Chapter 34 Applications linéaires en dimension finie

* **Exercice 1 (34.0)**

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - y + 2z \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire de deux manières différentes.
2. Déterminer $\ker f$ puis donner une base de $\ker f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

* **Exercice 2 (34.0)**

Soit $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + 2z, 2x - z) \end{array}$.

1. Justifier que g est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Im} g$.
3. Déterminer $\ker g$ puis donner une base de $\ker g$.

* **Exercice 3 (34.0)**

Soit l'application $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y - 7z) \end{array}$.

1. Déterminer $\ker h$ puis donner une base de $\ker h$.
2. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$; en déduire une base de $\operatorname{Im} h$.

* **Exercice 4 (34.0)**

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
2. L'image d'une famille liée par tout application linéaire est liée.

Exercice 5 (34.0)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. À tout scalaire λ, on associe le sous-ensemble V_λ de E défini par

$$V_\lambda = \{ x \in E \mid f(x) = \lambda x \}.$$

1. Que peut on dire de V_0 ?
2. Démontrer que, pour tout scalaire λ, V_λ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Démontrer que, pour tous scalaires λ, μ,
$$\lambda \neq \mu \implies V_\lambda \cap V_\mu = \left\{ 0_E \right\}.$$
4. Étant données λ et μ deux scalaires distincts, on suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls u et v appartenant respectivement à V_λ et à V_μ. Démontrer que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.

5. Plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant n scalaires deux à deux distincts, on suppose qu'il existe n vecteurs non nuls $u_1, u_2, \dots, u_n$ appartenant respectivement à $V_1, V_2, \dots, V_n$. Démontrer par récurrence que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants.

Exercice 6 (34.0)

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$.

On suppose que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

2. Montrer que $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$ est une base de E.

3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}(E)$ de base $\left(\mathrm{Id}_E, f, f^2\right)$.

** **Exercice 7 (34.0)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 8 (34.0)

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, on considère les trois formes linéaires f_1, f_2, f_3 définies par

$$f_1(x, y, z) = -x + y + z$$
$$f_2(x, y, z) = 2x - y - z$$
$$f_3(x, y, z) = x + 2y + z$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre?

* **Exercice 9 (34.1)**

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(1,0,0,0) = (1,-1,0); \qquad f(0,1,0,0) = (-1,0,1);$$
$$f(0,0,1,0) = (1,-1,2); \qquad f(0,0,0,1) = (0,-2,3).$$

1. Rappeler brièvement pourquoi ces relations caractérisent f.

2. Déterminer $\ker f$. L'application f est-elle injective?

3. Déterminer $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective? bijective?

* **Exercice 10 (34.1)**

On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$ et en déduire une expression de u comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

2. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifie les conditions suivantes

$$f(v_1) = e_1 \qquad f(v_2) = e_2 \qquad f(v_3) = e_3,$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.

3. Déterminer, si possible, le noyau de f et l'image de f.

4. Donner l'expression analytique de f (c'est-à-dire l'expression de $f(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

$*$

Exercice 11 (34.1)

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (-1, 1, -2), u_3 = (2, 1, 0)$ de E.

1. Démontrer que la famille $\mathfrak{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.

2. Justifier l'existence d'un unique endomorphisme f de E vérifiant

$$f(u_1) = u_1 - u_2, \qquad f(u_2) = u_3, \qquad f(u_3) = u_2 + u_3.$$

3. Déterminer l'image par f du vecteur $v = (1, -3, 5)$.

$*$

Exercice 12 (34.1)

Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (z, x - y, y + z)$ est un automorphisme.

$**$

Exercice 13 (34.1) *Dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^* = \mathbf{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ le dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

$$\begin{array}{rccl} \Psi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & M & \mapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}.$$

1. Montrer que Ψ_A est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^* \\ & A & \mapsto & \Psi_A \end{array}.$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 14 (34.2)

Déterminer une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Vérifier la cohérence avec le théorème du rang. L'application T est-elle bijective ?

Exercice 15 (34.2)

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

1. On suppose que le noyau de g est l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 = x_2 = x_3$ et que l'image de g est $\mathbb{R}^2$. Cela contredit il le théorème du rang ?

2. On suppose de plus que $g(e_1) = \epsilon_1$, $g(e_2) = \epsilon_2$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (ϵ_1, ϵ_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   Déterminer une matrice A telle que l'application g définie par $g(x) = Ax$ vérifie les conditions précédente. Donner l'expression analytique de g (c'est-à-dire l'expression de $g(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3).

