Chapter 34 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 1 (34.0)

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - y + 2z \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire de deux manières différentes.
2. Déterminer $\ker f$ puis donner une base de $\ker f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Exercice 2 (34.0)

Soit $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + 2z, 2x - z) \end{array}$.

1. Justifier que g est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Im} g$.
3. Déterminer $\ker g$ puis donner une base de $\ker g$.

Solution 2 (34.0)

1. Montrons que g est linéaire, c'est-à-dire

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}, g(u + v) = g(u) + g(v) \text{ et } g(\alpha u) = \alpha g(u).$$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(u + v) &= g(x + x', y + y', z + z') \\ &= \left(x + x' - (y + y') + 2(z + z'), 2(x + x') - (z + z')\right) \\ &= \left(x - y + 2z + x' - y' + 2z', 2x - z + 2x' - z'\right) \\ &= (x - y + 2z, 2x - z) + \left(x' - y' + 2z', 2x' - z'\right) \\ &= g(u) + g(v) \\ \text{et } g(\alpha u) &= g\left(\alpha x, \alpha y, \alpha z\right) \\ &= (\alpha x - \alpha y + 2\alpha z, 2\alpha x - \alpha z) \\ &= \alpha\left(x - y + 2z, 2x - z\right) \\ &= \alpha g(u). \end{aligned}$$

L'application g est donc linéaire.

Variante. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{Avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 2x - z \end{pmatrix}$$

Ainsi, g est l'application linéaire canoniquemenet associée à la matrice A.

2. Soit $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On cherche $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(u) = v$.

$$g(u) = v \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y + 2z & = x' \\ 2x - z & = y' \end{array} \right. \impliedby \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ z & = -y' \\ y & = x' + 2y' \end{array} \right.$$

Ainsi $g(0, x' + 2y', -y') = (x', y')$ et $(x', y') \in \operatorname{Im} g$.

On a donc $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Im} g$ et puisque l'on a toujours $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{R}^2$, on a finalement $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

Variante Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$g(x, y, z) = x(1, 2) + y(-1, 0) + z(2, -1).$$

Ainsi, $\operatorname{Im} g$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$(1, 2) \quad (-1, 0) \quad (2, -1).$$

Les deux premiers étant linéairement indépendants, il forme une base de $\mathbb{R}^2$ (qui est de dimension 2), et donc $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

Variante $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} A$ et (à faire) $\operatorname{rg} A = 2$, d'où $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \ker g \iff g(x, y, z) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{5}{2}z. \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\ker g = \operatorname{Vect} \{ (1/2, 5/2, 1) \} = \operatorname{Vect} \{ (1, 5, 2) \}.$$

Une base de $\ker g$ étant par exemple $((1, 5, 2))$.

Exercice 3 (34.0)

Soit l'application $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y - 7z) \end{array}$.

1. Déterminer $\ker h$ puis donner une base de $\ker h$.

2. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$; en déduire une base de $\operatorname{Im} h$.

Solution 3 (34.0)

On a $\operatorname{rg} h = 2$ et

$$\ker h = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} h = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Exercice 4 (34.0)

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
2. L'image d'une famille liée par tout application linéaire est liée.

Solution 4 (34.0)
C'est du cours !

Exercice 5 (34.0)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. À tout scalaire λ, on associe le sous-ensemble V_λ de E défini par

$$V_\lambda = \{ \, x \in E \mid f(x) = \lambda x \, \} .$$

1. Que peut on dire de V_0 ?

2. Démontrer que, pour tout scalaire λ, V_λ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Démontrer que, pour tous scalaires λ, μ,

$$\lambda \neq \mu \implies V_\lambda \cap V_\mu = \left\{ \, 0_E \, \right\} .$$

4. Étant données λ et μ deux scalaires distincts, on suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls u et v appartenant respectivement à V_λ et à V_μ. Démontrer que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.

5. Plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant n scalaires deux à deux distincts, on suppose qu'il existe n vecteurs non nuls $u_1, u_2, \dots, u_n$ appartenant respectivement à $V_1, V_2, \dots, V_n$. Démontrer par récurrence que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants.

Solution 5 (34.0)

C'est un joli exercice. Au boulot!

Exercice 6 (34.0)

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$.
On suppose que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.
2. Montrer que $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$ est une base de E.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}(E)$ de base $\left(\mathrm{Id}_E, f, f^2\right)$.

