# Chapter 37 Couple de variables aléatoires réelles

**Exercice 1 (37.0)**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$ et que la loi de $X$ soit donnée par le tableau

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

1. Donner la loi du couple $(X, Y)$.
2. Déterminer la loi de $Y$.
3. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $cov(X, Y)$. Conclusion ?

**Solution 1 (37.0)**

1. On a $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $j \neq i^2$ et $P\left((X = i) \cap (Y = i^2)\right) = P(X = i)$.

| $X \backslash Y$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{6}$ |
| $-1$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ |
| $0$ | $\frac{1}{6}$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ |
| $2$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{6}$ |

2. La loi de $Y$ est la loi marginale de $Y$ dans le couple $(X, Y)$. On peut aussi obtenir directement cette loi car $Y$ prend les valeurs $i^2$ pour $i \in X(\Omega)$.

   Donc $Y$ prend les valeurs $0, 1$ et $4$.

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(X = 0) = \frac{1}{6}, \\
P(Y = 1) &= P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{2}, \\
P(Y = 4) &= P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

   Dans les deux cas, on obtient le tableau

| $y_k$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $P(Y = y_k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

3. $X$ et $Y$ ne sont pas indépendante car

$$P((X = 0) \cap (Y = 1)) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1).$$

4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Ici

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_i)\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{8}{6} + \frac{8}{6} = 0;$$

et comme $E(X) = 0$, on a $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

**Conclusion**

Deux variables dant la covariance est nulle ne sont pas nécéssairement indépendantes.

**Exercice 2 (37.0)**

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les variables aléatoires $X$ et $Y$ égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéro obtenus.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
2. En déduire les lois marginales de $X$ et de $Y$. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.
3. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
4. On pose $Z = Y - X$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Déterminer ensuite la loi de $Z$.

**Solution 2 (37.0)**

**Exercice 3 (37.0)**

Soient $n \in \mathbb{N}^{\star}$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les réels $p_{i,j}$ par $p_{i,j} = a \cdot i \cdot j$.

1. Déterminer $a$ pour que la loi du coupe $(X, Y)$ soit donnée par la distribution de probabilité $\left(p_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
2. Déterminer les lois marginales de $X$ et de $Y$. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes?
3. En déduire $E(XY)$ et $\operatorname{Cov}(X, Y)$.
4. On pose $Z = X + Y$. Calculer l'espérance et la variance de $Z$.

**Solution 3 (37.0)**

**Exercice 4 (37.0)**

On a $n$ boites numérotées de 1 à $n$. La boite $k$ contient $k$ boules numérotées de 1 à $k$. On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. Soit $X$ le numéro de la boite et $Y$ le numéro de la boule.

**1.** Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.

**2.** Calculer $P(X = Y)$.

**3.** Déterminer la loi de $Y$ et $E(Y)$.

**Solution 4 (37.0)**

**1.** Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

**2.** L'événement $(X = Y)$ est réalisé si, et seulement si $X$ et $Y$ prennent les même valeurs donc

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

**3.** $Y$ prend les valeurs $1, 2, \dots, n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{j=1}^{n} jP(Y = j) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) = \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

**Exercice 5 (37.0)**

> On lance un dé cubique honnête, soit $X$ le résultat obtenu. Si $X$ est divisible par 3, on extrait en une fois 3 boules d'une urne $U_1$ contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. Sinon, on extrait en une fois $X$ boules d'une urne $U_2$ contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.
> Soit $Y$ le nombre aléatoire de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.

**Solution 5 (37.0)**
Si le résultat $X$ du lancer du dé est divisible par 3, alors le nombre $Y$ de boules blanches obtenues ensuite appartient à $[\![0,3]\!]$, sinon on ne peut extraire plus de 2 boules blanches de l'urne 2. Donc

$$Y(\Omega) = \{ 0, 1, 2, 3 \}.$$

Le «hasard» intervenant à deux niveaux chronologiquement hiérarchisés (!), il est urgent de faire appel au conditionnement du second par le premier. Pour $j = 3, 6$, on a

$$\forall i \in [\![0,3]\!], P(Y = i | X = j) = \frac{\binom{3}{i}\binom{5}{3-i}}{\binom{8}{3}}$$

et pour $j = 1, 2, 4, 5$,

$$\forall i \in [\![0,3]\!], P(Y = i | X = j) = \frac{\binom{2}{i}\binom{3}{j-i}}{\binom{5}{j}}.$$

