Chapitre 36

Variables aléatoires sur un univers fini

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé fini ou $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Pour décrire une quantité X pouvant prendre des valeurs «aléatoires», il suffit de définir une fonction X sur l'ensemble Ω. Ainsi, à chaque «possibilité du hasard» ω, la quantité $X(\omega)$ est déterminée.

Contrairement à ce qui se passe souvent en analyse, ce n'est pas X en tant que fonction qui présente un intérêt. Les notions usuelles de continuité ou de dérivabilité, centrales en analyse, n'ont ici aucun sens. D'ailleurs, la plupart du temps, Ω est inconnu et on ne se soucie pas de le définir correctement. Pour le probabiliste, ce qui compte est : avec quelle fréquence X prend-elle telle ou telle valeur?

36.1 Variables aléatoires

§1 Variables aléatoires

Définition 1

- Une **variable aléatoire** est une application définie sur l'univers Ω et à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ on parle de **variable aléatoire réelle**.
- L'ensemble $X(\Omega)$ est l'**univers image** ou **ensemble des valeurs prises** par X. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie**.

Dans la suite, on ne considère que des variables aléatoires réelles finies. Il est d'usage de noter par des majuscules $(X, Y, \dots)$ les variables aléatoires, réservant x, y, … pour désigner des valeurs déterministes. De manière générique, on notera l'univers image d'une variable aléatoire finie

$$X(\Omega) = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$$

avec les x_k distincts.

Remarque

Malgré son nom, une variable aléatoire n'est pas une *variable* (c'est une fonction) et elle n'est pas *aléatoire*.

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$, on note

$$\{ X = x \} = X^{-1}(\{ x \}) = \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \}$$

et

$$\{ X \in A \} = X^{-1}(A) = \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \}$$

ou encore

$$\{ X \leq x \} = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x \}$$

etc…

La probabilité associée à ces événements sera notée

$$P\{ X = x \}, \quad P\{ X \in A \}, \quad P\{ X \leq x \}$$

plutôt que $P(\{ X = x \})$, $P(\{ X \in A \})$, $P(\{ X \leq x \})$.

Exemple 2

On lance simultanément deux dés discernables et on choisit comme univers $[\![1, 6]\!]^2$, que l'on muni de la probabilité uniforme. Le résultat total est la somme des deux lancers, il est donné par la variable aléatoire S définie par

$$S : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & [\![2, 12]\!] \\ \omega = (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & \omega_1 + \omega_2 \end{array}.$$

Cette variable aléatoire prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers $[\![2, 12]\!]$.

Test 3

Dans le cadre du lancer de dés précédent, expliciter des événements suivants

1. $\{ S > 10 \}$.

2. $\{ S \geq 11 \}$.

3. $\{ S = 4 \}$.

4. $\{ S \leq 1 \}$.

5. $\{ S \in \{ 10, 11 \} \}$.

Exemple 4

Tirage à pile ou face

On peut modéliser un tirage à pile ou face par une variable aléatoire $X : \Omega \to \{ 0, 1 \}$, vérifiant $P\{ X = 1 \} = p$ et $P\{ X = 0 \} = 1 - p$. La valeur de p caractérise la pièce; une pièce «honnête» sera modélisée par $p = 1/2$. Une pièce déséquilibrée (ou un lanceur habile) sera mieux modélisée par une autre valeur de p.

§2 Système complet induit par une variable aléatoire discrète

Proposition 5

Soit X une variable aléatoire d'image $\left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$. Alors les événements

$$\left\{ X = x_1 \right\}, \quad \left\{ X = x_2 \right\}, \quad \dots \quad , \left\{ X = x_n \right\}$$

forment un système complet d'événements.

Ce système complet d'événements est appelé **système complet associé à la variable aléatoire** X.

§3 Loi d'une variable aléatoire

Définition 6

La **loi** d'une variable aléatoire X est la probabilité image $P_X = P \circ X^{<-1>}$, c'est-à-dire l'application

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & P\{ X \in A \} \end{array}.$$

La probabilité P_X est donc déterminée par la distribution de probabilités $(P\{ X = x \})_{x \in E}$.

