Corps des nombres réels

MP2I

Aperçu

1. Ensembles usuels
2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
3. Le premier degré
4. Puissances, racines

1. Ensembles usuels
1.1 Opérations algébriques
1.2 Les entiers naturels
1.3 Les entiers relatifs
1.4 Les nombres rationnels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

1. Ensembles usuels
1.1 Opérations algébriques
1.2 Les entiers naturels
1.3 Les entiers relatifs
1.4 Les nombres rationnels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

A 1 L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une première loi de composition interne, l'**addition** notée « + », qui possède les propriétés suivantes:

- L'addition des nombres réels est **associative**

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y) + z = x + (y + z).$$

  On note cette somme $x + y + z$.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède un **élément neutre pour l'addition**. Cet élément est noté 0:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x.$$

- Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel x' tel que $x + x' = 0$ (x' est unique).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = 0.$$

  Le nombre x' est noté $-x$ et est appelé l'**opposé** de x.

- La loi de composition interne « + » est **commutative** dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une second loi de composition interne, la **multiplication**, notée ou bien «$\times$» ou bien, plus simplement par juxtaposition. À tout couple (x, y) de nombres réels, cette loi fait correspondre le nombre réel $z = x \times y = xy$.

- La multiplications des nombres réels est **associative**.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x(yz) = (xy)z = xyz.$$

- Le nombre réel 1, qui est différent de 0, est neutre pour la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x.$$

- Tout nombre réel *sauf* 0 admet un inverse pour la multiplication.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, \exists x' \in \mathbb{R}, xx' = x'x = 1.$$

  x' est appelé l'**inverse** de x; on le note $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}.

- La multiplication dans $\mathbb{R}$ est une opération **commutative**.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = yx.$$

De plus, ces propriétés sont liées par la propriété de **distributivité** de la la multiplication par rapport à l'addition :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x.(y+z) = x.y + x.z \text{ et } (x+y).z = x.z + y.z.$$

D 2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels, l'opération réciproque de l'addition est définie par l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & b+(-a) \end{array}.$$

On note cette loi de composition interne par le signe «$-$», et on l'appelle la **soustraction**.

R

1. La loi «$+$» est associative. La loi «$-$» n'est pas associative.
2. La loi «$+$» est commutative. La loi «$-$» n'est pas commutative.
3. La loi «$+$» admet dans $\mathbb{R}$ un élément neutre. La loi «$-$» n'admet pas dans $\mathbb{R}$ d'élément neutre.

D 3 L'opération réciproque de la multiplication est la **division**, définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a\times\frac{1}{b} \end{array}.$$

Le **quotient** x de a par b est noté $x=\frac{a}{b}=a/b$.

T 4 *La nullité du produit de deux nombres réels implique celle d'un facteur au moins:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0 \iff (x = 0 \ \textit{ou} \ y = 0)\,.$$

Plus généralement, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul.

Démonstration.
Supposons $x = 0$, puisque $x = 0 = 0 + 0 = x + x$,

$$xy = (x + x)y = xy + xy$$

et donc

$$xy - (xy) = 0 = xy + xy - (xy) = xy.$$

Ainsi $xy = 0$. En supposant $y = 0$, on aurait démontré de même que $xy = 0$.

T 4 *La nullité du produit de deux nombres réels implique celle d'un facteur au moins:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0 \iff (x = 0 \ \textit{ou} \ y = 0)\,.$$

Plus généralement, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul.

Réciproquement, supposons

$$x \neq 0 \text{ et } xy = 0;$$

le nombre x, n'étant pas nul, admet un inverse $\frac{1}{x}$; xy étant nul, on a

$$\frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \times 0 = 0;$$

le premier membre devient par associativité:

$$\left(\frac{1}{x} \times x\right) \times y = 1 \times y = y.$$

On a donc $y = 0$. En supposant $y \neq 0$ et $xy = 0$, on aurait démontré de même que $x = 0$.

