Espace probabilisé fini

Aperçu

D 1 Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire, nous appellerons **univers** associé à $\mathcal{E}$, l'ensemble noté traditionnellement Ω de tous les résultats possibles de $\mathcal{E}$.
Le **résultat** de l'expérience est l'un des éléments ω de l'univers Ω. Pour des raisons historique, ils portent de nombreux noms : épreuve, aléa, résultat de l'expérience, réalisation du hasard, état du monde, résultat d'une expérience...

E 2 **Tirage d'un dé**

Considérons un personnage qui, à un instant t_0, lance un dé à six faces. On peut, par exemple, décider que les éléments de Ω sont les descriptions complètes du monde réel (avec tous ses atomes, leur évolution dans le temps). De (très) nombreux éléments de Ω correspondent à un même tirage de dé. Bien entendu, une telle description est bien trop complexe et, pour tout dire, inutile.

De manière beaucoup plus économique, on peut «oublier» la plus grosse partie du monde, n'en conserver que les propriétés essentielles et choisir une modélisation plus simple, dans laquelle on décrète que $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. C'est évidement ce point de vue qui sera adopté dans la suite.

E 3 **Arrêt d'un programme**

On considère un programme acceptant en entrée une série de données de taille arbitraire, on note T le temps (compté en nombre de calculs élémentaires effectués par l'ordinateur) avant l'arrêt du programme. On pose alors $\Omega = \mathbb{N}^\star \cup \{ \infty \}$.

E 4 **Succession de tirages à pile ou face**

Si l'on accepte l'idée d'une succession infinie de tirages au sort, on prend comme univers l'ensemble $\Omega = \{ P, F \}^{\mathbb{N}^\star}$ des applications de $\mathbb{N}^\star$ dans $\{ P, F \}$, c'est-à-dire des suites $(r_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{ P, F \}$. Dans une suite $\omega = (r_n)_{n\geq 1}$ donnée, la valeur de r_k est le résultat du k-ième tirage.

D 5

- Les **événements** de l'expérience aléatoire sont les parties de l'ensemble Ω.
- Les **événements élémentaires** de l'expérience aléatoire sont les singletons de l'ensemble Ω.

E 6 Revenons au cas du tirage d'un dé ; l'univers choisi est $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Voici quelques événements:

- «le résultat est pair» qui est l'événement $\{ 2, 4, 6 \}$. On dira alors que, lors d'une expérience de lancer de dé (c'est-à-dire lors du choix d'une réalisation particulière ω du hasard), «le résultat est pair» pour signifier «$\omega \in \{ 2, 4, 6 \}$».
- «le résultat est impair» qui est l'événement $\{ 1, 3, 5 \}$.
- «le résultat est supérieur ou égal à 5» qui est l'événement $\{ 5, 6 \}$.
- L'événement certain qui est l'événement Ω tout entier. Il apparaît de façon naturelle (par exemple «le résultat est inférieur à 42»).
- L'événement impossible qui est l'événement $\emptyset$: aucun résultat d'expérience n'est fait partie. Lui aussi apparaît de façon naturelle (par exemple : «le résultat est négatif»).

Toute les parties de Ω (il y en a $2^6 = 64$) sont des événements.

Notation	Langage ensembliste	Langage probabiliste
ω ($\omega \in \Omega$)	élément	résultat, épreuve, éventualité,...
A $(A \subset \Omega)$	partie de Ω	événement
$\{\,\omega\,\}$ $(\omega \in \Omega)$	singleton	événement élémentaire
$\omega \in A$	ω est élément de A	A est réalisé (dans le résultat ω)
$A \subset B$	A inclus dans B	l'événement A implique l'événement B
$A \cup B$	réunion	réalisation de A *ou* de B
$A \cap B$	intersection	réalisation de A *et* de B
A^c ou $\Omega \setminus A$	complémentaire	non-A (événement contraire)
$A \setminus B$	A privé de B	réalisation de A mais pas de B
$\emptyset$	partie vide	événement impossible
Ω		événement certain
$A \cap B = \emptyset$	parties disjointes	A et B sont des événements incompatibles

D 7 Une **probabilité** (ou **mesure de probabilité**) sur un *univers fini* Ω est une application de P définie sur l'ensemble des événements $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ ($\mathcal{T}$ comme **tribu**) vérifiant :

- P est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- l'univers Ω est de probabilité unité : $P(\Omega) = 1$;
- P est **additive**, c'est-à-dire que si A et B sont des événements disjoints, alors la probabilité associée à leur union est la somme de leurs probabilités :

$$P(A \underset{\text{disj.}}{\cup} B) = P(A) + P(B).$$

Dans ce cas, le réel $P(A)$ est appelé **probabilité de l'événement A**.

- Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est un **espace probabilisable fini**.
- Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un **espace probabilisé fini**.

R Cette liste d'axiome est suffisante lorsque Ω est un ensemble fini ; nous devrons la compléter par un axiome supplémentaire lorsque Ω est infini.

P 8

Propriétés élémentaires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux parties de Ω.

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. *P est à valeurs dans $[0, 1]$*
3. *Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$ (croissance de P);*
4. *Si $A \subset B$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;*
5. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
6. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

C 9

1. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événement deux à deux disjoints, alors*

$$P(A_1 \underset{\text{disj.}}{\cup} A_2 \underset{\text{disj.}}{\cup} \ldots \underset{\text{disj.}}{\cup} A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \qquad \text{(additivité)}$$

2. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements quelconques, alors*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \qquad \text{(sous-additivité)}$$

T 10 *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé fini. Soient* A *et* B *deux parties de* Ω*. Alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Munir un univers fini $\Omega = \{ \omega_1, \dots, \omega_n \}$ d'une probabilité revient à associer à chaque élément ω_k, un réel $p_k \geq 0$, avec pour seule contrainte $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Insistons sur le fait que l'on *choisit* effectivement ces nombres, et qu'on ne les calcule pas. Le choix peut être plus ou moins pertinent, c'est-à-dire que la modélisation est plus ou moins réussie.

D 11 Une **distribution de probabilités** sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par E et de somme 1.

Le théorème suivant montre qu'une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.

T 12 *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, p_2, \dots, p_n$ des nombres réels.*
Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\{w_k\}) = p_k$ si, et seulement si

- $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geq 0,$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

P est alors unique, et on a pour tout événement A,

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\substack{k=1\dots n\\ \omega_k\in A}} p_k.$$

E 13 Dans le cas d'un lancer de dé, on peut choisir $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ et poser $p_k = 1/6$ pour $k = 1, \dots, 6$; cette situation modélise un dé équilibré. Si l'on se rend compte que, pour un dé donné, les prédictions du modèle ne se réalisent pas, on peut modifier les valeurs des coefficients p_k. Pour déterminer expérimentalement chaque coefficient, une méthode est de lancer un très grand nombre de fois le dé et de calculer des fréquences expérimentales. Des résultats théoriques permettent de donner une estimation du nombre de lancers à effectuer pour obtenir des valeurs suffisamment précises des p_k.

D 14 Une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ de parties non vides de Ω est appelée **système complet d'événements** si elle forme une partition de Ω, c'est-à-dire que Ω est la réunion disjointe des A_i :

$$\Omega = A_1 \underset{\text{disj.}}{\cup} \ldots \underset{\text{disj.}}{\cup} A_n.$$

E 15 Un événement A et son contraire A^c, tous deux non vides, constituent un système complet d'événement (A, A^c) de Ω.

P 16 *Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω et B un événement de Ω, alors*

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n).$$

En particulier si l'on a un événement A et son contraire A^c, alors

$$P(B) = P\left(B \cap A\right) + P\left(B \cap A^c\right).$$

E 17 On prend au hasard une chaussette dans la commode de Jack. Il y a une chance sur neuf pour que ce soit une chaussette trouée rouge et deux chances sur sept pour que ce soit une chaussette rouge sans trou. On note A l'événement « la chaussette est rouge » et B l'événement « la chaussette est trouée ». L'énoncé nous donne les probabilités $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$ et $P(A \cap B^c) = \frac{2}{7}$. Nous avons ainsi la probabilité de prendre une chaussette rouge

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{1}{9} + \frac{2}{7} = \frac{25}{63}.$$

D 18 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini.
On dit qu'il y a **équiprobabilité**, lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. On dit aussi que P est la **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

T 19 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini.*
L'hypothèse d'équiprobabilité définit sur cet espace une probabilité P unique, donnée par

$$\forall A \subset \Omega, P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

*On dit aussi que P est **la probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{T})$.*

R Lorsque l'on effectue des tirages **au hasard**, on sous-entend qu'il y a équiprobabilité.