Théorème 7

La loi d'une variable aléatoire X d'image $\left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$ est entièrement caractérisée par les probabilités $p_k = P\left\{ X = x_k \right\}$. Pour tout partie A de $X(\Omega)$, on a

$$P_X(A) = P\{ X \in A \} = \sum_{x \in A} P\{ X = x \} = \sum_{\substack{k=1\dots n \\ x_k \in A}} P\left\{ X = x_k \right\}.$$

En pratique, déterminer la loi d'une variable aléatoire finie, ce sera donc:

- déterminer son image $X(\Omega) = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$;
- déterminer les probabilités $p_k = P\left\{ X = x_k \right\}$ associées.

Notation

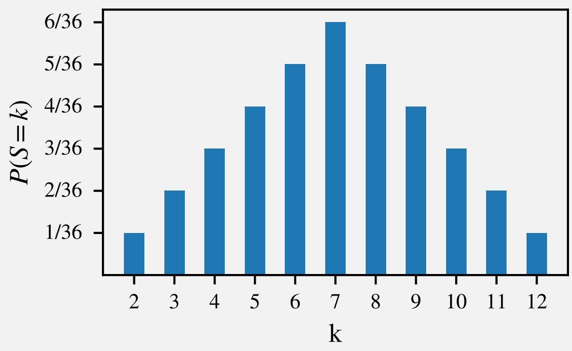
On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Exemple 8

Considérons le lancer de deux dés. Soit S la somme des deux nombres obtenus. Cette variable aléatoire prend ses valeurs dans l'ensembles des entiers $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$. On obtient, par des opérations de dénombrement élémentaires un tableau où sur la première ligne on met les valeurs de S et sur la seconde, les probabilité correspondantes

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_k = P\left\{ S = x_k \right\}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Il est pratique de représenter cette loi sur un histogramme



Test 9 Soit $I = \left[3/2, 4\right]$. Déterminer $P_S(I)$ que l'on note également $P\left\{ \frac{3}{2} \leq S \leq 4 \right\}$.

§4 Loi conditionnelle d'un variable aléatoire

Définition 10 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans E. Soit $B \in \mathcal{T}$ un événement de probabilité non nulle. On appelle **loi conditionnelle de X sachant B** la loi de X sur $(\Omega, \mathcal{T}, P_B)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{array}{rccl} P_X^B : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & A & \mapsto & P_B\left(X^{-1}(A)\right) = \frac{P(\{X \in A\} \cap B)}{P(B)} \end{array}.$$

36.2 Lois classiques

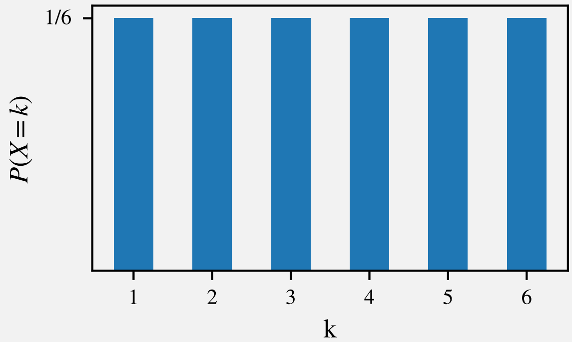
§1 Loi uniforme discrète

Définition 11 **Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$**
Soit a et b deux entiers, $a \leq b$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme (discrète) sur $[\![a, b]\!]$** si

$$X(\Omega) = [\![a, b]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![a, b]\!], P\{X = k\} = \frac{1}{b - a + 1}.$$

On écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

Exemple 12 On lance un dé équilibré et l'on note X son résultat.
La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.



Plus généralement, on peut définir une variable uniforme sur n'importe quel ensemble fini non vide.

Définition 13

Soit E un ensemble fini non vide. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme (discrète) sur E** si

$$X(\Omega) = E \quad \text{et} \quad \forall x \in E, P\{X = x\} = \frac{1}{\operatorname{card}(E)}.$$

On écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(E)$.