Solution 6 (34.0)

1. L'application nulle de $\mathbf{L}(E)$ est l'application $0 : E \to E, x \mapsto 0_E$. Si $g : E \to E$, on a
$$g = 0 \iff \forall x \in E, g(x) = 0(x) \iff \forall x \in E, g(x) = 0_E.$$
Ainsi, en prenant la négation,
$$g \neq 0 \iff \exists x_0 \in E, g(x_0) \neq 0_E.$$
Ce qui donne le résultat lorsque $g = f^2 = f \circ f$.

2. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que
$$\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E.$$
En composant par f^2 et en utilisant la linéarité de f^2, on obtient
$$\alpha f^2(x_0) + \beta f^2(f(x_0)) + \gamma f^2(f^2(x_0)) = 0_E.$$
Puisque $f^3 = 0$, on sait que
$$f^2(f(x_0)) = f^3(x_0) = 0_E \qquad \text{et } f^2(f^2(x_0)) \qquad = f^4(x_0) = f(f^3(x_0)) = 0_E.$$
d'où $\alpha f^2(x_0) = 0_E$. Puisque $f^2(x_0) \neq 0_E$, on a $\alpha = 0$. On a donc la relation
$$\beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E.$$
En composant cette fois-ci par f, on obtient
$$\beta f^2(x_0) + \gamma f^3(x_0) = 0_E,$$
c'est-à-dire $\beta f^2(x_0) = 0_E$. Et comme $f^2(x_0) \neq 0_E$, on a $\beta = 0$. Finalement, on a $\gamma f^2(x_0) = 0_E$ et donc $\gamma = 0$.
La fammille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc une famille libre de E qui contient $3 = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.

3. On note C l'ensemble des endomorphisme de E qui commutent avec f
$$C = \{\ g \in \mathbf{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\ \}.$$
Soit $g = \alpha \mathrm{Id}_E + \beta f + \gamma f^2$, alors
$$\begin{aligned} f \circ g &= f \circ \left(\alpha \mathrm{Id}_E + \beta f + \gamma f^2\right) \\ &= \alpha f \circ \mathrm{Id}_E + \beta f \circ f + \gamma f \circ f^2 && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} g \circ f &= \left(\alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2\right) \circ f \\ &= \alpha \operatorname{Id}_E \circ f + \beta f \circ f + \gamma f^2 \circ f \\ &= \alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3 \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

Ainsi, g commute avec f. On a donc Vect $\operatorname{Id}_E, f, f^2 \subset C$.

Réciproquement, soit $g \in \mathbf{L}(E)$ commutant avec f. Puisque $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E, on peut écrire

$$g(x_0) = \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)$$

où α, β, γ sont les coordonnées de $g(x_0)$ dans cette base.

On considère maintenant l'application linéaire $h = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2$. Nous allons montrer que $g = h$. On a, trivialement, $h(x_0) = g(x_0)$. De plus, puisque g et f commutent

$$\begin{aligned} g(f(x_0)) = f(g(x_0)) &= f(\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)) \\ &= \alpha f(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f^3(x_0) \\ \text{et } \ h(f(x_0)) &= \alpha f(x_0) + \beta f(f(x_0)) + \gamma f^2(f(x_0)) \\ &= \alpha f(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f^3(x_0) \end{aligned}$$

Ainsi $g(f(x_0)) = h(f(x_0))$. De même,

$$\begin{aligned} g(f^2(x_0)) = f^2(g(x_0)) &= f^2(\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)) \\ &= \alpha f^2(x_0) + \beta f^3(x_0) + \gamma f^4(x_0) \\ \text{et } \ h(f^2(x_0)) &= \alpha f^2(x_0) + \beta f(f^2(x_0)) + \gamma f^2(f^2(x_0)) \\ &= \alpha f(x_0) + \beta f^3(x_0) + \gamma f^4(x_0) \end{aligned}$$

Donc $g(f^2(x_0)) = h(f^2(x_0))$. Les applications linéaires g et h coïncident donc sur la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$, elles sont donc égales. On a donc

$$g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2 \in \operatorname{Vect}\{\operatorname{Id}_E, f, f^2\}.$$

Conclusion

L'ensemble des applications linéaires qui commutent avec f est le sous-espace vectoriel de E

$$C = \operatorname{Vect}\{\operatorname{Id}_E, f, f^2\}.$$

On vérifie facilement que $(\operatorname{Id}_E, f, f^2)$ est libre (ce qui en fait une base de C). En effet, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$,

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2 = 0_{\mathbf{L}(E)} &\implies \left(\alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2\right)(x_0) = 0_E \\ &\implies \alpha \operatorname{Id}_E(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E \\ &\implies \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0_E \\ &\implies \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

car $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une famille libre de E.

