Chapter 31 Familles de vecteurs

Exercice 1 (31.1)

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$V = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Solution 1 (31.1)

Remarque. Il y a de nombreuse façons de présenter une solution. Vous trouverez d'autres variations dans les solutions des exercices suivants.

Soit $b = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$b = (x, y, z)^T \in V \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, b = \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{aligned} \alpha - \gamma &= x\\ -2\alpha + 3\beta - \gamma &= y\\ -6\alpha + 6\beta &= z \end{aligned}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{aligned} \alpha - \gamma &= x\\ 3\beta - 3\gamma &= y + 2x\\ 6\beta - 6\gamma &= z + 6x \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \alpha - \gamma &= x\\ 3\beta - 3\gamma &= y + 2x\\ 0 &= z + 2x - 2y \end{aligned}\right.$$

Ce système échelonné est donc compatible si, et seulement si $2x - 2y + z = 0$, autrement dit

$$b = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V \iff 2x - 2y + z = 0.$$

L'espace V est donc le plan d'équation cartésienne $2x - 2y + z = 0$.

Exercice 2 (31.1)

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$V = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Solution 2 (31.1)

Soit $b = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$b = (x, y, z)^T \in V \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, b = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée $(A|b)$ de ce système est telle que

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 2 & -4 & y \\ -6 & 12 & z \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & 0 & y - 2x \\ 0 & 0 & z + 6x \end{array} \right)$$

Le sytème $AX = b$ est donc compatible si, et seulement si $2x - y = 0$ et $6x + z = 0$. Autrement dit,

$$b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff 2x - y = 0 \text{ et } 6x + z = 0.$$

Un système d'équations cartésiennes de V est donc $2x - y = 0$ et $6x + z = 0$. On a donc

$$V = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y = 0 \text{ et } 6x + z = 0 \right\}.$$

Exercice 3 (31.1)

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$$V = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Solution 3 (31.1)

On remarque que ces trois vecteurs sont colinéaires:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Ainsi, $V = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Or

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = \alpha \\ y & = -2\alpha = -2x \end{cases} \iff y = -2x.$$

Finalement, V est la droite d'équation $2x + y = 0$.

Exercice 4 (31.1)

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

Solution 4 (31.1)

V est le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-2 & 3 & -1\\3 & -3 & 0\\2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$, on a

$$(A|x) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & x_1\\-2 & 3 & -1 & x_2\\3 & -3 & 0 & x_3\\2 & 0 & -2 & x_4\end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & x_1\\0 & 3 & -3 & x_2+2x_1\\0 & -3 & +3 & x_3-3x_1\\0 & 0 & 0 & x_4-2x_1\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & x_1\\0 & 3 & -3 & x_2+2x_1\\0 & 0 & 0 & x_3-3x_1+(x_2+2x_1)\\0 & 0 & 0 & x_4-2x_1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & x_1\\0 & 3 & -3 & x_2+2x_1\\0 & 0 & 0 & x_3-x_1+x_2\\0 & 0 & 0 & x_4-2x_1\end{array}\right)$$

Finalement,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathrm{Im}(A) = V \iff x_3 - x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_4 - 2x_1 = 0.$$

On a donc,

$$V = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x_1 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Exercice 5 (31.1)

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, trouver une famille génératrice de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

Solution 5 (31.1)

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) &\iff A^T = A \\ &\iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \iff a_{12} = a_{21} \text{ et } a_{13} = a_{31} \text{ et } a_{23} = a_{32} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}U_1 + a_{22}U_2 + a_{33}U_3 + a_{21}U_4 + a_{31}U_5 + a_{32}U_6, \end{aligned}$$

avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}\left(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\right)$.

De manière analogue, $\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}(V_1, V_2, V_3)$ avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 (31.1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les familles

$$(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq k \leq n} \quad \text{et} \quad \left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n}$$

engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution 6 (31.1)

Exercice 7 (31.2)

Montrer que les vecteur x_1, x_2, x_3 ci-dessous sont linéairement indépendant:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Exprimer le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3.