§2 Loi de Bernoulli

La loi la plus fondamentale des probabilités est la loi dite de Bernouilli, et modélise une expérience n'ayant que deux issues possibles, baptisées conventionnellement **succès** et **échec**. Une telle expérience est appelée **épreuve de Bernouilli**. Soit p un réel, $0 < p < 1$, et associons au succès la probabilité p, à l'échec la probabilité $1 - p$; on peut alors créer une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès, la valeur 0 en cas d'échec. Le succès est alors l'événement $\{X = 1\}$, tandis que l'échec est l'événement $\{X = 0\}$.

Définition 14

Loi de Bernouilli
Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P\{X = 1\} = p \quad \text{et} \quad P\{X = 0\} = 1 - p.$$

On écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 15

On tire une boule dans une urne avec a boules noires et b boules blanches. Si on note X le nombre de boules blanches tirées, on a alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{a+b}\right)$.

Proposition 16

Soit $X : \Omega \to \{0,1\}$ une variable aléatoire ne prenant pour valeurs que 0 ou 1. Si l'on note $p = P\{X = 1\}$, alors la loi de X est la loi de Bernoulli de paramètre p.

Que cette tautologie nous soit pardonnée.

Proposition 17 *Soit A un événement, alors sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.*

§3 Loi binomiale

On modélise une expérience consistant en la réalisation de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. C'est un **schéma de Bernoulli**. On note X le nombre total de succès.

Par exemple, on peut lancer n fois de suite une pièce déséquilibrée, donnant *pile* avec la probabilité p, et compter le nombre de *piles* obtenus au cours des n lancers.

La variable aléatoire X prend les valeurs $0, 1, 2, 3, \dots n$; la probabilité qu'elle soit égale à un entier k est égale à la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'obtenir k *pile* et $n-k$ *face*, multipliée par le nombre de façons d'obtenir cette configuration, c'est-à-dire le coefficient binomial «k parmi n»

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Définition 18 **Loi binomiale**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0, n]\!], P\{ X = k \} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

En appliquant la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n} P_X(\{ k \}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

ce qui justifie que les $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ définissent bien une mesure probabilité sur $[\![0, n]\!]$.

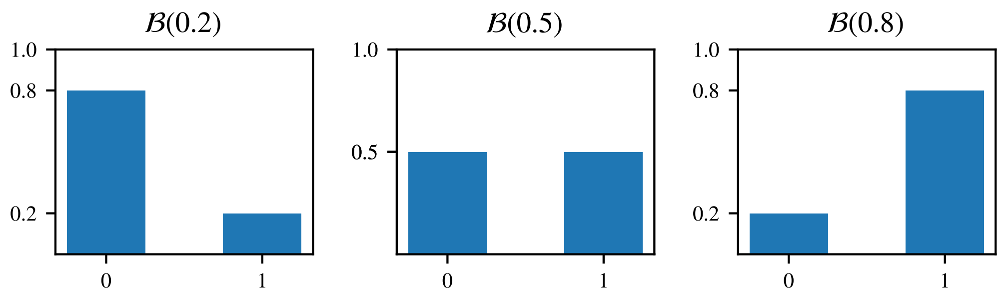


Figure 36.1: Histogramme de la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.2$, de paramètre $p = 0.5$, et de paramètre $p = 0.8$.

Exemple 19

Marcel joue dix fois tous les numéros rouges à la roulette. Il a chaque fois dix huit chances sur trente sept de gagner. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où il gagne. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli où $n = 10$ et $p = \frac{18}{37}$. On a

$$X(\Omega) = [\![0, 10]\!] \qquad \text{et} \qquad P\{\, X = k \,\} = \binom{10}{k} \left(\frac{18}{37}\right)^k \left(\frac{19}{37}\right)^{10-k}.$$

