

Cours sous forme d'exercices.

15.1 SUITES RÉCURRENTES

Une suite récurrente est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de I dans I , et I un intervalle de \mathbb{R} contenant u_0 . Le fait de supposer $f(I) \subset I$ nous assure que la suite est bien définie. Dans la pratique, on donne une fonction f sans préciser l'intervalle I et c'est à vous de dire si la suite est bien définie ou pas.

§1 Position du problème

Quelques rappels.

Définition 1

Soient $f : A \rightarrow B$ une application avec $A \subset B$ et X une partie de A . Si $f(X) \subset X$, on dira que X est une **partie stable** par f .

Théorème 2

Soit $f : A \rightarrow B$ une application avec $A \subset B$. Soit X une partie stable par f et a un élément de X . Il existe une et une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On admettra le résultat suivant (que nous démontrerons après avoir donné la définition d'une fonction continue).

Proposition 3

Si une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un point ℓ situé dans $\text{Dom}(f)$ et si f est continue au point ℓ , alors nécessairement ℓ vérifie l'égalité

$$\ell = f(\ell).$$

On dit que ℓ est un **point fixe** de f .

§2 Étude du signe de $f(x) - x$

Proposition 4

Soit $f : A \rightarrow B$ une application avec $A \subset B$ et X une partie stable par f . Soit $a \in X$, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Si pour tout $x \in X$, $f(x) - x \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si pour tout $x \in X$, $f(x) - x \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple 5

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$ et $u_0 \neq 0$.

1. Donner une valeur de u_0 non nulle pour laquelle (u_n) n'est pas définie.
2. On suppose désormais $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est définie.
3. Montrer que (u_n) est croissante. La suite (u_n) converge-t-elle ?
4. Programmer cette suite sur votre ordinateur (ou calculatrice) avec une très grande valeur de u_0 . A-t-elle l'air de converger ? Explications ?

Exemple 6

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

1. Étudier rapidement la fonction $f : x \mapsto 1 + \ln(x)$ et montrer que $[1, +\infty[$ est stable par f .
2. Étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Préciser son signe.
3. Étudier le comportement de la suite (u_n) en fonction de u_0 .

§3 Le cas où f est croissante

Proposition 7

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante de I dans I , alors la suite u est monotone. Plus précisément,

1. Si $u_0 \geq u_1$, la suite (u_n) est décroissante.
2. Si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante.

Et donc, dans le cas 1, la suite (u_n) converge si, et seulement si elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$. De même, dans le deuxième cas, la suite (u_n) converge si, et seulement si elle est minorée, sinon elle tend vers $-\infty$.

Exemple 8

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n^2)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle définie ?
2. Quelle est la seule limite finie possible pour (u_n) ?
3. Tracer rapidement la courbe représentative de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(1 + x^2)$ et la droite d'équation $y = x$.
Choisir une valeur de u_0 dans $[0, 1[$ et placer sur l'axe des x les premières valeurs de la suite (u_n) .
Refaites la même chose avec $u_0 \in]1, +\infty[$. Que remarque-t-on ?
4. Montrer que (u_n) est croissante.
5. Discuter de la convergence de (u_n) en fonction des valeurs de u_0 .
6. Qu'en pense l'ordinateur (calculatrice) ?

§4 Le cas où f est décroissante

Ici la remarque qui s'impose est la suivante: si f décroît sur son domaine, la fonction $f \circ f$ (lorsqu'elle existe) est croissante. Or

$$u_{p+2} = f(u_{p+1}) = f \circ f(u_p).$$

La relation précédente incite donc à la considération des deux suites extraites correspondant aux termes d'indices pairs et aux termes d'indice impaires. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = f \circ f(u_n) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}).$$

Proposition 9

Hors-programme mais utile à connaître

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est décroissante de I dans I ,

1. Si $u_2 \geq u_0$, alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.
2. Si $u_2 \leq u_0$, alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

On retiendra que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.

La suite u est convergente si, et seulement si ces deux suites extraites sont convergentes et de de même limite.

Exemple 10

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ et $u_0 > -1$.

On définit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f , et vérifier que $f(]-1, +\infty[) \subset]-1, +\infty[$.

2. Quelle est la seule limite possible pour (u_n) ?

3. Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

Choisir une valeur de u_0 dans $]-1, +\infty[$ et placer sur l'axe des x les premières valeurs de la suite (u_n) .

Refaites la même chose avec une autre valeur de u_0 choisie de telle sorte que le comportement de (u_n) soit différent.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite (u_{2n}) soit croissante.

5. Discuter de la convergence de (u_n) en fonction de u_0 .

6. Quel sens peut-on donner à

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}?$$

Test 11

Étudier la suite u définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = e^{-u_n}.$$

Test 12

Idem avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.