Dans ce cas, le calcul des probabilités se ramène alors à deux dénombrements.

E 20 On lance deux dés ordinaires bien équilibrés. Il y a équiprobabilité. Ω est l'ensemble des couples d'entiers de un à six. Il y a donc $6^2 = 36$ éventualités. L'événement A «un as et un six» a deux éventualités : $(1,6)$ et $(6,1)$. Il a pour probabilité

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Il est parfois plus simple de considérer l'événement contraire.

E 21 On lance trois pièces bien équilibrées. Il y a équiprobabilité. Ω est l'ensemble des 3-listes (ou triplets) d'éléments de $\{ P, F \}$ (pile, face). Il y a donc $2^3 = 8$ éventualités.
L'événement A «au moins une fois pile» a pour contraire $A^c = \{ (F, F, F) \}$. Sa probabilité est donc

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\operatorname{card} A^c}{\operatorname{card} \Omega} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

D 22 Soit B un événement de probabilité non nulle : $P(B) > 0$. Pour tout événement A, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** comme le réel, noté $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, valant

$$P_B(A) = P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

E 23 Dans le bureau de Gaston, à la pause-café, cinq femmes sur sept et trois hommes sur cinq prennent leur café sans sucre. On prend une de ces douze personnes au hasard. On note F l'événement «la personne est une femme» et S l'événement «la personne prend son café sans sucre». On a $P(S) = \frac{8}{12}$ et $P(F \cap S) = \frac{5}{12}$, par conséquent la probabilité pour que ce soit une femme sachant qu'elle prend son café sans sucre est

$$P(F|S) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{5}{8}.$$

T 24 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} P_B : & \mathcal{T} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A|B) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ *; on l'appelle* ***probabilité conditionnelle sachant*** $\boldsymbol{B}$ *ou encore* ***probabilité conditionnée par*** $\boldsymbol{B}$.

E 25 Jack possède une commode Louis XV en noyer à trois tiroirs. Sa chaussette rose a une chance sur deux de se trouver dans ce meuble (indifféremment dans l'un des tiroirs) et une chance sur deux de se trouver à l'extérieur. On a ouvert les deux premiers tiroirs: elle n'y est pas! Sachant cela, quelle est la probabilité qu'elle soit dans le troisième tiroir?

Il semble naturel de prendre l'espace probabilisé (Ω, P)

extérieur	tiroir 1	tiroir 2	tiroir 3
$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

On conditionne par l'événement B:«on a ouvert les deux premiers tiroirs, elle n'y est pas», qui est représenté par la partie { extérieur, tiroir 3 }. On considère l'événement A représenté par la partie { tiroir 3 } et l'on a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{\text{ tiroir } 3\})}{P(\{\text{ extérieur, tiroir } 3\})} = \frac{1/6}{1/2 + 1/6} = 1/\ 4.$$

Conditionner par B revient à considérer l'espace probabilisé $\left(\Omega, P_B\right)$:

extérieur	tiroir 1	tiroir 2	tiroir 3
$3/4$	0	0	$1/4$

R La définition de la probabilité conditionnelle par la formule

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est très simple, mais il est important de bien l'interpréter. Il faut bien voir dans cette formule que $A|B$ *n'est pas un événement* et que $P(A|B)$ n'est autre qu'une notation pour $P_B(A)$. L'interprétation de $P_B(A)$ n'est pas la même que celle de $P(A \cap B)$, et *ces deux probabilités ne sont pas égales* (sauf si $P(B) = 1$).

P 26 *Soit B un événement de probabilité non nulle : $P(B) > 0$. Alors*

1. $P(B|B) = 1$.
2. *Si* $B \subset A$, $P(A|B) = 1$.
3. $P\left(\emptyset|B\right) = 0$.
4. $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$.

De manière générale, on a

$$P(A|B) + P(A|B^c) \neq 1.$$

Cette somme pouvant prendre une valeur quelconque entre 0 et 2 (Exemple : je joue au loto; je note B l'événement «je perd ma mise» et A l'événement «il fait beau»; la somme précédente est dramatiquement proche de 2).