Solution 7 (31.2)

- Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$. On a donc

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -5\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0 \\ 10\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -5\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0 \\ -11\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, par substitution, on a $\alpha_3 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$; la famille x_1, x_2, x_3 est libre.

Remarque On peut aussi montrer que la matrice $A = (x_1 x_2 x_3)$ est de rang 3 à l'aide d'opération élémentaires sur les lignes, ou en montrant que $\det(A) \neq 0$.

- Exprimer le vecteur v comme combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3 revient à résoudre l'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v$.

En notant A la matrice dont les colonnes sont x_1, x_2, x_3, on a

$$(A|v) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ -1 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -19 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

On trouve donc une unique solution

$$v = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Remarque Le calcul précédent montre que $A \underset{L}{\sim} I_3$. On peut donc se passer de la première partie pour montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est libre. En effet, la matrice A est de rang 3, donc la famille (x_1, x_2, x_3) est une famille de rang 3 avec 3 vecteurs : elle est libre.

Exercice 8 (31.2)

Soit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que la famille (x_1, x_2, v) soit liée. Exhiber un vecteur x_3 tel que la famille (x_1, x_2, x_3) soit libre.

Solution 8 (31.2)

Puisque (x_1, x_2) est une famille libre, la famille (x_1, x_2, v) est liée si, et seulement si v est combinaison linéaire de x_1, x_2.

Soit A la matrice dont les colonnes sont x_1, x_2, v.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 3 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & -1/2 & b-3a/2 \\ 0 & -1/2 & c-5a/2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & -1/2 & b-3a/2 \\ 0 & 0 & c-a-b \end{pmatrix}$$

Ainsi, les vecteurs x_1, x_2, v sont linéairement dépendants si, et seulement si les coefficients de v vérifient

$$a + b - c = 0.$$

Remarquez que l'on retrouve l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$: c'est le plan engendré par x_1 et x_2.

Ainsi, pour choisir un vecteur x_3 pour que la famille (x_1, x_2, x_3), il faut choisir un vecteur qui ne vérifie pas cette équation, par exemple $x_3 = (0, 1, 0)^T$.

Exercice 9 (31.2)

Montrer que les vecteurs ci dessous forment une famille liée en déterminant un relation de dépendance linéaire non triviale.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}4\\-11\\5\\-1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}9\\2\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

Solution 9 (31.2)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 9\\ 2 & -1 & -11 & 2\\ 1 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 4 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les vecteurs donnés par l'énoncé. On a alors

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\4\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}4\\-11\\5\\-1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}9\\2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les coefficients des relations de dépendance linéaires entre ce quatre vecteurs sont exactement les éléments du noyau de A.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 9\\ 0 & -1 & -19 & -16\\ 0 & 3 & 1 & -8\\ 0 & 4 & -9 & -21\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 1 & 19 & 16\\ 0 & 3 & 1 & -8\\ 0 & 4 & -9 & -21\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 1 & 19 & 16\\ 0 & 0 & -56 & -56\\ 0 & 0 & -85 & -85\end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 1 & 19 & 16\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Les solution de $Ax = 0$ sont de la forme $(-5t, 3t, -t, t)^T$ où $t \in \mathbb{R}$. Par exemple, la solution $x = (5, -3, 1, -1)^T$ donne la relation de dépendance linéaire

$$5\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-11\\5\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (31.2)

Montrer que si $n > m$, alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est liée.

Solution 10 (31.2)

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ avec $n > m$ et A la matrice dont les colonnes sont $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Alors, la matrice A est de type (m, n) et la forme échelonnée réduite de A possède au plus m pivots. Il y a donc au moins $n - m \geq 1$ colonne sans pivot. Ainsi, le système d'équations $Ax = 0$ admet au moins une solution non triviale, et les colonnes de A sont donc linéairement dépendantes.

Exercice 11 (31.2)

Soit $\sigma = \left(X^2 + 1, 2X^2 - X + 1, -X^2 + X\right)$.

