CHAPITRE

24

ESPACES VECTORIELS

Dans ce chapitre Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, .)$ désignera un corps.
Le programme se limite au cas où ce corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

24.1 STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

§1 Les axiomes d'espace vectoriel

Définition 1

Axiomes d'espace vectoriel
Étant donné un corps $\mathbb{K}$, d'éléments neutres $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$, on appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** un ensemble E muni d'une structure algébrique définie par la donnée d'une loi de composition interne, appelée **addition**

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif, c'est-à-dire

1. La loi $+$ est **associative**.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z.$$

2. E possède un **élément neutre** pour la loi $+$, noté 0_E.

$$\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$

3. Tout élément de E possède un **opposé** pour la loi $+$ dans E.

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = x' + x = 0_E.$$

On note $-x$ l'opposé de x.

4. La loi $+$ est **commutative**.

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x.$$

D'une loi d'action appelée **multiplication externe**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

qui satisfait aux axiomes suivants [a]

5. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, x \in E, y \in E$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
6. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}, x \in E$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
7. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}, x \in E$, $(\alpha . \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.
8. Pour tout $x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

[a] Règle bien connue : pour économiser les parenthèses, on convient que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

En toute rigueur, on dit que $(E, +, \cdot)$, lire «E muni des lois $+$ et $\cdot$», est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En pratique, on dit simplement que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que E est un **espace vectoriel réel**. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que E est un **espace vectoriel complexe**. Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments du corps de base $\mathbb{K}$ sont les **scalaires**. Le neutre pour l'addition dans E est appelé **vecteur nul** tandis que le neutre pour l'addition dans $\mathbb{K}$ est appelé **zéro**. On peut les noter tous les deux 0, pour ne pas les confondre, nous noterons plutôt le vecteur nul 0_E ou $\overrightarrow{0}$.

On s'efforce de mettre le scalaire à gauche, et le vecteur à droite, le point pouvant être omis (on écrira αx).

Afin d'alléger les notations, nous ne mettons pas de flèches sur les lettres représentant les vecteurs. Pour éviter de confondre vecteurs et scalaires, nous utiliserons plutôt des lettres latines pour les vecteurs $(u, v, x, y, z, \dots)$ et des lettres grecques pour les scalaires $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots)$, sans toutefois en faire une règle trop absolue, ce qui risquerait de compliquer inutilement les notations.

La courte liste des propriétés précédentes, appelées axiomes, est minimale si l'on souhaite qu'un espace vectoriel se comporte «comme nous le souhaitons», c'est-à-dire comme $\mathbb{R}^n$. D'autres propriétés, que l'on s'attend à être vraies, découlent des axiomes. Par exemple,

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Puisque $0+0=0$ (dans $\mathbb{K}$), on a

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

En ajoutant $-(0 \cdot x)$, l'opposé de $0 \cdot x$, à chaque côté de l'égalité, on obtient

$$0_E = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \cdot x + 0_E = 0 \cdot x.$$

∎

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x.$$

Test 4

Montrer le avec un argument similaire avec $0 = 1 + (-1)$.
Pour les plus rapides, démontrer le résultat suivant.

La proposition suivante montre qu'il n'y a absolument aucune surprise et que l'on calcule en fait comme dans toute structure algébrique classique.

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x, y \in E$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

1. $\alpha \cdot 0_E = 0_E$;
2. $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$;
3. $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha x - \beta x$;
4. $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$.
5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n}$ *et* $(-n) \cdot x = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n}$.

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha \cdot x_i\right).$$

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout vecteur $x \in E$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha \cdot x = 0_E \implies \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E.$$

Il est important de différencier les scalaires et les vecteurs, pour ne pas écrire d'incorrections ; ainsi, il se peut que E ne soit pas muni de multiplication interne ou de produit scalaire.
De même, le quotient de deux vecteurs n'a pas de sens ; ainsi, si $y = \alpha x$ (avec x, y des vecteurs et α un scalaire), on n'écrira pas $\alpha = \frac{y}{x}$.

