Chapter 24 Espaces vectoriels

Exercice 1 (24.1)

On considère dans $\mathbb{K}^3$ les vecteurs

$$u = (1, 0, 0); \qquad v = (1, 1, 0); \qquad w = (1, 1, 1); \qquad g = (\alpha, \beta, \gamma).$$

où α, β, γ sont des scalaires quelconques.

1. g est-il combinaison linéaire de u, v, w ?
2. g est-il combinaison linéaire de v et de w ?

Solution 1 (24.1)

Exercice 2 (24.1)

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $x = (7, \alpha, -6) \in \mathbb{R}^3$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $a = (2, -1, 3)$ et $b = (1, 3, 7)$.

Solution 2 (24.1)

Le vecteur x est combinaison linéaire de a et b si, et seulement si il existe deux scalaires $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $x = sa + tb$. Or

$$\begin{aligned}
\exists s, t \in \mathbb{R} x = sa + tb &\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 7 \\ \alpha \\ -6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2s + t &= 7 \\ -s + 3t &= \alpha \\ 3s + 7t &= -6 \end{cases} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2s + t &= 7 \\ 3s + 7t &= -6 \\ -s + 3t &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2s + t &= 7 \\ 11t &= -33 \\ -s + 3t &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \exists s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} s &= 5 \\ t &= -3 \\ -s + 3t &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \alpha = -5 - 9 = -14.
\end{aligned}$$

Conclusion

Le vecteur $x = (7, \alpha, -6)$ est combinaison linéaire de $a = (2, -1, 3)$ et $b = (1, 3, 7)$ si, et seulement si $\alpha = -14$.

Exercice 3 (24.1)

Montrer que le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, défini par $Q(X) = 7X^3 - 5X^2 + 11$ est combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 définis par

$$P_1(X) = X^3 + X^2 + X + 1 \qquad P_2(X) = X^2 + X + 1 \qquad P_3(X) = X + 1 \qquad P_4(X) = 1$$

Solution 3 (24.1)
Pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 = Q \\
\iff &\alpha X^3 + (\alpha + \beta)X^2 + (\alpha + \beta + \gamma)X + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 7X^3 - 5X^2 + 11 \\
\iff &\left\{ \begin{array}{rl} \alpha & = 7 \\ \alpha + \beta & = -5 \\ \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta & = 11 \end{array} \right. \\
\iff &\alpha = 7 \text{ et } \beta = -12 \text{ et } \gamma = 5 \text{ et } \delta = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion

Le polynôme Q est combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3, P_4 car on a

$$Q = 7P_1 - 12P_2 + 5P_3 + P_4.$$

Exercice 4 (24.2)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = y = 3x \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z + y = 3x \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; zy = 3x \right\}, \qquad S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}.$$

Donner une démonstration ou un contre-exemple pour justifier votre réponse.

Solution 4 (24.2)

1. *Avec la définition / caractérisation.*

S_1 est un sous-espace vectoriel de E. En effet, on a bien $0_E = (0,0,0)^T \in S_1$ (car $0 = 0 = 3 \cdot 0$).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z)^T, v = (x', y', z')^T \in S_1$, on a

$$\begin{aligned} z = y = 3x && (1) \\ z' = y' = 3x' && (2) \\ && (3) \end{aligned}$$

$$u + v = (x + x', y + y', z + z')^T \text{ et } (z + z') = (y + y') = 3x + 3x' = 3(x + x').$$

Donc $u + v \in S_1$. De même,

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)^T \text{ et } \alpha z = \alpha y = \alpha(3x) = 3(\alpha x).$$

donc $\alpha u \in S_1$.

