Chapter 13 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (13.1)

Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0,1[$,

2. $[0,1[$,

3. $]1,+\infty[$,

4. $\mathbb{N}$,

5. $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,

6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$,

7. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\}$.

Solution 1 (13.1)

1. Montrons que $\sup(]0,1[) = 1$.

- Le réel 1 est un majorant de $]0,1[$ car pour tout $x \in]0,1[$, on a $x \leq 1$.
- Montrons que 1 est le plus petit des majorants. Soit μ un autre majorant de $]0,1[$, et supposons que $\mu < 1$.

  Dans ce cas, il existe un z tel que $\mu < z < 1$. On pose $x = \max\left\{ \frac{1}{2}, z \right\}$ (pour être sûr d'avoir $x > 0$), alors

$$x \in]0,1[\text{ et } x \geq z > \mu;$$

  ce qui contredit le fait que μ est un majorant.

Ainsi, 1 est le plus petit des majorant de $]0,1[$, c'est-à-dire $\sup(]0,1[) = 1$. De plus, $1 \notin]0,1[$, donc $]0,1[$ n'a pas de plus grand élément.

- Le réel 0 est un minorant de $]0,1[$ car pour tout $x \in]0,1[$, on a $x \geq 0$.
- Montrons que 0 est le plus grand des minorants. Soit μ un autre minorant de $]0,1[$, et supposons qu $\mu > 0$. On pous $x = \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2} \right\}$, alors

$$x \in]0,1[\text{ et } x \leq \mu;$$

  ce qui contredit le fait que μ est un minorant.

Ainsi, 1 est le plus grand des minorant de $]0,1[$, c'est-à-dire $\sup(]0,1[) = 0$. De plus, $0 \notin]0,1[$, donc $]0,1[$ n'a pas de plus petit élément.

2. De manière analogue à la question précédente, on a $\sup([0,1[) = 1$ et $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément.

De plus, $0 \in [0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a $0 \leq x$. Ainsi 0 est le plus petit élément de $[0,1[$, c'est donc également sa borne inférieure : $\inf[0,1[= 0$ (inutile de refaire la preuve).

3. L'intervalle $]1,+\infty[$ n'est pas majoré : il n'a ni borne supérieure, ni plus grand élément.

L'intervalle $]1,+\infty[$ et minoré par 1. De plus, si $\mu > 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 < x < \mu$ (par exemple $x = \frac{1+\mu}{2}$. Ainsi

$$x \in]1,+\infty[\text{ et } x < \mu$$

donc μ n'est pas un majorant de $]1,+\infty[$.

Ainsi, $\inf]1,+\infty[= 1$ et puisque $1 \notin]1,+\infty[$, cet intervalle n'a pas de plus petit élément.

4. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré : il n'a ni borne supérieure, ni plus grand élément. De plus, $0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n$: 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$. On a donc également $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$.

5. Notons $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n} \leq 1$ et $1 \in A$, donc $1 = \max A = \sup A$.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq \frac{1}{n}$, donc 0 est un minorant de A. Soit $\mu > 0$, le caractère Archimédien de $\mathbb{R}$ montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{\mu} < n_0.$$

(Explicitement, on peut prendre $n_0 = \lfloor 1/\mu \rfloor + 1$). On a donc

$$\frac{1}{n_0} \in A \text{ et } \frac{1}{n_0} < \mu,$$

donc μ n'est pas un minorant de A. Ainsi $\inf A = 0$ et A n'a pas de plus petit élément ($0 \notin A$).

6. On a $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Il est facile de voir que $-\sqrt{2}$ est son plus petit élément et $\sqrt{2}$ son plus grand élément. Ainsi

$$\inf B = \min B = -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sup B = \max B = \sqrt{2}.$$

7. Notons $C = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.

Le réel $\sqrt{2}$ est un majorant de C. De plus, si $\mu < \sqrt{2}$, alors $\min(\mu, 0) < \sqrt{2}$ et il existe un rationnel $z \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu < z < \sqrt{2}$. Ainsi

$$z \in C \quad \text{et} \quad z > \mu;$$

donc μ n'est pas un majorant de C. On a donc $\sup C = \sqrt{2}$, et puisque $\sqrt{2} \notin C$, C n'a pas de plus grand élément.

De manière analogue, $\inf C = -\sqrt{2}$ et C n'a pas de plus petit élément.

Exercice 2 (13.1)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Solution 2 (13.1)

Puisque $M > 0$, et que M est le plus petit des majorant de A, 0 n'est pas un majorant de A: il existe $x_0 \in A$ tel que $x_0 > 0$.

Exercice 3 (13.1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$.
2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Solution 3 (13.1)

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$ revient à démontrer que $f(\sup A)$ est un majorant de $f(A)$.

   Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in A$ donc $x \leq \sup A$. De plus, f est croissante donc $y = f(x) \leq f(\sup A)$.

   On a donc
   $$\forall y \in f(A), y \leq f(\sup A),$$
   c'est-à-dire que $f(\sup A)$ est un majorant $f(A)$. Or $\sup(f(A))$ est le plus petit des majorant de $f(A)$ d'où
   $$\sup(f(A)) \leq f(\sup A).$$

2. Posons

   $$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & : x < 3 \\ x+8 & : x \geq 3 \end{cases} \end{array} \qquad \text{et} \qquad A = [0, 3[.$$

   L'application f est croissante. De plus,

   - $f(A) = [0, 3[$ donc $\sup(f(A)) = 3$,
   - $\sup A = 3$ et $f(\sup A) = f(3) = 11$.

   On a donc bien $\sup(f(A)) < f(\sup A)$.

Exercice 4 (13.1)

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{\ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\ \}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter : $x \in A + B \iff \cdots$.

2. Montrer que $A + B$ est non vide est majorée.

3. Déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 5 (13.2)

Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

Solution 5 (13.2)

On peut traiter les $10 \times 10 = 100$ cas à la main. Il vaut mieux utiliser le caractère convexe des intervalles.

Soit A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrons que $A \cap B$ est convexe, donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $x, y \in A \cap B$ tels que $x < y$ et soit $z \in [x, y]$.

- $(x, y) \in A^2$ et A est un intervalle, donc $z \in A$,
- $(x, y) \in B^2$ et B est un intervalle, donc $z \in B$.

Ainsi $z \in A \cap B$.

Conclusion

$A \cap B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.