Chapter 5 Notions sur les fonctions en analyse

Exercice 1 (5.1)

Déterminer le domaine de définition des fonctions d'une variable réelle ci-dessous.

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x-1}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x}{x-1}}$.
6. $f(x) = \sqrt{x(x+1)^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{-1+2x^2-x^4}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^3}}$.
9. $f(x) = x^{1/\lfloor x \rfloor}$.
10. $f(x) = |x| + \dfrac{x^2}{x}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3 - 7|x| + 6}$.

Solution 1 (5.1)
Solutions à justifier!

1. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{Dom} f =]-\infty, 1]$.
3. $\operatorname{Dom} f = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.
4. $\operatorname{Dom} f = \emptyset$.
5. $\operatorname{Dom} f = [0, 1[$.
6. $\operatorname{Dom} f = \{ -1 \} \cup \mathbb{R}_+$.
7. $\operatorname{Dom} f = \{ -1, 1 \}$.
8. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0, 1 \}$.
9. $\operatorname{Dom} f = [1, +\infty[$.
10. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^\star$.
11. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{ -2, -1, 1, 2 \}$.

Exercice 2 (5.2)

La courbe d'équation $y = f(x)$ étant donnée. Apparier chaque équation à sa courbe représentative. Expliquer votre choix.

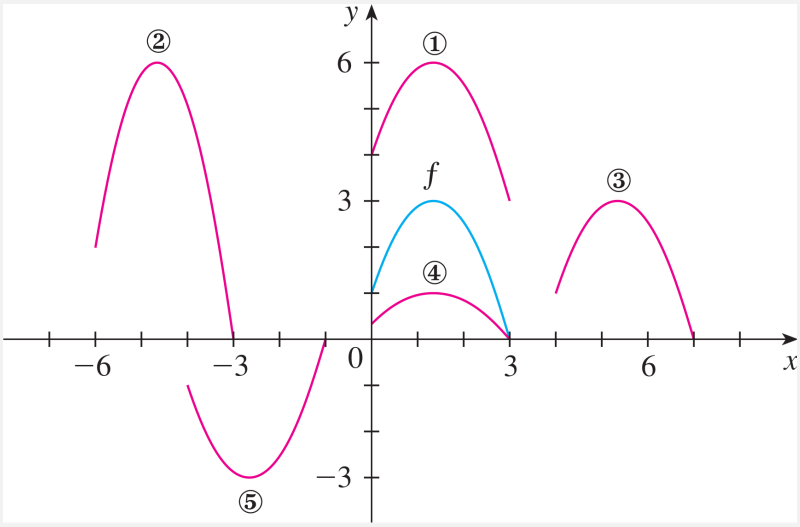
(a) $y = f(x-4)$

(b) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(c) $y = 2f(x+6)$

(d) $y = f(x)+3$

(e) $y = -f(x+4)$



Solution 2 (5.2)

a3, b4, c2, d1, e5.

Exercice 3 (5.2)

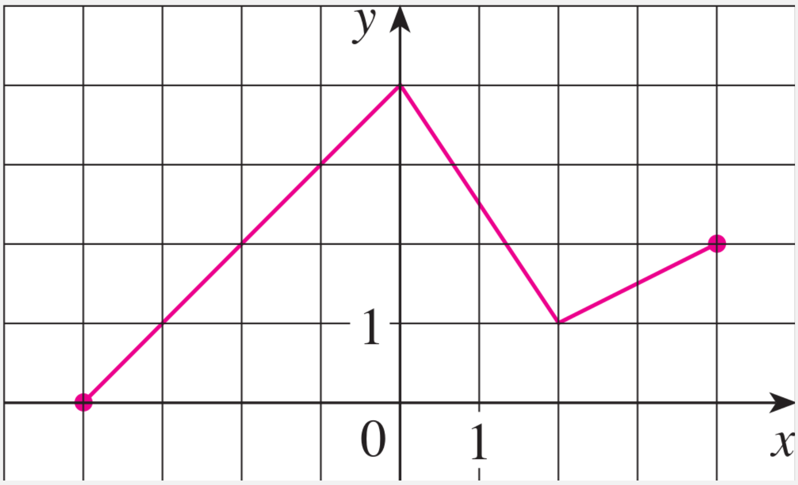
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(x+4)$

