Chapter 15 Suites récurrentes

Exercice 1 (15.0)

Étudier la suite (x_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3}{16} + x_n^2 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{16} + x^2$.
2. Quelle limite finie est possible pour (x_n) ?
3. La suite (x_n) est-elle minorée ? Majorée ? Monotone ?
4. Discuter de la convergence de (x_n).

Solution 1 (15.0)

1. La fonction f est une fonction polynômiale de degré 2, de coefficient dominant $1 > 0$. Elle est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Notons également que atteind son minimum en 0 et que $f(0) = \frac{3}{16} > 0$.
2. Supposons que la suite (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, la suite extraite (x_{n+1}) converge également vers ℓ. Or
$$x_{n+1} = \frac{3}{16} + x_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{16} + \ell^2.$$
Par unicité de la limite de la suite (x_{n+1}), on a $\ell = \frac{3}{16} + \ell^2$, c'est-à-dire
$$\ell = \frac{1}{4} \text{ ou } \ell = \frac{3}{4}.$$
3. Puisque f est minorée par $\frac{3}{16}$, on a clairement
$$\forall n \geq 1, x_n \geq \frac{3}{16}.$$
Cette minoration s'étend également au cas $n = 0$.
Montrons par récurrence sur n que $0 < x_{n+1} \leq x_n$.
Pour $n = 0$, nous avons $0 < x_1 = \frac{7}{16} < \frac{1}{2} = x_0$.
De plus, puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \implies f(0) \leq f\left(x_{n+1}\right) \leq f\left(x_{n+1}\right) \implies 0 \leq \frac{3}{16} \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}.$$
Par récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leq x_n,$$
la suite (x_n) est décroissante et donc majorée par $x_0 = \frac{1}{2}$.
4. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. On note ℓ sa limite. D'après la question (2), $\ell = \frac{1}{4}$ ou $\ell = \frac{3}{4}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}.$$

Par compatibilité de la limité avec la relation d'ordre $\leq$, on a $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion

La suite $\left(x_n\right)$ converge vers $\frac{1}{4}$.

Problème 2 (15.0)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Justifier que (u_n) et (v_n) sont bien définies.

2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - 1\right| \leq \left|v_n - 2\right| \text{ et } \left|v_{n+1} - 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

3. Déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - 1\right|.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente.

5. Montrer que (v_n) est convergente.

Solution 2 (15.0)

C'est un bon problème à travailler!

Exercice 3 (15.0)

Soit $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}.$$

1. La suite (u_n) est-elle monotone?
2. Prouver que les suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont monotones.
3. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left|u_{2n} - u_{2n-1}\right| \text{ et } \left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} \times 4.$$
5. Que dire des suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$? Conclure que $\left(u_n\right)$ est convergente.

Solution 3 (15.0)

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$, f est décroissante sur $]-\infty, 12]$, $u_0 = 0$ et $f([0,12]) \subset [0,12]$, donc (u_n) est bien définie, f étant décroissante sur $[0,12]$, (u_n) n'est pas monotone (en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de signe opposés).
2. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{2n+2} = f \circ f\left(u_{2n}\right) \text{ et } u_{2n+3} = f \circ f\left(u_{2n+1}\right),$$
avec $f \circ f$ croissante sur $[0,12]$ (car f est décroissante sur $[0,12]$ et $f([0,12]) \subset [0,12]$), ce qui prouve par une récurrence immédiate que $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont monotonse. Plus précisement,
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n}$ a le signe de $u_2 - u_0 = u_2 \geq 0$, d'où $\left(u_{2n}\right)$ est croissante.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ a le signe de $u_3 - u_1 = \sqrt{12 - u_2} - \sqrt{12} \leq 0$, d'où $\left(u_{2n+1}\right)$ est croissante.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} - u_{2n}$ a le signe de $-\left(u_{2n} - u_{2n-1}\right)$, c'est le signe de $(-1)^{2n}\left(u_1 - u_0\right)$, d'où $u_{2n+1} - u_{2n} \geq 0$.