E 5 Déterminer les réels $x \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

On peut écrire

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\iff (x-2)(x-3) = 0 \\ &\iff \boxed{\quad x - 2 = 0 \ \text{ ou } \ x - 3 = 0 \quad} \end{aligned}$$

1. Ensembles usuels
1.1 Opérations algébriques
1.2 Les entiers naturels
1.3 Les entiers relatifs
1.4 Les nombres rationnels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 6 On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \} .$$

P 7 *L'addition des entiers possède les propriétés suivantes:*

1. *L'addition est une loi de composition interne dans* $\mathbb{N}$. *Si* m *et* n *sont deux entiers naturels; on sait que leur somme est une entier* $m+n \in \mathbb{N}$.
2. *L'addition étant associative dans* $\mathbb{R}$, *elle est a fortiori associative dans* $\mathbb{N}$.

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3, (x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z.$$

3. *L'addition dans* $\mathbb{R}$ *admet le nombre* 0 *comme élément neutre; puisque* 0 *est une entier naturel, il est l'élément neutre pour l'addition dans* $\mathbb{N}$.
4. *L'addition dans* $\mathbb{N}$ *est commutative puisque, dans* $\mathbb{R}$, *elle est commutative.*

La multiplication des entiers possède les propriétés suivantes:

1. *La multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$. Si m et n sont deux entiers naturels; on sait que leur produit est une entier $m \times n \in \mathbb{N}$.*
2. *La multiplication étant associative dans $\mathbb{R}$, elle est a fortiori associative dans $\mathbb{N}$.*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, (xy)z = x(yz) = xyz.$$

3. *La multiplication dans $\mathbb{R}$ admet le nombre 1 comme élément neutre; puisque 1 est une entier naturel, il est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.*
4. *La multiplication dans $\mathbb{N}$ est commutative puisque, dans $\mathbb{R}$, elle est commutative.*
5. *La multiplication dans $\mathbb{N}$ est distributive par rapport à l'addition, puisqu'elle l'est dans $\mathbb{R}$*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x.(y + z) = x.y + x.z \ \text{ et } (x + y).z = x.z + y.z.$$

R L'opposé d'un nombre réel x est le le nombre $-x$. Soit n un entier naturel non nul; le nombre $-n$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ possède donc des éléments (par exemple le nombre 2) qui n'admettent pas d'opposé dans $\mathbb{N}$.

P 8

1. *Le seul élément ayant un opposé pour l'addition dans* $\mathbb{N}$ *est* 0.
2. *Le seul élément ayant un inverse pour la multiplication dans* $\mathbb{N}$ *est* 1.

N $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$.

1. Ensembles usuels
1.1 Opérations algébriques
1.2 Les entiers naturels
1.3 Les entiers relatifs
1.4 Les nombres rationnels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 9 On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, -3, \dots \} .$$

P 10

1. *L'addition est une loi de composition interne dans* $\mathbb{Z}$.
2. *L'addition est associative dans* $\mathbb{Z}$.
3. *L'addition admet* 0, *élément de* $\mathbb{Z}$ *comme élément neutre.*
4. *L'addition est commutative dans* $\mathbb{Z}$.
5. *Tout entier relatif admet pour opposé un entier relatif.*
6. *La multiplication est une loi de composition interne dans* $\mathbb{Z}$.
7. *La multiplication est associative dans* $\mathbb{Z}$.
8. *La multiplication admet* 1, *élément de* $\mathbb{Z}$ *comme élément neutre.*
9. *La multiplication est commutative dans* $\mathbb{Z}$.
10. *La multiplication dans* $\mathbb{Z}$ *est distributive par rapport à l'addition.*

P 11 *Les seuls éléments ayant un inverse pour la multiplication dans* $\mathbb{Z}$ *sont* 1 *et* -1.

1. Ensembles usuels
1.1 Opérations algébriques
1.2 Les entiers naturels
1.3 Les entiers relatifs
1.4 Les nombres rationnels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

L'opération inverse de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ (division) n'est pas toujours définie : $\frac{2}{3}$ n'a pas de sens dans $\mathbb{Z}$. L'introduction des nombres rationnels pallie ce défaut.
La *construction* de $\mathbb{Q}$ n'est pas au programme, l'important est de garder à l'esprit les principales propriétés de $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est donc supposé connu (ou construit), il contient $\mathbb{Z}$, et ses éléments sont appelés **nombres rationnels**.

D 12 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est l'ensemble des nombres réels x représentés par $\frac{p}{q}$, avec p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ q \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \} \right\}.$$

N $\mathbb{Q}^\star = \mathbb{Q} \setminus \{ 0 \}$.

À tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ correspond un nombre rationnel écrit sous la forme de **fraction** $\frac{a}{b}$, et tout nombre rationnel s'écrit de cette manière. Une telle écriture n'est pas unique, vu la propriété suivante :

P 13 *Si* $a, c \in \mathbb{Z}$ *et* $b, d \in \mathbb{Z}^\star$,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

P 14

1. *L'addition dans $\mathbb{Q}$ est une loi de composition interne. On a*

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

2. *L'addition est associative, commutative dans $\mathbb{Q}$.*
3. *Le nombre 0 appartient à $\mathbb{Q}$ est élément neutre pour l'addition.*
4. *Le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ a pour opposé $\frac{-p}{q}$.*
5. *La multiplication dans $\mathbb{Q}$ est une loi de composition interne. On a*

$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

6. *La multiplication est associative, commutative dans $\mathbb{Q}$.*
7. *Le nombre 1 appartient à $\mathbb{Q}$ est élément neutre pour la multiplication.*
8. *Tout nombre rationnel non nul a un inverse dans $\mathbb{Q}$. Si $p \neq 0$, $\frac{p}{q}$ a pour inverse $\frac{q}{p}$.*

R On calcule dans $\mathbb{Q}$ comme dans $\mathbb{R}$.

E 15 Il existe des nombres réels non rationnels, appelés **irrationnels** : $\sqrt{2}$, e, π sont irrationnels. Ces exemples seront développés ultérieurement.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

Nous savons déjà comment comparer deux nombres écrits en représentation décimale : on regarde les signes, puis la partie principale (devant la virgule), puis éventuellement les décimales successives[1].

[1] Écrivez l'algorithme en toutes lettres.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 16 L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation notée $\leq$. Cette relation entre deux réel, $x \leq y$, ou $y \geq x$, se lit «x est inférieur ou égal à y», «x est au plus égal à y», «y est supérieur ou égal à x», «y est au moins égal à x».
Cette relation englobe le cas d'égalité; pour l'exclure on utilise la relation $x < y$ qui se lit «x est strictement inférieur à y», ou «y est strictement supérieur à x».

$$x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

On a donc

$$x \leq y \iff x < y \text{ ou } x = y.$$

N

$$\mathbb{R}_+ = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\} \qquad \mathbb{R}_- = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \,\} \qquad \mathbb{R}^\star = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \,\}$$
$$\mathbb{R}_+^\star = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\} \qquad \mathbb{R}_-^\star = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \,\}$$

P 17 *On dit que la relation $\leq$ est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que*

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **réflexive**:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x.$$

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **antisymétrique**:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \;\; \textit{et} \;\; y \leq x) \implies x = y.$$

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **transitive**:*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \;\; \textit{et} \;\; y \leq z) \implies x \leq z.$$

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **totale**:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \;\; \textit{ou} \;\; y \leq x.$$

T 18

- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle réflexive?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle transitive?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle totale?
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est-elle antisymétrique?

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

P 19

1. *Pour comparer deux nombres réels, on peut étudier le signe de leur différence.*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

2. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition.*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \iff x + z \leq y + z.$$

3. *La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la multiplication par les réels positifs.*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (z \geq 0 \ \text{ et } \ x \leq y) \implies xz \leq yz.$$

Nous n'insisterons jamais assez sur le piège tendu par l'assertion 19.3. En effet, on voit encore des gens affirmer

$$\frac{a}{b} \leq 1 \implies a \leq b,$$

sans prendre garde au signe de b.

L 20 *Soit $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors*

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2 \qquad \text{et} \qquad x < y \iff x^2 < y^2.$$

En d'autre termes, on dit que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 21 Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel

$$|x| = \max \{ x, -x \} = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

P 22 *Soient x, y des réels et $a \in \mathbb{R}_+$.*

1. *On a* $|x| \geq 0$ *; de plus* $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$ *;* *en particulier* $|-x| = |x|$.
3. $|x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$.
4. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
5. $|x| < a \iff -a < x < a$.
6. $\sqrt{x^2} = |x|$ *et* $|x|^2 = x^2$.
7. *Si* $x \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$.
8. *Si* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $|x^n| = |x|^n$.
9. $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
10. $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

P 23 **Inégalité triangulaire**

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

De plus, $|x+y| = |x| + |y|$ *si et seulement si* $xy \geq 0$.