§2 Exemples

L'ensemble des vecteurs de l'espace (ou du plan) de la géométrie élémentaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations usuelles $\vec{x}+\vec{y}$ et $\lambda\vec{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). C'est là l'origine du mot «espace vectoriel».

Exemple 7

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$
Si E est le corps $\mathbb{K}$ lui-même, alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; les deux opérations étant naturellement $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Exemple 8

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$
Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations définies par

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') \quad \text{et} \quad \lambda(a+ib) = (\lambda a)+i(\lambda b)$$

où a, b, a', b' et λ sont réels. Alors $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; ces deux structures sont différentes.

Exemple 9

Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$
L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il est muni de addition et multiplication par un scalaire usuelle:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ étant le vecteur dont chaque composante est nulle, c'est-à-dire $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)^T$.

On peut également noter les éléments de $\mathbb{K}^n$ en lignes, les opérations sur $\mathbb{K}^n$ s'écrivant alors

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\text{et } \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Exemple 10

Un espace vectoriel de fonctions
L'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ munie de l'addition point à point et de la multiplication par un scalaire usuelle est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Remarquons que le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction identiquement nulle,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Test 11

Montrer que les axiomes d'espace vectoriel sont respectés pour F. En particulier, si la fonction f est un vecteur de F, décrire le vecteur $-f$.

Exemple 12

Espace vectoriel de matrices
L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles définies par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (A+B)\,[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (\lambda \cdot A)\,[i,j] = \lambda A[i,j]$$

où $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Le vecteur nul de cet espace n'est autre que la matrice nulle notée $0_{n,p}$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.
- Chaque matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet pour matrice opposée la matrice $-A$ que l'on construit en posant

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (-A)\,[i,j] = -A[i,j].$$

Exemple 13

Espace vectoriel des suites
L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations usuelles définies par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}};$$
$$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

où $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le vecteur nul est la suite constante dont chaque terme égale zéro. L'opposé de la suite $u = \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $-u = \left(-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Test 14

Vérifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'exemple suivant est une partie de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 15

Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont le dernier coefficient est nul, c'est-à-dire

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Alors W est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni de l'addition et la multiplication par un scalaire usuelle. Pour cela, il suffit de vérifier que W contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, et que W est stable par addition et multiplication par un scalaire.
En effet, les axiomes **1**, **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** sont vérifiés pour tous vecteurs de W puisqu'ils sont vérifiés pour tous vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Reste à vérifier que si $u, v \in W$, alors $u + v \in W$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v \in W$, alors $\alpha v \in W$.
Ce assure assure l'existence de l'addition et la multiplication externe pour W.

$$+ : W \times W \to W \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times W \to W.$$

On vérifie alors facilement l'axiome **3**, l'opposé de $v \in W$ étant alors le même dans W que dans $\mathbb{R}^3$: $-v = (-1) \cdot v$.

Test 16

Vérifier que $0_{\mathbb{R}^3} \in W$, et que pour $(u, v) \in W^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $u + v \in W$ et $\alpha v \in W$.

Exemple 17

Espace vectoriel de polynômes
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k\geq 0} b_k X^k\right) = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) X^k;$$
$$\lambda \cdot \left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right) = \sum_{k\geq 0} \left(\lambda a_k\right) X^k.$$

Cet exemple sera repris dans un prochain chapitre…

Théorème 18

Espace vectoriel d'applications
Soient X un ensemble non vide et V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors $\mathscr{F}(X, V)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les lois naturelles définies par

$$f + g : \begin{array}{ccc} X & \to & V \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad ; \quad \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} X & \to & V \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

où $f, g \in \mathscr{F}(X, V)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'espace vectoriel des matrices est un cas particulier d'espace vectoriel d'applications $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathscr{F}\left([\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \mathbb{K}\right)$. L'espace vectoriel des suites est un cas particulier d'un espace vectoriel d'applications $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Exemple 19

Espace vectoriel produit
Soient $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On munit naturellement l'ensemble $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2).$$

où $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est appelé **espace vectoriel produit**.

Le vecteur nul de $E = E_1 \times E_2$ est $(0_{E_1}, 0_{E_2})$.