Exercice 7 (34.0)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Démontrer que f est une homothétie.

Solution 7 (34.0)
Soit $v \in E$, $v \neq 0$. D'après l'hypothèse $(v, f(v))$ est liée et puisque $v \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$. Montrons

$$\forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Soit $x \in E$.

- Si x est colinéaire à v. Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha v$. On a donc

$$f(x) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda \alpha v = \lambda x.$$

- Si x n'est pas colinéaire à v, alors $x \neq 0_E$ et $x + v \neq 0_E$, donc il existe $\mu, \eta \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \mu x$ et $f(x+v) = \eta(x+v)$. On a donc

$$f(x+v) = \eta x + \eta v \quad f(x+v) = f(x) + f(v) = \mu x + \lambda v.$$

  Étant donnée que la famille (x, v) est libre, et que l'on a l'égalité,

$$\eta x + \eta v = \mu x + \lambda v,$$

  on obtient $\eta = \mu = \lambda$. En particulier $f(x) = \lambda x$.

Conclusion

Pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$: l'application f est une homothétie.

Exercice 8 (34.0)

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, on considère les trois formes linéaires f_1, f_2, f_3 définies par

$$
\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= -x + y + z \\
f_2(x, y, z) &= 2x - y - z \\
f_3(x, y, z) &= x + 2y + z
\end{aligned}
$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre?

Solution 8 (34.0)

Exercice 9 (34.1)

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(1,0,0,0) = (1,-1,0); \qquad f(0,1,0,0) = (-1,0,1);$$
$$f(0,0,1,0) = (1,-1,2); \qquad f(0,0,0,1) = (0,-2,3).$$

1. Rappeler brièvement pourquoi ces relations caractérisent f.

2. Déterminer $\ker f$. L'application f est-elle injective?

3. Déterminer $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective? bijective?

Solution 9 (34.1)

1. Ces relation caractérisent f car elle donne l'image d'une base de $\mathbb{R}^4$ (sa base canonique) par f. Ceci assure l'existence et l'unicité de f.

En notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x,y,z,t) = f\left(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4\right) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$$

c'est-à-dire

$$f(x,y,z,t) = (x - y + z, -x - z - 2t, y + 2z + 3t).$$

2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \ker f \iff \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ -x - z - 2t &= 0 \\ y + 2z + 3t &= 0. \end{cases}$$

La résolution de ce sytème donne,

$$(x,y,z,t) \in \ker f \iff x = -3z, y = 4z, t = -z.$$

On en déduit

$$\ker f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

L'application f n'est donc pas injective.

3. Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie et que f est linéaire, on a d'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 1 = 3.$$

On a donc $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc f est surjective et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10 (34.1)

On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$ et en déduire une expression de u comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.
2. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifie les conditions suivantes

$$f(v_1) = e_1 \qquad f(v_2) = e_2 \qquad f(v_3) = e_3,$$

   où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
3. Déterminer, si possible, le noyau de f et l'image de f.
4. Donner l'expression analytique de f (c'est-à-dire l'expression de $f(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Solution 10 (34.1)

1. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

   Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut montrer que P est inversible, par exemple en montrant que $P \underset{L}{\sim} I_n$. Puisque l'on nous demande les coordonnées de u dans la base (v_1, v_2, v_3), nous allons traiter les deux questions simultanément.

$$(P|u) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\\1 & 2 & 5 & 3\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 3 & 5 & 2\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 2 & -4\end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right).$$

   On a donc $P \underset{L}{\sim} I_3$, donc P est inversible et donc ses colonnes, (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, l'équation $Px = u$ a pour solution $(5, 4, -2)^T$, ce sont les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad u = 5v_1 + 4v_2 - 2v_3.$$

2. Puisque f est linéaire, on a

$$f(u) = f(5v_1 + 4v_2 - 2v_3) = 5f(v_1) + 4f(v_2) - 2f(v_3) = 5e1 + 4e2 - 2e3 = \begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

3. Puisque (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, l'image de f est engendrée par $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ e_1, e_2, e_3 \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Ainsi f est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^3$, or $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, donc f est bijective. On a donc $\ker f = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ (ce que l'on peut également déduire du théorème du rang).

