Chapter 18 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

Exercice 1 (18.2)
Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y'(t) - 2y(t) = \operatorname{ch}(2t). \tag{E}$$

Exercice 2 (18.2)
Résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = 8\sin(2x) \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = -1$.

Exercice 3 (18.2)
Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y'(t) - 2y(t) = 4$.
2. $y'(t) + y(t) = 2t + 3$.
3. $y'(t) - y(t) = -3\cos(2t) - \sin(2t)$.
4. $y'(t) - 2y(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$.
5. $y'(t) + y(t) = e^t(\sin t + \cos t)$.

Exercice 4 (18.2)
Soit f une fonction non nulle et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t, u \in \mathbb{R}, f(t+u) = f(t)f(u). \tag{1}$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f : t \mapsto e^{at}$.

Remarque. L'équation (1) est une **équation fonctionnelle**, c'est-à-dire que l'inconnue est une fonction.

Exercice 5 (18.3)
Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 6 (18.3)
On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,e^t + \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Déterminer sous la forme $y_1 : t \mapsto (at + bt^2)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$, une solution particulière réelle de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t \tag{E_1}$$
3. Déterminer une solution particulière complexe y_2 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{it} \tag{E_2}$$
4. En déduire une solution particulière réelle y_3 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) - 2\cos(t). \tag{E_3}$$
5. Utiliser le principe de superposition pour obtenir une solution particulière réelle y_0 de (E).
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7 (18.3)
Résoudre le problème de Cauchy, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\begin{gathered} y'' + 2y' + 5y = \cos(x) \qquad (E) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

Exercice 8 (18.3)
Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Exercice 9 (18.3)
Résoudre les équations différentielles
1. $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \mathrm{sh}(t)$;
2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos(2t)$.
3. $y''(t) + y(t) = \cos^3(t)$;

Exercice 10 (18.3)
Résoudre l'équation
$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 11 (18.3)
Déterminer les solutions réelles du système
$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}.$$

Exercice 12 (18.3)
On cherche à résoudre l'équation différentielle
$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \tag{E}$$
1. On pose $z(t) = y(t)^2$. Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle simple (E').
2. Résoudre l'équation (E).