Sujet d'étude

Arccosinus complexe

Pour tout nombre complexe z, on définit le cosinus de z par

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Avant de définir une fonction «Arccosinus complexe», revenons sur la construction de la fonction arccos usuelle. Nous avons d'abord trouvé un intervalle sur lequel cos est injective (à savoir $[0, \pi]$) puis déterminé l'image de cet intervalle par cos (à savoir $[-1, 1]$). Ainsi, la fonction cos réalise ujne bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et on peut définir sa réciproque, notée arccos. Remarquons que le choix de $[0, \pi]$ était arbitraire : on aurait pu choisir $[-\pi, 0]$ ou $[0, \pi/2]$, etc.

Soit Φ la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos(z)$. Étant donnée une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et une partie A de $\mathbb{C}$, on note f_A la fonction

$$f_A : \begin{array}{ccc} A & \to & f(A) \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}.$$

Définir une (ou des) fonction «Arccosinus complexe» revient donc à déterminer des parties A de $\mathbb{C}$, non vides et telles que la fonction Φ_A soit bijective. On dira d'une telle partie A qu'elle est convenable.

On remarquera que A est convenable si, et seulement si

$$\forall \left(z, z'\right) \in A^2, \cos(z) = \cos(z') \implies z = z'.$$

Partie 1 *Préliminaires*

1. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x + iy) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y).$$

2. Les parties de $\mathbb{C}$ suivantes sont-elles convenables : $\mathbb{C}$? $\mathbb{R}$? $\left\{ z_0 \right\}$ avec $z_0 \in \mathbb{C}$?

3. Montrer

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

4. Soit la fonction $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -z$ et A une partie convenable de $\mathbb{C}$. Montrer que $S(A)$ est convenable.

5. Soit la fonction $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z + 2\pi$ et A une partie convenable de $\mathbb{C}$. Montrer que $T(A)$ est convenable.

6. Soit A et A' deux parties convenables de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\Phi(A) \cap \Phi(A') = \emptyset$, alors $A \cup A'$ est convenable.

Partie 2 *Exemples de parties convenables*

Étant donnée une partie B de $\mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \in B \text{ et } \mathfrak{Im}(z) = 0 \}$$

sera noté également B.

1. Soit $A_1 =]0, \pi[$. Déterminer $\Phi(A_1)$, montrer que A_1 est convenable et déterminer $\Phi_{A_1}^{-1}$.

2. Soit $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) = 0 et \mathfrak{Im}(z) \geq 0 \}$. Déterminer $\Phi(A_2)$, montrer que A_2 est convenable et déterminer $\Phi_{A_2}^{-1}$.

3. Soit $A_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) = \pi \text{ et } \mathrm{Im}(z) \leq 0 \}$. Déterminer $\Phi(A_3)$, montrer que A_3 est convenable et déterminer $\Phi_{A_3}^{-1}$.

4. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Montrer que A_4 est convenable. Déterminer $\Phi(A_4)$ et $\Phi_{A_4}^{-1}$.

Partie 3 *Résolution de l'équation* $\cos(z) = a$

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$.

1. Soit $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \rho e^{i\theta}. \tag{1}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\cos(z) = a$ si, et seulement si e^{iz} est solution d'une équation de degré 2 que l'on notera (1).

3. Montrer que l'équation (1) admet deux racines distinctes Z_1 et Z_2 non nulles et que

$$|Z_2| = \frac{1}{|Z_2|} \qquad \text{et } \arg(Z_2) \equiv \arg(Z_1)\ [2\pi] \qquad \text{et } Z_1 + Z_2 \notin \mathbb{R}.$$

4. En déduire qu'il existe un unique $\theta_a \in]0, \pi[$ et un unique $\rho_a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a}$ soient solutions de (1).

5. Soit $A_5 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \in]0, \pi[\mathit{et}\ \mathfrak{Im}(z) \neq 0 \}$. Montrer que A_5 contient exactement une solution de l'équation $\cos(z) = a$, que l'on notera $\Psi(a)$. Exprimer $\Psi(a)$ en fonction de ρ_a et θ_a

6. En déduire qu'il existe un unique $\theta_a \in]0, \pi[$ et un unique $\rho_a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a}$ soient solutions de (1).