Étant donné $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une récurrence immédiate montre que l'on a toujours l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

C 24 *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

P 25 **Caractère archimédien de $\mathbb{R}$**

Pour tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

Démonstration. Si $x = n_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \geq 0$, alors on vérifie facilement que $n = n_0 + 1$ convient. Si $x = -n_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots < 0$, alors $n = -n_0$ (ou même 0) convient. ∎

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

P 26

- *Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel, et même un nombre décimal z, tel que $x < z < y$.*
- *Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre irrationnel, tel que $x < z < y$.*

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 27 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1.$$

On l'appelle **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

R

- La double inégalité $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ s'écrit également

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

- La partie entière de x est donc le plus grand entier inférieur ou égal à x. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor).$$

E 28

1. $\lfloor \pi \rfloor =$	3. $\lfloor 12 \rfloor =$	5. $\lfloor -23.8 \rfloor =$
2. $\lfloor 1.345 \rfloor =$	4. $\lfloor -5 \rfloor =$	6. $\lfloor 11.8 \rfloor =$

La partie entière n'est ni «l'entier sans la virgule», ni «l'entier le plus proche».

P 29

1. *La partie entière d'un réel est un entier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

2. *Les nombres entiers sont les seuls égaux à leurs parties entières*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m.$

R La notation $\lceil x \rceil$ est également utilisée en informatique. C'est le plus petit entier supérieur ou égal à x. On a donc

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & : x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & : x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

R Un nombre décimal est un nombre rationnel de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\lfloor x \times 10^p \rfloor \leq x \times 10^p < \lfloor x \times 10^p \rfloor + 1$$

D'où, en divisant chaque membre par 10^p on trouve

$$\frac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p} \leq x < \frac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}.$$

P 30 *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors*

1. $\dfrac{\lfloor x \times 10^p \rfloor}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par défaut.*
2. $\dfrac{\lfloor x \times 10^p \rfloor + 1}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.*

E 31 Le nombre de Neper $e = 2.7182818284590\ldots$ peut être successivement encadré par

$2 \leq e < 3$	valeurs approchées à 10^0 près par défaut et par excès.
$2.7 \leq e < 2.8$	valeurs approchées à 10^{-1} près par défaut et par excès.
$2.71 \leq e < 2.72$	valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut et par excès.
$2.718 \leq e < 2.719$	valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès.
$2.7182 \leq e < 2.7183$	valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 32 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un réel M est un **majorant** de A si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

  On dit alors que la partie A est **majorée**.

- On dit qu'un réel m est un **minorant** de A si

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

  On dit alors que la partie A est **minorée**.

- Une partie majorée et minorée est dite **bornée**.

La valeur absolue permet de caractériser facilement les parties bornées de $\mathbb{R}$.

P 33 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si*

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq \mu.$$

E 34

- $\mathbb{R}$ ______________________________.
- $[0, 1]$ ____.
- $]0, 1]$ ____ ________.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
2.1 Ordre total sur $\mathbb{R}$
2.2 Compatibilité de l'ordre et des opérations
2.3 Valeur absolue
2.4 Axiome d'Archimède
2.5 Densité
2.6 Partie entière
2.7 Valeur approchée d'un réel
2.8 Partie bornée
2.9 Plus grand élément, plus petit élément

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

D 35 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que a est **le plus grand élément** de A ou le **maximum** de A si

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, x \leq a \qquad .$$

  Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.

- On dit que a est **le plus petit élément** de A ou le **minimum** de A si

$$a \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, a \leq x \qquad .$$

  Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

L'ensemble A n'admet pas nécessairement de plus grand élément.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré
3.1 L'équation $ax + b = 0$
3.2 Système linéaire «2×2»

4. Puissances, racines

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré
3.1 L'équation $ax + b = 0$
3.2 Système linéaire «2×2»

4. Puissances, racines

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

3.1 L'équation $ax + b = 0$

3.2 Système linéaire «2×2»

4. Puissances, racines

Commençons par deux équations très simples,

$$2x - y = 1 \tag{1}$$

$$x + y = 5. \tag{2}$$

Nous pouvons interpréter ce système *par lignes* ou *par colonnes*.
La première approche consiste à s'intéresser séparément à chaque équation (les *lignes*).
L'équation $2x - y = 1$ est représentée par une droite dans le plan (Oxy). La seconde équation $x + y = 5$ est représentée par une seconde droite.