Conclusion

S_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode. En remarquant que

$$z = y = 3x \iff 3x - y = 0 \text{ et } y - z = 0.$$

On a donc $S_1 = \ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. S_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3ème méthode. *En écrivant S_1 sous la forme* Vect $\{ \dots \}$

Soit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 3x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi S_1 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 3, 3)^T$; c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. *Avec la définition / caractérisation.*

On a

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z + y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; 3x - y - z = 0 \right\}.$$

On a bien $0_E = (0,0,0)^T \in S_2$ (car $3 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z)^T$, $v = (x', y', z')^T \in S_2$, on a

$$3x - y - z = 0 \;\text{ et }\; 3x' - y' - z' = 0. \tag{4}$$

Or

$$u+v = (x+x', y+y', z+z')^T \;\text{ et }\; 3(x+x')-(y+y')-(z+z') = (3x-y-z)+(3x'-y'-z') = 0+0 = 0.$$

Donc $u + v \in S_2$. De même,

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)^T \;\text{ et }\; 3(\alpha x) - (\alpha y) - (\alpha z) = \alpha(3x - y - z) = \alpha 0 = 0.$$

Donc $\alpha u \in S_2$.

Conclusion

S_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode. S_2 est le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2ème méthode bis. On peut remarquer que S_2 est un plan passant par l'origine, c'est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4ème méthode. On écrit S_2 comme $\operatorname{Vect}\{ (1,0,3)^T, (0,1,-1)^T \}$.

3. L'ensemble S_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_3, \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \notin S_3$$

puisque ce dernier vecteur ne vérifie par la condition $zy = 3x$.

4. L'ensemble S_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par exemple $(1,1,0)^T \in S_4$, $(0,0,1)^T \in S_4$ leur somme $(1,1,1)^T \notin S_4$.

Géométriquement, S_4 est l'union du plan (Oxy) (d'équation $z = 0$), du plan (Oxz) (d'équation $y = 0$) et du plan (Oyz) (d'équation $x = 0$.

Exercice 5 (24.2)

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^5$ suivants

$$F = \left\{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x + y = z + t + w \right\}$$
$$\text{et } G = \left\{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x = y \text{ et } z = t = w \right\}.$$

Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis déterminer $F \cap G$.

Exercice 6 (24.2)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \left\{ (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ (x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0 \}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 7 (24.2)

Soit A une matrice (n, n) et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire fixé. Montrer que l'ensemble

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Solution 7 (24.2)

$0_{\mathbb{R}^n} \in S$ car $A0 = 0 = \lambda 0$.

Soit $x, y \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y);$$

donc $x + y \in S$. De plus,

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x);$$

ce qui prouve que $\alpha x \in S$.

Conclusion

S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2ème méthode. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} x \in S &\iff Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0 \\ &\iff Ax - \lambda I_n x = 0 \iff (A - \lambda I_n)x = 0 \iff x \in \ker\left(A - \lambda I_n\right). \end{aligned}$$

L'ensemble S est donc le noyau de la matrice $A - \lambda I_n$; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8 (24.2)

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *symétrique* lorsque $A^T = A$.
Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

2. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Solution 8 (24.2)

1. La matrice nulle $(3,3)$, notée 0_3 est symétrique: $0_3^T = 0_3$. Soit $A, B \in \mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \text{ et } (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A.$$

On a donc $A + B \in \mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha A \in \mathscr{S}_3(\mathbb{K})$.

Conclusion

L'ensemble $\mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

2. La matrice nulle $(3,3)$, notée 0_3 est antisymétrique: $0_3^T = 0_3 = -0_3$. Soit $A, B \in \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$(A+B)^T = A^T + B^T = (-A) + (-B) = -(A+B) \text{ et } (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -(\alpha A).$$

On a donc $A + B \in \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ et $\alpha A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$.

Conclusion

L'ensemble $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Exercice 9 (24.2)

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

1. $A = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P(1) \}$.
2. $B = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, (X^2 + 1) \text{ divise } P \right\}$.
3. $C = \left\{ a(X^3 - 3) + b(X^2 - 2) \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

Solution 9 (24.2)

Exercice 10 (24.2)

Soit $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication externe usuelle (point par point).

1. Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des sous-espace vectoriel de F?

$$S_1 = \{ f \in F \mid f(0) = 1 \}, \qquad S_2 = \{ f \in F \mid f(1) = 0 \}.$$

2. Montrer que l'ensemble

$$S_3 = \left\{ f \in F \;\middle|\; f \text{ est dérivable et } f' - f = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de F.

Solution 10 (24.2)

Le vecteur nul de $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la fonction $\tilde{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$.

1. S_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de F. Pour le montrer, il suffit d'utiliser *un seul* des arguments suivants:
   - Puisque $\tilde{0}(0) = 0 \neq 1$, alors $\tilde{0} \notin S_1$: S_1 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de F.
   - On a $\exp \in S_1$ et $\cos \in S_1$ et pourtant $(\exp + \cos)(0) = 1 + 1 = 2 \neq 1$, donc $\exp + \cos \notin S_1$. S_1 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de F.
   - On a $\exp \in S_1$ mais $2\exp \notin S_1$. S_1 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de F.

⋆ On a $\tilde{0}(1) = 0$ donc $\tilde{0} \in S_2$. De plus, si $f, g \in S_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0;$$

donc $f + g \in S_2$. De plus,

$$(\alpha f)(1) = \alpha(f(1)) = \alpha \cdot 0 = 0;$$

donc $\alpha f \in S_2$.

Conclusion

L'espace S_2 est un sous-espace vectoriel de F.

2. La fonction nulle $\tilde{0}$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{0}'(x) - \tilde{0}(x) = 0 - 0 = 0;$$

donc $\tilde{0} \in S_3$. Soit $f, g \in S_3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $f + g$ est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(f + g)'(x) - (f + g)(x) = f'(x) + g'(x) - f(x) - g(x) = f'(x) - f(x) + g'(x) - g(x) = 0 + 0 = 0;$$

donc $f + g \in S_3$. Deplus,

$$(\alpha f)'(x) - (\alpha f)(x) = \alpha f'(x) - \alpha f(x) = \alpha \left(f'(x) - f(x) \right) = \alpha \cdot 0 = 0;$$

donc $\alpha f \in S_3$.

Conclusion

L'espace S_3 est un sous-espace vectoriel de F.

2ème méthode Les solutions de l'équation différentielle $f' - f = 0$ sont les application de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x \end{array} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit,

$$S_3 = \{ \lambda \exp \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect} \{ \exp \} .$$

S_3 est donc la droite vectorielle engendré par la fonction exp : c'est donc un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 11 (24.2)

Soit U et V deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

3. Donner un exemple de sous-espace U et V de $\mathbb{R}^3$ qui illustre le fait que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel, mais que $U \cup V$ ne l'est pas.

Solution 11 (24.2)

1. U et V sont des sous-espace vectoriel de E, donc

$$0_E \in U \text{ et } 0_E \in V,$$

c'est-à-dire $0_E \in U \cap V$. Soit $x, y \in U \cap V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Puisque U est un sous-espace vectoriel de E, il est stable par combinaison linéaire. On a donc $\alpha x + \beta y \in U$.

De même V est un sous-espace vectoriel de E, donc $\alpha x + \beta y \in V$. Finalement

$$\alpha x + \beta y \in U \text{ et } \alpha x + \beta y \in V,$$

c'est-à-dire $\alpha x + \beta y \in U \cap V$.

Conclusion

$U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si $U \subset V$, alors $U \cup V = V$ est un sous-espace vectoriel de E. De même si $V \subset U$, alors $U \cup V = U$ est un sous-espace vectoriel de E.

Réciproquement, on suppose que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Supposons que $U \not\subset V$, nous allons alors montrer que $V \subset U$. Puisque $U \not\subset V$, il existe un vecteur x tel que

$$x \in U \text{ et } x \notin V.$$

Soit $y \in V$. Alors $x, y \in U \cup V$ et puisque $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $x + y \in U \cup V$.