4. La réciproque de f est l'application linéaire g telle que $g(e_1) = v_1, g(e_2) = v_2, g(e_3) = v_3$.
Ainsi, g est l'application $g : x \mapsto \boldsymbol{P}x$ et donc f est l'application $f : x \mapsto \boldsymbol{P}^{-1}x$.

Exercice 11 (34.1)

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u_1 = (1,0,1), u_2 = (-1,1,-2), u_3 = (2,1,0)$ de E.

1. Démontrer que la famille $\mathfrak{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
2. Justifier l'existence d'un unique endomorphisme f de E vérifiant
$$f(u_1) = u_1 - u_2, \qquad f(u_2) = u_3, \qquad f(u_3) = u_2 + u_3.$$
3. Déterminer l'image par f du vecteur $v = (1, -3, 5)$.

Exercice 12 (34.1)

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (z, x - y, y + z)$ est un automorphisme.

Exercice 13 (34.1) *Dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^* = \mathbf{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ le dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit
$$\begin{array}{rccc} \Psi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & M & \mapsto & \operatorname{Tr}(AM) \end{array}.$$

1. Montrer que Ψ_A est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit
$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^* \\ & A & \mapsto & \Psi_A \end{array}.$$
Montrer que Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Solution 13 (34.1)

Exercice 14 (34.2)

Déterminer une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Vérifier la cohérence avec le théorème du rang. L'application T est-elle bijective ?

Solution 14 (34.2)

Pour $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, on a

$$Tx = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

L'application T est donc l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ce qui prouve au passage que T est bien linéaire). On a alors $\ker T = \ker A$ et $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$.

De plus,

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base du noyau de T ($\ker T = \ker A$) est $\left((-1, -1, 1)^T\right)$ et $\dim \ker T = 1$. Une base de l'image de T ($\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$) est donnée par les deux première colonnes de A, c'est-à-dire

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et $\dim \operatorname{Im} T = 2$. On vérifie bien

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

L'application T n'est pas bijective car A n'est pas inversible.

On peut aussi citer le fait que T n'est pas injective car $\ker T \neq \{ 0 \}$, non surjective car $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$, etc…

Exercice 15 (34.2)

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

1. On suppose que le noyau de g est l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 = x_2 = x_3$ et que l'image de g est $\mathbb{R}^2$. Cela contredit il le théorème du rang ?

2. On suppose de plus que $g(e_1) = \epsilon_1$, $g(e_2) = \epsilon_2$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (ϵ_1, ϵ_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   Déterminer une matrice A telle que l'application g définie par $g(x) = Ax$ vérifie les conditions précédente. Donner l'expression analytique de g (c'est-à-dire l'expression de $g(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Solution 15 (34.2)

1. Si une telle application linéaire existe, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, alors

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x = y = z \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; s \in \mathbb{R} \right\},$$

   ainsi, une base de $\ker(g)$ est $\left((1, 1, 1)^T\right)$. De plus, $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{rg}(g) = 2$. On a donc bien

$$\mathrm{rg}(g) + \dim \ker(g) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

   ce qui est cohérent avec le théorème du rang (mais cela ne prouve pas l'existence de g).

2. Puisque $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la matrice A doit être de type $(2, 3)$. Puisque $g(e_1) = \epsilon_1$ et $g(e_2) = \epsilon_2$, nous savons que les deux premières colonnes de A sont donc constituée des vecteurs ϵ_1 et ϵ_2.

   Enfin, puisque $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ on a $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, où c_1, c_2, c_3 désignent les colonnes de A, ainsi $c_3 = -c_1 - c_2 = (-1, -1)^T$, donc

$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 (34.2)

Soit $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit v_1, v_2, v_3, x les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

où x_1, x_2, x_3 sont fixés dans la suite. Soit T l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$T(e_1) = v_1, \qquad T(e_2) = v_2, \qquad T(e_3) = v_3, \qquad T(e_4) = x.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation
$$\operatorname{rg}(T) = \dim\ker(T).$$
Dans ce cas, donner une base de $\operatorname{Im}(T)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation
$$\dim\ker(T) = 1.$$
Dans ce cas, donner une base de $\ker(T)$.