   De plus, $\left(u_{2n+1}\right)$ est décroissante, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1 \leq 4.$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$u_{2n+1} - u_{2n} = \sqrt{12 - u_n} - \sqrt{12 - u_{2n-1}} = \frac{u_{2n-1} - u_{2n}}{\sqrt{12 - u_{2n}} + \sqrt{12 - u_{2n-1}}}.$$
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_1 \leq 4$, d'où
$$\sqrt{12 - u_n} + \sqrt{12 - u_{2n-1}} \geq 4\sqrt{2} \text{ et } \left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left|u_{2n} - u_{2n-1}\right|.$$
Par un récurrence, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{2n+1} - u_{2n}\right| \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n}\left|u_1 - u_0\right| \leq 4 \times \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n}.$$

5. D'après le théorème d'existence de limite par domination, le résultat précédent prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{2n+1}-u_{2n}\right) = 0$ (en effet, $\frac{1}{4\sqrt{2}} \in]0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2n} = 0$).

Ainsi $\left(u_{2n}\right)$ est croissante, $\left(u_{2n+1}\right)$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{2n+1}-u_{2n}\right) = 0$, ceci prouve que $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont des suites adjacentes. Elles sont donc convergentes de même limite ℓ.

De plus, $\left(u_{2n+1}\right)$ et $\left(u_{2n}\right)$ étant convergentes de même limite ℓ, on en déduit que $\left(u_n\right)$ est convergente de limite ℓ (pourquoi? Justifiez!).

De plus, l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{12-u_n}$ donne par passage à la limite (unicité de la limite pour la suite extraite (u_{n+1}))

$$\ell = \sqrt{12-\ell}$$

On a donc $\ell = 3$.

Finalement, (u_n) est convergente de limite 3.

Exercice 4 (15.0)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par

$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. **1.** Étudier rapidement la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$.
2. **2.** Étudier la suite $\left(u_n\right)$ dans les cas suivants : $a = 0$ et $a = 1$.
3. **3.** Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.
4. **4.** Étudier la convergence de $\left(u_n\right)$ dans chacun des cas : $a < 0$, $a > 1$, $a \in]0, 1[$.
   Dans chacun des cas, si $\left(u_n\right)$ admet une limite, on la précisera.

Solution 4 (15.0)

1. **1.** Étude facile.
2. **2.** Si $a = 0$, (u_n) est la suite nulle.
   Si $a = 1$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 0$.
3. **3.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, donc (u_n) est décroissante.
4. **4.** Si (u_n) est convergente vers ℓ, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n - u_n^2 = \ell - \ell^2.$$

Or la suite (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n), elle converge donc également vers ℓ.
Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on a $\ell = \ell - \ell^2$, c'est-à-dire $\ell = 0$.

- Si $a < 0$, (u_n) étant décroissante, on a: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 = a < 0$. Si (u_n) était convergente, sa limite ℓ vérifierai $\ell \leq u_0 < 0$, d'où la contradiction avec $\ell = 0$. La suite (u_n) étant décroissante et divergente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $a > 1$, $u_1 = u_0(1 - u_0) < 0$ et pour $n \geq 1, u_n \leq u_1 < 0$. Un raisonnement analogue au précédent montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $a \in]0, 1[$, sachant que $f\,(]0, 1[) \subset]0, 1[$, puisque $u_0 \in]0, 1[$, on a: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$. La suite (u_n) est ainsi décroissante, minorée (par 0) donc convergente et sa limite est $\ell = 0$.

Exercice 5 (15.0)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. Si (u_n) était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7}{9}|u_n - \ell|$.
4. Conclure.

Solution 5 (15.0)

1. On peut introduire la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}\left(4 - x^2\right) \end{array}$. Un tableau de variation rapide permet de montrer que

$$f([0, 4/3]) = [20/27, 4/3] \subset [0, 4/3].$$

Puisque $u_0 \in [0, 4/3]$, la suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie est à valeurs dans $[0, 4/3]$.

