Chapter 25 Applications linéaires

Exercice 1 (25.1)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À toute application $f \in E$, on associe l'application $A(f)$ définie par

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que A est une application de E à valeurs dans E.

2. Montre que A est linéaire.

Exercice 2 (25.1)
Vérifier la linéarité des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$.

2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \phi(0) \end{array}$.

3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.

4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' \end{array}$.

5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Exercice 3 (25.1)
Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, 4x-2y) \end{array}$ appartient à $\mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$. Préciser f^{-1}. Vérifier que f^{-1} est effectivement linéaire.

Exercice 4 (25.1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$ vérifiant

$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) = 0. \tag{1}$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 5 (25.2)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (y-3x, 5x+2y, x+y)$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z)$.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y,z) = (2x-y+z, 3x+y-z, x-3y+3z, 2x+4y-4z)$.

Exercice 6 (25.2)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = X\left(P'(X+1) - P'(1)\right)$.

2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - XP' - P(0)$.

Exercice 7 (25.2)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y - z, x + y)$.
2. $M : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $M(P) = XP$.
3. $\phi : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ définie par $\phi(f) = f' - f$.
4. $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Re}(z)$.

Exercice 8 (25.2)
Soit $\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(0), P'(1), P(2)\big) \end{array}$.

1. Prouver que ϕ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. Déterminer l'image de ϕ.
4. L'application ϕ est-elle injective? est-elle surjective?

Exercice 9 (25.2)
Soit $\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$.

1. Prouver que ϕ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. Soit $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur y pour avoir $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.
4. L'application ϕ est-elle injective? est-elle surjective?

Exercice 10 (25.2)
On désigne par $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère l'application ϕ définie sur E par

$$\forall f \in E, \phi(f) = f'(1).$$

1. Démontrer que ϕ est une forme linéaire sur E.
2. En déduire que $F = \left\{ f \in E \;\middle|\; f'(1) = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11 (25.2)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E, F)$ et $g \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \subset \ker g$.
2. Montrer que $\ker f \subset \ker g \circ f$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 12 (25.2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.
Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Exercice 13 (25.2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.
Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{ 0_E \}$.

Exercice 14 (25.2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Exercice 15 (25.2)
Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $u \in \mathbf{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, c'est-à-dire
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subset \ker u^{k+1} \text{ et } \operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k.$$
2. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\ker u^d = \ker u^{d+1}$. Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \ker u^{k+1} = \ker u^k.$$
3. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a
$$\ker u^p = \ker u^{p+1} \iff \ker u^p \cap \operatorname{Im} u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$
4. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\operatorname{Im} u^d = \operatorname{Im} u^{d+1}$. Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k.$$

Exercice 16 (25.2)
Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espaces vectoriels F. Montrer que pour tout partie A de E,
$$f(\operatorname{Vect}(A)) = \operatorname{Vect}(f(A)).$$

Exercice 17 (25.2)
Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire
$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$$
Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 18 (25.2)
Soit $\theta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

1. Prouver que $\theta \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$.
2. Montrer que θ est injective.
3. Montrer que θ est surjective.

Exercice 19 (25.2)
Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$.

2. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+z, x-z) \end{array}$.

3. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y+z, x+y+z) \end{array}$.

4. $u: \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$.

5. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.

6. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(0) \end{array}$.

7. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' \end{array}$.

8. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & u_3 \end{array}$.

9. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

10. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Exercice 20 (25.3)
Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si u est injective, surjective, bijective.

1. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

2. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

3. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$.

4. $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P-(X-2)P' \end{array}$.

Exercice 21 (25.3)
On définit sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ deux applications A et B par

$$A(P(X)) = P'(X) \qquad \text{et} \qquad B(P(X)) = XP(X).$$

Démontrer les assertion suivantes.

1. A et B sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}[X]$ et $\ker A \neq \{ 0 \}$.
3. $\ker B = \{ 0 \}$ et B n'a pas d'application réciproque.
4. $A\circ B - B\circ A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $A^k\circ B - B\circ A^k = kA^{k-1}$.