**Remarque.** On reconnait des lois hypergéométrique. Ce sont des lois usuelles, mais hors-programme.

Le dé étant honnête, $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Ainsi la formule des probabilités totales associée au système complet $(\{ X = j \})_{j\in[\![1,6]\!]}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![0,3]\!], P(Y = i) &= \sum_{j=1}^{6} P(Y = i|X = j)P(X = j) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} P(Y = i|X = j) \\
&= \frac{1}{6}\left( P(Y = i|X = 3) + P(Y = i|X = 6) + \sum_{j\in\{ 1,2,4,5 \}} P(Y = i|X = j)\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu des lois conditionnelles

$$P(Y = i) = \frac{1}{6}\left( 2\frac{\binom{3}{i}\binom{5}{3-i}}{\binom{8}{3}} + \sum_{j\in\{ 1,2,4,5 \}} \frac{\binom{2}{i}\binom{3}{j-i}}{\binom{5}{j}}\right).$$

Il n'y a plus qu'à faire les calculs!

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y = i)$ | $\frac{176}{840}$ | $\frac{346}{840}$ | $\frac{313}{840}$ | $\frac{5}{840}$ |
| $iP(Y = i)$ | | $\frac{346}{840}$ | $\frac{626}{840}$ | $\frac{15}{840}$ |
| $i^2P(Y = i)$ | | $\frac{346}{840}$ | $\frac{1252}{840}$ | $\frac{45}{840}$ |

D'où

$$E(Y) = \frac{987}{840} = \frac{47}{40}, \qquad E(Y^2) = \frac{1648}{840} \qquad \text{et } V(Y) = \frac{405951}{(840)^2},$$

c'est-à-dire $E(Y) \approx 1{,}175$ et $V(Y) = 0{,}58$.

**Exercice 6 (37.0)**

On admet la convention $\binom{n}{j} = 0$ si $j \notin [\![0, n]\!]$.

**1.** Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels, et $f$ la fonction polynôme définie pour tout réel $x$ par

$$f(x) = (1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}.$$

(a) Développer $f(x)$ deux deux façons différentes, en utilisant la formule du binôme.

(b) En déduire que, pour tous entiers naturels $n$ et $m$, on a

$$\forall k \in [\![0, n+m]\!], \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Vandermonde*.

**2.** Démontrer le théorème de stabilité de la somme de deux lois binomiales indépendantes, c'est-à-dire que, si $X$ et $Y$ sont deux variables *indépendantes* suivant respectivement une loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m, p).$$

**Solution 6 (37.0)**

**Exercice 7 (37.0)**

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geq 2$, on définit la variable aléatoire $X_n$ égale au gain total à l'issue des $n$ premiers lancers.

**1.** Déterminer les lois de $X_2$ et de $X_3$, puis calculer leurs espérances.

**2.** Soit $n \geq 2$. Justifier que $X_n$ prend ses valeurs dans $\{ 0, \dots, n-1 \}$.
Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.

**3.** Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{ 0, \dots, n \}$, montrer

$$P\left(X_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2} P\left(X_n = k\right) + \frac{1}{2} P\left(X_n = k-1\right).$$

**4.** On note, pour tout $n \geq 2$, $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = k\right) s^k.$$

(a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction $Q_n$.

(b) Montrer, pour tout $n \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$,

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s).$$

(c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de $n$ et de $s$.

**5.** Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de $X_n$.

**Solution 7 (37.0)**

**Exercice 8 (37.0)** *Nombre de sommets isolés dans un graphe aléatoire (X-ENS)*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, on se donne un réel $p_n \in ]0,1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté $\Gamma_n$, de sommets $1, \dots, n$, tel que, si pour tout $(i,j)$ tel que $1 \leq i < j \leq n$, $X_{i,j}$ est la variable indicatrice de l'événement «$\{ i, j \}$ est une arête de $\Gamma_n$», alors les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p_n$.
On note alors $Y_n$ la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

1. Soit $X$ une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $P(X > 0) \geq \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

2. On suppose que $\frac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3. On suppose que $p_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

**Solution 8 (37.0)**