Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le lundi 24 octobre 2022

Problème 1

On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$. On considère les fonctions définies sur E par

$$f_1 : x \mapsto 2 \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}; \qquad f_2 : x \mapsto \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; \qquad f_3 : x \mapsto -\arctan \frac{2x}{1-x^2}.$$

1. Calculer $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas suivants

(a) $\alpha = \frac{59}{5}\pi$;

(b) $\alpha = \frac{84}{5}\pi$;

(c) $\alpha = \frac{76}{5}\pi$.

Votre calculatrice a-t-elle l'air d'accord ?

2. Calculer $\arcsin(\sin u)$, $\arccos(\cos u)$ et $\arctan(\tan u)$ pour

(a) $u \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$;

(b) $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$;

(c) $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

(d) $u \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Vérifiez vos formules sur des exemples simples.

3. Ici ϕ est un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que $\cos(2\phi) = \dfrac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}$.

(b) Montrer de même que $\sin(2\phi) = \dfrac{2\tan\phi}{1+\tan^2\phi}$.

(c) Montrer enfin que $\tan(2\phi) = \dfrac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}$.

4. On étudie f_1 dans cette question.

(a) Déterminer la dérivée de f_1 sur $E \setminus \{ 0 \}$. Comparer avec la dérivée de arctan.
Dans la suite, on pose $\phi = \arctan x$ *avec* $x \in E$.

(b) Calculer $g_1(\phi) = f_1(\tan\phi)$ en utilisant la question **2.**. Retrouver le résultat de la question précédente.

5. Calculer, de même $g_2(\phi) = f_2(\tan\phi)$.

6. Calculer, enfin $g_3(\phi) = f_3(\tan\phi)$.

7. Soit $h : x \mapsto f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. On pose $g(\phi) = g_1(\phi) + g_2(\phi) + g_3(\phi)$. En utilisant les questions précédentes, déterminer l'expression de $g(\phi)$ sur les intervalles

$$\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[, \quad \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[, \quad \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\quad \text{et} \quad \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

En déduire l'expression de h.

8. Faire un beau dessin de la courbe de h.

9. Résoudre l'équation $h(x) = \dfrac{2\pi}{3}$.