Chapter 20 Groupes

Remarque. Attention, la numérotation des exercices diffère un peu du poly distribué en cours

Exercice 1 (20.1) *Étude de lois de composition*

Indiquer, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des lois de composition interne. Lorsque c'est le cas, préciser l'éventuelle associativité ou commutativité.

$$\perp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array} \qquad \top : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x+y}{4} \end{array}$$

$$\square : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \big((u_n),(v_n)\big) & \mapsto & (u_0,v_0,u_1,v_1,u_2,v_2,\dots) \end{array} \qquad \triangle : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{e}^{x+y} \end{array}.$$

Exercice 2 (20.1) *Propriétés de lois de composition*

Étudier les lois de composition interne suivantes : commutativité, élément neutre éventuel, éléments inversibles.

$$\star : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(\mathbb{N})\times\mathfrak{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \\ (A,B) & \mapsto & A\cap B \end{array} \qquad \square : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \max(x,y) \end{array}$$

$$\triangle : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}\right)^2 & \to & \mathbb{R}^\star\times\mathbb{R} \\ \big((x,y),(x',y')\big) & \mapsto & \left(xx', xy'+x'y\right) \end{array}$$

Exercice 3 (20.2)

Sur $G=\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}$, on définit la loi $\square$ par $(x,y)\square(x',y')=(xx',xy'+y)$.

1. Montrer que $(G,\square)$ est un groupe.
2. Montrer que $H=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G,\square)$.

Exercice 4 (20.2)

Soit $(G,.)$ un groupe dont on note e l'élément neutre.

Soit $a,b,c\in G$. On suppose que $b^6=e$ et $ab=b^4a$. Montrer les égalités $b^3=e$ et $ab=ba$.

Exercice 5 (20.2)

Soit $(G,\cdot)$ un groupe tel que $x^2=e$ pour tout $x\in G$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6 (20.2) *Étude des groupes à faibles cardinaux*

1. (a) Soit $(G,\cdot)$ un groupe à deux éléments. Construire la table de multiplication de G.
   (b) Soit $(G,\cdot)$ et $(G',\cdot)$ deux groupes à deux éléments. Construire un isomorphisme de groupes de G dans G'.

   Ainsi, tous les groupes à deux éléments sont isomorphes. On dit qu'il n'y a qu'un groupe à deux éléments à isomorphisme près.
2. Soit $(G,\cdot)$ un groupe à trois éléments. Construire la table de multiplication de G. En déduire qu'il n'y a qu'un groupe à trois éléments à isomorphisme près.
3. Montrer que $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2\times\mathbb{U}_2$ (muni de la loi de groupe produit) ne sont pas isomorphes (il y a donc plusieurs «types» de groupes à quatre éléments).

Exercice 7 (20.2)
Soit l'ensemble
$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^\star \right\}.$$
Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathcal{J}$ est un groupe abélien.

Exercice 8 (20.2) *Un exemple de sous-groupe*
On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \left\{ a + b\sqrt{7} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.

Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 9 (20.2)
Montrer que
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \left]-1, 1\right[\right\}$$
est un groupe pour la multiplication matricielle.

Exercice 10 (20.2)
Pour la multiplication usuelle des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes.

1. $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
2. $\left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det M = 1 \right\}$.

Exercice 11 (20.2)
Soit $(G, \star)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble
$$Z(G) = \{ x \in G \mid \forall g \in G, x \star g = g \star x \}.$$
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 12 (20.2)
Soient G un groupe commutatif d'élément neutre e et $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$B = \{ a \in G \mid a^n = e \}.$$
Montrer que B est un sous-groupe de G.

Exercice 13 (20.2)
Soit G un groupe commutatif d'élément neutre e. On pose
$$B = \left\{ a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^\star, a^n = e \right\}.$$
Montrer que B est un sous-groupe de G.

Exercice 14 (20.2)
Soit G un groupe abélien fini (loi notée multiplicativement), de cardinal $n \geq 2$, de neutre e, et a, un élémnet de G.

1. En considérant l'ensemble des a^k, $k = 0, \dots, n$, montrer qu'il existe $d \in [\![1, n]\!]$ tel que $a^d = e$.
2. Justifier l'existence de ω, le plus petit entier supérieur ou égal à 1 vérifiant $a^\omega = e$. ω s'appelle l'**ordre** de l'élément a.
3. Vérifier que
$$< a >= \left\{ e, a, a^2, \dots, a^{\omega-1} \right\}$$
est un sous-groupe de G à ω éléments.

Exercice 15 (20.2)
Soit $(G, +)$ un groupe commutatif ; soient A et B deux parties de G. On définit la somme de A et B, notée $A + B$, par
$$A + B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b \} .$$

1. Montrer que si A et B sont deux sous-groupes de G, $A + B$ est un sous-groupe de G.

2. On suppose maintenant que A et $A + B$ sont deux sous-groupes de G ; B est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 16 (20.2)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe (non commutatif) ; soient A et B deux sous-groupes de G. On définit le produit de A et B, noté $A \cdot B$, par
$$A \cdot B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a.b \} .$$

Montrer les équivalences

$$(A \cdot B \text{ est un sous-groupe de } G) \iff (A \cdot B = B \cdot A) \iff (B \cdot A \subset A \cdot B) .$$

Donner un exemple (en précisant G, A, B) où $A \cdot B$ n'est pas un groupe.