1. La famille σ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?
2. La famille σ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Solution 11 (31.2)

Les deux questions sont équivalentes puisque $\operatorname{card}\sigma = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$. Nous répondons aux deux «pour l'exercice».

1. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(X^2+1) + \beta(2X^2 - X + 1) + \gamma(-X^2 + X) = 0 \implies (\alpha + 2\beta - \gamma)X^2 + (-\beta + \gamma)X + \alpha + \beta = 0$$
$$\implies \left\{\begin{array}{rl} \alpha + 2\beta - \gamma & = 0 \\ -\beta + \gamma & = 0 \\ \alpha + \beta & = 0 \end{array}\right. \underset{L_1 - L_3}{\implies} \left\{\begin{array}{rl} \beta - \gamma & = 0 \\ -\beta + \gamma & = 0 \\ \alpha + \beta & = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rl} \alpha & = -\gamma \\ \beta & = \gamma \end{array}\right.$$

On ne peut pas conclure directement car nous avons rédiger avec des implication. Néanmoins, on peut vérifier directement que la famille σ n'est pas libre, en effet

$$-(X^2+1) + (2X^2 - X + 1) + (-X^2 + X) = 0.$$

2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(X^2+1) + \beta(2X^2 - X + 1), +\gamma(-X^2 + X) = P$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta & = a_0 \\ -\beta + \gamma & = a_1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma & = a_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta & = a_0 \\ -\beta + \gamma & = a_1 \\ \beta - \gamma & = a_2 - a_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta & = a_0 \\ -\beta + \gamma & = a_1 \\ 0 & = a_2 + a_1 - a_0 \end{array}\right.$$

Ce système est compatible si, et seulement si $a_2 + a_1 - a_0 = 0$. Ainsi, la famille σ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12 (31.2)

Montrer de deux manières que les trois fonctions

$$f : x \mapsto e^x \qquad g : x \mapsto x^2 \qquad h : x \mapsto \ln(x)$$

forment une famille libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

1. une fois, en donnant des valeurs particulières à la variable x;
2. une autre fois, en utilisant les croissances comparées des trois fonctions en $+\infty$.

Exercice 13 (31.2)

Soit

$$f_1 : x \mapsto x; \qquad f_2 : x \mapsto \ln x; \qquad f_3 : x \mapsto \exp(x).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right)$.

Solution 13 (31.2)

Exercice 14 (31.2)

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_1(x) = e^{x+1}, \qquad f_2(x) = e^{x+2}, \qquad f_3(x) = e^{x+3}.$$

La famille $\left(f_1, f_2, f_3\right)$ est-elle libre dans E ?

Solution 14 (31.2)

On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = e^{x+2} = ee^{x+1} = ef_1(x).$$

Ainsi, $f_2 = ef_1$ et la famille (f_1, f_2) est liée, et *a fortiori*, la famille (f_1, f_2, f_3) également.

Exercice 15 (31.2)

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_1(x) = |x-1|, \qquad g_2(x) = |x-2|, \qquad g_3(x) = |x-3|.$$

La famille $\left(g_1, g_2, g_3\right)$ est-elle libre dans E?

Solution 15 (31.2)

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0_E$$

où $0_E = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} : R \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Cela signifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3\right)(x) = 0_E(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = 0.$$

En spécialisant pour $x = 1, 2, 3$ on obtient successivement les relations

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

et l'on obtient facilement $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. La famille (g_1, g_2, g_3) est donc libre.

Exercice 16 (31.2)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ où

$$f_k : x \mapsto e^{a_k x}$$

est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution 16 (31.2)

Exercice 17 (31.2)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ où

$$f_k : x \mapsto \sin(kx)$$

est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution 17 (31.2)

Exercice 18 (31.2)

On considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.

2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.

3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.

4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.

5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 19 (31.2)

En utilisant la définition de famille libre. Montrer que tout sous famille (non vide) d'une famille libre est une famille libre.

