

Durant les vacances, les étudiants ont eu à faire les exercices ci-joint (calcul de développements limités). Les solutions sont données (en espérant qu'il n'y ait pas trop d'erreurs), mais sans justifications et sans le détail des calculs.

- Les étudiants doivent vous apporter ce travail, contenant le détails des calculs (la note zéro est de rigueur pour ceux dont «la petite sœur a mangé le travail»).
- En tant que «question de cours», les étudiants doivent refaire deux ou trois développements limités de la liste *au choix du colleur*.

Vu les contraintes de temps, on pourra éventuellement demander de faire le DL à un ordre plus petit (ou plus grand) pour certains exercices.

Exercice 1

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right).$$

Solution 1

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 2

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}).$$

Solution 2

$$f(x) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 3

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4 + x}\right).$$

Solution 3

$$f(x) = \ln 3 + \frac{5}{12}x - \frac{53}{576}x^2 + o(x^2).$$

Exercice 4

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \right).$$

Solution 4

$$f(x) = \ln 2 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{64}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 5

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln(\ln(e+x)).$$

Solution 5

$$f(x) = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e^2}x^2 + \frac{7}{6e^3}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 6

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1+e^x}} + \ln\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right).$$

Solution 6

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{17}{96}x^2 + o(x^2).$$

Exercice 7

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}.$$

Solution 7

$$f(x) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 + o(x^3) \right).$$

Exercice 8

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{3/x^2}.$$

Solution 8

$$f(x) = \frac{1}{e^{1/2}} \left(1 - \frac{x^2}{60} + o(x^2) \right).$$

Exercice 9

Former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{1/x^2}.$$

Solution 9

$$\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{12}x^2 + o(x^2).$$

Exercice 10

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Solution 10

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 11

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Solution 11

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 12

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\cos x)^{1/x^2}.$$

Solution 12

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \left(1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{160}x^4 \right) + o(x^4).$$

À moins que ce soit un $-\frac{3}{80}x^4 \dots$

Exercice 13

Former le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\cos x}.$$

Solution 13

$$f(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 14

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}.$$

Solution 14

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^5).$$

Exercice 15

Former le développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0 de

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

Solution 15

$$e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6 \right) + o(x^6).$$

Exercice 16

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (e^{\sin x} - 1) (\operatorname{ch} x - \sqrt{\cos x}).$$

Solution 16

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{96}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 17

Former le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (e^x - 1 - \ln(1 + x)) (\sin x - \operatorname{sh} x).$$

Solution 17

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + o(x^8).$$

Exercice 18

Former le développement limité à l'ordre 16 au voisinage de 0 de

$$f(x) = (\operatorname{sh} x - \sin x)^2 (\tan x - \tanh x)^3.$$

Solution 18

$$f(x) = \frac{8}{243}x^{15} + o(x^{16}).$$

Exercice 19

Former le développement limité à l'ordre 100 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln \left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right).$$

Solution 19

$$f(x) = x - \frac{1}{100!}x^{100} + o(x^{100}).$$

Exercice 20

Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Solution 20

$$f(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5).$$