Chapter 28 Dérivation

Exercice 1 (28.0)
En utilisant la définition, déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7$.
2. $f(x) = -5x$.
3. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$.
4. $f(x) = x^2 + x - 3$.
5. $f(x) = x^3 - 12x$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
7. $f(x) = \sqrt{x+4}$.
8. $g(x) = -3$.
9. $f(x) = 3x + 2$.
10. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x$.
11. $f(x) = 2 - x^2$.
12. $f(x) = x^3 + x^2$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
14. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

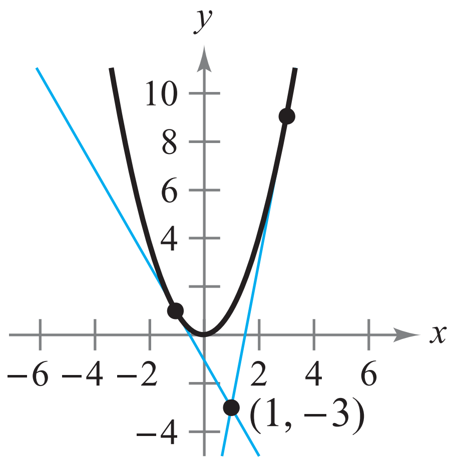
Exercice 2 (28.0)
Soient V un voisinage de x_0 et f, g deux fonctions définies sur V et dérivables en x_0.
Montrer que si : $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ et $f(x_0) = g(x_0)$, alors $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Application : $f(x) = x \cos x$; calculer $f'(k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sans calculer $f'(x)$ d'une façon générale.

Exercice 3 (28.0)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Exercice 4 (28.0) *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*

1. Justifier que l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ équivaut à l'équation $\tan(x) = \frac{1}{x}$ sur un certain ensemble D à préciser.
2. Pressentir graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ sur $[0, +\infty[$.
3. Prouver qu'en tout point M_0 d'intersection des deux courbes d'équation $y = \cos(x)$ et $y = x\sin(x)$, les tangentes en M_0 à ces deux courbes sont perpendiculaires.

Rappel. Les deux droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et $y = \alpha x + \beta$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\alpha a = -1$.

Exercice 5 (28.0)
Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes en précisant le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
2. $g(x) = \sin\left(x^2\right) + x\ln\left(1 + x^2\right)$.

3. $h(x) = \dfrac{\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 6 (28.0) *Calcul de dérivées*

Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que la fonction dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto xe^x \ln(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x\tan(x)}$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$.
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$.
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
6. $f_6 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.
7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.
9. $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(x/3)}{1-\cos(x/3)}$.
10. $f_{10} : x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.
11. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.
12. $f_{12} : x \mapsto |x|^3$.
13. $f_{13} : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$.
14. $f_{14} : x \mapsto x+\dfrac{\ln(|x|)}{|x|}$.
15. $f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$.
16. $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x)-\cos(5x)}$.
17. $f_{17} : x \mapsto \left|x^2-3x+2\right|$.
18. $f_{18} : x \mapsto \ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)$.
19. $f_{19} : x \mapsto \sin^2(x)\sin\left(x^2\right)$.
20. $f_{20} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{x-1}{|x-1|}\right|\right)$.
21. $f_{21} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.
22. $f_{22} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\right)$.
23. $f_{23} : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.
24. $f_{24} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}+\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.
25. $f_{25} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.
26. $f_{26} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.
27. $f_{27} : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.
28. $f_{28} : x \mapsto \ln(e^x-e^{-x})$.
29. $f_{29} : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.
30. $f_{30} : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)}$.
31. $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

Exercice 7 (28.0)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.
2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8 (28.0)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. *Vrai ou Faux ?*

1. Si f est périodique, alors f' est périodique.
2. Si f' est périodique, alors f est périodique.
3. Si f est paire, alors f' est impaire.
4. Si f est impaire, alors f' est paire.
5. Si f' est paire, alors f est impaire.