Solution 19 (31.2)

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ un famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. On considère une sous famille $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ de $\mathcal{F}$, où $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \dots + \alpha_k v_{i_k} = 0.$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\beta_i = \alpha_r$ si $i = i_r$ et $\beta_i = 0$ sinon. Alors

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = \sum_{i \in \{ i_1, \dots, i_k \}} \beta_i v_i + \sum_{i \notin \{ i_1, \dots, i_k \}} \cancel{\beta_i} v_i = \sum_{r=1}^{k} \alpha_r v_{i_r} + 0 = 0.$$

Puisque la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre, on a $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, et en particulier $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$: la famille $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ est donc également libre.

Exercice 20 (31.2)

Soit A un matrice quelconque. On suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls, v_1 et v_2, tels que $Av_1 = 2v_1$ et $Av_2 = 5v_2$.
Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.
Pouvez-vous généraliser ce résultat ?

Solution 20 (31.2)
Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0.$$

En multipliant cette égalité à gauche par la matrice A, on obtient

$$A\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 = \alpha_1 \cdot 2v_1 + \alpha_2 \cdot 5v_2 = 2\alpha_1 v_1 + 5\alpha_2 v_2 = 0.$$

puisque $A\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) = A0 = 0$. En additionnant (-2) fois la relation $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ à cette dernière relation, on obtient

$$0v_1 + 3\alpha_2 v_2 = 0,$$

et puisque $v_2 \neq 0$, on a $\alpha_2 = 0$, d'où $\alpha_1 v_1 = 0$ puis $\alpha_1 = 0$ car $v_1 \neq 0$.

Conclusion

La famille (v_1, v_2) est libre.

Généralisation possibles:

- Si $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$ où λ_1, λ_2 sont des scalaires fixés tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et v_1 et v_2 sont non nuls, alors la famille (v_1, v_2) est libre.
- Si $Av_1 = 2v_1, Av_2 = 5v_2, Av_3 = 11v_3$ et si v_1, v_2, v_3 sont tous non nuls, alors (v_1, v_2, v_3) est libre.
- Plus généralement, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires *distincts* fixés et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs non nuls tels que $Av_i = \lambda_i v_i$ et $v_i \neq 0$, alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

Exercice 21 (31.2)

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 22 (31.3)

Donner une base du plan $(0xz)$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution 22 (31.3)

Le plan $(0xz)$ de $\mathbb{R}^3$ est constitué des vecteurs de la forme $(x, 0, z)^T$. Ainsi (e_1, e_3) où $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ est une base de $(0xz)$.

Exercice 23 (31.3)

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$V = \left\{ (x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - t = 0 \right\}$$
$$\text{et } W = \left\{ (x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y - z = y + t = 0 \right\}.$$

1. Préciser une base et la dimension de V.
   Déterminer les coordonnées dans cette base de $a = (3, 1, 2, 4)^T$.
2. Préciser une base et la dimension de W.
   Déterminer les coordonnées dans cette base de $b = (4, 1, 3, -1)^T$.
3. Préciser une base et la dimension de $V \cap W$.

Solution 23 (31.3)

Exercice 24 (31.3)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad d = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad e = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de (a, b, c, d, e), préciser des relations de dépendance linéaire entre a, b, c, d, e et donner une base de Vect (a, b, c, d, e).

Solution 24 (31.3)

Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 4 & 7 & -4 \\ 4 & -1 & 0 & 9 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs a, b, c, d, e.

On a

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d + \alpha_5 e = 0 \iff Ax = 0 \quad \text{où} \quad x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)^T.$$

Or

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & 14 \\ 0 & -13 & 8 & 37 & -42 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 12 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 8 & 37 & -42 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & 12 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{rg}(a, b, c, d, e) = 3.$ On peut également écrire les relations de dépendances linéaires

$$d = 2a - b + 3c \qquad \text{et} \qquad e = -a + 2b - 2c$$

Ainsi (a, b, c) est une base de $\text{Vect}(a, b, c, d, e)$.

Exercice 25 (31.3)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base.