On peut généraliser cette notion en munissant, de manière naturelle, l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, lorsque les E_i sont eux-même des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

§3 Combinaisons linéaires

Lorsque v, w sont des vecteurs, et α, β des scalaires, alors $\alpha v + \beta w$ est encore un vecteur: on dit qu'il est combinaison linéaire de v et w. On généralise cette notion en parlant de combinaison linéaire d'un nombre **fini** de vecteurs.

Définition 20

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $v, v_1, , v_2, \dots, v_n$ un nombre fini de vecteurs de E. On dit que v est une **combinaison linéaire** de $v_1, \dots, v_n$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = v \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v.$$

Proposition 21

Un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

Exemple 22

Montrons que $w = (2, -5)^T$ est combinaison linéaire de $v_1 = (1, 2)^T$ et $v_2 = (1, -1)^T$. Il nous faut donc exhiber des scalaires α, β tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = w$, c'est-à-dire

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité entre vecteurs s'écrit comme un système d'équations scalaires

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 2 \\ 2\alpha - \beta &= -5 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = -1$ et $\beta = 3$. Alors $w = -v_1 + 3v_2$, que l'on peut vérifie facilemenent

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Test 23

Dans le plan, tracer v_1 et v_2. Représenter w comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. Représenter également le vecteur $x = \frac{1}{2} v_1 + v_2$.
Peut-on représenter n'importe quel «point» de votre feuille avec une combinaison linéaire de v_1 et v_2?

Exemple 24

Dans l'espace vectoriel $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 4$ est combinaison linéaire de trois fonctions simples, $f = 2g + 3h + 4k$, où

$$g : x \mapsto x^2 \qquad\qquad h : x \mapsto x \qquad\qquad k : x \mapsto 1.$$

En effet, une combinaison linéaire de g, h et k reste dans F; ainsi $2g + 3h + 4k$ ont même ensemble de départ et d'arrivée que f. De plus, pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (2g + 3h + 4k)(x) &= (2g)(x) + (3h)(x) + (4k)(x) \\ &= 2(g(x)) + 3(h(x)) + 4(k(x)) \\ &= 2x^2 + 3x + 4 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Test 25

Dans $\mathbb{K}^n$, on définit les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k\text{-ème} \qquad \dots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quel est alors le vecteur $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$?

Remarque

En notant

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

le **symbole de Kronecker**. On a $e_k = \left(\delta_{i,k}\right)_{i=1\dots n}$.

24.2 Sous-espaces vectoriels

§1 Définition

Définition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie de E. On dit que V est un **sous-espace vectoriel** de E si

- $0_E \in V$.
- V est stable par addition:

$$\forall (u, v) \in V^2, u + v \in V$$

- et V est stable par multiplication externe

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \alpha v \in V.$$

Test 27

Montrer que l'un de ces ensemble et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que l'autre ne l'est pas:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème 28

Un sous-espace vectoriel V d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel pour les lois induites

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, v) & \mapsto & \alpha v \end{array}.$$

Test 29 Démontrer ce théorème. S'inspirer de l'exemple $W = \left\{ (x, y, 0)^T \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exemple 30 Si E est un espace vectoriel, alors E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 31 Si E est un espace vectoriel, alors $\left\{ 0_E \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle parfois **sous-espace nul**.

Exemple 32 Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n

$$\mathbb{K}_n[X] = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 33 L'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites réelles à support fini est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

§2 Caractérisation

Proposition 34 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V une partie de E. Alors V est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E si, et seulement si*

- $0_E \in V$.
- *V est stable par combinaison linéaire*

$$\forall (u, v) \in V^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha u + \beta v \in V.$$

Test 35 Si cela n'est pas encore évident, montrer le!

Exemple 36 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$. Alors l'ensemble

$$S = \mathbb{K}x = \{ \alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Lorsque $v \neq 0$, on dit que S est une droite vectorielle de E.

Test 37 Montrer le!