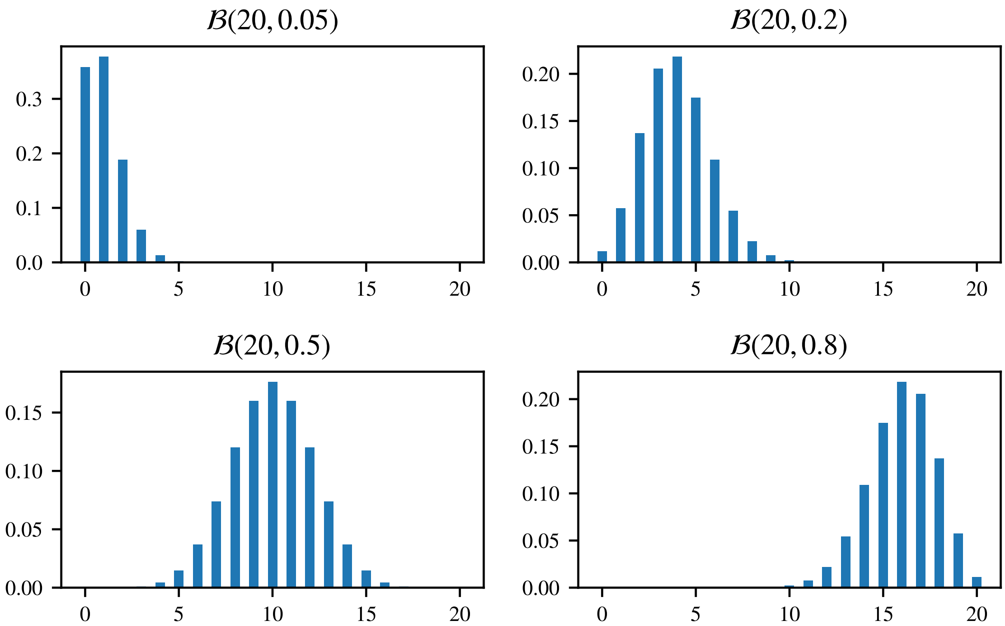


Figure 36.2: Histogrammes de la loi binomiale pour une même valeur $n = 20$ et pour des paramètres $p = 0.05$, $p = 0.2$, $p = 0.5$, $p = 0.8$. On notera la symétrie du cas $p = 0.5$ ainsi que la symétrie entre les cas $p = 0.2$ et $p = 0.8$.

36.3 Loi de l'image d'une variable aléatoire

Notation

Soit X un variable aléatoire finie et soit φ une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$. On peut définir une nouvelle variable aléatoire $Y = \varphi \circ X$ par la formule

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \varphi(X(\omega)).$$

On la note commodément $Y = \varphi(X)$.

La loi de la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ se détermine, de manière théorique, en cherchant pour une valeur y donnée l'ensemble des antécédents de y par φ, ou au moins ceux qui sont également dans $X(\Omega)$.

Proposition 20

Soit X un variable aléatoire finie, d'image $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$. On pose $Y = \varphi(X)$ où φ une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$. Alors

$$Y(\Omega) = \varphi(X(\Omega) = \left\{ \varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n) \right\}$$

et pour $y \in Y(\Omega)$,

$$P\{ Y = y \} = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} P\{ X = x \}.$$

Corollaire 21

Si $X \sim Y$, alors $\varphi(X) \sim \varphi(Y)$.

Exemple 22

Loi de X^2
Soit X un variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega) = \{ -1, 0, 1, 2 \}$, et posons $Y = X^2$. Alors $Y(\Omega) = \{ 0, 1, 4 \}$ et

$$P\{ Y = 0 \} = P\{ X = 0 \} = \frac{1}{4}$$
$$P\{ Y = 1 \} = P\{ X = -1 \} + P\{ X = 1 \} = \frac{1}{2}$$
$$P\{ Y = 4 \} = P\{ X = 2 \} = \frac{1}{4}.$$

Cette loi peut être difficile à déterminer en pratique lorsque φ est fortement non injective. Cela justifie l'intérêt d'un théorème appelé *théorème de transfert*, et qui permet de calculer l'espérance de $\varphi(X)$ sans avoir à expliciter sa loi.

36.4 Moments d'une variable aléatoire finie

§1 Espérance

Définition 23

Soit X un variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, d'image

$$X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}.$$

L'**espérance (mathématique)**de X est définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP\{ X = x \} = \sum_{k=1}^{n} x_k P\{ X = x_k \}.$$

Si $E(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée**.

