

Calculs algébriques

Aperçu

1. Le symbole somme Σ
2. Sommes usuelles
3. Généralisation de la notation Σ
4. Le symbole produit Π

1. Le symbole somme Σ

1.1 Règles de calcul

1.2 Propriétés

1.3 Changement d'indices

1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

1. Le symbole somme Σ

1.1 Règles de calcul

1.2 Propriétés

1.3 Changement d'indices

1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit \prod

D 1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. La somme des termes de u_p à u_q est notée

$$\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

La somme $\sum_{k=p}^q u_k$ se note aussi $\sum_{p \leq k \leq q} u_k$.

Pour tous entiers naturels $p \leq q$, la somme $\sum_{k=p}^q$ comporte $q - p + 1$ termes.

E 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n premier entiers non nuls est

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k.$$

R

L'indice k est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre indice. Il convient de ne jamais confondre k et n . Ainsi

$$\underbrace{n + n + n \cdots + n}_n = \sum_{k=1}^n n \neq \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n.$$

T 3 Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

T 3 Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

T 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole \sum la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 775 + 777$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

T 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole \sum la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 775 + 777$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

1. Le symbole somme Σ

1.1 Règles de calcul

1.2 Propriétés

1.3 Changement d'indices

1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit \prod

P 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q < n$ trois entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^q u_k + \sum_{k=q+1}^n u_k$$

P 6 Pour tous nombres complexes λ et μ , toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

$$\sum_{k=p}^q (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^q a_k$$

$$\sum_{k=p}^q (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=p}^q b_k$$

On dit que $\sum_{k=p}^q$ est linéaire.

On peut écrire directement,

$$\sum_{k=p}^q (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^q a_k + \mu \sum_{k=p}^q b_k.$$

P 7 Pour toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

$$\Re \left(\sum_{k=p}^q a_k \right) = \sum_{k=p}^q \Re(a_k); \quad \Im \left(\sum_{k=p}^q a_k \right) = \sum_{k=p}^q \Im(a_k); \quad \overline{\sum_{k=p}^q a_k} = \sum_{k=p}^q \overline{a_k}.$$

1. Le symbole somme Σ

1.1 Règles de calcul

1.2 Propriétés

1.3 Changement d'indices

1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit \prod

La somme $S = 6 + 8 + 10 + \cdots + 26 + 28$ possède de nombreuses écritures

$$S = \sum_{k=3}^{14} 2k = \sum_{k=2}^{13} (2k + 2) = \sum_{k=4}^{15} (2k - 2)$$

Plus généralement, on a $\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

M Effectuons le changement de variable $l = k + 1$ dans la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_{k+1}$$

L'application

$$\begin{aligned} \{0, 1, \dots, n\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\} \\ k &\mapsto k+1 \end{aligned}$$

est une bijection : lorsque k décrit l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$, $l = k + 1$ décrit l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+1\}$, d'où

$$S_n = \sum_{l=1}^{n+1} u_l$$

L'indice l étant muet, on préfère écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k.$$

Pour certain changement d'indice, il faut faire attention à l'ordre des bornes : $\sum_{l=n}^0$ n'a pas de sens si $0 < n$. On aura par exemple,

$$\sum_{k=0}^n u_k \stackrel{!}{=} \sum_{l=0}^n u_{n-l}.$$

P 8 Changements d'indices utiles (à savoir retrouver)

1. *Par translation :*

$$\sum_{k=p}^q u_{k+m} = \sum_{k'=p+m}^{q+m} u_{k'} = \sum_{k=p+m}^{q+m} u_k$$

car $p \leq k \leq q$ équivaut à $p+m \leq k+m \leq q+m$.

2. *Par symétrie :*

$$\sum_{k=p}^q a_{p+q-k} = \sum_{k'=p}^q u_{k'} = \sum_{k=p}^q u_k$$

car $p+q-k$ est la symétrique de k par rapport à $\frac{p+q}{2}$ et $p \leq k \leq q$ équivaut à $p \leq p+q-k \leq q$.

1. Le symbole somme Σ

1.1 Règles de calcul

1.2 Propriétés

1.3 Changement d'indices

1.4 Simplification télescopiques

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

P 9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

T 10 En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

P 9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

T 10 En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

- 2.1 Somme d'une progression arithmétique
- 2.2 Factorisation de $a^n - b^n$
- 2.3 Somme d'une progression géométrique
- 2.4 Formule du binôme
- 2.5 Somme de puissances successives

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

2.1 Somme d'une progression arithmétique

2.2 Factorisation de $a^n - b^n$

2.3 Somme d'une progression géométrique

2.4 Formule du binôme

2.5 Somme de puissances successives

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

P 11 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. Notons $S = \sum_{k=0}^n k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ donc

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2$$

et $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=0}^n 2k + 1 = 2S + (n+1).$

D'où $2S = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1-1)(n+1) = n(n+1).$



T 12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique, $p \leq q$ deux entiers naturels alors

$$\sum_{k=p}^q u_k = (q - p + 1) \frac{u_p + u_q}{2}$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 + kr = u_0 + pr + (k - p)r = u_p + (k - p)r$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q u_k &= \sum_{k=p}^q u_p + (k - p)r \\ &= (q - p + 1)u_p + \sum_{k'=0}^{q-p} k' r && (k' = k - p) \\ &= (q - p + 1)u_p + \frac{(q - p + 1)(q - p)}{2} r \\ &= \frac{q - p + 1}{2} (u_p + u_p + (q - p)r) \\ &= \frac{q - p + 1}{2} (u_p + u_q). \end{aligned}$$



La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

E 13 $\sum_{k=p}^q k = (q - p + 1) \frac{p + q}{2}.$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