- Premier cas : si $x + y \in U$.
  Puisque $x \in U$ et que U est un sous-espace vectoriel de E, on a $y = (x + y) - (x) \in U$.
- Deuxième cas : si $x + y \in V$.
  Puisque V est un sous-espace vectoriel de E, on a $x = (x + y) - (y) \in V$, ce qui est faux.

Finalement, on a$y \in U$. Nous avons donc montré $V \subset U$.

Conclusion

$U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

3. Par exemple $U = \left\{ (x, y, z)^T \mid z = 0 \right\}$ et $V = \left\{ (x, y, z)^T \mid x = 0 \right\}$.

Exercice 12 (24.2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espace vectoriel de E, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n \subset F_{n+1}.$$

Montrer que $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Solution 12 (24.2)

Exercice 13 (24.2)

Montrer que

$$F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (A, \phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x + \phi) \right\}.$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution 13 (24.2)

Nous allons montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

L'application nulle $\tilde{0}$ appartient clairement à F car $\tilde{0} = 0\cos$ (prendre $A = 0$ et $\phi = 0$).

Soit $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $A, B, \phi, \psi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x + \phi) \text{ et } g(x) = B\cos(x + \psi).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda A\cos(x + \phi) + \mu B\cos(x + \psi)\\ &= (\lambda A\cos\phi + \mu B\cos\psi)\cos x - (\lambda A\sin\phi + \mu B\sin\psi)\sin x\\ &= A'\cos x + B'\sin x\end{aligned}$$

où l'on a posé $A' = \lambda A\cos\phi + \mu B\cos\psi$ et $B' = \lambda A\sin\phi + \mu B\sin\psi$. Si $A' = B' = 0$, alors $\lambda f + \mu g = \tilde{0} \in F$. Sinon, l'égalité

$$\left(\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right)^2 + \left(\frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right)^2 = 1$$

assure l'existence d'un réel α tel que

$$\cos\alpha = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)(x) &= \sqrt{A'^2 + B'^2}\,(\cos\alpha\cos(x) - \sin\alpha\sin(x))\\ &= \sqrt{A'^2 + B'^2}\cos(x + \alpha).\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda f + \mu g \in F$.

Exercice 14 (24.2)

Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice $(2,2)$ à coefficients réels.
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution 14 (24.2)

Exercice 15 (24.2)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- en utilisant la définition (ou caractérisation) d'un sous-espace vectoriel ;
- en les décrivant comme le noyau d'une matrice ou comme l'image d'une matrice.

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y - z = 0 \right\}.$

2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ s+t \end{pmatrix} \,\middle|\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}.$

4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y - 2z = 0 \right\} \bigcap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x - y - z = 0 \right\}.$

5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$

Solution 15 (24.2)

Solution partielle.

On détaille la forme forme $\operatorname{Im}(M) = \operatorname{Vect}\left(v_1, \dots, v_k\right)$.

Pour l'utilisation de la définition, voir l'exercice ???...

1. Avec la défintion...

V2 On a $F_1 = \ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

V3 Pour $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 \iff x + y - z = 0 \iff x = -y + z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F_1 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Im}(M) \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a également $F_1 = \ker A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On a directement,

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ s+t \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Im}(M)$$

avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. On a $F_3 = \ker B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

V2 Pour $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, on a,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_3 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x-y+z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x-y+z & = 0 \\ 2y-2z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $F_3 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et donc F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut remarquer que F_3 est une droite vectorielle.

4. Pour $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_4 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x-y-2z & = 0 \\ 3x-y-z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x-y-2z & = 0 \\ 2y+5z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -\frac{1}{2}z \\ y & = -\frac{5}{2}z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Finalement, $F_4 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut remarquer que F_4 est une droite vectorielle.