En notant $p_k = P\{ X = x_k \}$, l'espérance d'une variable aléatoire X est donc la moyenne de ses valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ pondérées par les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

Remarque

Le terme «espérance mathématique» vient des jeux de hasard: il représente le gain moyen d'un joueur. Il véhicule une signification intuitive, celle d'une valeur «moyenne», ou de valeur «attendue» (que traduit bien le terme anglais *expected value*): si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois et que, pour chaque expérience k, on note la valeur x_k prise par X, alors la valeur moyenne «devrait» être proche de $E(X)$. L'emploi du conditionnel représente évidemment un flou inacceptable en mathématiques. Ce sera la grande force de la théorie des probabilités que de donner un sens très précis à l'idée précédente, au moyen des divers théorèmes connus sous le nom de «loi des grands nombres».

Bien sûr, l'espérance n'est pas la seule valeur numérique intéressante lorsque l'on étudie une variable aléatoire. Il est bien connu par exemple que

> 99.9% de la population possède un nombre de jambes strictement supérieur à la moyenne.

La valeur la plus probable (le «mode») ou la valeur médiane (au-dessus de laquelle X prend ses valeurs avec une probabilité $1/2$) sont parfois des paramètres plus pertinents.

Exemple 24

Martine réceptionne les vêtements que les clients apportent au pressing du centre commercial. Ce jour-là, elle a établi vingt tickets de nettoyage de pantalons à 7€, vingt-cinq de vestes à 10€, vingt-deux de manteaux à 20€, vingt-trois de vêtements de peau à 55€ et dix de couettes à 30€. En s'intéressant au tarif du nettoyage correspondant à chaque ticket, on a la série statistique suivante:

prix du ticket	7	10	20	55	30
effectifs	20	25	22	23	10
fréquences	0.2	0.25	0.22	0.23	0.1

Elle prend un ticket au hasard. On note X la variable aléatoire égale au tarif correspondant au ticket. Il y a équiprobabilité, les événements élémentaires de la loi de probabilité de X

ont pour probabilités les fréquences correspondantes:

x_k	7	10	20	55	30
p_k	0.2	0.25	0.22	0.23	0.1

$$E(X) = 7 \times 0.2 + 10 \times 0.25 + 20 \times 0.22 + 55 \times 0.23 + 30 \times 0.1 = 23.95.$$

L'espérance mathématique est égale à la moyenne statistique $\bar{x}$.

Test 25 On considère le nombre X de «pile» lors d'un lancer d'une pièce déséquilibrée, menant à «pile» avec une probabilité p. La variable aléatoire X suit alors la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Déterminer son espérance.

Test 26 Soit A un événement. Calculer $E\left(\mathbb{1}_A\right)$.

Exemple 27 **Espérance d'une loi binomiale**

Soit p un réel $0 \leq p \leq 1$, et soit n un entier naturel non nul. On considère le nombre X de «pile» lors d'un lancer de n pièces identiques mais déséquilibrées, menant à «pile» avec une probabilité p. La variable aléatoire X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Son espérance vaut

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}}_{(p+1-p)^{n-1}} = np \end{aligned}$$

Lemme 28 *Soit X un variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, alors*

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\,\omega\,\}).$$

Démonstration. Notons $X(\Omega) = \left\{\, x_1, x_2, \dots, x_n \,\right\}$ et $D_k = \{\, X = x_k \,\}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k P\{\, X = x_k \,\} = \sum_{k=1}^{n} x_k P(D_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k \sum_{\omega\in D_k} P(\{\,\omega\,\})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\omega\in D_k} x_k P(\{\,\omega\,\})\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\omega\in D_k} X(\omega)P(\{\,\omega\,\})\right). \end{aligned}$$

Or Ω est l'union disjointe $D_1 \underset{\text{disj.}}{\cup} D_2 \underset{\text{disj.}}{\cup} \dots \underset{\text{disj.}}{\cup} D_n$ d'où

$$E(X) = \sum_{\omega\in D_1} X(\omega)P(\{\,\omega\,\}) + \dots + \sum_{\omega\in D_n} X(\omega)P(\{\,\omega\,\}) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\,\omega\,\}).$$

∎

Théorème 29

Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finie. Soient α et β des réels. Alors

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} E(\alpha X + \beta Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} (\alpha X + \beta Y)(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} (\alpha X(\omega)P(\{\omega\}) + \beta Y(\omega)P(\{\omega\})) \\ &= \alpha \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) + \beta \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = \alpha E(X) + \beta E(Y). \end{aligned}$$