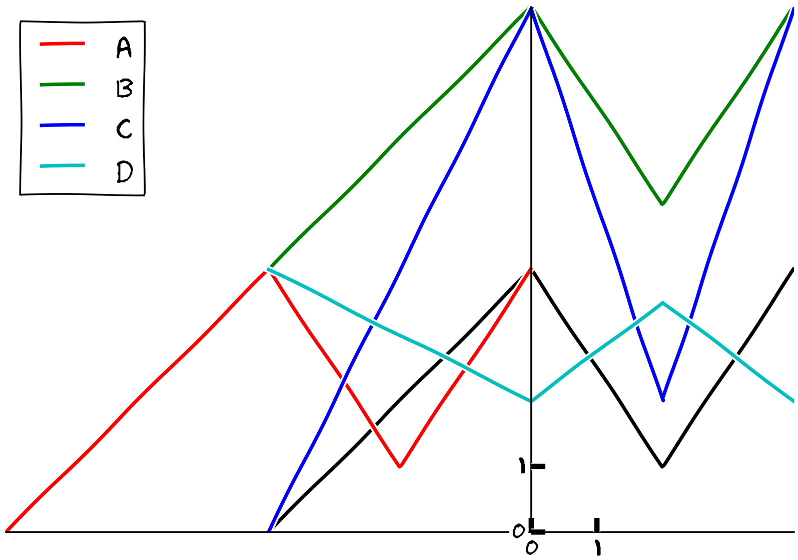
(b) $y = f(x) + 4$

(c) $y = 2f(x)$

(d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 4$



Solution 3 (5.2)



Exercice 4 (5.2)

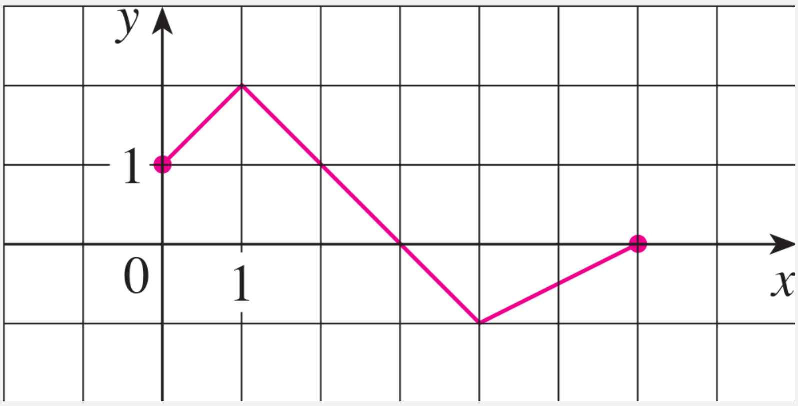
La courbe de f étant donnée, dessiner les courbes suivantes

(a) $y = f(2x)$

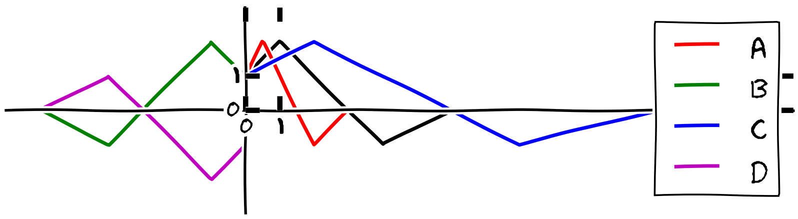
(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(d) $y = -f(-x)$



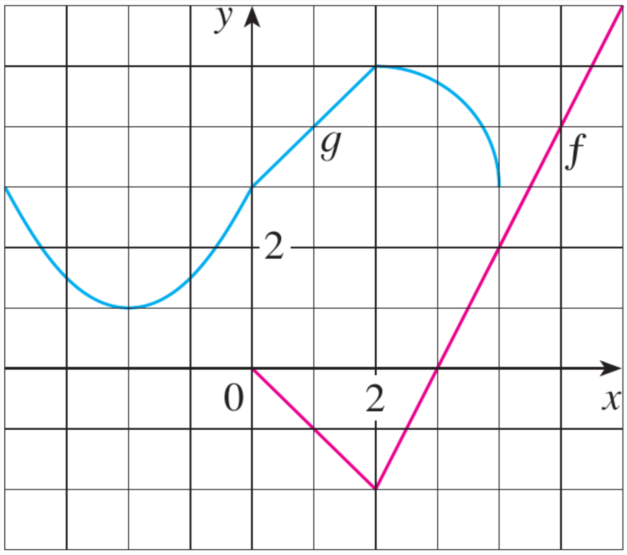
Solution 4 (5.2)



Exercice 5 (5.2)

Utiliser les courbes représentatives de f et g pour évaluer chacune des expressions suivantes, ou expliquer pourquoi elle ne sont pas définies.