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X]$.
2. $F_2 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(1) = 0 \right\}$.
3. $F_3 = \left\{ P' \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $F_4 = \left\{ a(X^3 - 1) + b(X^2 - 2) + c(X + 4) \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
5. $F_5 = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \;\middle|\; P(1) = P(2) = 0 \right\}$.
6. $F_6 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; P' = 0 \right\}$.
7. $F_7 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P'' = 0 \right\}$.
8. $F_8 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

Solution 25 (31.3)

Solutions partielles. Ici, on détermine seulement une famille génératrice. Il faut ensuite vérifier que la famille obtenue est bien libre.

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}\{ 1, X, X^2 \}$.
2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F_2 \iff P(1) = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 &\iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff P = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \\ &\iff P = a_1(X - 1) + a_2(X^2 - 1) + a_3(X^3 - 1). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_2 = \operatorname{Vect}\{ X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1 \}.$$

Variante. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F_2 \iff P(1) = 0 \iff X-1|P \text{ et } \deg P \leq 3 &\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X-1)Q \text{ et } \deg Q \leq 2 \\ &\iff \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, P = (X - 1)(a_0 + a_1X + a_2X^2) \\ &\iff \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, P = a_0(X - 1) + a_1X(X - 1) + a_2X^2(X - 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_3 = \operatorname{Vect}\left\{ X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2 \right\}.$$

3. $F_3 = \mathbb{R}_{n-1}[X] = \operatorname{Vect}\{ 1, X, X^2, \dots, X^{n-1} \}$.
4. $F_4 = \operatorname{Vect}\{ X^3 - 1, X^2 - 2, X + 4 \}$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$P \in F_5 \iff P(1) = P(2) = 0 \text{ et } \deg P \leq 4 \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X-1)(X-2)Q \text{ et } \deg Q \leq 2 \iff \exists (a, b,$$

Ainsi,
$$F_5 = \operatorname{Vect}\{ (X-1)(X-2), X(X-1)(X-2), X^2(X-1)(X-2) \}.$$

6. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.
$$P \in F_6 \iff P' = 0 \iff b + 2cX = 0 \iff b = 0 \text{ et } 2c = 0 \iff P = a.$$

Ainsi, $F_6 = \operatorname{Vect}\{ 1 \} = \mathbb{R}_0[X]$.

7. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.
$$P \in F_7 \iff P'' = 0 \iff 2c + 6dX = 0 \iff 2c = 0 \text{ et } 6d = 0 \iff P = a + bX.$$

Ainsi, $F_7 = \operatorname{Vect}\{ 1, X \} = \mathbb{R}_1[X]$.

8. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.
$$\begin{aligned} P \in F_8 \iff \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 &\iff \int_0^1 a + bt + ct^2\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\iff a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 0 \iff a = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{3}c \\ &\iff P = b\left(X - \frac{1}{2}\right) + c\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $F_8 = \operatorname{Vect}\left\{ X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{3} \right\}$.

Exercice 26 (31.3)

Soient a et b deux nombres complexes distincts. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 admettant a et b comme racines est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$. Trouver une base de cet espace.

Solution 26 (31.3)

Problème 27 (31.3) *Polynômes interpolateurs de Lagrange*

Soit n un entier naturel non nul et $(a_1, \dots, a_n)$ n nombres réels deux à deux distincts. On leur associe les polynômes $L_1, \dots, L_n$ définis, pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, par

$$L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}. \tag{1}$$

Par exemple, *si* $n = 3$, on a

$$L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \qquad L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \qquad L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}. \tag{2}$$

Dans la suite, *n est quelconque*.

1. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, déterminer le degré de L_j.

2. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, déterminer les racines de L_j.

3. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, calculer $L_j(a_j)$.

4. Montrer que $\left(L_1, \dots, L_n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose

$$Q = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j. \tag{3}$$

(a) Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, calculer $Q(a_k)$.

(b) Montrer alors que $P = Q$.

6. En déduire que $\left(L_1, \dots, L_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On l'appelle base de Lagrange. Que représente donc $P(a_j)$ pour le polynôme P dans la base de Lagrange ?

7. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^q par $Q = (X - a_1) \dots (X - a_n)$ est

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^q L_j.$$

8. Soient a et b deux réels distincts tels que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k \in [a, b]$. Soit aussi une fonction $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. Déduire de la question **5.** qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad P_n(a_k) = f(a_k).$$

Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur $[a, b]$ relativement aux points $\{a_1, \dots, a_n\}$: c'est donc l'unique polynôme de degré $\leq n - 1$ prenant les mêmes valeurs que f aux points $(a_1, \dots, a_n)$.

Solution 27 (31.3)

1. L_j est le produit de $n - 1$ polynômes de degré 1, donc $\deg L_j = 1$.

2. Si $i \in [\![1, n]\!]$ et $i \neq j$, alors $(X - a_i) \mid L_j$, en effet,

$$L_n = \frac{(X - a_i)}{a_j - a_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i \\ k\neq j}}^{n} \frac{(X - a_k}{a_j - a_k},$$

d'où $L_j(a_i) = 0$. Les réels $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ sont donc racines de L_j. Puisque $\deg L_j = n - 1$, ce sont les seules racines possibles.

3. $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} 1 = 1$.

4. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n = 0$. En évaluant ces polynômes en a_k, $k = 1, \dots, n$, on obtient,

$$0 = \lambda_1 L_1(a_k) + \dots + \lambda_n L_n(a_k) = \lambda_k L_k(a_k) = \lambda_k.$$

On a donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$: la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est libre.

5. (a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} Q(a_k) &= \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j(a_k) \\ &= P(a_k) L_k(a_k) && \because L_j(a_k) = 0 \text{ si } j \neq k \\ &= P(a_k). \end{aligned}$$

(b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k) = P(a_k)$, c'est-à-dire P et Q coïncident sur n réels distincts. Or $\deg(P) \leq n - 1$ et $\deg Q \leq \max \left\{ \deg L_j \;\middle|\; j \in [\![1, n]\!] \right\} = n - 1$.

Les polynômes P et Q sont donc égaux.

6. D'après la question **4.**, $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. La question **5.** prouve que pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j$; la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Conclusion : $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(P(a_1), \dots, P(a_n))$ sont les coordonnées de P dans cette base. [1]

7. Soit R le reste de la division euclidienne de X^q par Q. Il existe donc $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^q = AQ + R \text{ et } \deg R < \deg Q = n.$$

Puisque $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $R = \sum_{j=1}^{n} R(a_j) L_j$. Or pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$a_j^q = A(a_j) Q(a_j) + R(a_j) \text{ et } Q(a_j) = 0$$

donc $R(a_j) = a_j^q$.

Conclusion : $R = \sum_{j=1}^{n} a_j^q L_j$.

[1] On peut également utiliser $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$...

8. On pose $P = \sum_{j=1}^{n} f(a_j)L_j$. Le même calcul qu'en **5.**a montrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P_n(a_k) = f(a_k).$$

Si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Q(a_k) = f(a_k),$$

alors P_n et Q coïncident sur n réels distincts $a_1, \dots, a_n$. Or $\deg P_n \leq n - 1$ et $\deg Q \leq n - 1$: P_n et Q sont donc égaux, d'où l'unicité du polynôme P_n.

Exercice 28 (31.3)

Soient F et G les sous-ensembles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définis par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{et } G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

Solution 28 (31.3)

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de E. Alors $M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & c+c' \\ 0 & b+b' & 0 \\ c+c' & 0 & a+a' \end{pmatrix} \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & \lambda c \\ 0 & \lambda b & 0 \\ \lambda c & 0 & \lambda a \end{pmatrix}$ appartient à E, tout comme la matrice 0. Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de E. Alors $M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à E et la relation qui précéde montre que elles engendrent E. D'autre part, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est libre et engendre E. C'est une base de E.

Exercice 29 (31.3)

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit $A \in E$ fixé et

$$F = \{ M \in E \mid AM = MA \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F.