∎

Exemple 30

Espérance d'une loi binomiale

Une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ reflète le nombre de succès d'une suite de n tirages indépendants, chacun d'eux ayant une probabilité p d'amener un succès. Si l'on note A_k l'événement : «le k-ième tirage est un succès», on a donc

$$X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k},$$

et par conséquent

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E\left(\mathbb{1}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np.$$

On notera que l'hypothèse d'indépendance des tirages n'a pas été utilisée; cette indépendance eût-elle été remise en question, la loi de X aurait été différente, mais pas son espérance.

Théorème 31

Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finie. On suppose $X \leq Y$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega),$$

alors

$$E(X) \leq E(Y).$$

Démonstration. Pour $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) > 0$, on a donc $X(\omega)P(\{\omega\}) \leq Y(\omega)P(\{\omega\})$ d'où

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) \leq \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = E(Y).$$

∎

Proposition 32

Autre propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finie.

1. *Si X est égale à une constante a, alors $E(X) = a$.*
2. *Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.*
3. *Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$ alors $P\{X = 0\} = 1$.*
4. $|E(X)| \leq E(|X|)$.
5. *Si A est un événement, alors $E\left(\mathbb{1}_A\right) = P(A)$.*

§2 Formule de transfert

Proposition 33 *Soit X une variable aléatoire finie, d'image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et φ une fonction à valeurs réelles définie au moins sur $X(\Omega)$.*

$$E(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P\{X = x\} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) p_k$$

où $p_k = P\{X = x_k\}$.

Démonstration. Soit $Y = \varphi(X)$. Pour $y \in Y(\Omega)$,

$$P\{Y = y\} = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} P\{X = x\}$$

Rappelons que

$$Y(\Omega) = \{\varphi(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{y \mid \exists x \in X(\Omega), \varphi(x) = y\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y P\{Y = y\} = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} P\{X = x\} \right) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} y P\{X = x\} \right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} \varphi(x) P\{X = x\} \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P\{X = x\}
\end{aligned}$$

∎

Exemple 34 On reprend l'exemple où X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1, 2\}$ et $Y = X^2$.

La loi de X est donnée par

x_k	-1	0	1	2
$P\{X = x_k\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

D'après la formule de transfert,

$$E(Y) = E\left(X^2\right) = \sum_{k=-1}^{2} k^2 P\{X = k\} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

On peut également utiliser la loi de $Y = X^2$,

y_k	0	1	4
$P\{Y = y_k\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

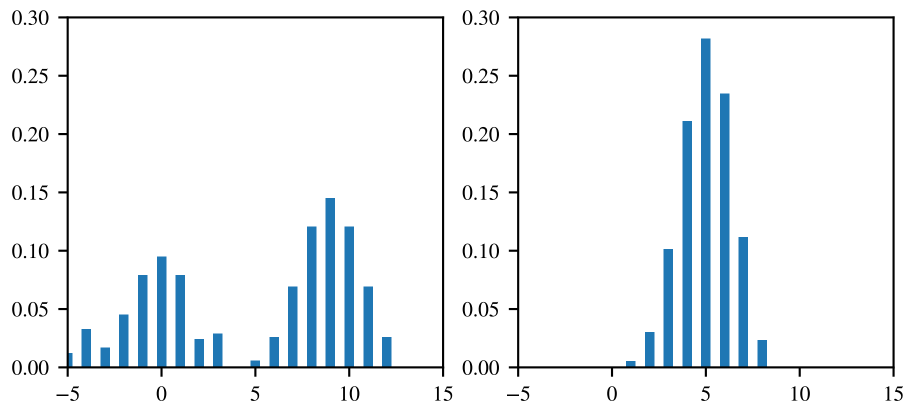
Et donc

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

§3 Variance, écart-type

La variance d'une variable aléatoire réelle X est une valeur numérique permettant de quantifier la dispersion des valeurs possibles de X par rapport à sa moyenne (son espérance).

Ci dessous, les histogrammes de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, chacune de même espérance $E(X) = 5$, mais dont la première est nettement plus dispersée que la seconde.