Exercice 9 (28.0)
Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{x-a}{x}\right)^x.$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Exercice 10 (28.0)
Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ la fonction suivante est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & : x \in]0, b[, \\ x^2 + 12 & : x \in [b, +\infty[\end{cases} \end{array}$$

Exercice 11 (28.0)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (28.0)
Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = (3x^2 + x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. $g(x) = \mathrm{e}^x \cos x$.

Problème 13 (28.0)
Soit n un entier naturel non nul.

1. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$z''(t) + n^2 z(t) = 0. \tag{E_1}$$

2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$
$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0. \tag{E}$$
On considère une fonction $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose
$$z : \begin{array}{rcl}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\cos(t)) \end{array}.$$
   (a) Indiquer pourquoi la fonction z est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ puis exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y', y'' et de t.
   (b) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0,\pi[$ lorsque y vérifie l'équation (E) sur $]-1,1[$?
   (c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

Exercice 14 (28.1)
Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et $L(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I.

1. L'ensemble $L(I)$ est-il stable pour l'addition ? pour la multiplication ?

2. Vrai ou Faux ? Si f est un élément de $L(I)$ et si f ne s'annule pas, alors $1/f$ est également dans $L(I)$.

Exercice 15 (28.1)
Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue en tout $a \in I$.
Exercice 16 (28.1)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.
Exercice 17 (28.1)
1. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 3 a au plus 3 zéros réels.

2. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré n a au plus n zéros réels.

Exercice 18 (28.1)
Déterminer les extrémums globaux pour chacune des fonctions sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = 3 - x$ sur $[-1,2]$.

2. $g(x) = x^2 - 2x$ sur $[0,4]$.

3. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2+3}$ sur $[-1,1]$.

Exercice 19 (28.1)
Montrer
$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x\ln x}.$$

Exercice 20 (28.1)
En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 21 (28.1)
Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.
Exercice 22 (28.1)
En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
En déduire le comportement de la suite définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Exercice 23 (28.1)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) \geq 1$.
2. Établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

.

Exercice 24 (28.1)
Soit $f : [0,+\infty[$ dérivable sur $[0,+\infty[$ et telle que
$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.
Exercice 25 (28.1) *Le théorème de Darboux*
Le but de cette exercice est de démontrer le théorème de Darboux :

> Une fonction dérivée sur un intervalle, bien que non nécessairement continue, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit I un intevalle véritable de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Considèrons $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$ et λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On cherche donc à montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

On considère les applications ϕ et ψ définie par
$$\begin{array}{rccc} \phi : &]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{array}$$

1. Montrer que ϕ se prolonge en une fonction continue sur $[a,b]$. On note encore ϕ ce prolongement.

2. Montrer que ψ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore ψ ce prolongement.

3. Soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\phi(c) = \lambda \text{ ou } \psi(c) = \lambda.$$

4. En déduire qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

Exercice 26 (28.1) *La règle de l'Hospital*

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Ce résultat porte parfois le nom de théorème de Cauchy ou formule des accroissements finis généralisée.

2. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

(a) Montrer que si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

(b) Vérifier que la réciproque est fausse en considérant

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x.$$

3. Applications : Calculer les limites suivantes

$$a) \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad b) \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}, \quad \text{et} \quad c) \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

La règle de l'Hospital est hors programme. Il est d'ailleurs amusant et surprenant de constater qu'il existe une espèce d'aura maléfique autour de cette règle, pourtant fort simple et performante, si bien que son utilisateur est souvent considéré comme ayant commis un sacrilège.

Exercice 27 (28.1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \sup_{t \in [x, x+1]} f(t).$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 (28.1)
On considère l'application f et la suite (u_n) définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{x+2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.
2. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $]0,1[$.
4. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n.$$
5. Conclure.
6. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 29 (28.2)
Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$h : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\sqrt{x} \end{array}.$$

1. En revenant à la définition.
2. En utilisant le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 30 (28.2)
On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = e^{|t|}. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.
3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Exercice 31 (28.2)
Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \exp(1/x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f est continue sur D.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Vérifier que f, ainsi prolongée, est dérivable à gauche et à droite en 0. Est-elle dérivable en 0?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0.
5. Préciser un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de l'infini.
6. Cela vous permet-il d'obtenir une asymptote oblique de f?