} \rangle$, por tanto existen $s_1, s_2, ..., s_n \in S - \{s\}$ y los escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tales que $s = a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_n s_n$. Al sumar $-s$ en ambos lados de la expresión anterior obtenemos $0_V = -s + a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_n s_n$, con lo cual se garantiza que no todos los escalares que multiplican a los vectores son cero, pues -1 multiplica a s.

$\Leftarrow$ Supongamos que existen $a_1, a_2, ..., a_n \in K$, no todos cero, tales que $a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_n s_n = 0_V$. Puesto que no todos los escalares son cero, supongamos sin perdida de generalidad que $a_1 \neq 0$, por tanto podemos multiplicar en ambos lados de la igualdad anterior por el escalar $\dfrac{1}{a_1}$. En consecuencia obtenemos $s_1 + \dfrac{a_2}{a_1} s_2 + ... + \dfrac{a_n}{a_1} s_n = 0_V$. Luego, al sumar $-s_1$ y multiplicar por -1 en ambos lados nos queda que $s_1 = \left(-\dfrac{a_2}{a_1}\right) s_2 + ... + \left(-\dfrac{a_n}{a_1}\right) s_n$, esto es, que $s_1 \in \langle S - \{s_1\} \rangle$. Por lo tanto S es linealmente dependiente. $\square$

Definición 6. *Sea $S \subseteq V$. Decimos que S es linealmente independiente si y solo si no es linealmente dependiente.*

Por la equivalencia lógica $(P \Leftrightarrow \exists x(Q \wedge S)) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \forall x(Q \Rightarrow \neg S))$, el teorema anterior es equivalente a la siguiente proposición que enunciaremos como corolario.

Corolario 1. *Sea $S \subseteq V$. S es linealmente independiente si y solo si para todo $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tal que si $a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_n s_n = 0_V$ entonces $a_1, a_2, ..., a_n$ son todos cero.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior y de la equivalencia lógica $(P \Leftrightarrow \exists x(Q \wedge S)) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \forall x(Q \Rightarrow \neg S))$. $\square$

Proposición 1. *Si $S \subseteq V$ y $0_V \in S$, entonces S es linealmente dependiente.*

Demostración. $\square$

Teorema 3. *El conjunto $\emptyset$ es linealmente independiente*

Demostración. Supongamos que $\emptyset$ es linealmente dependiente, entonces existe $s \in \emptyset$ tal que $s \in \langle \emptyset - \{s\} \rangle$. Como $s \in \emptyset$ entonces por definición del conjunto vacío se cumple que $s \neq s$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el conjunto $\emptyset$ es linealmente independiente. $\square$

Lemma 4. *Si V es un $K-$espacio vectorial y $R \subseteq S \subseteq V$, entonces $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle$.*

Demostración. Supongamos que $R \subseteq S \subseteq V$, y sea $r \in \langle R \rangle$, por lo tanto existe un subconjunto $\{r_1, r_2, ..., r_m\} \subseteq R$ y los escalares $a_1, a_2, ...a_m \in K$ tal que $r = a_1r_1, a_2r_2, ..., a_mr_m$. Como $R \subseteq S$, entonces $r_1, r_2, ..., r_m \in S$, de manera que $r = a_1r_1, a_2r_2, ..., a_mr_m \in \langle S \rangle$, por lo tanto $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle$.

$\square$

Teorema 5. *Sea V un $K-$espacio vectorial y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_1 es linealmente dependiente entonces S_2 también lo es.*

Demostración. Supongamos que S_1 es linealmente dependiente, entonces existe $s \in S_1$ tal que $s \in \langle S_1 - \{s\} \rangle$. Luego, como $S_1 \subseteq S_2$ entonces $S_1 - \{s\} \subseteq S_2 - \{s\}$, y por el lema anterior $\langle S_1 - \{s\} \rangle \subseteq \langle S_2 - \{s\} \rangle$, por lo que $s \in \langle S_2 - \{s\} \rangle$, luego S_2 es linealmente dependiente. $\square$

Corolario 2. *Sea V un $K-$espacio vectorial y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_2 es linealmente independiente entonces S_1 también lo es.*

Demostración. La demostración se sigue de hacer la contrapositiva del teorema anterior. $\square$

1.0.5. Bases y dimensiones.

Definición 7. *Sea $\beta \subseteq V$. Decimos que β es una base para V si y solo si β es linealmente independiente y $\langle \beta \rangle = V$.*

