

Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le mardi 7 février

Problème 1 Une équation fonctionnelle

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble F des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur \mathbb{R} et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2. \quad (1)$$

Partie A

A1. Vérifier que la fonction $x \mapsto 2^{(x^2)}$ appartient à F .

A2. Montrer que si $f \in F$, alors $-f \in F$.

A3. Écrire ce que devient (1) dans chacun des cas suivants

$$x = 0; \quad y = 0; \quad x = y.$$

A4. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $f(0)$ quand f décrit F (on raisonnera par double inclusion).

A5. Soit $f \in F$.

(a) Montrer l'équivalence

$$f = \tilde{0} \iff f(0) = 0;$$

où $\tilde{0}$ désigne l'application identiquement nulle.

(b) Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$, alors $f(0) = 0$. On pourra montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0.$$

(c) Montrer que si $f \neq \tilde{0}$, alors $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

A6. Montrer que si $f \in F$, alors f est une fonction paire.

Partie B

Pour résoudre (1), on établit une autre équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y)); \quad (2)$$

et on note G l'ensemble des fonctions g continues sur \mathbb{R} vérifiant (2).

B1. Montrer que

$$\{ f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \} = \{ \exp(g) \mid g \in G \}.$$

B2. Soit $g \in G$.

(a) Calculer $g(0)$.

(b) Montrer que g est une fonction paire.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(nx) = n^2 g(x).$$

(d) Exprimer $g(r)$ en fonction de $g(1)$ pour tout rationnel r .

(e) Sachant que tout réel est limite d'une suite de rationnels, exprimer $g(x)$ en fonction de x et $g(1)$ pour tout réel x .

B3. Déterminer G , puis F .

B4. Tracer dans un même graphique les différents types de courbes représentatives d'éléments de F .