T 27 *Soit B un événement de probabilité non nulle : $P(B) > 0$. Alors*

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Le programme autorise la convention $P(A|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

E 28 Dans son panier, Jeanne a trois pommes véreuses et quatre pommes sans ver. Elle prend deux pommes une par une, sans les remettre. Quelle est la probabilité de prendre la première sans ver et la seconde véreuse?

Notons A l'événement «la première n'a pas de ver» et B «la deuxième est véreuse». Par équiprobabilité du premier tirage, $P(A) = \frac{4}{7}$. Si la première n'est pas véreuse, il reste trois pommes véreuses et trois pommes sans ver pour le deuxième tirage: $P(B|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Donc

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{7}.$$

T 29 **Formule des probabilités composées**

Soit $n \geq 2$ *un entier et soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des événements ; on suppose que* $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ *est de probabilité non nulle. Alors*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration. Une simple récurrence. ∎

E 30 On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer les 4 as?

Notons A_i $(i = 1, \dots, 4)$ l'événement «la i-ème carte tirée est un as». On demande de calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$. Les probabilité immédiatement accessible sont, en-dehors de $P(A_1) = \frac{4}{52}$, les probabilités conditionnelles

$$P(A_2|A_1) = \frac{3}{51} \qquad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{50} \qquad P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{49}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.00000369. \end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat par dénombrement, mais on observera que nous ne nous sommes pas préoccupés dans cet exemple de la construction d'un espace Ω dont les A_i pourraient être considérés comme des sous-ensembles.

T 31 **Formule des probabilités totales**

Soient $(A_1, \dots, A_n)$ *une famille formant un système complet d'événements. Soit* B *un événement. On suppose* $P(A_i) > 0$ *pour tout* i*. Alors*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

C 32 *Si* $P(A) \neq 0$ *et* $P(A^c) \neq 0$,

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c).$$

E 33 On considère l'énoncé suivant.
La probabilité qu'il pleuve un matin donné est $p = 1/5$. Lorsqu'il pleut, la probabilité que je prenne mon parapluie est $9/10$. Lorsqu'il ne pleut pas, la probabilité que je le prenne est $2/10$. Quelle est la probabilité que je prenne mon parapluie un matin donné?

Démonstration. La première étape dans la résolution d'un tel problème est de formaliser les données. On note A l'événement «il pleut», et A^c l'événement «il ne pleut pas»; l'univers Ω est bien sûr égal à l'union disjointe $A \cup A^c$. Notons B l'événement «je prends mon parapluie». La phrase «Lorsqu'il pleut, la probabilité que je prenne mon parapluie est $9/10$» doit s'interpréter comme une *probabilité conditionnelle*, c'est-à-dire comme $P(B|A)$ («sachant qu'il pleut»), et non comme la probabilité d'une conjonction $P(B \cap A)$ («il pleut *et* je prends mon parapluie»). On a ainsi

$$P(B|A) = \frac{9}{10} \qquad \text{et} \qquad P(B|A^c) = \frac{2}{10}.$$

La formule des probabilités totales donne alors

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{10} = \frac{17}{50}.$$

∎

E 34 Dans le championnat de Liverpool d'échecs, Paul, John et Georges vont disputer la sélection finale dont le vainqueur sera opposé au champion en titre Robert. Paul a une chance sur trois d'être sélectionné, John une sur deux et, par conséquent, Georges une sur six. Contre Paul, Robert a deux chances sur trois de gagner, contre John trois sur cinq et contre Georges, trois sur quatre. Quelle est la probabilité pour Robert de remporter le titre?

Les événements P=«Paul est sélectionné», J=«John est sélectionné» et G=«Georges est sélectionné» forment un système complet d'événements. Notons R l'événement «Robert remporte le titre». Les hypothèses

$$P(P) = \frac{1}{3} \qquad P(J) = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{1}{6}$$
$$P(R|P) = \frac{2}{3} \qquad P(R|J) = \frac{3}{5} \qquad P(R|G) = \frac{3}{4}.$$

nous permettent de calculer

$$P(R) = P(P)\cdot P(R|P) + P(J)\cdot P(R|J) + P(G)\cdot P(R|G) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{233}{360}.$$

T 35 **Théorème de Bayes v.1**

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On a alors

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}.$$

E 36 «Tu finiras sur l'échafaud!» s'exclame une grand-tante excédée à l'adresse de son petit-neveu qui s'est gavé de bonbons et s'obstine à le nier. «On commence par mentir, et on devient criminel!», ajoute-t-elle, car elle a de la culture et a lu dans son hebdomadaire favori que 90% des criminels ont commencé par mentir effrontément durant leur jeunesse (alors que seuls 20% des gens honnêtes ont menti étant jeunes).