Solution 16 (34.2)

Il est plus simple de traiter les questions suivantes si l'on dispose de la matrice A canoniquement associée à T. Les colonnes de A sont l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$. Ceux-ci sont donnée par l'énoncé et on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -1 & x_3 \end{pmatrix}$$

On peut également obtenir une matrice échelonnée équivalente à A:

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 4 & 4 & x_3 + x_1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$$

1. D'après le théorème du rang $\operatorname{rg}(T) + \dim\ker(T) = \dim\mathbb{R}^4 = 4$. Ainsi $\operatorname{rg}(T) = \dim\ker(T)$ si, et seulement si $\operatorname{rg}(T) = \dim\ker(T) = 2$. Or, en observant la matrice échelonnée obtenue précédemment, on a
$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(T) = 2 \iff x_1 - 4x_2 + x_3 = 0.$$
Lorsque c'est le cas, une base de $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(A)$ est donnée par les colonnes de A où apparaissent les pivot dans la forme échelonnée, c'est-à-dire, les deux première colonnes. Ainsi, une base de $\operatorname{Im}(T)$ est $\big(v_1, v_2\big)$.

2. Si $\dim\ker(T) = 1$, alors $\operatorname{rg}(T) = 3$ (et donc $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$), ainsi, la forme échelonnée de A doit avoir trois pivots. Ainsi
$$\dim\ker(T) = 1 \iff x_1 - 4x_2 + x_3 \neq 0.$$
Pour obtenir une base de $\ker(T)$, pour cela, on résout l'équation $Ax = 0$. En continuant la réduction de

A (tout d'abord, on normalise le pivot de la dernière ligne en la multipliant par $1/(x_1 - 4x_2 + x_3)$), puis

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \ker(T) \iff \begin{cases} a & = -3c \\ b & = -c \\ d & = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de $\ker(T)$ est $\big((-3, -1, 1, 0)^T\big)$.

Problème 17 (34.2) *Un théorème de factorisation, Banque PT 2010*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(E, G)$.
Le but de cette partie est de montrer que

$$\ker(u) \subset \ker(v) \iff \exists w \in \mathbf{L}(F, G), v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v)$.

2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \ker(u) = n - p$ et $\dim F = r$.

(a) Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E de sorte que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\ker(u)$.
Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$?

(b) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

(c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F.
On définit alors $w \in \mathbf{L}(F, G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, si $\ker(u) \subset \ker(v)$, alors $v = w \circ u$.

Solution 17 (34.2)

Ce sujet est extrait de la Banque PT 2010 Épreuve A, Partie III. C'est un résultat de factorisation classique. Remarquons que ce résultat reste vrai en dimension infinie, et qu'il est inutile d'utiliser des bases pour le démontrer. La démarche utilisée n'est d'ailleurs pas franchement la plus jolie ou la plus rapide mais permet de tester les candidats sur les bases et la dimension finie.

1. Soit $x \in \ker u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où

$$v(x) = w \circ u(x) = w(0_F) = 0_G,$$

c'est-à-dire $x \in \ker v$.

Conclusion : $\forall x \in \ker u, x \in \ker v$, c'est-à-dire $\ker u \subset \ker v$.

2. $\ker u$ est de dimension $n - p$, il possède donc une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ (il y a bien $n - p$ vecteurs). La famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est donc une famille libre de vecteurs de E ; le théorème de la base incomplète assure l'existence de vecteurs $e_1, \dots, e_p \in E$ (il y a bien $p = n - (n - p) = \dim E - (n - p)$ vecteurs) tels que $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de E.

La formule du rang assure que l'on a $\dim E = \dim \ker u + \dim \mathrm{Im}\, u$, d'où $\dim \mathrm{Im}\, u = n - (n - p) = p$.

3. On a

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left\{ u(e_1), \dots, u(e_p), u(e_{p+1}), \dots, u(e_n) \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ f_1, \dots, f_p, 0_F, \dots, 0_F \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ f_1, \dots, f_p \right\}.$$

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ engendre donc $\mathrm{Im}\, u$ et comporte $p = \dim \mathrm{Im}\, u$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, u$.

