Chapter 36 Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 1 (36.0)

On lance deux dés équilibré à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Solution 1 (36.0)

Exercice 2 (36.0)

On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2€ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1€ pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par X. Établir la loi de X.

Solution 2 (36.0)

- $X(\Omega) = \{ 4, 2, 1, 0, -1, -2 \}$.
- $P(X = 4) = 6/91$, $P(X = 2) = 8/91$, $P(X = 1) = 32/91$, $P(X = 0) = 1/91$, $P(X = -1) = 16/91$, $P(X = -2) = 28/91$.

Exercice 3 (36.0)

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses.
On note X la variable aléatoire «nombre d'ampoules défectueuses». Déterminer la loi de X.

Solution 3 (36.0)

X suit une loi hypergéométrique (usuelle mais hors-programme).

Exercice 4 (36.0)

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une $(n \leq N)$. On étudie d'abord le cas avec remise, puis le cas sans remise.
Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Calculer $P(X \geq x)$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.

2. Calculer $P(Y \leq y)$ pour tout $y \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.

Solution 4 (36.0)

Exercice 5 (36.0)

Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire successivement et avec remise 8 boule et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
3. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^\star$) ; on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
5. On pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Solution 5 (36.0)

En cours!

Exercice 6 (36.0)

De l'autre côté du miroir[a], les lapins sont soit blancs, soit roses. La probabilité pour un lapin d'être rose est $p = 0.1$.

1. Alice rencontre deux lapins au hasard de sa promenade aléatoire. On note T le nombre de lapins roses.

   Établir la loi de probabilité de T.

2. Alice attrape sept lapins au hasard. On note X le nombre de lapins roses.

   Établir la loi de probabilité de X.

3. Alice place ces sept lapins dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de lapins roses parmi ces deux lapins.

   Établir la loi de probabilité de Y.

4. Elle installe ces deux lapins dans une cage. Sachant que si les lapins sont de sexes différents, ils auront des lapereaux blancs s'ils sont tous les deux blancs, des lapereaux roses sinon.

   Calculer la probabilité pourqu'il y ait des lapereaux roses.

[a] cf. Lewis Carroll.

Solution 6 (36.0)

1. La probabilité de rencontrer un lapin rose est constante, on répète donc deux fois un tirage de Bernoulli de paramètre $p = 0.1$, de manière indépendante. La variable aléatoire T suit la loi binomiale $B(2; 0.1)$.

2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(7; 0.1)$.

3. Le chapeau contient sept lapins mutuellement indépendants. Ils ont chacun la probabilité 0.1 d'être rose. La variable aléatoire Y suit la loi binomiale $B\,(2; 0.1)$.

4. Le sexe est indépendant de la couleur. Comme un lapin a une chance sur deux d'être une lapine, la probabilité pour qu'ils soient de sexes opposés est 0.5. La probabilité pour qu'il soient blancs tous les deux est $P(Y = 0)$. La probabilité p pour qu'il y ait des lapereaux roses est donc

$$p = 0.5 \times \left(1 - (0.9)^2\right) = 0.095.$$

Exercice 7 (36.0)

On retapisse la flopée de louchébems aux layoncrems qu'ils se carrent sur chaque loche. La proba de larguer un layoncrem est la même pour chaque loche. On dégauchit m_2 louchébems qui ont encore deux layoncrems à leur loches et m_1 qui en ont paumé un.
Soit $p = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, coller une estimation de la proportion de louchébems qui ont paumé leurs deux layoncrems.

Solution 7 (36.0)
Les deux événements

- D : «perdre le crayon droit»
- G : «perdre le crayon gauche»

sont indépendants et ont la même probabilité q. Soit X le nombre de crayons perdus par un boucher.
X suit la loi binomiale $B(2; q)$.

$$P_{\{X \geq 1\}}(X = 1) = \frac{P(X = 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{2q(1-q)}{(1-q)^2 + 2q(1-q)} = \frac{2q}{1+q}.$$

En assimilant la proportion p de bouchers qui ont un seul crayon parmi ceux qui en ont au moins un à $P_{\{X\geq 1\}}(X = 1)$, on obtient

$$p \approx \frac{2q}{1+q} \quad \text{d'où} \quad q \approx \frac{p}{2-p}.$$

Comme $P(X = 2) = q^2$, on peut prendre comme estimation de la proportion f de bouchers qui ont perdu leurs deux crayons

$$f \approx \left(\frac{p}{2-p}\right)^2.$$

Exercice 8 (36.0)

On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0.5 ?
3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0.4 et 0.6 (bornes incluses) ?
4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0.5 - \frac{a}{10}, 0.5 + \frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%.
5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

Solution 8 (36.0)

1. $X = Y/10$ où $Y \sim B(10, 1/2)$.
2. $P(X > 0,5) = P(Y > 5) = P(Y \in \{ 6, 7, 8, 9, 10 \}) \approx 0,377$.
3. $P(0,4 \leq X \leq 0,6) = P(4 \leq Y \leq 6) = P(Y \in \{ 4, 5, 6 \}) \approx 0,656$
4. $P(3 \leq Y \leq 7) \approx 0,891$. $P(2 \leq Y \leq 8) \approx 0,978$. Donc $a = 3$.
5. Oui. Non.