Solution 29 (31.3)

1. On a $F \subset E$. Deplus, $A0 = 0 = 0A$, donc $0 \in F$ (la matrice nulle). Soit $M, N \in F$, alors $AM = MA$ et $AN = NA$ et donc

$$A(M+N) = AM + AN = MA + NA = (M+N)A$$

d'où $M + N \in F$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha M) = \alpha AM = \alpha MA = (\alpha M)A,$$

donc $\alpha M \in F$.

Conclusion

F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$. Alors

$$AM = \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ x-z & y-t \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} x+y & -x-y \\ z+t & -z-t \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$M \in F \iff AM = MA \iff \begin{cases} x-z &= x+y \\ y-t &= -x-y \\ x-z &= z+t \\ y-t &= -z-t \end{cases} \iff \begin{cases} y+z &= 0 \\ x+2y-t &= 0 \\ x-2z-t &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -2y+t \\ z &= -y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+t & y \\ -y & t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 30 (31.3)

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}$ la suite de réels dont le terme d'indice n est $u_n^{(k)} = n^k$. Démontrer que la famille $\left(u^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Solution 30 (31.3)

Exercice 31 (31.3)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de V. Montrer que pour tous vecteurs $u, w \in V$, on a

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}\,(\alpha u + \beta w) = \alpha\,\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta\,\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w).$$

où $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$ désigne la matrice des coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

Solution 31 (31.3)

Soit

$$u = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \qquad \text{et} \qquad w = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n,$$

ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta w &= \alpha(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) + \beta(w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n) \\ &= (\alpha u_1 + \beta w_1) v_1 + (\alpha u_2 + \beta w_2) v_2 + \cdots + (\alpha u_n + \beta w_n) v_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w) &= \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta w_1 \\ \alpha u_2 + \beta w_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta w_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \alpha\,\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta\,\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(w). \end{aligned}$$

Exercice 32 (31.3)

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet $\left(e_1, e_2\right)$ comme base.
À chaque fois, on donnera les relations entre coordonnées d'un même vecteur dans les deux bases en question.

1. λ et μ étant des scalaires différents de 0, montrer que $(\lambda e_1, \mu e_2)$ est encore une base de E.
2. Montrer que $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ est encore une base de E.
3. En déduire que si λ et μ sont deux scalaires différents de 0, $\left(\lambda(e_1 + e_2), \mu(e_1 - e_2)\right)$ est une base de E.

Solution 32 (31.3)

Exercice 33 (31.3)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathfrak{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs. Nous pouvons lui associer les familles suivantes :

- $\mathfrak{F}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ obtenue en multipliant un des vecteurs de $\mathfrak{F}$ par un scalaire différent de 0, c'est-à-dire
$$\begin{cases} v'_k = v_k & \text{si } k \neq j \\ v'_j = \lambda v_j. \end{cases}$$
On code cette opération $v_j \leftarrow \lambda v_j$.

- $\mathfrak{F}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ obtenue en ajoutant à un vecteur de $\mathfrak{F}$ un multiple d'un des autres vecteurs de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} v'_k = v_k & \text{si } k \neq j \\ v'_j = v_j + \lambda v_i & \text{où } i \neq j. \end{cases}$$
On code cette opération $v_j \leftarrow v_j + \lambda v_i$.

- $\mathfrak{F}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ obtenue en échangeant les vecteurs v_i et v_j. On code cette opération $v_i \leftrightarrow v_j$.

Ces opération sont appelée **opérations élémentaires** sur une famille de vecteurs. On suppose que l'on passe de la famille $\mathfrak{F}$ à la famille $\mathfrak{F}'$ par un enchainement d'opération élémentaires.

1. Montrer que la famille $\mathfrak{F}'$ est libre si, et seulement si $\mathfrak{F}$ est libre.

2. Montrer que la famille $\mathfrak{F}'$ est liée si, et seulement si $\mathfrak{F}$ est liée.

3. Montrer que $\mathrm{Vect}(v'_1, \dots, v'_p) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

4. Montrer que la famille $\mathfrak{F}'$ est une base de E si, et seulement si $\mathfrak{F}$ est une base de E.

Solution 33 (31.3)