# Chapitre 41

# Représentation matricielle en algèbre linéaire

## 41.1 Famille de vecteurs

### §1 Coordonnées d'une famille de vecteurs relativement à une base

**Définition 1** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de $E$. Soit $\mathcal{S} = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. On appelle **matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{S}$ relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice de type $(n, p)$ dont la $j$-ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur $w_j$ relativement à la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1) \quad \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2) \quad \dots \quad \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w_m)\right)$$

Chaque vecteur de la famille $\mathcal{S}$ se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\
w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\
\vdots &\quad \vdots \\
w_j &= a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n \\
\vdots &\quad \vdots \\
w_p &= a_{1p}v_1 + a_{2p}v_2 + \cdots + a_{np}v_n
\end{aligned}$$

Alors, la matrice $M_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_p)$ s'écrit

$$M_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

**Test 2**

On reprend les bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{S}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer $Q = \mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(\mathcal{B})$, la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{B}$ relativement à la base $\mathcal{S}$.
Calculer les produits $PQ$ et $QP$.

**Théorème 3**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de $E$ et $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. Alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(\mathcal{S}) &= \mathrm{rg}\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1), \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_2), \dots, \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_m)\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2, \dots, w_m)\right). \end{aligned}$$

## §2 Matrice de passage

**Définition 4**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et deux bases de $E$

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \quad \text{ et } \quad \mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont la $j$-ème colonne est formée par les coordonnées du vecteur $v_j$ relativement à la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice carrée d'ordre $n$, qui sera notée $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$\mathrm{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_1) \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_2) \quad \dots \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v_n)\right).$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Aucune nouveauté ici! Mais le terme «matrice de passage» rappelle que les deux familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases d'un même espace vectoriel.

**Théorème 5**

*Soit $v$ un vecteur de $E$. Alors*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(v).$$

En général, on note $X$ et $X'$ les coordonnées du vecteurs $x$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ «l'ancienne base» à $\mathcal{B}'$ la nouvelle base. On a alors

$$X = PX'.$$

La matrice $P$ donne $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$, mais la formule $X = PX'$ donne les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

**Exemple 6**

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, nous écrivons d'abord la matrice des coordonnées de $\mathcal{B}$ relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$P = \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 3, en effet

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $P$ est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
Connaissant les coordonnées d'un vecteur $v$ relativement à la base $\mathcal{B}$, par exemple

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

on peut déterminer les coefficients de $v$ qui sont ses coordonnées dans la base canonique de deux manières, directement en utilisant la définition des coordonnées,

$$v = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

ou avec la matrice de passage

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(v) = P \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

qui donne évidement le même résultat.
Pour déterminer les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur $x$, par exemple $x = (5, 7, -3)^T$, nous devons trouver les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut pour cela résoudre le système $Pa = x$ avec $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, ou en utilisant la matrice inverse de $P$, pour trouver finalement

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x) = P^{-1} \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(x) = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier ce résultat avec le calcul suivant

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = x.$$

**Test 7**

Vérifier les calculs précédents. Déterminer $P^{-1}$ et en déduire $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$.

**Test 8**

En reprenant les même notations. Quelles sont les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ des vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

**Exemple 9**

On considère l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne

$$\mathcal{E} \,:\, 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 2.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base obtenue à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ après une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Théorème 10**

*Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible, et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

# 41.2 Représentation d'une application linéaire par une matrice

## §1 Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

**Définition 11**

Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de $E$, $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ une base de $F$.
On appelle **matrice de $f$ relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice dont la $j$-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(v_j)$ relativement à la base $\mathcal{C}$. C'est une matrice de

type $(m,n)$ que l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_1)\right) & \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_2)\right) & \dots & \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_n)\right) \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donc la matrice des coordonnées de la famille $\left(f(v_1),\dots,f(v_n)\right)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Les coefficients de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ sont donc caractérisés par

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(v_j) = a_{1,j}w_1 + a_{2,j}w_2 + \dots + a_{m,j}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}w_i.$$

**Notation** Il n'y a pas de notation fixée par le programme. Je note parfois $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans le poly d'exercices.