Teorema 6. *Sea V un espacio vectorial y $\beta = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ un subconjunto de V. Luego β es una base para V si y sólo si cada vector $v \in V$ puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de vectores de β, es decir, puede ser expresado de la forma $v = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, para escalares únicos $a_1, a_2, ..., a_n \in K$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que β es una base para V. Sea $v \in V$, entonces $v \in \langle \beta \rangle$, así que existen $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tal que $v = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$. Ahora, supongamos que también $v = c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_nb_n$, con $c_1, c_2, ..., c_n \in K$. Entonces es claro que $v - v = 0_V = (a_1 - c_1)b_1 + (a_2 - c_2)b_2 + ... + (a_n - c_n)b_n$. Ya que β es linealmente independiente, $a_1 - c_1 = 0, a_2 - c_2 = 0, ..., a_n - c_n = 0$, en consecuencia $a_1 = c_1, a_2 = c_2, ..., a_n = c_n$, por lo tanto la representación de v como combinación lineal de β es única.

$\Leftarrow$ Supongamos que cada vector $v \in V$ puede ser expresado como una combinación lineal de vectores de β con los escalares únicos $a_1, a_2, ..., a_n \in K$. Por lo tanto $\langle \beta \rangle = V$. Probemos ahora que β es linealmente independiente. Tenemos que el elemento 0_V puede ser expresado como $0_V = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, y puesto que esta manera es única, se tiene que cada escalar $a_1, a_2, ..., a_n$ debe ser 0, por lo tanto β es linealmente independiente, y en consecuencia β es una base. $\square$

Teorema 7. *Si V es un espacio vectorial y $S \subseteq V$ tal que S es finito y genera a V, entonces existe $S' \subseteq S$ tal que S' es una base para V.*

Demostración. Si $S = \emptyset$ o $S = \{0_V\}$ entonces $V = \{0_V\}$ y como $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto, entonces S es una base para V. De lo contrario, V tendrá al menos un elemento v_1 no nulo. Nótese que $\{v_1\}$ es un conjunto linealmente independiente. Continúese, si es posible, escogiendo elementos $v_2, v_3, ..., v_r \in V$ tales que $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$ sea linealmente independiente. Puesto que S es finito, se llegará al punto en el que $S' = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$ sea un subconjunto de S linealmente independiente, de manera que al agregar otro delemento de S a S', éste sea linealmente dependiente. Demostremos ahora que S' es una base para V. Como S' es linealmente independiente, basta mostrar que es generador de V, pero como $\langle S \rangle = V$, es suficiente demostrar que $S \subseteq \langle S' \rangle$. Sea $v \in S$. Si $v \in S'$, entonces $v \in \langle S' \rangle$. Por otro lado, si v no está en S', la anterior construcción mostraría que $S' \cup \{v\}$ es linealmente dependiente. Así, $v \in \langle S' \rangle$, y por tanto $S \subseteq \langle S' \rangle$. $\square$

Teorema 8. *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Sea $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\} \subseteq V$ linealmente independiente con exactamente m elementos, donde $m \leq n$. Entonces, existe un subconjunto $S_1 \subseteq \beta$ que contiene exactamente $n - m$ elementos tales que $\langle S \cup S_1 \rangle = V$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre m. Si $m = 0$, entonces $S = \emptyset$, y así $S_1 = \beta$ satisface el teorema. Ahora, supongamos que que el teorema es cierto para m, tal que $m < n$, y demostremos que también se cumple para $m + 1$. Sea $S = \{s_1, s_2, ..., s_m, s_(m + 1)\}$ un subconjunto de V linealmente independiente, el cual contiene exactamente $m+1$ elementos. Puesto que $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ también es linealmente independiente, por la hipótesis de inducción se tiene que existe un subconjunto $\{b_1, b_2, ..., b_(n - m)\}$ de β tal que $\{s_1, s_2, ..., s_m\} \cup \{b_1, b_2, ..., b_{n-m}\}$ genera a V. En consecuencia existirán escalares $a_1, ..., a_m, c_1, c_2, ..., c_{n-m} \in K$ tales que $y_{m+1} = a_1s_1 + ... + a_ms_m + c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_{n-m}b_{n-m}$. Notemos que algún b_i, tal como b_1, es no nulo, de lo contrario y_{m+1} es una combinación lineal de $S = \{s_1, s_2, ..., s_m, s_(m + 1)\}$ y eso contradice el hecho de que S es linealmente independiente. Al despegar b_1 se obtiene $b_1 = (-c_1^{-1}a_1)s_1 + ... + (-c_1^{-1}a_m)s_m - (-c_1^{-1})s_{m+1} + (-c_1^{-1}c_2)s_2 + ... + (-c_1^{-1}c_{n-m})s_{n-m}$. Entonces $b_1 \in \langle\{s_1, ..., s_m, s_{m+1}, b_2, ..., b_{n-m}\}\rangle$, pero como $s_1, ..., s_m, b_2, ..., b_{n-m}$ son elementos de $\langle\{s_1, ..., s_m, s_{m+1}, b_2, ..., b_{n-m}\}\rangle$, se tendrá que $\{s_1, ..., s_m, b_2, ..., b_{n-m}\} \subseteq \langle\{s_1, ..., s_m, s_{m+1}, b_2, ..., b_{n-m}\}\rangle$. Por lo tanto $\langle\{s_1, ..., s_m, s_{m+1}, b_2, ..., b_{n-m}\}\rangle = V$. Luego, al escoger $S_1 = \{s_2, ..., s_{n-m}\}$ demuestra que el teorema es cierto para $m + 1$. Esto completa la demostración. $\square$