La seconde approche est de s'intéresser aux *vecteurs colonnes* du membre de gauche qui produisent le vecteur du membre de droite. Les deux équations s'écrivent sous forme d'un seule *équation vectorielle* :

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Le problème est alors de trouver la combinaison de vecteurs du membre de gauche qui produit le vecteur du membre de droite.
Les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 1)$ sont représentés en gras. Les inconnues sont les scalaires x et y qui multiplient les vecteurs colonne. L'idée est d'additionner 2 fois la colonne 1 et 3 fois la colonne 2. Géométriquement, on trouve un parallélogramme. De manière algébrique, cela produit le bon vecteur $(1, 5)$, second membre de notre équation. Ce qui confirme la solution $x = 2$, $y = 3$.

D 36 Le **déterminant du système**

$$\begin{cases} ax & +by & = u \\ cx & +dy & = v \end{cases}$$

est le réel $ad - bc$, noté $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

T 37 *On considère le système*

$$\begin{cases} ax & +by & = u \\ cx & +dy & = v \end{cases}$$

1. *Si* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, *alors le système admet une et une seule solution.*
2. *Si* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, *alors*
   - *le système admet aucune solution*
   - *ou bien le système admet une infinité de solutions.*

E 38 Résoudre les systèmes suivants

1. $\left\{\begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 4x & -3y & = -17 \end{array}\right.$.
2. $\left\{\begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 6x & -2y & = -1 \end{array}\right.$.
3. $\left\{\begin{array}{rrl} -3x & +y & = 9 \\ 6x & -2y & = -18 \end{array}\right.$.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines
4.1 Puissances entières
4.2 Racines
4.3 Second degrée

1. Ensembles usuels

2. Relation d’ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines
4.1 Puissances entières
4.2 Racines
4.3 Second degrée

D 39

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^n = a \cdot a \dots a$ (n facteurs).
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^\star$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

P 40 *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $p, q \in \mathbb{N}$*:*

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p / a^q = a^{p-q}$;
3. *Si* $a \neq 0$, $a^{-p} = 1/a^p = (1/a)^p$;
4. $(a^p)^q = a^{pq}$;
5. $a^p b^p = (ab)^p$;
6. $a^p / b^p = (a/b)^p$;
7. $a > 1$ *et* $p < q \implies a^p < a^q$;
8. $0 < a < 1$ *et* $p < q \implies a^p > a^q$;
9. $p > 0$ *et* $0 < a < b \implies a^p < b^p$;
10. $p < 0$ *et* $0 < a < b \implies a^p > b^p$.

Ceci reste valable pour $a, b \in \mathbb{R}^\star$ *et* $p, q \in \mathbb{Z}$.

P 41 *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^2 = b^2 \iff |a| = |b| \iff (a = b \text{ ou } a = -b).$$

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines
4.1 Puissances entières
4.2 Racines
4.3 Second degrée

D 42 Étant donnée $a \in \mathbb{R}_+$, il existe un réel positif unique dont le carré est égale à a. On l'appelle la **racine carrée arithmétique** de a et on la note $\sqrt{a}$.

Plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$ est l'unique réel positif b tel que $b^n = a$.

P 43

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. *Pour tous* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
3. *Pour tous* $a \geq 0$ *et* $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

1. Ensembles usuels

2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3. Le premier degré

4. Puissances, racines

4.1 Puissances entières

4.2 Racines

4.3 Second degrée

Dans les rappels ci-dessous, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{E}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$; ce nombre est appelé le **discriminant** du trinome.

- Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, (E) a une et une seule solution $\dfrac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solutions.

Signe du trinome $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$:

x		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2b}$	
$ax^2 + bx + c$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

- Si $\Delta = 0$:

x		$\frac{-b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

- Si $\Delta < 0$: partout le signe de a.

Pour résumé: $ax^2 + bx + c$ a le signe de a, sauf éventuellement entre ses racines.