**Théorème 12**

*Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathbf{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{C}$ une base de $F$. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a*

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

Autrement dit, en notant $X$ les coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}$, $Y$ les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, on a

$$Y = AX.$$

**Exemple 13**

Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x+y \\ 3x+y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ et soit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2f_1 + f_2 \qquad\qquad u(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f_3$$

On a vu que ces deux relations déterminent complètement l'application $f$. On regroupe ces informations sous forme d'une matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

**Test 14**

Matrice de $\phi$ : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(1) - P(0), P''(1)) \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

**Test 15**

Matrice de $D$ : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

**Test 16**

Soit $u$ : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+y \\ 3y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de $u$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

## §2 Applications linéaires canoniquement associée à une matrice

**Dans la suite,** On identifie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

**Proposition 17**

*Soit $A$ une matrice de type $(m, n)$. Alors l'application*

$$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$$

*est une application linéaire.*

**Définition 18**

L'application linéaire $T$ est appelée l'**application linéaire canoniquement associée** à la matrice $A$.

**Théorème 19**

*Soit $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit $A$ la matrice dont les colonnes sont $T(e_1), \dots, T(e_n)$, c'est-à-dire*

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \end{pmatrix}.$$

*Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $T(x) = Ax$.*

**Définition 20**

La matrice $A$ est appelée la **matrice canoniquement associée** à l'application linéaire $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Autrement dit, $A$ est la matrice associée à $T$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$

**Exemple 21**

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'image du vecteur $u = (1,2,3)^T$ par l'application $T$, il suffit de substituer $(1,2,3)$ dans l'expression de $T$. On obtient $T(u) = (6,-1,-4)^T$.
Pour trouver la matrice $A$, telle que $T(x) = Ax$, on détermine les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Et l'on pose donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarquez bien que les coefficients de $A$ sont exactement les coefficients de $x$, $y$, $z$ dans la définition de $T$.

**Test 22**

Calculer $Au$ avec $u = (1,2,3)^T$ et vérifier que l'on obtient bien $T(u)$.

## §3 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

**Théorème 23**

*Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $n$ et $m$ munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : & \mathbf{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour tout $f \in \mathbf{L}(E,F)$,*

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right).$$

**Corollaire 24**

*En particulier, pour tous $f, g \in \mathbf{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f),$$

*et on a l'équivalence*

$$f = g \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

*De plus, $\mathbf{L}(E,F)$ est de dimension finie et*

$$\dim(\mathbf{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

**Théorème 25**

*Soient $E, F, G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\mathcal{C}$ une base de $F$ et $\mathcal{D}$ une base de $G$. Pour toutes applications linéaire $f \in \mathbf{L}(E,F)$ et $g \in \mathbf{L}(F,G)$, on* *a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Ainsi la *composition des applications linéaires se traduit par la multiplication matricielle*. Bien noter l'ordre dans lequel est fait le produit matriciel.

*Une démonstration.* Soient $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $m = \dim(G)$. Posons $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g\circ f)$ de sorte que $B$, $A$, $R$ sont des matrices de type $(n, p)$, $(m, n)$ et $(m, p)$. Il s'agit de montrer que $R = AB$.

On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$. La matrice $B$ est la matrice dont les colonnes sont

$$\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_1)\right) \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_2)\right) \quad \dots \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_p)\right)\right)$$

La matrice $AB$ est donc la matrice dont les colonnes sont

$$\left(A\times\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_1)\right) \quad A\times\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_2)\right) \quad \dots \quad A\times\mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}\left(f(v_p)\right)\right)$$

c'est-à-dire la matrice

$$\left(\mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g\circ f(v_1)\right) \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g\circ f(v_2)\right) \quad \dots \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{D}}\left(g\circ f(v_p)\right)\right)$$

qui n'est autre que la matrice $R$. ∎

Les applications linéaires *bijectives* se reconnaissent à leurs matrices.

**Théorème 26** *Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ un base de $E$, $\mathcal{C}$ une base de $F$, $f : E \to F$ une application linéaire et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors $f$ est un isomorphisme si, et seulement si la matrice $A$ est inversible, auquel cas son inverse $A^{-1}$ est la matrice de $f^{-1}$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1}.$$

## §4 Changement de bases

**Lemme 27** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$, alors*

$$\mathrm{Pass}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right).$$

**Théorème 28** **Formule de changement de bases**
*Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E, F)$. Considérons $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux base de $E$ et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de $F$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathrm{Pass}(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

En notant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \qquad P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \qquad Q = \mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

on a la relation

$$A' = Q^{-1}AP.$$

## §5 Matrices équivalentes et rang

**Définition 29** On dit que deux matrices $A$ et $A'$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** lorsque

$$\exists Q \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), A' = QAP.$$

Une matrice $A'$ est équivalente à la matrice $A$ représentant une application linéaire $u \in \mathbf{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $E$ et $F$ si, et seulement si, elle représente $u$ dans des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ de $E$ et $F$. Par conséquent, deux matrices équivalentes ont même rang.