Corolario 3. *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β que contenga exactamente n elementos. Entonces, cualquier subconjunto linealmente independiente de V que contenga exactamente n elementos es una base de V.*

Demostración. Sea $S = \{s_1, s_2, .., s_n\}$ un conjunto de V linealmente independiente que contiene exactamente n elementos. Por el teorema anterior, existe $S_1 \subseteq \beta$ que contiene $n - n = 0$ elementos tal que $\langle S \cup S_1 \rangle = V$. Obviamente $S_1 = \emptyset$; luego, $\langle S \rangle = V$. Como S es también linealmente independiente, S es una base para V. $\square$

Corolario 4. *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β que contenga exactamente n elementos. Entonces, cualquier subconjunto de V que contenga más de n elementos es linealmente dependiente.*

Demostración. Sea $S \subseteq V$ que contiene más de n elementos. Supongamos que S es linealmente independiente. Sea $S_1 \subset S$ con exactamente n elementos . Entonces, por el corolario anterior S_1 es una base para V. Como S_1 es subconjunto propio de S, podemos tomar un elemento $s \in S$ tal que $s \notin S_1$. Como S_1 es base para V, $s \in \langle S_1 \rangle = V$. Luego, $S_1 \cup \{s\}$ es linealmente dependiente. Pero $S_1 \cup \{s\} \subseteq S$; luego, S es linealmente dependiente, y esto es una contradicción. Por lo tanto, S es linealmente dependiente.

$\square$

Corolario 5. *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Entonces, toda base para V contendrá exactamente n elementos.*

Demostración. Sea S una base de V. Como S es linealmente independiente tendrá como máximo n elementos. Supongamos que S contiene exactamente m elementos; luego, $m \leq n$. Pero además, S es una base de V y β es linealmente independiente. Entonces, aplicamos el corolario anterior intercambiando los papeles de β y § para dar $n \leq m$. Luego $m = n$. $\square$

Definición 8. *Un espacio vectorial V es dimensionalmente finito si tiene una base cuya cardinalidad es un número finito. La cardinalidad de una base de V es la dimension de V, y se denota por $dim(V)$. Si un espacio vectorial no es dimensionalmente finito, se llama dimensionalmente infinito.*

Teorema 9. *Sea $U \leq V$ y $dim(V) = n$. Entonces, W es dimensionalmente finito y $dim(W) \leq n$. Además, si $dim(W) = n$, entonces $W = V$.*

Demostración. Si $W = \{0_w\}$, W es dimensionalmente finito y $dim(W) = 0 \leq n$. De otra manera, existe un elemento no nulo $w_1 \in W$, y así $\{w_1\}$ es linealmente independiente. Continuando en esta forma, tómese elementos $w_1, w_2, ..., w_k \in W$ tales que $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ sea linealmente independiente. Este proceso debe terminar en una etapa donde $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ sea linealmente independiente pero de manera que al añadir cualquier elemento de W se tenga un conjunto linealmente dependiente. Entonces, W tiene una base finita que contiene no más de n elementos; esto es, $dim(W) \leq n$. Si $dim(W) = n$, entonces una base para W

seria un subconjunto de V linealmente independiente que contuviera n elementos, y esto implicaría que la base para W es también una base para V, por tanto $W = V$. $\square$

Capítulo 2

Matrices y transformaciones lineales.

2.0.1. Matrices

2.0.2. Transformaciones lineales.

Definición 9. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre un campo* K. *Una función* $T : V \to W$ *se llama transformación lineal de* V *en* W *si para todo* $u, v \in V$ *y para todo* $c \in K$, *se cumple que* $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *y* $T(cv) = cT(v)$.

