CHAPITRE 34

APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION

34.1 APPLICATION LINÉAIRE EN DIMENSION FINIE

§1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Test 1

On considère la base $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$ de $E = \mathbb{R}^2$ donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On suppose donnée une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image du vecteur $v = (2, -5)^T$ par f.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ une famille de n vecteurs de F.
Alors, il existe une unique application linéaire $T : E \to F$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], T(v_j) = y_j.$$

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

§2 Caractérisation des isomorphismes par les bases

Théorème 3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire. On note $f(\mathcal{B})$ la famille*

$$\left(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\right)$$

Alors,

1. *f est un isomorphisme si, et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*
2. *f est un injective si, et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F.*
3. *f est un surjective si, et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.*

Proposition 4 *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.*

Proposition 5 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors, pour toute famille $\mathcal{S} = \left(w_1, w_2, \dots, w_p\right)$ de vecteurs de E, on a*

$$\operatorname{rg}\left(f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_p)\right) = \operatorname{rg}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right).$$

En particulier, si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right) &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1\right), \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_2\right), \dots, \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_p\right)\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right)\right).\end{aligned}$$

§3 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Théorème 6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E, F)$. On suppose* $\dim(E) = \dim(F)$. *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est bijective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est injective.*

Corollaire 7 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est bijective si, et seulement si f est surjective si, et seulement si f est injective.*

Exemple 8 On reprend l'exemple de l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

Montrer (rapidement) que T est bijective.

34.2 Rang d'une application linéaire

§1 Applications linéaires de rang fini

Définition 9 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que f est de **rang fini** lorsque l'image de f est de dimension finie. La dimension de cette image est alors appelée **rang** de f que l'on note $\mathrm{rg}(f)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right).$$

Théorème 10 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$ et que $\mathcal{B} = \left(v_1, v_2, \dots, v_n\right)$ est une base de E. Alors f est de rang fini et*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\right).$$

On a donc

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\right) \qquad \mathrm{rg}(f) \leq \dim(E) \qquad \mathrm{rg}(f) \leq \dim(F).$$

§2 Théorème du rang pour les application linéaires

Théorème 11 **Forme géométrique du théorème du rang**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit H est un supplémentaire de $\ker f$ dans E alors

$$g = f_H^{\mathrm{Im}\, f} : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im}\, f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme. C'est-à-dire que tout supplémentaire de $\ker f$ dans E est isomorphe à $\mathrm{Im}\, f$.

On dit que f induit un isomorphisme g de H sur $\mathrm{Im}\, f$.

Théorème 12 **Théorème du rang**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est de rang fini et

$$\mathrm{rg}(f) + \dim\left(\ker(f)\right) = \dim E.$$

Dans le cas où $f \in \mathbf{L}(E)$, il n'y a aucune raison de croire que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires. Par contre, si $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{ 0_E \}$, ils sont alors supplémentaires.

Corollaire 13 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors si $(b_1, \dots, b_p)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$, et, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, a_i un élément de E tel que $f(a_i) = b_i$, la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est libre et engendre un sous-espace supplémentaire de $\ker(f)$.*

Remarque Soit une matrice A de type (m, n) et $T : x \mapsto Ax$. Alors T est une application linéaire de $E = \mathbb{K}^n$ dans $F = \mathbb{K}^m$. De plus, $\ker(T) = \ker(A)$ et $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(A)$, donc $\operatorname{rg}(T) = \operatorname{rg}(A)$. Le théorème du rang affirme donc que

$$\operatorname{rg}(A) + \dim(\ker A) = n,$$

où n est la dimensions de $E = \mathbb{K}^n$, qui est égale au nombre de colonnes de A.

Test 14 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors

1. On a $\operatorname{rg}(f) \leq \dim(E)$, et $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$ si, et seulement si f est injective.
2. On a $\operatorname{rg}(f) \leq \dim(F)$, et $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$ si, et seulement si f est surjective.

En particulier, f est bijective si, et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Test 15 Existe-il une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire telle que $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$?

§3 Rang d'une composée

Proposition 16 *Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathbf{L}(E, F)$ et $g \in \mathbf{L}(F, G)$, alors*

1. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f$ *et* $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$.
2. *Si g est injective, alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
3. *Si f est surjective, alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

Corollaire 17 ♥ *Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche, ou à droite, par un isomorphisme.*

Théorème 18 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E. Soit $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors*

$$\operatorname{rg}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_1, w_2, \dots, w_p\right)\right).$$