2è méth. On remarque que F_4 est le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; et on a

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Et on a donc, pour $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker A \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t/2 \\ -5t/2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve $F_4 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5. On a directement

$$F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi F_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut remarquer que F_5 est une droite vectorielle.

Exercice 16 (24.2)

1. Écrire, si possible, le vecteur $v = (1, 1, -3) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$u_1 = (-3, 1, 2), \quad u_2 = (4, -2, 1), \quad u_3 = (-5, 1, 7).$$

2. Montrer que $\operatorname{Vect}\left\{ u_3 \right\} \subset \operatorname{Vect}\left\{ u_1, u_2 \right\}$ mais que ces deux sous-espaces vectoriels ne sont pas égaux.

Solution 16 (24.2)

1. Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = v \iff \left\{ \begin{aligned} -3\alpha + 4\beta - 5\gamma &= 1 \\ \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ 2\alpha + \beta + 7\gamma &= -3 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ -3\alpha + 4\beta - 5\gamma &= 1 \\ 2\alpha + \beta + 7\gamma &= -3 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ -2\beta - 2\gamma &= 4 \\ 5\beta + 5\gamma &= -5 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ \beta + \gamma &= -2 \\ 0 &= 5 \end{aligned} \right.$$

Ce dernier système n'étant pas compatible, le vecteur v n'est pas combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3.

2. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = u_3 \iff \left\{ \begin{aligned} -3\alpha + 4\beta &= -5 \\ \alpha - 2\beta &= 1 \\ 2\alpha + \beta &= 7 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} -2\beta &= -2 \\ \alpha - 2\beta &= 1 \\ 5\beta &= 5 \end{aligned} \right. \iff \beta = 1 \text{ et } \alpha = 3.$$

Ainsi $u_3 = 3u_1 + u_2 \in \operatorname{Vect}\left\{ u_1, u_2 \right\}$. Puisque $\operatorname{Vect}\left\{ u_1, u_2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a alors

$$\operatorname{Vect}\{ u_3 \} \subset \operatorname{Vect}\{ u_1, u_2 \}.$$

L'inclusion est stricte puisque, par exemple, $u_1 \in \operatorname{Vect}\{ u_1, u_2 \}$ et n'est pas colinéaire à u_3, c'est-à-dire $u_1 \notin \operatorname{Vect}\{ u_3 \}$.

Exercice 17 (24.2)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u = (1,2,3), \qquad v = (2,-1,1), \qquad a = (1,0,1) \qquad \text{et} \qquad b = (0,1,1).$$

Démontrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(a,b)$.

Solution 17 (24.2)

Montrons que $\mathrm{Vect}(a,b) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$. Le vecteur a est combinaison linéaire de u et v puisque

$$a = \alpha u + \beta v \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ 2\alpha - \beta &= 0 \\ 3\alpha + \beta &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ \quad -5\beta &= -2 \\ \quad -5\beta &= -2 \end{cases}$$

D'où l'on déduit $a = \frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v$. Mutatis mutandis,

$$b = \alpha u + \beta v \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 2\alpha - \beta &= 1 \\ 3\alpha + \beta &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta &= 0 \\ \quad -5\beta &= 1 \\ \quad -5\beta &= 1 \end{cases}$$

et l'on a $b = \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v$. Ainsi, $\{ a, b \} \subset \mathrm{Vect}\,\{ u, v \}$; et comme $\mathrm{Vect}(a,b)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant a et b et que $\mathrm{Vect}(u,v)$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on a bien $\mathrm{Vect}(a,b) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.

Réciproquement, on trouve rapidement (les zéros aidant)

$$a + 2b = (1,0,1) + (0,2,2) = (1,2,3) = u \;\text{ et }\; 2a - b = (2,0,2) - (0,1,1) = (2,-1,1) = v.$$

Ainsi $\{ u, v \} \subset \mathrm{Vect}(a,b)$ et donc $\mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathrm{Vect}(a,b)$.

Conclusion

Par double inclusion, $\mathrm{Vect}(a,b) = \mathrm{Vect}(u,v)$.