7. Soit $A_5 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) \in]0, \pi[\mathit{et}\ \mathfrak{Im}(z) \neq 0 \}$. Montrer que A_5 contient exactement une solution de l'équation $\cos(z) = a$, que l'on notera $\Psi(a)$. Exprimer $\Psi(a)$ en fonction de ρ_a et θ_a

8. Calculer $\Psi(i)$.

9. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Im}(b) \neq 0$. Exprimer $\Psi(-b)$ en fonction de $\Psi(b)$.

Partie 4 *Une partie convenable maximale*

1. Montrer que si $z \in A_5$, alors $\mathfrak{Im}(\cos(z)) \neq 0$. En déduire que A_5 est convenable.

2. Soit $A_6 = A_4 \cup A_5$. Représenter l'ensemble des points du plan dont l'affixe est dans A_6. Montrer que $\Phi(A_6) = \mathbb{C}$, puis que A_6 est convenable.

3. On notera désormais Γ la réciproque de Φ_{A_6} (Γ est une fonction Arccosinus complexe «intéressante»). Déterminer $\Gamma(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{C}, \Gamma(z) + \Gamma(-z) = \pi.$$

5. Montrer que A_6 est une partie convenable maximale, c'est-à-dire qu'aucune partie de $\mathbb{C}$ contenant A_6 et différente de A_6 n'est convenable.

6. Donner d'autres exemples de parties convenables maximales.

I (1) facile

(2) • $\cos 0 = \cos 2\pi$. Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas convenables.

• $\{z_0\}$ est convenable car $\{z_0\} \to \{\cos z_0\}$ est bijective
$z_0 \mapsto \cos z_0$

(3) Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x)$. Alors φ est dérivable sur $]-1,1[$ et : $\forall x \in]-1,1[\quad \varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

Donc φ est constante sur $]-1,1[$

Or $\varphi(0) = \pi$. Donc $\forall x \in]-1,1[\quad \varphi(x) = \pi$

Enfin, $\varphi(1) = \varphi(-1) = \pi$

(4) Soit $(z,z') \in S(A)^2$ tq $\cos z = \cos z'$.

Il existe $(u,u') \in A^2$ tq $z = -u$ et $z' = -u'$.

On vérifie que : $\forall v \in \mathbb{C} \quad \cos(-v) = \cos v$.

On en déduit que $\cos u = \cos u'$. Comme A est convenable, $u = u'$.

D'où $z = z'$, ie $S(A)$ est convenable.

(5) Raisonnement similaire car : $\forall v \in \mathbb{C} \quad \cos(z+2\pi) = \cos z$.

(6) Soit $(z,z') \in (A \cup A')^2$ tq $\cos z = \cos z'$.

Il est impossible que $z \in A$ et $z' \in A'$ (ou l'inverse) car $\phi(A) \cap \phi(A') = \emptyset$

Donc $(z,z') \in A^2$ ou $(z,z') \in A'^2$. Comme A et A' sont convenables, on en déduit que $z = z'$. Donc $A \cup A'$ est convenable.

II (1) cos réalise une bijection de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$.

Donc $\phi(A_1) =]-1,1[$ et $\phi_{A_1}^{-1} :]-1,1[\to]0,\pi[, x \mapsto \operatorname{Arccos} x$.

(2) D'après I(1), pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$. Or ch réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$ et on a montré (voir exo 14) que la bijection réciproque est $[1,+\infty[\to [0,+\infty[, x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Donc $\phi(A_2) = [1,+\infty[$ et $\phi_{A_2}^{-1} : [1,+\infty[\to A_2, x \mapsto i\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(3) De même, $\phi(A_3) =]-\infty,-1]$ et $\phi_{A_3}^{-1} :]-\infty,-1] \to A_3$
$x \mapsto \pi - i\ln(-x+\sqrt{x^2-1})$

(4) $\phi(A_1) \cap \phi(A_2) =]-1,1[\cap [1,+\infty[= \emptyset$. D'après I(6), $A_1 \cup A_2$ est convenable.