Pour quantifier cet étalement, on calcule tout d'abord $m = E(X)$, espérance de X. La quantité $X - m$ est donc l'écart à la moyenne. On peut en calculer l'espérance, mais on obtient, par définition, zéro:

$$E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0.$$

Autrement dit, la moyenne des écarts à la moyenne est nulle, les écarts positifs compensant précisément les écarts négatifs. Pour éviter ce phénomène, on peut par exemple calculer

$$\Delta(X) = E(|X - m|),$$

mais c'est une quantité qui est difficile à manipuler. Il est beaucoup plus fructueux de considérer les écarts *quadratiques* à la moyenne.

Définition 35

Soit X une variable aléatoire réelle finie. La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre positif

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \, P\{ X = x \}.$$

On appelle **écart-type** de la variable aléatoire X le réel positif

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Une des raison de l'utilisation de l'écart type est la suivante: la fonction X peut avoir une «dimension» (au sens physique: température, longueur, durée,...). Dans ce cas X et $\sigma(X)$ ont même dimension.

Théorème 36

König-Huygens
Soit X une variable aléatoire réelle finie. Alors

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Corollaire 37

En notant $X(\Omega) = \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \right\}$ et $p_k = P\{ X = x_k \}$, on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \quad \text{et} \quad V(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k \right) - E(X)^2.$$

Exemple 38

Si X est un variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, alors

$$V(X) = p(1 - p).$$

Théorème 39

Soit X une variable aléatoire réelle finie. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

On a donc également $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Définition 40

Soit X une variable aléatoire réelle finie.

- On dit que X est **centrée** lorsque $E(X) = 0$;
- on dit que X est **réduite** lorsque $\sigma(X) = 1$.

Proposition 41

Soit X une variable aléatoire réelle finie. Si $\sigma(X) > 0$, alors la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

§4 Espérance et variance des lois classiques

Proposition 42 *Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

Démonstration.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Par conséquent,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Si X suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$, alors $Y = X - a + 1$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n = b - a + 1$. On a alors $X = Y + a - 1$ et on retrouve

$$E(X) = E(Y) + a - 1 = \frac{b-a+1+1}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$$
$$\text{et } V(X) = V(Y) = \frac{(n-1)(n+1)}{12} = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

∎

Proposition 43 *Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors*

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Proposition 44 *Si X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors*

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Démonstration. Notons $q = 1 - p$. Le calcul de l'espérance est classique (déjà vu):

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$
$$= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k} = np\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{n-1-k}}_{(p+q)^{n-1}} = np$$

En ce qui concerne la variance, nous allons calculer $E(X(X-1))$ plutôt que $E(X^2)$, en utilisant la formule de transfert:

$$E\left(X(X-1)\right) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$
$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}q^{n-k}$$
$$= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k q^{n-2-k} = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

On a alors $E\left(X(X-1)\right) = E\left(X^2\right) - E(X)$ par linéarité, et donc

$$V(X) = E\left(X(X-1)\right) + E(X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

∎

Résumé

Nom	Notation	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}\left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)$	$\llbracket 1,n\rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Uniforme	$\mathcal{U}\left(\llbracket a,b\rrbracket\right)$	$\llbracket a,b\rrbracket$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)(a-b-2)}{12}$
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\begin{cases} p & \text{si } k=0 \\ 1-p & \text{si } k=1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$\llbracket 0,n\rrbracket$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

§5 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 45 **Inégalité de Markov**
Soit X une variable aléatoire réelle finie. On suppose $X \geq 0$. Alors pour tout $a > 0$,

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration. Notons $A = \{X \geq a\}$. Alors $X \geq a\mathbb{1}_A$. Par croissance de l'espérance,

$$E(X) \geq E\left(a\mathbb{1}_A\right) = aE(\mathbb{1}_A) = aP(A) = aP\{X \geq a\}.$$

∎

Théorème 46

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle finie. Alors pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$P\{\ |X - E(X)| \geq \epsilon\ \} \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

ou encore en notant σ^2 la variance de X,

$$P\{\ |X - E(X)| \geq \epsilon\sigma\ \} \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ qui est positive et $a = \epsilon^2$. ∎