1. $f\,(g(2))$.
2. $(g\circ f\,)\,(6)$.
3. $g\,(f\,(0))$.
4. $(g\circ g)\,(-2)$.
5. $(f\circ g)\,(0)$.
6. $(f\circ f\,)\,(4)$.



Solution 5 (5.2)

Exercice 6 (5.3)

La fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$ est-elle

1. Croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$?
2. Croissante sur $\mathbb{R}^\star_+$?
3. Croissante ?
4. Strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$?
5. Strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star_+$?
6. Strictement croissante ?

Solution 6 (5.3)

1. f est croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$ car pour $x, y \in \mathbb{R}^\star_-$,

$$x \leq y < 0 \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \implies -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}.$$

2. f est croissante sur $\mathbb{R}^\star_+$ car pour $x, y \in \mathbb{R}^\star_+$,

$$0 < x \leq y \implies \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \implies -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{y}.$$

3. f n'est pas croissante car

$$-1 \leq 3 \ \text{ et non } \left(f(-1) = 1 \leq f(3) = -\frac{1}{3} \right).$$

4. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$ (remplacer $\leq$ par $<$ dans f croissante).
5. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^\star_+$ (remplacer $\leq$ par $<$ dans f croissante).
6. f n'est pas strictement croissante car elle n'est pas croissante.

Exercice 7 (5.3)

Vrai ou Faux ?
Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier les vraies et produire des contre-exemples pour les fausses.

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. La différence de deux fonctions croissantes est croissante.
3. Le produit de deux fonctions croissantes est croissante.
4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
5. L'inverse d'une fonction croissante est croissante.
6. La réciproque d'une bijection croissante est croissante.
7. Le produit d'une fonctions croissante par une constante est croissante.
8. Il existe des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Solution 7 (5.3)

1. Vrai. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Soit $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$. Puisque f et g sont croissantes, on a

$$f(x) \leq f(x') \quad \text{et} \quad g(x) \leq g(x').$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x') = (f+g)(x').$$

Conclusion

On a montré
$$\forall x, x' \in A, x \leq x' \implies (f+g)(x) \leq (f+g)(x');$$
c'est-à-dire $f+g$ est croissante.

2. Faux. Comme contre exemple, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x$. Ces deux fonctions sont croissantes, alors que la fonction $f - g : x \mapsto -2x$ n'est pas croissante.

3. Faux. Comme contre exemple, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x$. Ces deux fonctions sont croissantes, alors que la fonction $fg : x \mapsto 3x^2$ n'est pas croissante.

4. Vrai. Supposons f croissante et g croissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est croissante.

   Ainsi $g \circ f$ est croissante.

5. Faux. Remarquons tout d'abord que l'inverse d'une fonction n'est pas toujours définie (il faut que la fonction ne s'annule pas). Comme contre exemple, on peut prendre $\exp : x \mapsto e^x$. Cette fonction est croissante, et sont inverse $\frac{1}{\exp} : x \mapsto e^{-x}$ n'est pas croissante.

6. Vrai. Soit $f : A \to B$ une bijection croissante. Remarquons d'abord que f étant croissante et injective, elle est donc strictement croissante,

Nous allons montrer que sa réciproque $f^{-1} : B \to A$ est aussi croissante, c'est-à-dire

$$\forall (x, x') \in B^2, x \leq x' \implies f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x').$$

Soient $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$. On peut réécrire cette inégalité

$$f\left(f^{-1}(x)\right) \leq f\left(f^{-1}(x')\right).$$

et puisque f est strictement croissante, cela équivaut à la relation

$$f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x').$$

Conclusion

La récirpoque d'une bijection croissante est croissante.

7. Faux. On peut choisir par exemple $f : x \mapsto x$ qui est croissante, et la constante -3. Alors $-3f : x \mapsto -3x$ n'est pas croissante.

8. Vrai. Ce sont les fonctions constante.

Exercice 8 (5.3)

Soient A,B,C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Vérifier la véracité du tableau suivant.

	f croissante	f décroissante
g croissante	$g \circ f$ croissante	$g \circ f$ décroissante
g décroissante	$g \circ f$ décroissante	$g \circ f$ croissante

Solution 8 (5.3)

1. Supposons f croissante et g croissante.

   Remarque. On doit montrer que $g \circ f$ est croissante, c'est-à-dire

   $$\forall (x, x') \in A^2, x \leq x' \implies g \circ f(x) \leq g \circ f(x').$$

   Le «$\forall (x, x') \in A^2$ suggére de commencer la preuve par «Soient $x, x' \in A$». Pour montrer l'implication, on suppose $x \leq x'$ et on se débrouille pour arriver à $g(f(x)) \leq g(f(x'))$. Pour y arriver, nous avons le droit (en fait nous n'avons trop le choix) d'utiliser les hypothèses : f et g sont croissantes.

   Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est croissante.

2. Supposons f croissante et g décroissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante, puis $g(f(x)) \geq g(f(x'))$ car g est décroissante.

3. Supposons f décroissante et g croissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \geq f(x')$ car f est décroissante, puis $g(f(x)) \geq g(f(x'))$ car g est croissante.

4. Supposons f décroissante et g décroissante. Soient $x, x' \in A$ tels que $x \leq x'$, alors $f(x) \geq f(x')$ car f est décroissante, puis $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ car g est décroissante.

Exercice 9 (5.4)

Déterminer si les fonctions d'une variables réelle suivantes sont paires et si elles sont impaires.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{x(x^2+1)}$.
4. $x \mapsto 0$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^3}{x+1}$.
7. $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
8. $x \mapsto 2x^2 + 3$.
9. $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.
10. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
11. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
12. $x \mapsto \arcsin x$.
13. $x \mapsto \arccos x$.
14. $x \mapsto \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Solution 9 (5.4)
Solutions à justifier!

1. Ni paire ni impaire.
2. Paire et non impaire.
3. Impaire et non paire.
4. Paire et impaire.
5. Ni paire ni impaire.
6. Ni paire ni impaire.
7. Ni paire ni impaire.
8. Paire et non impaire.
9. Impaire et non paire.
10. Ni paire ni impaire.
11. Impaire et non paire.
12. Impaire et non paire.
13. Ni paire ni impaire.
14. Impaire et non paire.

Exercice 10 (5.4)

Quelle est la parité de la composée de deux fonctions impaires ? paires ? paire et impaire ?

Solution 10 (5.4)

Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par prendre des notations. Soit A, B, C trois parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

Supposons f impaire et g impaire. Soit $x \in A$, alors $-x \in A$ car f est impaire, donc définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0. Deplus,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f(x)).$$

L'application $g \circ f$ est donc impaire.

De manière analogue, on montre que

- si f est paire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire;
- si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire;
- si f est paire et g est impaire, alors $g \circ f$ est paire.

Exercice 11 (5.4)

Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

1. $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$;
2. $f : x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$;
3. $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$. (Indication : chercher un centre de symétrie d'abscisse $-\frac{1}{3}$)

Solution 11 (5.4)

1. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi) - \sin(3x+6\pi) = \sin(x) - \sin(3x) = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x) - \sin(-3x) = -\sin(x) + \sin(3x) = -f(x) \\ f(\pi - x) &= \sin(\pi - x) - \sin(3\pi - 3x) = \sin(x) - \sin(3x) = f(x). \end{aligned}$$

[1] Nous pouvons donc

- étudier et tracer la courbe de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$;
- effectuer une symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la courbe sur $[0, \pi]$;
- effectuer une symétrie par rapport à l'origine, on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$;
- effectuer des translations de vecteur $k2\pi\overrightarrow{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x/2+\pi)\sin(3x/2+3\pi) = (-\sin(x/2))(-\sin(3x/2) = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x/2) - \sin(-3x/2) = (-\sin(x/2))(-\sin(3x/2) = f(x) \end{aligned}$$

[2] Nous pouvons donc

- étudier et tracer la courbe de f sur $[0, \pi]$;
- effectuer une symétrie d'axe (Oy), on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$;
- effectuer des translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{e_1}$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

3. f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-\frac{2}{3} - x) &= -x^3 - 2x^2 - \cancel{\frac{4}{3}x} - \frac{8}{27} + x^2 + \cancel{\frac{4}{3}x} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - x \\ &= -\left(x^3 + x^2 + x\right) - \frac{14}{9} \\ &= -f(x) - \frac{14}{27}. \end{aligned}$$

La courbe de f est donc symétrique par rapport au point $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{27}\right)$. Il suffit donc d'étudier f sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ (ou $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$) et d'effectuer cette symétrie.

[1]On peut également utiliser la π-antipériodicité.

[2]On a également $f(2\pi - x) = f(x)$, mais cela n'apporte rien de plus que la périodicité et la parité.