De plus, $\phi(A_1 \cup A_2) \cap \phi(A_3) =]-1,+\infty[\cap]-\infty,-1] = \emptyset$.

Donc $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$ est convenable.

$\phi(A_4) = \phi(A_1) \cup \phi(A_2) \cup \phi(A_3) = \mathbb{R}$ et

$$\phi_{A_4}^{-1} : \mathbb{R} \to A_4$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \operatorname{Arccos} x & \text{si } x \in]-1,1[\\ i\ln(x+\sqrt{x^2-1}) & \text{si } x \geqslant 1 \\ \pi - i\ln(-x+\sqrt{x^2-1}) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

III (1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x+iy$. Alors :

$$e^{iz} = \rho e^{i\theta} \iff e^{ix}e^{-y} = \rho e^{i\theta} \iff \begin{cases} e^{-y} = \rho \\ x \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{\theta + 2k\pi - i\ln\rho \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

(2) $\cos z = a \iff \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = a \iff e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 2a \iff (e^{iz})^2 + 1 = 2ae^{iz}$

car $e^{iz} \neq 0$.

Donc $\cos z = a$ ssi e^{iz} est sol de : $X^2 - 2aX + 1 = 0$.

(3) (1) a pour discriminant $\Delta = 4(a^2-1)$.

Comme $a \notin \mathbb{R}$, $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Donc $\Delta \neq 0$, et (1) admet donc deux racines distinctes Z_1 et Z_2. D'après les relations entre racines et coefficients d'une équation du second degré, on a :

$Z_1 Z_2 = 1$ et $Z_1 + Z_2 = -(-2a) = 2a$.

D'où $Z_1 \neq 0$ et $Z_2 \neq 0$, $|Z_1| = \frac{1}{|Z_2|}$ et $\arg(Z_1) \equiv -\arg(Z_2) \ [2\pi]$.

De plus, $Z_1 + Z_2 = 2a \notin \mathbb{R}$ car $a \notin \mathbb{R}$.

(4) Soit θ l'unique argument de Z_1 dans $]-\pi,\pi]$. Comme $Z_1 \notin \mathbb{R}$ (car $a \notin \mathbb{R}$), $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$.

Si $\theta \in]0,\pi[$, on pose $\theta_a = \theta$ et $\rho = |Z_1|$

Si $\theta \in]-\pi,0[$, on pose $\theta_a = -\theta$ et $\rho = |Z_2|$.

D'après (3), $\rho_a e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a}$ sont les racines de (1). L'unicité de θ_a et de ρ_a vient de la construction précédente qui était unique.

Enfin, $\rho_a \neq 1$, sinon $Z_1 + Z_2 = e^{i\theta_a} + e^{-i\theta_a} = 2\cos\theta_a \in \mathbb{R}$.

(5) D'après III (1) et III (4), on a : (3)

$\cos z = a \Leftrightarrow e^{iz} = \rho_a e^{i\theta_a}$ ou $e^{iz} = \frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ $z = \theta_a + 2k\pi - i \ln \rho_a$ ou $z = -\theta_a + 2k\pi - i \ln \frac{1}{\rho_a}$

Or : $\forall k \in \mathbb{Z}$ $-\theta_a + 2k\pi \notin]0, \pi[$

et : $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\theta_a + 2k\pi \in]0, \pi[\Leftrightarrow k = 0$

Donc la seule solution de $\cos z = a$ dans A_5 est $\Psi(a) = \theta_a - i \ln \rho_a$

(on a bien $\operatorname{Im} \Psi(a) \neq 0$ car $\rho_a \neq 1$).

(6) Calculons θ_i et ρ_i.

(1) devient : $x^2 - 2ix + 1 = 0$. Donc $\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})^2$.

Alors $Z_1 = i(1+\sqrt{2})$ et $Z_2 = i(1-\sqrt{2})$

Donc $Z_1 = (1+\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{2}}$. Comme $1+\sqrt{2} \neq 1$ et $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$, on

a $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ et $\rho_i = 1+\sqrt{2}$. D'où $\Psi(i) = \frac{\pi}{2} - i \ln(1+\sqrt{2})$.