Moments d'une variable aléatoire finie

Exercice 9 (36.0)

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités respective $0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2$.
Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$.
Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \qquad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \qquad P(Y = 3) = P(Y = 4).$$

Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Solution 9 (36.0)

1. Loi de X

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2

$$E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 3.7 \qquad E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 16.3 \qquad \text{donc} \quad V(X) = 16.3 - 3.7^2 = 2.61.$$

2. Loi de Y

y_i	1	2	3	4
p_i	a	b	c	d

On sait que $P(Y < 5) = \frac{1}{3}$ donc $a + b = \frac{1}{3}$, $P(Y > 5) = \frac{1}{2}$ donc $d = \frac{1}{2}$, $P(Y = 3) = P(Y = 4)$ donc $a = b$. Enfin $a + b + c + d = 1$ car $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.
On en déduit $a = b = \frac{1}{6}$, $d = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$ et la loi de Y

y_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Donc $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i = 5$.
$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 p_i = \frac{158}{6}$ donc $V(Y) = \frac{158}{6} - 5^2 = \frac{4}{3}$.

Exercice 10 (36.0)

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire réelle associée au lancer de dé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$
3. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Solution 10 (36.0)

1. X prend les valeurs $k \in [\![1,6]\!]$. Si $p = P(X=1)$, on a $P(X=k) = kp$ pour tout $k \in [\![1,6]\!]$. On doit avoir $\sum_{k=1}^{6} P(X=k) = 1$, donc
$$\sum_{k=1}^{6} kp = p\frac{6\times 7}{2} = 1.$$
Donc $p = 1/21$ et la loi de X est donnée par el tableau suivant

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2. $E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k)$, donc
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{k}{21} = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{21}\frac{6\times 7\times 13}{6} = \frac{13}{3}.$$

3. Y prend les valeurs $\frac{1}{k}$, $k \in [\![1,6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X=k)$. Donc la loi de Y est donnée par le tableau

y_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$P(X=y_k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On a donc
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1} \frac{1}{k}\frac{k}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Remarque. On peut retrouver le résultat à l'aide de la formule de transfert:
$$E(Y) = \sum_{k\in X(\Omega)} \frac{1}{k}P(X=k).$$

Exercice 11 (36.0)

Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc quinze dromadaires, dix chameaux et cinq lamas.
Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés au hasard.
Sachant que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses photographiées.
Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Solution 11 (36.0)

L'ensemble Ω des éventualités est l'ensemble des combinaisons de 3 animaux pris parmi 30 animaux:

$$\operatorname{card}(\Omega) = \binom{30}{3} = 4060.$$

C'est une situation d'équiprobabilité. On note $p = 1/4060$.

- $(X = 0)$ est l'événement «le visiteur photographie 3 lamas»,
$$P(X = 0) = \binom{5}{3} \times p = \frac{10}{4060}.$$
- $(X = 1)$ est l'événement «le visiteur photographie 1 dromadaire et 2 lamas»,
$$P(X = 1) = \binom{15}{1}\binom{5}{2} \times p = \frac{150}{4060}.$$
- $(X = 2)$ est l'*union disjointe* des événements «le visiteur photographie 1 chameau et 2 lamas» et «le visiteur photographie 2 dromadaires et 1 lama»,
$$P(X = 2) = \left(\binom{10}{1}\binom{5}{2} + \binom{15}{2}\binom{5}{1}\right) \times p = \frac{625}{4060}.$$
- $(X = 3)$ est l'*union disjointe* des événements «le visiteur photographie 1 chameau, 1 dromadaire et 1 lamas» et «le visiteur photographie 3 dromadaires»,
$$P(X = 3) = \left(\binom{10}{1}\binom{15}{1}\binom{5}{1} + \binom{15}{3}\right) \times p = \frac{1205}{4060}.$$
- $(X = 4)$ est l'*union disjointe* des événements «le visiteur photographie 2 chameaux et 1 lamas» et «le visiteur photographie 1 chameau et 2 dromadaires»,
$$P(X = 4) = \left(\binom{10}{2}\binom{5}{1} + \binom{10}{1}\binom{15}{2}\right) \times p = \frac{1275}{4060}.$$
- $(X = 5)$ est l'événement «le visiteur photographie 2 chameaux et 1 lama»,
$$P(X = 5) = \binom{10}{2}\binom{15}{1} \times p = \frac{675}{4060}.$$
- $(X = 6)$ est l'événement «le visiteur photographie 3 chameaux»,
$$P(X = 6) = \binom{10}{3} \times p = \frac{120}{4060}.$$

