Chapter 17 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Exercice 1 (17.0)

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $y'(t) - \dfrac{1}{1+t^2}y(t) = 0$, sur $I = \mathbb{R}$.

2. $(t^2-1)y'(t) + ty(t) = 0$, sur $I =]-1, 1[$.

3. $\cos(t)y'(t) - \sin(t)y(t) = 0$, sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Solution 1 (17.0)

1. L'équation

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}y(t) \tag{E}$$

est définie pour $t \in \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ admet pour primitive $t \mapsto \arctan t$. Les solutions de l'équation homogène (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$ sont donc les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\arctan t} \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $t \in]-1, 1[$, l'équation est équivalente à

$$y'(t) = -\frac{t}{t^2-1}y(t). \tag{E}$$

Sur $]-1, 1[$, l'application $t \mapsto -\frac{t}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2-1}$ admet pour primitive

$$t \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right| = -\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right).$$

Les solutions sur l'intervalle $]-1, 1[$ de l'équation homogène (E) sont donc les application de la forme

$$\begin{array}{rcl}]-1, [& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\left(1-t^2\right)^{-1/2} = \lambda\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Sur $I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, l'équation est équivalente à

$$y'(t) = \tan(t)y(t). \tag{E}$$

Sur I, l'application $t \mapsto \tan t$ admet pour primitive $t \mapsto -\ln|\cos t| = -\ln(-\cos t)$. Les solutions sur l'intervalle I de l'équation homogène (E) sont donc les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\ln(-\cos t)} = -\frac{\lambda}{\cos t} \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (17.0)

Soit l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2 \sin x. \tag{E}$$

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).
3. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a \cos(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie $h(0) = 1$.

Solution 2 (17.0)

Exercice 3 (17.0)

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{3}{2t}y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \in]0, +\infty[. \tag{E}$$

Solution 3 (17.0)
Pour $t \in I =]0, +\infty[$, l'équation homogène associée à (E) est

$$y'(t) + \frac{3}{2t}y(t) = 0 \tag{1}$$

qui est équivalente à

$$y'(t) = -\frac{3}{2t}y(t). \tag{H}$$

Sur I, l'application $t \mapsto -\frac{3}{2t}$ admet pour primitive $t \mapsto -\frac{3}{2}\ln t$. Les solutions de l'équation homogène (H) sur l'intervalle I sont donc les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\frac{3}{2}\ln t} = \frac{\lambda}{t^{3/2}} \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous cherchons une solutions particulière de l'équation (E) sous la forme $f : t \mapsto z(t)t^{-3/2}$ où z est une fonction dérivable sur I.

Pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} f'(t) + \frac{3}{2t}f(t) &= z'(t)t^{-3/2} + z(t)(-\frac{3}{2})t^{-5/2} + z(t)\frac{3}{2t}t^{-3/2} \\ &= z'(t)t^{-3/2} + \cancel{z(t)(-\frac{3}{2})t^{-5/2}} + \cancel{z(t)\frac{3}{2}t^{-5/2}} = z'(t)t^{-3/2}. \end{aligned}$$

On choisit donc z de manière à avoir pour $t > 0$,

$$z'(t)t^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

c'est-à-dire

$$z'(t) = \frac{t}{2}.$$

On choisit par exemple $z(t) = \frac{t^2}{4}$ et on obtient une solution particulière pour (E) l'application $f : t \mapsto \frac{t^2}{4t^{3/2}} = \frac{\sqrt{t}}{4}$.

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions sur $I =]0, +\infty[$ sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sqrt{t}}{4} + \frac{\lambda}{t^{3/2}} \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 (17.0)

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante, avec condition initiale

$$xy' - 2y = x^2 \ln x \quad \text{et} \quad y(\mathrm{e}) = 0. \tag{1}$$

Solution 4 (17.0)
On considère l'équation différentielle

$$xy' - 2y = x^2 \ln x. \tag{E}$$

Sur $I = \mathbb{R}_+^\star$, l'équation homogène associée est équivalente

$$y' = \frac{2}{x} y. \tag{H}$$

Sur $I =]0, +\infty[$, l'application $x \mapsto \frac{2}{x}$ a pour primitive $x \mapsto 2 \ln x$. Les solution de l'équation homogène (H) sur l'intervalle I sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x^2 \end{array}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solutions de l'équation (E) sous la forme $f : x \mapsto z(x)x^2$ où z est une fonction dérivable sur I. On a alors,

$$xf'(x) - 2f(x) = xz'(x)x^2 + \cancel{xz(x)2x} - \cancel{2z(x)x^2} = z'(x)x^3.$$