Exercice 18 (24.2)

1. Écrire, si possible, le vecteur $v = (5, 1, 6) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$u_1 = (0, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3), \quad u_3 = (2, -1, 3).$$

2. Montrer que $\operatorname{Vect}\left\{ v, u_1, u_3 \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ u_1, u_2, u_3 \right\}$.

Solution 18 (24.2)

Exercice 19 (24.2)

On considère les vecteur suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est combinaison linéaire de v_1 et v_2 et expliciter cette combinaison linéaire. Montrer que w n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.
2. Comparer les quatres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\operatorname{Vect}\{\, v_1, v_2 \,\} \qquad \operatorname{Vect}\{\, v_1, v_2, u \,\} \qquad \operatorname{Vect}\{\, v_1, v_2, w \,\} \qquad \mathbb{R}^3.$$

3. En déduire que $\operatorname{Vect}\{\, v_1, v_2, u, w \,\} = \mathbb{R}^3$.
4. Montrer également que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ peut être exprimer comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w d'une infinité de manières différentes.

Solution 19 (24.2)

1. Le vecteur u est combinaison linéaire de v_1 et v_2 s'il existe des scalaire α, β tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$. Or

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha + \beta &= -1 \\ 2\beta &= 2 \\ \alpha + 3\beta &= 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha + \beta &= -1 \\ \beta &= 1 \\ 4\beta &= 4 \end{cases} \iff \beta = 1 \text{ et } \alpha = 2.$$

Ce système admet donc pour solution $(\alpha, \beta) = (2, 1)$: il est compatible. Ainsi, u est combinaison linéaire de v_1 et v_2. On peut d'ailleurs vérifier

$$2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De manière analogue, pour w,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha + \beta &= 1 \\ 2\beta &= 2 \\ \alpha + 3\beta &= 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha + \beta &= 1 \\ \beta &= 1 \\ 4\beta &= 6 \end{cases} \implies \beta = 1 \text{ et } \beta = 3/2.$$

Ce système est donc incompatible : w n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Variante. Le même raisonnement pour u, mais en écrivant le système $\alpha v_1 + \beta v_2 = u$ matriciellement:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système $\alpha v_1 + \beta v_2 = u$ est donc compatible : u est combinaison linéaire de v_1 et v_2.

2. Puisque $u = 2v_1 + v_2$, $u \in \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$ et donc $\{ v_1, v_2, u \} \subset \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$. Puisque $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, u \}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant v_1, v_2, u et que $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$ est un sous-espace vectoriel, on a $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, u \} \subset \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$.

On aurait également pu remarquer que tout vecteur $x = av_1 + bv_2 + cu$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 en substituant $2v_1 + v_2$ à u.

Réciproquement, on a trivialement $\{ v_1, v_2 \} \subset \operatorname{Vect}\left\{ u, v_1, v_2 \right\}$ et par un argument analogue au précédent, on a $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \} \subset \operatorname{Vect}\{ u, v_1, v_2 \}$.

Ainsi, par double inclusion, $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \} = \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, u \}$.

Géométriquement, $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$ est le sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires ne $\mathbb{R}^3$: c'est un plan de $\mathbb{R}^3$.

De plus, $w \notin \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$, donc le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, w \}$ est plus grand (au sens de l'inclusion) que le plan $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2 \}$. Nous allons montrer que c'est $\mathbb{R}^3$. L'inclusion $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, w \}$ est triviale. Ainsi, pour montrer que $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, w \} = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que tout vecteur $b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire, $b = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma w$.

La matrice augmentée de ce système d'inconnues α, β, γ est

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_2 \\ 1 & 3 & 5 & b_3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & 6 & b_1 + b_3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 2 & b_1 + b_3 - 2b_2 \end{array}\right)$$

Ce système est toujours compatible. Ainsi $\operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, w \} = \mathbb{R}^3$.

