Chapter 11 Relations binaires sur un ensemble

Exercice 1 (11.0)

Déterminer les propriétés des relations binaires suivantes (réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité), et détecter les relations d'équivalence, d'ordre total ou partiel.

1. $\|$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites du plan.
2. $\perp$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites du plan.
3. $\leq$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\geq$ sur $\mathbb{R}$.
5. # (avoir le même cardinal) sur $E = \mathcal{P}(F)$.
6. $\subset$ sur $E = \mathcal{P}(F)$.
7. «être multiple de» sur $\mathbb{N}$.
8. «être multiple de» sur $\mathbb{Z}$.
9. $<$ sur $\mathbb{R}$.
10. $\neq$ sur $\mathbb{R}$.
11. $=$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 1 (11.0)
Nous ferons un joli tableau en cours!

Exercice 2 (11.0)

Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^\star$, on dira que

$$a\mathcal{R}b \iff \left(\exists n \in \mathbb{N}^\star, a = b^n\right).$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Solution 2 (11.0)

Exercice 3 (11.0)

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit une relation $\lhd$ sur E^2 par

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (x',y') \in E^2, (x,y) \lhd (x',y') \iff \big((x \preceq x' \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')\big)$$

On peut également écrire : $(x,y) \lhd (x',y') \iff \big(x \prec x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')\big)$.

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E^2.

2. La relation $\lhd$ s'appelle ordre lexicographique, pourquoi ?

3. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 4 (11.0)

Soit Q l'ensemble $\{ 1, 2, 3, 4 \}$.

1. Écrivez les éléments de $\mathcal{P}(Q)$.

2. Quels sont les majorants de $\{ 2, 4 \}$ pour la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{P}(Q)$?

3. Quels sont les majorants de $\{ 1 \}$?

4. Quels sont les majorants de l'ensemble $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$?

5. La partie $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-elle un maximum ?

6. Donnez un sous-ensemble à plusieurs éléments de $\mathcal{P}(Q)$ qui admette un maximum pour cette relation. Est-ce que $\mathcal{P}(Q)$ a un maximum ?

7. Reprenez pour minimum les questions posées ci-dessus pour maximum.

8. Le sous-ensemble $\{ \{ 1 \}, \{ 2, 4 \} \}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-il une borne supérieure pour la relation d'ordre $\subset$? Une borne inférieure ?

Solution 4 (11.0)

Exercice 5 (11.0)

Sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, [0,1[)$, on définit la relation $\leq$ par

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'ordre.

2. Montrer que l'ordre est partiel.

3. Existe-t-il un plus grand et un plus petit élément ?