Proposición 2. *Sean* $u, v \in V$ *y* $c \in K$. *Luego,* $T : V \to W$ *es una transformación lineal si y solo si* $T(cu + v) = cT(u) + T(v)$.

Demostración. Como T es transformación lineal, entonces $T(cu+v) = T(cu)+T(v) = cT(u) + T(v)$. La segunda implicación es análoga a la primera.

□

Proposición 3. *Si* $T : V \to W$ *es una transformación lineal, entonces* $T(0_V) = 0_W$.

Demostración.

$$0_V = 0_V + 0_V$$

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V)$$

$$T(0_V) = T(0_V) + T(0_V)$$

Por otra parte, como $T(0_V) \in W$, entonces $T(0_V) = T(0_V) + 0_W$. Luego

$$T(0_V) + T(0_V) = T(0_V) + 0_W$$

$$T(0_V) = 0_W$$

□

Definición 10. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. El espacio nulo o kernel de T es*

$$ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0_W\}$$

Definición 11. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. La imagen de T es un subconjunto de W que se define como*

$$Im(T) = \{T(x) \mid x \in V\}$$

Teorema 10. *Si V y W son espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces $ker(T)$ y $Im(T)$ son subespacios de V y W, respectivamente.*

Demostración. Como $T(0_V) = 0_W$, tenemos que $0_V \in ker(T)$. Sean $v_1, v_2 \in ker(T)$ y $c \in K$. Entonces $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$, y $T(cv_1) = cT(v_1) = c0_W = 0_w$. Por lo tanto $v_1, v_2 \in ker(T)$ y $cv_1 \in ker(T)$. Luego $ker(T) \leq V$

Por otra parte, Como $T(0_V) = 0_W$, tenemos que $0_W \in Im(T)$. Ahora, sean $w_1, w_2 \in Im(T)$ y $c \in K$. Entonces existen v_1 y v_2 tales que $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$. Así, $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = w_1+w_2$, y $T(cv_1) = cT(v_1) = cw_1$. Por lo tanto, $v_1, v_2 \in Im(T)$ y $cv_1 \in Im(T)$. Luego $Im(T) \leq W$. □

Definición 12. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. La nulidad de T es $nul(T) = dim(ker(T))$.*

Definición 13. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. El rango de T es $R(T) = dim(Im(T))$.*

Teorema 11. *Si V y W son espacios vectoriales, V de dimension finita y $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces $nul(T) + R(T) = dim(V)$.*

Demostración. Supongamos que $dim(V) = n$, y sea $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ una base para $nul(T)$. Entonces podemos extender a $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ para que sea una base para V. Supongamos que esa extensión es $\beta = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Demostraremos que el conjunto $S = \{T(b_{k+1}), ..., T(b_n)\}$ es una base para $R(T)$.

Primero demostremos que S genera a $R(T)$. □

Teorema 12. *Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. La transformación T es inyectiva si y solo si $ker(T) = \{0_V\}$*

Demostración. Supongamos que T es inyectiva y que $v \in ker(T)$. Entonces $T(v) = T(0_V) = 0_W$, y por lo tanto $v = 0_V$. Así, $ker(T) = \{0_V\}$. Ahora supongamos que $ker(T) = \{0_V\}$ y que $T(v_1) = T(v_2)$. Entonces $T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) = 0_W$, por lo tanto $x - y \in ker(T) = \{0_V\}$ y en consecuencia $x - y = 0_V$, esto es, $x = y$. Por lo tanto T es inyectiva. □

Teorema 13. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensiones finitas e iguales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y solo si es sobreyectiva.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que T es inyectiva, entonces $ker(T) = \{0_V\}$, por lo tanto $\emptyset$ es una base para $ker(T)$, y así $nul(T) = 0$, por lo tato $0 + R(T) = dim(V) = dim(W)$, luego $dim(Im(T)) = dim(W)$, y en consecuencia $Im(T) = W$.
$\Leftarrow$ Supongamos que T es sobreyectiva pero no es inyectiva. Entonces $nul(T) > 0$, pues $\emptyset$ no es base para $ker(T)$. Como T es sobreyectiva, entonces $Im(T) = W$, y así $R(T) = dim(W) = dim(V)$. Luego, $nul(T) + R(T) > dim(V)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto T es inyectiva. □

Teorema 14. *Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y solo si T lleva subconjuntos linealmente independientes de V a subconjuntos linealmente independientes de W.*

Demostración. □

Teorema 15. *Sean V y W espacios vectoriales y supóngase que $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ es una base para V. Para cualquier subconjunto $\{w_1, w_2, ..., w_n\} \subset W$ existe exactamente una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(b_i) = w_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.*

Demostración. □