Chapter 14 Suites de nombres réels et complexes

Exercice 1 (14.1)
Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.
4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 (14.1)
Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

Exercice 3 (14.2)
En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Exercice 4 (14.2)
Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Exercice 5 (14.2)
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3n}{2n^2-1}$.
Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.
Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ donné.

Exercice 6 (14.2)
Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (14.2)
Démontrer, en utilisant la définition que la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (14.2)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\left(u_n\right)$ converge vers ℓ.
2. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq 2022\epsilon$.
3. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon \in \left]0, 1\right[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \epsilon$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| < \frac{1}{k}$.

Exercice 9 (14.2)
Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Exercice 10 (14.3)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k} \qquad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.

2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Exercice 11 (14.3)
Étudier la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 12 (14.3)
Étudier la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 13 (14.3)
Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 14 (14.3)
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 15 (14.3)
Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} \geq k u_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 16 (14.3)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k, $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $\left|u_{n+1}\right| \leq k\left|u_n\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 17 (14.3)
Soit $\left(u_n\right)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 18 (14.3)
Soit u et v deux suites du segment $[0,1]$ telles que

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrer

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 19 (14.4)
Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}.$$

Exercice 20 (14.4)
Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;

2. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$;

3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$;

4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$;

5. $u_n = (-1)^n$;

6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

Exercice 21 (14.4)
Soit (u_n) une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_n\right) = 150.$$

Quelle est sa raison ?
Exercice 22 (14.4)
On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Problème 23 (14.4) *Théorème de Cesàro, banque PT 2003*
Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

(d) Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas nécessairement bornée.
On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par ℓ. Conclure.

Exercice 24 (14.4)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell$, avec $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

(a) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ avec $\ell \in [0, +\infty]$, alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = \ell.$$

(b) Montrer par un exemple que la réciproque de (2.a) est fausse.

Exercice 25 (14.5)

Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Exercice 26 (14.5)

Soit $\left(u_n\right)_{n>0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est croissante.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. En déduire que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est convergente.

Exercice 27 (14.5)
Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.

3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Exercice 28 (14.5)
Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un *majorant* de A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est la borne supérieure de A.

(ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.

(iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

Exercice 29 (14.5)
Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 30 (14.5)
Montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 31 (14.5)
Montrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \qquad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Exercice 32 (14.5)
Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 33 (14.5)
Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \qquad\qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.

4. Calculer $u_n v_n$. En déduire ℓ en fonction de a et b.

Problème 34 (14.5) *Suites de Cauchy*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie la propriété

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \left(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \implies \left|u_n - u_p\right| \leq \epsilon\right). \tag{1}$$

1. Montrer que la suite est bornée.

2. Montrer qu'elle est convergente.

Exercice 35 (14.6)

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

Remarque. Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, mais on ne sait pas la calculer en général.

Exercice 36 (14.6)
Montrer que la suite de terme général $u_n = n \sin^2\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ diverge, et que la suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(n)\right)^{1/n}$ converge.

Exercice 37 (14.6)
Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 38 (14.6)
Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Exercice 39 (14.6)
Soit (x_n) une suite réelle bornée divergente. Montrer que l'on peut trouver deux suites extraites de (x_n) convergeant vers des limites distinctes.

Suites récurrentes

Exercice 40 (14.7)

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n).

Problème 41 (14.7)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - 1\right| \leq \left|v_n - 2\right| \text{ et } \left|v_{n+1} - 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$
3. Déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$
4. Montrer que (u_n) est convergente.
5. Montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 42 (14.7)
Soit $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?
2. Prouver que les suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont monotones.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left|u_{2n} - u_{2n-1}\right| \text{ et } \left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$
5. Que dire des suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$? Conclure que $\left(u_n\right)$ est convergente.

Exercice 43 (14.7)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par

$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$.
2. Étudier la suite $\left(u_n\right)$ dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.
4. Étudier la convergence de $\left(u_n\right)$ dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
   Dans chacun des cas, si $\left(u_n\right)$ admet une limite, on la précisera.

Exercice 44 (14.7)
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{7}{9}\left|u_n - \ell\right|$.
4. Conclure.

Problème 45 (14.7)
On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right) ; \qquad M_n = \max\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right).$$

(m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.)

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).
   (a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$.
   En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.
   (b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :
   $$m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0.$$
   (c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :
   $$m \leqslant M.$$

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

(a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :

$$M_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) En déduire que $M \leqslant m$, puis que $M = m$.

(c) Établir la convergence de la suite (p_n).

Exercice 46 (14.7)

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0. En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

3. Étudier la monotonie de u.

4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 47 (14.7)

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. En déduire que la suite u est bien définie.

2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ solution de l'équation $\dfrac{e^x}{x+2} = x$.

3. Déduire de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|.$$

4. Majorer la différence $|u_n - \alpha|$ puis montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

Exercice 48 (14.7)
On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.

2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

4. *Première méthode*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

(a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α.

(c) Conclure sur la convergence de la suite u.

(d) Écrire une suite d'instructions `Python` qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode*.

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α.

(b) En déduire une suite d'instructions `Python` qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.