On choisit donc z de manière à avoir pour $x \in I$, $z'(x)x^3 = x^2 \ln x$, c'est-à-dire

$$z'(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x.$$

On choisit par exemple $z(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$. On obtient alors une solution de l'équation (E) définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x.$$

Les solutions de l'équation linéaire (E) sont de les applications de la forme

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + \lambda x^2 \end{array}.$$

De plus,

$$f_\lambda(e) = \frac{1}{2} e^2 + \lambda e^2 = \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) e^2.$$

On a donc $f_\lambda(e) = 0$ si, et seulement si, $\lambda = -\frac{1}{2}$. La solutions du problème de Cauchy (E) est donc l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 x - 1\right) \end{array}.$$

Exercice 5 (17.0)

Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation

$$y'(x) + \frac{1}{x\ln(x)}y(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}. \tag{E}$$

Solution 5 (17.0)

L'équation homogène associée à (E) est

$$y'(x) = -\frac{1}{x\ln x}y(x). \tag{H}$$

Sur I, l'application $x \mapsto -\frac{1}{x\ln x} = -\frac{1/x}{\ln x}$ admet pour primitive $x \mapsto -\ln(\ln x)$. Les solutions de l'équation homogène (H) sur l'intervalle I sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln\ln x} = \frac{\lambda}{\ln x} \end{array}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solutions particulière de l'équation (E) sous la forme $f : x \mapsto z(x)/\ln(x)$ où z est une fonction dérivable sur I. On a alors

$$f'(x) + \frac{1}{x\ln x}f(x) = \frac{z'(x)\ln x - z(x)\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} + \frac{z(x)}{x\ln^2(x)} = \frac{z'(x)}{\ln x}.$$

On choisit donc z de manière à avoir pour $x \in I$,

$$\frac{z'(x)}{\ln x} = \frac{e^x}{\ln x},$$

par exemple $z(x) = e^x$. On obtient alors une solutions particulière de l'équation (E): $f : x \mapsto \frac{e^x}{\ln x}$.

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions sur l'intervalle I sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + \lambda}{\ln x} \end{array}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 (17.0)

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1. $ty'(t) - 2y(t) = t^3e^t$ sur $]0, +\infty[$.
2. $ty'(t) - y(t) = \ln t$.
3. $2y'(t) + ty(t) = t^3$.

Solution 6 (17.0)

1. Les solutions de l'équation $ty'(t) - 2y(t) = t^3e^t$ sur $]0, +\infty[$ sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2e^t + \lambda t^2 \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Pour la recherche d'une solution particulière sous la forme $t \mapsto z(t)t$, on arrive à $z'(t) = \ln t/t^2$. On peut alors effectuer une intégration par parties

$$\int \frac{1}{t^2} \ln t \, \mathrm{d}t = -\frac{\ln t}{t} + \int \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{1 + \ln t}{t} \quad (+Cst).$$

Les solutions de l'équation $ty'(t) - y(t) = \ln t$ sur $]0, +\infty[$ sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -1 - \ln t + \lambda t \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Pour la recherche d'une solution particulière sous la forme $t \mapsto z(t)e^{-t^2/4}$, on arrive à $z'(t) = \frac{1}{2}t^3e^{t^2/4}$. On peut alors effectuer une intégration par parties

$$\int \frac{1}{2}t^3e^{t^2/4} \, \mathrm{d}t = \int t^2 \times \frac{1}{2}te^{t^2/4} \, \mathrm{d}t = t^2e^{t^2/4} - \int 2te^{t^2/4} \, \mathrm{d}t = t^2e^{t^2/4} - 4e^{t^2/4} = \left(t^2 - 4\right) e^{t^2/4}.$$

On peut également utiliser le changement de variables $u = t^2/4$.

Les solutions de l'équation $2y'(t) + ty(t) = t^3$ sur $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 - 4 + \lambda e^{-t^2/4} \end{array}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$