Exemple 38 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y \in E$. Alors l'ensemble

$$V = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{ \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

§3 Noyau et image d'une matrice

Théorème 39 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors* $\ker(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 40 L'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, on a

$$S = \ker(A) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque Le noyau de A est l'ensemble des solution du système linéaire *homogène* $Ax = 0$. Si on considère l'ensemble S des solutions du système $Ax = b$, alors S *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ lorsque $b \neq 0$ (c'est-à-dire lorsque le système n'est pas homogène). En effet, $0 \notin S$. Il y a néanmoins un lien entre S et $\ker(A)$: si x_0 est une solution de $Ax = b$, alors

$$S = \left\{ x_0 + z \mid z \in \ker(A) \right\},$$

on dit que S est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ de direction $\ker(A)$.

Exemple 41

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble définit par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y &= 1 \\ 3x + y &= 5 \end{cases}$ est un sous-espace affine réduit à un point :

$$\mathscr{V} = (2, -1) + \left\{ 0_E \right\} = \{ (2, -1) \}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, $x + y + z = 1$ est l'équation d'un plan affine

$$\mathcal{P} = (1, 0, 0) + \left\{ (x, y, z)^T \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}.$$

Théorème 42 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors* $\operatorname{Im}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 43 On considère l'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}.$$

Alors pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S &\iff 3x - 2y + z = 0 \\
&\iff x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S = \left\{ sv_1 + tv_2 \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2.$$

où $v_1 = (2/3, 1, 0)^T$ et $v_2 = (1/3, 0, 1)^T$.
On peut donc écrire

$$S = \mathrm{Im}(A) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Bien sûr, on peut le montrer également avec la définition ou écrire S comme le noyau d'une matrice.

§4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 44 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$W = \bigcap_{i\in I} W_i$$

est un sous-espace vectoriel de E.

§5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 45 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A admet un plus petit élément (pour l'inclusion). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par A**, il se note $\mathrm{Vect}(A)$, et on a

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{W \text{ sev de } E \\ A\subset W}} W.$$

Si $\mathrm{Vect}\, A = E$, on dit que A est une **partie génératrice** de E.

Remarque Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soit A et B deux parties de E. Alors

1. $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.

2. Si V est un sous-espace vectoriel de E et $A \subset V$, alors $\operatorname{Vect}(A) \subset V$.
3. $A \subset B \implies \operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Vect}(B)$.
4. Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Vect}(V) = V$.

Exemple 46

Le sous-espace vectoriel engendré par la partie vide est le sous-espace vectoriel trivial

$$\operatorname{Vect} \emptyset = \{0\}.$$

Exemple 47

Soit $x \in E$, le sous-espace vectoriel de E engendré par x est

$$\operatorname{Vect}\{\, x \,\} = \mathbb{K}x.$$

En effet, si un sous-espace vectoriel V de E contient x, il contient tous les multiples de x car il est stable par multiplication externe ; on a donc $\mathbb{K}x \subset V$.
Or nous avons vu que $\mathbb{K}x$ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus $x \in \mathbb{K}x$. Le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x est donc $\mathbb{K}x$, autrement dit $\operatorname{Vect}(\{\, x \,\}) = \mathbb{K}x$.

Exemple 48

Soit $x, y \in E$, le sous-espace vectoriel de E engendré par x et y est

$$\operatorname{Vect}\{\, x, y \,\} = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \{\, \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,\}.$$

Exemple 49

L'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

est le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (2/3, 1, 0)^T$ et $v_2 = (1/3, 0, 1)^T$. On a

$$S = \left\{\, sv_1 + tv_2 \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\right\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2 = \operatorname{Vect}\left\{\, v_1, v_2 \,\right\}.$$

Définition 50

On appelle **droite vectorielle** un espace vectoriel non nul engendré par un seul élément.
On appelle **plan vectoriel** un espace vectoriel engendré par deux éléments et qui n'est pas une droite vectorielle.

Tout élément non nul d'une droite vectorielle l'engendre. Deux éléments quelconques d'une droite vectorielle sont proportionnels. Enfin, on verra plus loin que deux éléments non proportionnels d'un plan vectoriel l'engendrent.

Théorème 51

Le sous-espace vectoriel de E engendré par une partie A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.