Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le mardi 29 novembre

On rappelle le résultat suivant, utile tout au long du problème.

THÉORÈME.— *Soit f un application continue définie sur $[a, b]$ (avec $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

- *Si f strictement croissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*
- *Si f strictement décroissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*

Problème 1 *Étude d'une suite définie implicitement*

Dans tout ce problème, n désigne un entier non nul et f_n la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^{2n} - x^n - x - 3.$$

Partie A Généralités sur f_n

A1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = 0$.

A2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles -1 est solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

A3. Calculer les dérivées première et seconde f_n' et f_n'' de la fonction f_n.

A4. Montrer qu'il existe une unique valeur $a_n > 0$ que l'on précisera telle que $f_n''(a_n) = 0$.

A5. En déduire le signe de f_n'' sur $\mathbb{R}_+$ puis les variations de f_n' sur $\mathbb{R}_+$.

A6. En déduire qu'il existe une unique valeur $b_n > 0$ telle que $f_n'(b_n) = 0$.
On ne cherchera pas à calculer explicitement b_n mais on montrera son existence et son unicité par un argument théorique.

A7. Déterminer les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$ et démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution strictement positive. Cette unique solution sera désormais notée x_n.
On ne cherchera pas à calculer explicitement x_n.

Partie B Convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

B1. Démontrer l'encadrement $\forall n \geq 2, 1 < x_n < 2$.

B2. En utilisant l'égalité $f_n(x_n) = 0$, démontrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire que la suite (x_n) est monotone.

B3. Démontrer que la suite (x_n) est convergente. On note ℓ sa limite. Donner un encadrement de ℓ.

B4. Soit $\alpha > 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha)$.

B5. Déduire de la question précédente que $\ell = 1$.

Partie C Détermination d'un encadrement de x_n

C1. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

C2. Démontrer que la suite de terme général $f_n(1+\frac{1}{n})$ converge vers $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-4$.

C3. En partant de l'encadrement $\frac{8}{3}<\mathrm{e}<3$, déterminer le signe de e^2-e-4.

C4. Déduire des questions 2 et 3 qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^{\star}$, tel que pour tout $n \geq N_0$, $f_n(1+\frac{1}{n})>0$.

C5. Déduire de la question précédente que pour tout $n \geq N_0$, $x_n<1+\frac{1}{n}$.

C6. En suivant le même raisonnement, démontrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}^{\star}$, tel que pour tout $n \geq N_1$, $1+\frac{1}{2n}<x_n$.

Partie D Détermination d'un équivalent de x_n-1

D1. Soit $k>0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

D2. Étudier le signe de $\phi(t)=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}-4$ pour $t\in\mathbb{R}$. On désigne par λ l'unique valeur pour laquelle la fonction ϕ s'annule.

D3. Soit $k>\lambda$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $f_n(1+\frac{k}{n})>0$ et $x_n<1+\frac{k}{n}$.

D4. Soit $k<\lambda$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $f_n(1+\frac{k}{n})<0$ et $x_n>1+\frac{k}{n}$.

D5. Conclure que $x_n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$, et que ceci peut aussi écrire

$$x_n = 1+\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ lorsque } n\to+\infty.$$