Une autre idée... Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis on décompose x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et on constate $u(x) = u(\sum_{i=1}^p x_i f_i$ d'où $(f_1, \dots, f_p)$ engendre $\operatorname{Im} u$ et on conclut de la même manière...

Une autre idée... On montrer que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ et qu'elle a le «bon» nombre de vecteurs. Abréviativement,

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0_F \implies \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \in \ker u = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Ce qui permet de montrer que les λ_i sont tous nuls car la famille $e_1, \dots, e_n$ est libre.

4. Supposons $\ker(u) \subset \ker(v)$, on a alors pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, $v(e_i) = 0_G$. Ainsi, si $i \in [\![p+1, n]\!]$,

$$w \circ u(e_i) w(u(e_i)) = w(0_F) = 0_G = v(e_i).$$

et si $i \in [\![1, p]\!]$,

$$w \circ u(e_i) = w(f_i) = v(e_i).$$

Ainsi, les application linéaire $w \circ u$ et v coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E ; elles sont donc égales : $v = w \circ u$.

Exercice 18 (34.2)

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice fixée. Calculer, en fonction du rang de A, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ formé des matrices M telles que $MA = 0$ (donner deux solutions). Même question si M est fixée et A varie.

Solution 18 (34.2)

Exercice 19 (34.2)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathbf{L}(E, F)$.

1. Montrer que
$$\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

2. En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v)$.

3. On suppose que $E = F$, que $u \circ v = 0_{\mathbf{L}(E)}$ et que $(u+v) \in \mathbf{GL}(E)$. Montrer que
$$\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

Solution 19 (34.2)

1. Par la formule $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$, on sait que $\dim(F+G) \leqslant \dim(F)+\dim(G)$. Pour $F = \operatorname{Im} u$ et $G = \operatorname{Im} v$ on obtient : $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leq \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$. Or $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \supset \operatorname{Im}(u+v)$. Donc $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$: $\operatorname{rg}((u+v)+(-v)) \leq \operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(-v)$, or $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{rg}(u) \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$. Soit $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leq \operatorname{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v)$.

Exercice 20 (34.2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}$, u et v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \text{ et } E = \ker u + \ker v.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Solution 20 (34.2)

Exercice 21 (34.2)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme a de E et un projecteur p, tel que $u = a \circ p$.
En prenant l'exemple de la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, montrer que ce résultat peut tomber en défaut lorsque E n'est pas de dimension finie.

Exercice 22 (34.2) *Centrale MP 2015*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Pour $a \in E$, on note $\mathcal{F}_a$ l'ensemble des endomorphisme f de E tels que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x), a)$ soit liée.

1. Déterminer $\mathcal{F}_a$ lorsque $a = 0$ puis lorsque $n = 2$.

2. Montrer que $\mathcal{F}_a$ est un espace vectoriel pour tout $a \in E$.

3. Soit H un espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes v de H tels que pour tout $h \in H$, $(h, v(h))$ soit liée.

4. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}_a$.

Solution 22 (34.2)

Exercice 23 (34.2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient $H_i = \ker \phi_i$, $1 \leq i \leq 3$, trois hyperplans de E, discuter selon le rang de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Interpréter géométriquement ce résultat en dimension 3.
2. Si $H_1, \dots, H_p$ sont p hyperplans de E, montrer que
$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq n - p.$$

Solution 23 (34.2)

1. - Si $\mathrm{rg}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 1$, $\phi_2 = \lambda_2 \phi_1$ et $\phi_3 = \lambda_3 \phi_3$ (par exemple), $\dim H_1 \cap H_2 \cap H_3 = n - 1$.
   - Si $\mathrm{rg}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 2$, $\phi_3 = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ (par exemple), $\dim H_1 \cap H_2 \cap H_3 = n - 2$.
   - Si $\mathrm{rg}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 3$, On considère $\phi : x \mapsto \left(\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)\right)$. Supposons que ϕ ne soit pas surjective, alors $\mathrm{Im}\, \phi$ est inclus dans un plan d'équation $ax + by + cz = 0$, c'est-à-dire
   $$\forall x \in E, a\phi_1(x) + b\phi_2(x) + c\phi_3(x) = 0$$
   où encore, $a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3 = 0$, ce qui contredit $\mathrm{rg}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 3$. On a donc
   $$\dim\left(H_1 \cap H_2 \cap H_3\right) = \dim E - \mathrm{rg}\, \phi = n - 3.$$
2. Notons $H_i = \ker \phi_i$ où $1 \leq i \leq p$ et $\phi_1, \dots, \phi_p$ sont p formes linéaires non nulles. Comme précédement, on note ϕ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^p$ définie par
$$\phi : x \mapsto \left(\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)\right).$$
Manifestement, $\ker \phi = H_1 \cap \cdots \cap H_p$. Par conséquent, le théorème du rang fournit le résultat:
$$\dim\left(H_1 \cap \cdots \cap H_p\right) = n - \mathrm{rg}\, \phi \geq n - p.$$