3. D'après la question précédente, on sait que $\{ v_1, v_2, w \}$ engendre $\mathbb{R}^3$, et donc, *a fortiori*, $\{ v_1, v_2, u, w \}$ également.

4. Nous allons montrer directement que $\{ v_1, v_2, u, w \}$ engendre $\mathbb{R}^3$ et que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ s'écrit d'un infinité de façons comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w.

Cela revient à dire que l'équation $b = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma u + \delta w$ admet une infinité de solution. Si B désigne la matrice obtenue avec ces quatres vecteurs comme colonnes, on a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisqu'il y a un pivot sur chaque ligne, le système $Bx = b$ est toujours compatible, ainsi, tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w. De plus, les solutions de ce système s'écrivent avec une variable libre (correspondant à la troisième colonne), ainsi, il y a une infinité de solutions au système $Bx = b$.

Exercice 20 (24.2)

Soit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Expliquer la différence entre les ensembles

$$A = \{ v, w \} \qquad \text{et} \qquad B = \mathrm{Vect}\{ v, w \}.$$

Solution 20 (24.2)

L'ensemble A ne contient que deux vecteurs : c'est un ensemble fini a deux éléments (éventuellement un seul si $v = w$).

L'ensemble B est le sous-espace vectoriel engendré par $\{ v, w \}$. Comme son nom l'indique, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et il contient les vecteurs v et w ; on a donc toujours $A \subset B$.

En général B contient une infinité de vecteurs. Plus précisément c'est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de v et w.

Nous pouvons déjà observer dans $\mathbb{R}^3$.

- Si v et w ne sont pas colinéaires, alors B est un *plan vectoriel*. Il contient donc une infinité de vecteurs.
- Si v et w sont colinéaires mais au moins l'un des deux est non nuls, alors $B = \mathrm{Vect}\{ v \} = \mathrm{Vect}\{ w \}$ est une droite vectorielle. Donc B contient une infinité (mais une «plus petite infinité» que le cas précédent).
- Enfin, si $v = w = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $B = \left\{ 0_{\mathbb{R}^n} \right\} = A$. C'est le seul cas où B est un ensemble fini.

Ces résultats se généralisent à un espace vectoriel quelconque.

Exercice 21 (24.2)

On considère l'ensemble

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

1. en utilisant la définition de sous-espace vectoriel;
2. en exhibant une famille finie qui engendre V;
3. en écrivant V comme le noyau d'une matrice.

Solution 21 (24.2)

1. On a clairement $V \subset \mathbb{R}^4$ et $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)^T \in V$.

   Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ et $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in V$. On a donc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 & \qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 & \qquad y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &= 0 \end{aligned}$$

   Or $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)^T$ et

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0 + 0 = 0 \\ (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4) &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

   ainsi, $u + v \in V$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ et

$$\begin{aligned} (\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) + (\alpha x_4) &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (\alpha x_1) - (\alpha x_2) + (\alpha x_3) - (\alpha x_4) &= \alpha(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 0 \end{aligned}$$

   donc $\alpha u \in V$.

   Conclusion

   V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$,

$$x \in V \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & -2x_2 & + & -2x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = -x_4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$V = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\};$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.

$$V = \ker A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 22 (24.2)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}) = \mathrm{Vect}\,(\exp, \phi)\,.$$

Solution 22 (24.2)

Exercice 23 (24.2)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en les décrivant sous la forme $\operatorname{Vect}(A)$.

1. $F_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' - 2f = 0 \right\}$.
2. $F_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - \omega^2 f = 0 \right\}$ où $\omega \in \mathbb{R}_+^\star$.
3. $F_3 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 2f' + f = 0 \right\}$.
4. $F_4 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - 4f = 0 \right\}$.

