Chapter 15 Suites récurrentes

Exercice 1 (15.0)

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n).

Problème 2 (15.0)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq |v_n - 2| \text{ et } |v_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$
3. Déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$
4. Montrer que (u_n) est convergente.
5. Montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 3 (15.0)
Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?
2. Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_{2n} - u_{2n-1}| \text{ et } |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$
5. Que dire des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})? Conclure que (u_n) est convergente.

Exercice 4 (15.0)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par

$$\begin{gathered} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{gathered}$$

1. Étudier rapidement la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$.

2. Étudier la suite $\left(u_n\right)$ dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.

3. Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

4. Étudier la convergence de $\left(u_n\right)$ dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
   Dans chacun des cas, si $\left(u_n\right)$ admet une limite, on la précisera.

Exercice 5 (15.0)
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{7}{9}\left|u_n - \ell\right|$.

4. Conclure.

Problème 6 (15.0)
On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right) ; \qquad M_n = \max\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right).$$

(m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.)

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).

   (a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$.
   En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

   (b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

   $$m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0.$$

   (c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :

   $$m \leqslant M.$$

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

(a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :

$$M_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) En déduire que $M \leqslant m$, puis que $M = m$.

(c) Établir la convergence de la suite (p_n).

Exercice 7 (15.0)

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0. En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

3. Étudier la monotonie de u.

4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 8 (15.0)

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.

2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

4. *Première méthode*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

(a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α.

(c) Conclure sur la convergence de la suite u.

(d) Écrire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode.*

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α.

(b) En déduire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.