Exercice 24 (34.2)

Soient $n \geq 2$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP(1) + (X^2 - 4)P(0) \end{array}.$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ainsi que leurs dimensions.

Solution 24 (34.2)

Exercice 25 (34.2)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{array}.$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Solution 25 (34.2)

Montrons que l'application ϕ est linéaire. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \phi(P+Q) &= ((P+Q)(0), (P+Q)(1), \dots, (P+Q)(n)) \\ &= (P(0)+Q(0), P(1)+Q(1), \dots, P(n)+Q(n)) \\ &= (P(0), P(1), \dots, P(n)) + (Q(0), Q(1), \dots, Q(n)) \\ &= \phi(P) + \phi(Q) \\ \text{et } \phi(\alpha P) &= ((\alpha P)(0), (\alpha P)(1), \dots, (\alpha P)(n)) \\ &= (\alpha \cdot P(0), \alpha \cdot P(1), \dots, \alpha \cdot P(n)) \\ &= \alpha\,(P(0), P(1), \dots, P(n)) \\ &= \alpha\phi(P). \end{aligned}$$

L'application ϕ est donc linéaire.

De plus,

$$P \in \ker \phi \iff P(0) = 0, P(1) = 0, \dots, P(n) = 0.$$

Un polynôme $P \in \ker \phi$ a au moins $n+1$ racines et est de degré $\leq n$, c'est donc le polynôme nul. Ainsi $\ker \phi = \{\, 0 \,\}$ et l'application linéaire ϕ est injective.

Enfin, $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1 < \infty$ et ϕ est injective, elle est donc également surjective, et *a fortiori* bijective.

Exercice 26 (34.2)

On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ & P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

2. En déduire qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(0) = 1, \qquad P'(1) = 2, \qquad P''(1) = -1, \qquad \text{et} \qquad P''(2) = 1.$$

Solution 26 (34.2)

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \phi(P+Q) &= \big((P+Q)(0), (P+Q)'(1), (P+Q)''(1), (P+Q)''(2)\big) \\ &= \big(P(0)+Q(0), P'(1)+Q'(1), P''(1)+Q''(1), P''(2)+Q''(2)\big) \\ &= \big(P(0), P'(1), P''(1), P''(2)\big) + \big(Q(0), Q'(1), Q''(1), Q''(2)\big) \\ &= \phi(P) + \phi(Q) \\ \text{et } \phi(\alpha P) &= \big(\alpha P(0), \alpha P'(1), \alpha P''(1), \alpha P''(2)\big) \\ &= \alpha \big(P(0), P'(1), P''(1), P''(2)\big) \\ &= \alpha\phi(P). \end{aligned}$$

L'application ϕ est donc linéaire.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a alors $P' = 3ax^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$, d'où

$$\begin{aligned} P \in \ker\phi \iff & P(0) = P'(1) = P''(1) = P''(2) = 0 \\ \iff & \left\{\begin{array}{rl} d & = 0 \\ 3a+2b+c & = 0 \\ 6a+2b & = 0 \\ 12a+2b & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} d & = 0 & \\ a & = 0 & (L_4 - L_3) \\ b & = 0 & \text{(substitution)} \\ c & = 0 & \text{(substitution)} \end{array}\right. \iff P = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $ker\phi = \{ 0 \}$ et l'application linéaire ϕ est injective. Or $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4 < \infty$, l'application linéaire ϕ est donc bijective.

2. L'application ϕ est bijective, c'est-à-dire

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \exists! P \in \mathbb{R}_3[X], \phi(P) = (a,b,c,d).$$

En particulier, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\phi(P) = (1, 2, -1, 1)$.