Exercice 16 (34.2)
Soit $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit v_1, v_2, v_3, x les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

où x_1, x_2, x_3 sont fixés dans la suite. Soit T l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$T(e_1) = v_1, \qquad T(e_2) = v_2, \qquad T(e_3) = v_3, \qquad T(e_4) = x.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation
$$\operatorname{rg}(T) = \dim \ker(T).$$
Dans ce cas, donner une base de $\operatorname{Im}(T)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de x pour que l'application linéaire T vérifie la relation
$$\dim \ker(T) = 1.$$
Dans ce cas, donner une base de $\ker(T)$.

** **Problème 17 (34.2)** *Un théorème de factorisation, Banque PT 2010*
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(E, G)$.

Le but de cette partie est de montrer que

$$\ker(u) \subset \ker(v) \iff \exists w \in \mathbf{L}(F, G), v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.
Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v)$.

2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \ker(u) = n - p$ et $\dim F = r$.

   (a) Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E de sorte que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\ker(u)$.
   Quelle est alors la dimension de $\operatorname{Im}(u)$?

   (b) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

   (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F.
   On définit alors $w \in \mathbf{L}(F, G)$ par
   $$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que, si $\ker(u) \subset \ker(v)$, alors $v = w \circ u$.

*** **Exercice 18 (34.2)**
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice fixée. Calculer, en fonction du rang de A, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ formé des matrices M telles que $MA = 0$ (donner deux solutions).

Même question si M est fixée et A varie.

$**$

Exercice 19 (34.2)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathbf{L}(E, F)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u + v)$.

3. On suppose que $E = F$, que $u \circ v = 0_{\mathbf{L}(E)}$ et que $(u + v) \in \mathbf{GL}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(u + v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

Exercice 20 (34.2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}$, u et v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v \ \text{ et } \ E = \ker u + \ker v.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

$**$

Exercice 21 (34.2)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme a de E et un projecteur p, tel que $u = a \circ p$.

En prenant l'exemple de la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, montrer que ce résultat peut tomber en défaut lorsque E n'est pas de dimension finie.

$**$

Exercice 22 (34.2) *Centrale MP 2015*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Pour $a \in E$, on note $\mathcal{F}_a$ l'ensemble des endomorphisme f de E tels que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x), a)$ soit liée.

1. Déterminer $\mathcal{F}_a$ lorsque $a = 0$ puis lorsque $n = 2$.

2. Montrer que $\mathcal{F}_a$ est un espace vectoriel pour tout $a \in E$.

3. Soit H un espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes v de H tels que pour tout $h \in H$, $(h, v(h))$ soit liée.

4. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}_a$.

$***$

Exercice 23 (34.2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient $H_i = \ker \phi_i$, $1 \leq i \leq 3$, trois hyperplans de E, discuter selon le rang de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Interpréter géométriquement ce résultat en dimension 3.

2. Si $H_1, \dots, H_p$ sont p hyperplans de E, montrer que

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq n - p.$$

Exercice 24 (34.2)

Soient $n \geq 2$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP(1) + (X^2 - 4)P(0) \end{array}.$$

Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ainsi que leurs dimensions.

Exercice 25 (34.2)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{array}.$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Exercice 26 (34.2)
On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ & P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(0) = 1, \qquad P'(1) = 2, \qquad P''(1) = -1, \qquad \text{et} \qquad P''(2) = 1.$$

Exercice 27 (34.2)
On considère une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $n + 1$ réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], P(\alpha_i) = f(\alpha_i) \text{ et } P'(\alpha_i) = f'(\alpha_i).$$

** **Exercice 28 (34.2)**
Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'application définie sur E par

$$f(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Calculer $f(X^p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\operatorname{Im} f$; montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que

$$f(P) = Q \text{ et } P(0) = P'(0) = 0.$$

** **Exercice 29 (34.2)**
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On note $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

1. Montrer que E^* est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.
2. On considère les trois formes linéaires sur E, définies pour tout P de E par

$$f_0(P) = P(0); \qquad f_1(P) = P(1); \qquad f_2(P) = P(2).$$

   On pose par ailleurs, pour tout P de E

$$f(P) = \int_0^2 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que f appartient à l'espace vectoriel engendré par $\{ f_0, f_1, f_2 \}$.

** **Exercice 30 (34.2)**
Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n + 1$ formes linéaires

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0), \quad k \in [\![0, n]\!].$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est un base de $E^* = \mathbf{L}(E, \mathbb{R})$.