Solution 23 (24.2)

1. Les solution de l'équation différentielle $f' - 2f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2x} \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Autrement dit,

$$F_1 = \operatorname{Vect}(g) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array}.$$

2. Les solution de l'équation différentielle $f'' - \omega^2 f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\omega x} + \mu e^{\omega x} \end{array}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Autrement dit,

$$F_2 = \operatorname{Vect}(g, h) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\omega x} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\omega x} \end{array}.$$

3. Les solution de l'équation différentielle $f'' + 2f' + f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu) e^{-x} \end{array}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Autrement dit,

$$F_3 = \operatorname{Vect}(g, h) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x e^{-x} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \end{array}.$$

4. Les solution de l'équation différentielle $f'' - 4f = 0$ sont les fonction de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x} \end{array}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Autrement dit,

$$F_4 = \operatorname{Vect}(g, h) \quad \text{avec} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-2x} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} \end{array}.$$

Exercice 24 (24.2)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En calculant A^{-1}, résoudre l'équation suivante d'inconnue α et β:
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Soit $w_1 = (1,2)^T$ et $w_2 = (1,-1)^T$. Montrer que $\operatorname{Vect}\{ w_1, w_2 \} = \mathbb{R}^2$. C'est-à-dire, montrer que *tout* vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de w_1 et $w_2$en résolvant l'équation $b = Ax$ d'inconnue x:
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

3. Montrer que si v et w sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, avec $v = (a,c)^T$ et $w = (b,d)^T$, alors
$$\operatorname{Vect}\{ v, w \} = \mathbb{R}^2 \iff \forall t \in \mathbb{R}, v \neq tw \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Solution 24 (24.2)

1. On trouve facilement $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Deplus,
$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, l'équation (1) a pour unique solution $(\alpha, \beta) = (-1, 3)$.

2. Soit $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $b \in \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$, c'est-à-dire
$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha w_1 + \beta w_2 = b.$$
Cette dernière équation équivaut succéssivement à
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/3 + b_2/3 \\ 2b_1/3 - b_2/3 \end{pmatrix}.$$
Ceci prouve l'existence de α et β. On a d'ailleurs $\alpha = b_1/3 + b_2/3$ et $\beta = 2b_1/3 - b_2/3$.
Nous avons donc montrer que $\operatorname{Vect}(w_1, w_2) \subset \mathbb{R}^2$. L'inclusion réciproque est triviale car $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $\operatorname{Vect}(w_1, w_2) = \mathbb{R}^2$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On remarque que $b \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v, w si, et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha v + \beta w = b \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b.$$

Puisque les vecteur v et w sont non nuls, $\mathrm{rg}(A) = 1$ ou $\mathrm{rg}(A) = 2$. La matrice A est une matrice carrée et caractérisation des matrices inversible permet d'affirmer que

- Si $\mathrm{rg}(A) = 2$, la matrice A est inversible et l'équation $\alpha v + \beta w = b$ admet une solution (d'ailleurs unique $A^{-1}b$). Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v et w, d'où

$$\mathrm{Vect}\,(v, w) = \mathbb{R}^2.$$

- Si $\mathrm{rg}(A) = 1$, alors A n'est pas inversible et il existe $b \in \mathbb{R}^2$ telle que l'équation $\alpha v + \beta w = b$ n'ait pas de solution, c'est-à-dire $b \notin \mathrm{Vect}(v, w)$ et donc $\mathrm{Vect}(v, w) \neq \mathbb{R}^2$.

Remarquons enfin qu'une matrice $(2, 2)$ n'est pas inversible si, et seulement si elle est de rang 0 ou 1, si, et seulement si l'une des ses colonne est colinéaire à l'autre, si, et seulement si son déterminant est nul. Ainsi

$$\mathrm{Vect}\,\{\, v, w \,\} = \mathbb{R}^2 \iff \forall t \in \mathbb{R}, v \neq tw \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercice 25 (24.2)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties quelconques de E.

1. Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
2. Comparer $\text{Vect}(A \cup B)$ et $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$.

Solution 25 (24.2)