Exercice 17 (20.2)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$. Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^\star, .)$. Déterminer son image et son noyau.

Exercice 18 (20.2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\star$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $\mathrm{e}^{ix} \in \mathbb{C}^\star$.

1. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.

2. Calculer son noyau et son image.

3. f est-elle injective ?

Exercice 19 (20.2)
Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;

2. $|zw| = |z||w|$;

3. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$;

4. $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \, \mathrm{e}^w$;

5. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

6. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Exercice 20 (20.2)
Soit $(G, .)$ un groupe. Pour $a \in G$ fixé, on considère l'application

$$f_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a.x.a^{-1} \end{array} .$$

1. Montrer que f_a est un automorphisme de $(G, .)$.

2. On note $I = \left\{ f_a \mid a \in G \right\}$. Montrer que $(I, \circ)$ est un groupe où $\circ$ est la loi de composition des applications de G dans G.

3. Soit
$$\begin{array}{rccc} \phi : & G & \to & I \\ & a & \mapsto & f_a \end{array}.$$
Montrer que ϕ est un morphisme de $(G, .)$ dans $(I, \circ)$.

Exercice 21 (20.2)
Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose la matrice
$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Soit
$$\mathcal{G} = \left\{ M_{a,b} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \right\} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} f : & \mathcal{G} & \to & \mathbb{R}^\star \\ & M_{a,b} & \mapsto & a^2 + b^2 \end{array}.$$

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.

2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathcal{G}, \times)$ dans le groupe $\left(\mathbb{R}^\star, \times\right)$.

Exercice 22 (20.2)
Soit $(G, .)$ un groupe (quelconque). On note $C(G)$ l'ensemble des caractères de G, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de G vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\star$.

1. Montrer que $C(G)$ est un groupe commutatif pour la loi naturelle. On l'appelle *groupe des caractères* de G.

2. Montrer que $C(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{C}^\star$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\begin{array}{rccc} F : & C(\mathbb{U}_n) & \to & \mathbb{U}_n \\ & f & \mapsto & f(\omega) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

4. Soit $G = G_1 \times G_2$ un groupe produit. En introduisant, pour $f_1 \in C(G_1)$ et $f_2 \in C(G_2)$, l'application
$$\begin{array}{rccc} f : & G & \to & \mathbb{C}^\star \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & f_1(x_1) f_2(x_2) \end{array},$$
montrer que $C(G)$ est isomorphe à $C(G_1) \times C(G_2)$.

Exercice 23 (20.2)
Montrer que si f est une bijection de X sur Y, alors $\begin{array}{rccc} F : & \mathfrak{S}(X) & \to & \mathfrak{S}(Y) \\ & \sigma & \mapsto & f\sigma f^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 24 (20.2)
Le but de cet exercice est de montrer que les groupes $(\mathbb{R}^\star, \times)$ et $(\mathbb{C}^\star, \times)$ ne sont pas isomorphes. Supposons qu'il existe un isomorphisme ϕ de $(\mathbb{R}^\star, \times)$ sur $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

1. Montrer que $\phi(-1) = -1$.

2. Montrer que si $\alpha = \phi^{-1}(i)$, alors $\alpha^2 = -1$.

3. Conclure.

Exercice 25 (20.2)
Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux et $n = pq$. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif vérifiant $x^n = 1$ pour tout $x \in G$. On forme

$$M = \{ x \in G \mid x^p = 1 \} \quad \text{et} \quad N = \{ x \in G \mid x^q = 1 \} .$$

1. Montrer que M et N sont des sous-groupes de $(G, \cdot)$.
2. Vérifier $M \cap N = \{ 1 \}$.
3. Établir que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} M \times N & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Anneaux, corps

Exercice 26 (20.3) *Études d'inversibilités dans un anneau*
Soit $(A, +, .)$ un anneau.

1. Soit $a \in A$ tel que $a^2 = 0$. Démontrer que $1 - a$ et $1 + a$ sont inversibles et expliciter leurs inverses.

2. Généraliser pour $a \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour lequel $a^n = 0$.

Exercice 27 (20.3) *Éléments nilpotents*
Soit $(A, +, .)$ un anneau. Un élément x de A est dit **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x^n = 0$.

1. Démontrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.

2. Démontrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors, xy et $x + y$ sont nilpotents.

Exercice 28 (20.3) *Étude d'un ensemble de fonctions*
Soit A l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$. Démontrer que A est un anneau.
Exercice 29 (20.3)
Soit a un élément d'un ensemble X. Montrer que l'application

$$E_a : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(X, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.
Exercice 30 (20.4)
Montrer que $\mathbb{Q}[i\sqrt{3}] = \left\{ a + bi\sqrt{3} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ est un corps.
Exercice 31 (20.6) *Nilradical d'un anneau*
On appelle nilradical d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ l'ensemble N formé des éléments nilpotents de A, c'est-à-dire des $x \in A$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $x^n = 0_A$.

Montrer que N est un idéal de A.