Exercice 27 (34.2)

On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $n + 1$ réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ et } P'(\alpha_i) = f'(\alpha_i).$$

Solution 27 (34.2)

Exercice 28 (34.2)

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'application définie sur E par
$$f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Calculer $f(X^p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$; montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que
$$f(P) = Q \text{ et } P(0) = P'(0) = 0.$$

Solution 28 (34.2)

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
f(P+Q)(X) &= (P+Q)\circ(X+1) + (P+Q)\circ(X-1) - 2(P+Q)\circ(X)\\
&= P\circ(X+1) + Q\circ(X+1) + P\circ(X-1) + Q\circ(X-1) - 2P\circ(X) + Q\circ(X)\\
&= P\circ(X+1) + P\circ(X-1) - 2P\circ(X) + Q\circ(X+1) + Q\circ(X-1) - 2Q\circ(X)\\
&= f(P)(X) + f(Q)(X)\\
\text{et } f(\alpha P)(X) &= (\alpha P)\circ(X+1) + (\alpha P)\circ(X-1) - 2(\alpha P)\circ(X)\\
&= \alpha(P\circ(X+1)) + \alpha(P\circ(X-1)) - 2\alpha(P\circ(X))\\
&= \alpha\left(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\right)\\
&= \alpha f(P)(X).
\end{aligned}$$
L'application f est donc linéaire.
De plus, si $\deg P \leq n$, alors
$$\deg(P(X+1)) \leq n, \quad \deg(P(X-1)) \leq n, \quad \deg(P(X)) \leq n,$$
donc $\deg\left(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\right) \leq n$ et donc f est bien à valeurs dans E.

2. Si $p \geq 2$, alors
$$\begin{aligned}
f(X^p) &= (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (1 + (-1)^{p-k}) X^k + X^p + X^p - 2X^p\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (1 + (-1)^{p-k}) X^k
\end{aligned}$$
Or si $k = p-1$, $(1 + (-1)^{p-k} = 0$. Finalement, le terme dominant de $f(X^p)$ et $2\binom{p}{p-2} X^{p-2}$ et donc $\deg f(X^p) = p-2$.

Si $p \in \{ 0, 1 \}$, on a immédiatement

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 0.$$

On remarque que si $p \in [\![0, n]\!]$, alors $\deg f(X^p) \leq n-2$ et l'on a

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} \{ f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^n) \} = \operatorname{Vect} \{ f(X^2), \dots, f(X^n) \} \subset \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

Or la famille, $\left(f(X^2), \dots, f(X^n)\right)$ est une famille de polynômes non nuls échelonés en degrés, cette famille est donc libre donc

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{card}\left(f(X^2), \dots, f(X^n)\right) = n-1$$

et puisuqe $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\dim \mathbb{R}_{n-2}[X] = n-1$, on a

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

De plus, le théorème du rang permet d'écrire

$$\dim \ker f = \dim E - \operatorname{rg} f = n+1-(n-1) = 2.$$

Or $f(1) = 0, f(X) = 0$ donc

$$\mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect} \{ 1, X \} \subset \ker f$$

et puisque $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2 = \dim \ker f$, on a finalement

$$\ker f = \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect} \{ 1, X \}.$$

3. Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Alors, il existe $P_1 \in E$ tel que $f(P_1) = Q$. Soit $P \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(P) = Q \iff f(P) = f(P_1) \iff & f(P - P_1) = 0 \\ \iff & P - P_1 \in \ker f \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, P = P_1 + \alpha X + \beta. \end{aligned}$$

Et en notant $P = P_1 + \alpha X + \beta$, on a

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0 \iff \beta = -P_1(0) \text{ et } \beta = -P_1'(0).$$

Ainsi, il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $f(P) = Q$, $P(0) = P'(0) = 0$, c'est le polynôme

$$P = P_1 - P_1'(0)X - P_1(0).$$

Exercice 29 (34.2)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On note $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

1. Montrer que E^* est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

2. On considère les trois formes linéaires sur E, définies pour tout P de E par

$$f_0(P) = P(0); \qquad f_1(P) = P(1); \qquad f_2(P) = P(2).$$

On pose par ailleurs, pour tout P de E

$$f(P) = \int_0^2 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f appartient à l'espace vectoriel engendré par $\left\{ f_0, f_1, f_2 \right\}$.

Exercice 30 (34.2)

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0), \quad k \in [\![0, n]\!].$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est un base de $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{R})$.

Solution 30 (34.2)