(7) On note z_1 et z_2 les racines de $X^2 - 2bX + 1 = 0$.

On note z_3 et z_4 les racines de $X^2 + 2bX + 1 = 0$.

Alors $\{z_3, z_4\} = \{-z_1, -z_2\} = \{-\rho_b e^{i\theta_b}, -\frac{1}{\rho_b} e^{-i\theta_b}\}$.

Quitte à intervertir z_3 et z_4, on peut supposer :

$z_3 = -\rho_b e^{i\theta_b}$ et $z_4 = -\frac{1}{\rho_b} e^{-i\theta_b}$.

D'où $z_4 = \frac{1}{\rho_b} e^{i(\pi - \theta_b)}$. Comme $\frac{1}{\rho_b} \neq 1$ et $\pi - \theta_b \in]0, \pi[$,

on a $\rho_{-b} = \frac{1}{\rho_b}$ et $\theta_{-b} = \pi - \theta_b$.

D'où $\Psi(-b) = \theta_{-b} - i \ln \rho_{-b} = \pi - \theta_b + i \ln \rho_b = \pi - \Psi(b)$.

IV (1). Soit $z \in A_5$. Alors $\operatorname{Im}(\cos z) = -\sin(\operatorname{Re} z) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} z)$.

Comme $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\operatorname{sh}(\operatorname{Im} z) \neq 0$, et comme $\operatorname{Re} z \in]0, \pi[$, $\sin(\operatorname{Re} z) \neq 0$.

Donc $\operatorname{Im}(\cos z) \neq 0$.

- On en déduit que $\phi(A_5) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. D'autre part, d'après III (5) ;

$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\exists! z \in A_5$ $\phi(z) = a$.

Donc $\phi(A_5) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et A_5 est convenable

② $\phi(A_6) = \phi(A_4) \cup \phi(A_5) = \mathbb{R} \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) = \mathbb{C}$.

D'autre part, $\phi(A_4) \cap \phi(A_5) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) = \emptyset$.

D'après I⑥, $A_6 = A_4 \cup A_5$ est convenable.

③ $\Gamma : \mathbb{C} \to A_6$

$$z \mapsto \begin{cases} \Psi(z) & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \operatorname{Arccos} z & \text{si } z \in]-1,1[\\ i \ln(z + \sqrt{z^2-1}) & \text{si } z \in [1,+\infty[\\ \pi - i \ln(-z + \sqrt{z^2-1}) & \text{si } z \in]-\infty,-1] \end{cases}$$

④ Soit $a \in \mathbb{C}$.

<u>1er cas</u> $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Alors $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \Psi(a) + \Psi(-a) = \pi$

<u>2ème cas</u> $a \in]-1,1[$ $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \operatorname{Arccos} a + \operatorname{Arccos}(-a) = \pi$

<u>3ème cas</u> $a \in [1,+\infty[$. Alors $\Gamma(a) = i \ln(a + \sqrt{a^2-1})$.

Comme $-a \in]-\infty,-1]$, $\Gamma(-a) = \pi - i \ln(-(-a) + \ln\sqrt{(-a)^2-1})$.

D'où $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi$

<u>4ème cas</u> $a \in]-\infty,-1]$. Alors $-a \in [1,+\infty[$. D'où $\Gamma(-a) + \Gamma(-(-a)) = \pi$

⑤ Soit B une partie de $\mathbb{C}$ contenant A_6 et différente de A_6. Il existe donc $z_0 \in B$ tq $z_0 \notin A_6$. Comme $\phi(A_6) = \mathbb{C}$, il existe $z_1 \in A_6$ tel que $\cos z_1 = \cos z_0$. Comme $z_1 \in A_6$, $z_1 \neq z_0$. Donc B n'est pas convenable

⑥ $S(A_6)$, $T(A_6)$, $S \circ T(A_6)$, $T \circ T(A_6)$ --- sont convenables (cf I④ et I⑤), et sont maximales car leur image par ϕ est $\mathbb{C}$.