2.1 Somme d'une progression arithmétique

2.2 Factorisation de $a^n - b^n$

2.3 Somme d'une progression géométrique

2.4 Formule du binôme

2.5 Somme de puissances successives

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

T 14 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

On peut également écrire

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

T 15

▶ $a^7 - b^7 =$

▶ $a^7 - 1 =$

▶ $a^n - 1 =$

T 15 ▶ $a^7 - b^7 =$

▶ $a^7 - 1 =$

▶ $a^n - 1 =$

C 16 Soit $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

2.1 Somme d'une progression arithmétique

2.2 Factorisation de $a^n - b^n$

2.3 Somme d'une progression géométrique

2.4 Formule du binôme

2.5 Somme de puissances successives

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

T 17 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r , $p \leq q$ deux entiers naturels alors

$$\sum_{k=p}^q u_k = \begin{cases} u_p \frac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ (q - p + 1)u_p & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

T 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

2. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.

M Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b) = a(u_{n+1} - u_n) = av_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison a . On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1-a^n}{1-a} = ((a-1)u_0 + b) \frac{1-a^n}{1-a} = u_0(a^n - 1) + b \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Par télescopage, on a également,

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

et après simplification,

$$u_n = u_0 a^n + b \frac{1-a^n}{1-a}.$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

2.1 Somme d'une progression arithmétique

2.2 Factorisation de $a^n - b^n$

2.3 Somme d'une progression géométrique

2.4 Formule du binôme

2.5 Somme de puissances successives

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

D 19

► Soit n un entier ; on note $n!$, qui se lit **factorielle n** , l'entier défini par

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

On a donc $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

► Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices n et p** le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p < 0$ ou $p > n$.

T 20

► Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.

► Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.

► Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

T 20

► Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.

► Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.

► Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

P 21

1. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.
3. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ (formule de Pascal).
4. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel.

T 22 Formule du binôme de Newton

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On peut également écrire

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esquisse de démonstration. Démonstration par récurrence sur n . Pour l'hérédité, on utilise $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n$. On développe et on effectue le changement de variable adéquat pour retrouver des termes en $a^{n+1-k} b^k$. On découpe les indices qui dépassent, on regroupe les autres grâce à la formule de Pascal. ■

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

2.1 Somme d'une progression arithmétique

2.2 Factorisation de $a^n - b^n$

2.3 Somme d'une progression géométrique

2.4 Formule du binôme

2.5 Somme de puissances successives

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

P 23 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

3.1 Somme d'une famille finie

3.2 Sommes doubles

3.3 Produit de deux sommes finies

3.4 Sommes triangulaires

4. Le symbole produit \prod

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

3.1 Somme d'une famille finie

3.2 Sommes doubles

3.3 Produit de deux sommes finies

3.4 Sommes triangulaires

4. Le symbole produit \prod

Si on rajoute une condition sous le symbole \sum , cela signifie qu'on se limite aux indices qui vérifient la condition.

E 24 La somme $u_{2p} + u_{2p+2} + \cdots + u_{2q-2} + u_{2q}$ peut être notée $\sum_{k=p}^q u_{2k}$, mais également

$$\sum_{\substack{k=2p \\ k \text{ pair}}}^{2q} u_k$$

ou

$$\sum_{\substack{k=2p \\ k \in 2\mathbb{N}}}^{2q} u_k.$$

E 25

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{10} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$$

N

Soit $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ un ensemble fini et u_{i_1}, \dots, u_{i_n} des complexes alors on note

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \dots + u_{i_n}$$

E 26 Si $I = \{0, 2, \dots, 2n\}$,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

3.1 Somme d'une famille finie

3.2 Sommes doubles

3.3 Produit de deux sommes finies

3.4 Sommes triangulaires

4. Le symbole produit \prod

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ une famille de nombres complexes. Une telle famille peut être rangée dans un tableau que nous appellerons **matrice** à p lignes et q colonnes. Par exemple, dans le cas où $p = 3$ et $q = 5$:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{array}$$

T 27 Permutation des \sum

La somme des nombre $a_{i,j}$ est

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j} = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p a_{i,j}$$

Lorsque i et j décrivent le même ensemble d'indices, on écrit abrégativement

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}.$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

3.1 Somme d'une famille finie

3.2 Sommes doubles

3.3 Produit de deux sommes finies

3.4 Sommes triangulaires

4. Le symbole produit \prod

T 28 Soient $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket}$ deux familles finies de nombres complexes. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{j=1}^q b_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_i b_j.$$

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

3.1 Somme d'une famille finie

3.2 Sommes doubles

3.3 Produit de deux sommes finies

3.4 Sommes triangulaires

4. Le symbole produit \prod

T 29 Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de nombres complexes

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}$$

et

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}$$

E 30 Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

4.1 Règles de calcul

1. Le symbole somme Σ

2. Sommes usuelles

3. Généralisation de la notation Σ

4. Le symbole produit Π

4.1 Règles de calcul

D 31 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Le produit des termes u_p à u_q est notée

$$\prod_{k=p}^q u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

E 32 ► Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \leq q$ deux entiers naturels, $\prod_{k=p}^q \alpha = \alpha^{q-p+1}$.

► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.

P 33 Pour tout nombre complexe λ , tout entier n , toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

$$1. \prod_{k=p}^q (a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^q a_k \right) \times \left(\prod_{k=p}^q b_k \right).$$

$$2. \prod_{k=p}^q (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^q a_k.$$

$$3. \prod_{k=p}^q (a_k^n) = \left(\prod_{k=p}^q a_k \right)^n.$$

P 34 Simplification télescopique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\prod_{k=p}^q \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$$