On en déduit

$$E(X) = 3.5 \qquad E(X^2) = \frac{5509}{406} \qquad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1071}{812} \approx 1.32.$$

Exercice 12 (36.0)

Marguerite élève huit poules, dont une ne possédant qu'une patte, et six canes. Son panier contient un œuf de chacune de ses pensionnaires. Elle en prend quatre au hasard pour faire une omelette avec les trois cèpes qu'elle a ramassés au lever du soleil. Soit X le nombre de pattes des poules impliquées dans la production des œufs de l'omelette.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Solution 12 (36.0)

Exercice 13 (36.0)

Dans le restaurant de Marco, on sert le café accompagné de deux sucres. La moitié des clients boivent leur café sans sucre, un tiers y plongent un seul sucre et les autres deux. À la table numéro 7, les trois clients ont commandé un café chacun.
Soit X le nombre de sucres consommés à cette table.
Établir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution 13 (36.0)

Exercice 14 (36.0)

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Solution 14 (36.0)

1. Déterminons la loi de X. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Notons, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, B_k l'événement «on obtient la boule blanche au k-ème tirage».

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$(X = i) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i.$$

Par la formule des probabilités composées, on obtient

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \dots P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \cap \cdots \cap \overline{B_{i-2}}(\overline{B_{i-1}}) P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}}}(B_i) \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n-i+1}{n-i+2} \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], P(X = i) = \frac{1}{n}.$$

Remarque. $\sum_{i=1}^{n} P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$

La loi de X est uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

2. (Question de cours) On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} i P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}. \\ E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2 P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\ \text{donc } V(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 15 (36.0)

Andy est un ivrogne. Quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même. Quand il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. Il est licencié du chantier naval et le soir même il rendre ivre chez lui. Il reste au chômage pendant n jours. On note X le nombre de jours de sobriété de cette période.
Calculer $E(X)$.

Solution 15 (36.0)

Exercice 16 (36.0)

Ingmar a bricolé un ordinateur avec un processeur 4 bits récupéré sur le système de navigation d'un sous-marin soviétique échoué dans un fjord. Son ami Blaise y a adapté un compilateur Pascal. Dans son premier programme, il déclare une variable I, codée sur 4 bits, à laquelle il n'affecte pas de valeur. Chaque bits se trouve ainsi dans un état aléatoire: 0 avec la probabilité p et 1 avec la probabilité $1 - p$. On note K la variable aléatoire égale à la valeur de I, en considérant I comme un nombre entier exprimé dans la base 2.

1. Établir la loi de K. Calculer $E(K)$ et $V(K)$.

2. Calculer la probabilité d'avoir un nombre pair.

3. Calculer la probabilité d'avoir un palindrome en base deux.

Solution 16 (36.0)

Exercice 17 (36.0)

On fixe un entier naturel non nul n.
Une urne contient une unique boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.
On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc… On ajoute donc $k + 1$ boules noires lors de la k-ième obtention de pile.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre *total* de boules dans l'urne la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X.

2. Quelle est la loi de X ?

3. En déduire, presque sans calcul, l'espérance de N.

On tire une boule de l'urne et on pose B : «la boule tirée est blanche.».

4. Démontrer rigoureusement que $P(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5. Calculer cette somme.

On change la règle : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du k-ème pile, c'est-à-dire une boule au premier pile, deux au deuxième, quatre au troisième, etc… en doublant à chaque fois le nombre de boules noires *ajoutées*.
On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne.

6. Exprimer N' en fonction de X.

7. Calculer $E(N')$.

8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : «la boule tirée est blanche».

Solution 17 (36.0)

Exercice 18 (36.0)

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons $n \in \mathbb{N}^\star$. On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S.

2. On suppose $\beta = 1/\alpha$. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$?

3. On suppose que $\alpha = 1 + h$ et $\beta = 1 - h$ pour $h \in]0, 1[$ donné. Quelle doit-être la valeur de p pour que $E(S) = 1$? Que vaut alors $V(S)$?

Solution 18 (36.0)