Sachant qu'il n'y a que 1% de criminel dans la population, peut-on calculer la probabilité qu'a le petit enfant de devenir criminel et rassurer ainsi la brave grand-tante?

Notons C l'événement «être criminel» et M l'événement «mentir durant son enfance». Les données chiffrées connues sont

$$P(C) = 0.01 \quad P(M|C) = 0.9 \quad P(M|C^c) = 0.2.$$

Le théorème de Bayes nous permet d'écrire

$$P(C|M) = \frac{P(C) \cdot P(M|C)}{P(M)},$$

mais il nous manque la valeur de $P(M)$. On peut l'obtenir par la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements (C, C^c):

$$P(M) = P(M|C)P(C) + P(M|C^c)P(C^c),$$

ce qui donne

$$P(C|M) = \frac{P(C) \cdot P(M|C)}{P(M|C)P(C) + P(M|C^c)P(C^c)}.$$

L'application numérique donne

$$P(C|M) = \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.01 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.99} \approx 0.043 \approx 4.3\%.$$

La grand-tante peut s'endormir tranquille.

T 37 **Théorème de Bayes**

Soient $(A_1, \dots A_n)$ *un système complet d'événements et* B *un événement. On suppose que* $P(A_i) > 0$ *pour tout* i *et* $P(B) > 0$ *; alors*

$$\forall p \in [\![1, n]\!], P(A_p|B) = \frac{P(A_p) \cdot P(B|A_p)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}.$$

D 38 Deux événements A et B sont **indépendants** (ou **stochastiquement indépendants**) s'ils vérifient

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

R L'indépendance de deux événements est une notion qui dépend de la probabilité P dont on a muni l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$, au contraire de l'incompatibilité, qui est une propriété ne dépendant que de Ω.

P 39 *Soient A et B deux événements.*

1. *Si A est un événement de probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si, et seulement si $P(B|A) = P(B)$.*
2. *Les évenement $\emptyset$ et Ω sont indépendants de tout autre événement.*
3. *A est indépendant de lui-même si, et seulement si il est de probabilité 0 ou 1.*
4. *Si A et B sont indépendants, alors A et B^c el sont, ainsi que A^c et B, et que A^c et B^c.*
5. *Si A est de probabilité nulle, alors A est indépendant de B.*

Si A, B, C deux à deux indépendants, a-t-on $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$?

E 40 Considérons un lancer de deux dés et les événements

- A : la somme des deux dés est paire.
- B : le premier dé est pair.
- C : le deuxième dé est pair.

Ces événements sont bien deux à deux indépendants, puisque

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}.$$

En revanche, $P(A \cap B \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ alors que $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$.

D 41 Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dit (**mutuellement**) **indépendants** si, pour tout entier $p \leq n$ et pour tout p-uplet d'indices $(i_1, \ldots, i_p)$ deux à deux distincts, on a

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_p}).$$

Plus généralement, si I est un ensemble d'indices et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** si pour toute partie *finie* $J \subset I$ non vide, on a

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

D 41 Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dit (**mutuellement**) **indépendants** si, pour tout entier $p \leq n$ et pour tout p-uplet d'indices $(i_1, \dots, i_p)$ deux à deux distincts, on a

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_p}).$$

R

- Lorsque $n = 2$, on retrouve évidemment la définition précédente. Lorsque $n = 3$, les événements A, B, C sont mutuellement indépendants si, et seulement si l'on a les quatre relations

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

- L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.

P 42 *Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille quelconque d'événement mutuellement indépendants. On considère la famille d'événement $(B_1, \dots, B_n)$ telle que*

$$B_i = A_i \quad \text{ou} \quad B_i = A_i^c.$$

Alors $(B_1, \dots, B_n)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.