**Théorème 30** *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang $r$ si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice*

$$J_r = \left(\alpha_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Corollaire 31** *Deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si elles ont même rang.*

**Corollaire 32** *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors* $\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg}(A)$.

**Rappel**

- Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.
- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau.
- Les opérations élémentaires conservent le rang.

# 41.3 Cas des endomorphismes

## §1 Matrice d'un endomorphisme relative à une base

**Définition 33** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathbf{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de $E$. On appelle **matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice de l'application linéaire $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée. Cette matrice, notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Nous dirons aussi que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice représentant $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Notant $a_{i,j}$ les coefficients de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], f\left(v_j\right) = a_{1,j}v_1 + a_{2,j}v_2 + \cdots + a_{n,j}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}v_i.$$

**Théorème 34** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathbf{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de $E$. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on a*

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(f(x)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(x).$$

## §2 Isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

**Théorème 35** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de $E$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : & \mathbf{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.*

**Proposition 36** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Pour tous $f, g \in \mathbf{L}(E)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,.$$

**Proposition 37** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de $E$, $f$ un endomorphisme de $E$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $f$ est un automorphisme de $E$ (i.e. $f$ est bijectif) si, et seulement si la matrice $A$ est inversible, auquel cas son inverse $A^{-1}$ est la matrice de $f^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right).$$

## §3 Changement de base

**Théorème 38** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathbf{L}(E)$. Considérons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

En notant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \qquad P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

on a la relation

$$A' = P^{-1}AP.$$

**Exemple 39** On considère l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x + 5y \end{pmatrix}.$$

On cherche à décrire géométriquement cet endomorphisme. À priori, on ne peut pas en dire grand chose…

Supposons donc que l'on nous propose d'effectuer un changement de base. On considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note $M$ la matrice de $T$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Nous avons $M = P^{-1}AP$, où $A$ est la matrice de $T$ relativement à $\mathcal{C}$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$M = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Test 40**

Vérifier ces calculs.

Par définition de $M$, on a

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(T(v_1)\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\left(T(v_2)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$T(v_1) = 4v_1 \quad \text{et} \quad T(v_2) = 2v_2.$$

Ainsi, l'application $T$ s'apparente à une «dilatation» d'un facteur 4 dans la direction $v_1$ et d'un facteur 2 dans la direction $v_2$.
Remarquons que l'effet de $T$ est le même quelque soit la base où on exprime sa matrice. Ainsi, on doit également avoir

$$Av_1 = 4v_1 \quad \text{et} \quad Av_2 = 2v_2.$$

**Test 41**

Vérifier que $Av_1 = 4v_1$ et $Av_2 = 2v_2$.

## §4 Matrice semblables et trace

**Définition 42**

On dit que deux matrices $A$ et $A'$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), A' = PAP^{-1}.$$

**Remarques**

- Deux matrices semblables sont équivalentes.
- Une matrice $A'$ est semblable à la matrice $A$ représentant un endomorphisme $f \in \mathbf{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ de $E$ si, et seulement si, elle représente $f$ dans une base $\mathcal{B}'$ de $E$.
- La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Définition 43**

On appelle **trace** d'une matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

**Proposition 44** *L'application* $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Proposition 45** *Pour toutes matrices* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *on a*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

*En particulier, si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Tr}\left(PAP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(A\right).$$

**Théorème 46** **et définition**
*Il existe une unique forme linéaire* $\mathrm{Tr} : \mathbf{L}(E) \to \mathbb{K}$ *telle que pour toute base* $\mathcal{B}$ *de* $E$, *on ait*

$$\forall f \in \mathbf{L}(E), \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}} f\right).$$

*On appelle alors* ***trace*** *d'un endomorphisme* $f$ *de* $E$ *le scalaire* $\mathrm{Tr}(f)$.

**Proposition 47** *Pour tous* $u, v \in \mathbf{L}(E)$, *on a* $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u)$.

**Proposition 48** *Soit* $p$ *un projecteur de* $E$, *alors* $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.