Variante. On peut également faire une démonstration par récurrence.

2. Supposons (u_n) convergente de limite ℓ, alors nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}(4 - u_n^2) = \frac{1}{3}(4 - \ell^2).$$

De plus, la suite (u_{n+1}) est une suite extraite de la suite (u_n), elle converge donc également vers ℓ. Par unicité de la limite de la suite (u_{n+1}), on a

$$\frac{1}{3}(4 - \ell^2) = \ell \quad \text{qui équivaut à} \quad \ell^2 + 3\ell - 4 = 0.$$

On a donc nécessairement $\ell = 1$ ou $\ell = -4$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{4}{3}$. Par compatibilité de la relation $\leq$ avec la limite, on a également $0 \leq \ell \leq 4/3$.

Conclusion

Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est nécessairement $\ell = 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - 1| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}u_n^2\right| = \frac{1}{3}\left|u_n^2 - 1\right| = \frac{1}{3}|u_n + 1|\,|u_n - 1| \leq \frac{1}{3}\frac{7}{3}|u_n - 1| \tag{1}$$

4. Une récurrence classique permet de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{7}{9}\right)^n |u_0 - 1|.$$

Puisque $0 < 7/9 < 1$, le terme de droite a pour limite 0. D'après le théorème d'existence de limite par domination, la suite (u_n) est convergente et a pour limite $\ell = 1$.

Problème 6 (15.0)

On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right); \qquad M_n = \max\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right).$$

(m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.)

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).

(a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$.
En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

(b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0.$$

(c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :

$$m \leqslant M.$$

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

(a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$

$$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :

$$M_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) En déduire que $M \leqslant m$, puis que $M = m$.

(c) Établir la convergence de la suite (p_n).

Solution 6 (15.0)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right)$, on a donc directement $m_n \leq p_{n+1}$, $m_n \leq p_{n+2}$ et $m_n \leq p_{n+3}$. De plus, $m_n \leq p_n$, donc

$$\begin{aligned} p_{n+4} &= \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right) \\ &\geq \frac{1}{4}\left(m_n + m_n + m_n + m_n\right) \\ &\geq m_n. \end{aligned}$$

Nous avons montré que m_n est un minorant de $\{ p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4} \}$, on a donc

$$m_n \leq \min \{ p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4} \} = m_{n+1}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (m_n) est donc croissante.

Mutatis mutandis, on prouve que M_n est un majorant de $\{ p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4} \}$ et donc $M_n \geq M_{n+1}$: la suite (M_n) est décroissante.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq m_n$ car (m_n) est croissante ; $m_n \leq p_n$ et $p_n \leq M_n$ ont été établis ci-dessus ; $M_n \leq M_0$ car (M_n) est décroissante.

(c) La suite (m_n) est croissante et majorée par M_0, donc elle est convergente. De même, la suite (M_n) est décroissante et minorée par m_0, donc elle est convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $m_n \leq M_n$. Par compatibilité de la relation $\leq$ avec le passage à la limite, on obtient $m \leq M$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire $\{ p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3} \} = \{ a, b, c, d \}$ avec $m_n = a \leq b \leq c \leq d = M_n$. On a donc

$$\begin{aligned} p_{n+4} &= \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right) = \frac{1}{4}(a+b+c+d) \leq \frac{1}{4}\left(m_n + M_n + M_n + M_n\right) \\ &\leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n. \end{aligned}$$

Or la suite (m_n) est croissante et converge vers $m = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n \leq m$, d'où

$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m,$$

et puisque (M_n) est décroissante

$$\begin{aligned} p_{n+5} &\leq \frac{3}{4}M_{n+1} + \frac{1}{4}m \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m, \\ p_{n+6} &\leq \frac{3}{4}M_{n+2} + \frac{1}{4}m \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m, \\ p_{n+7} &\leq \frac{3}{4}M_{n+3} + \frac{1}{4}m \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m, \end{aligned}$$

Donc $\frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m$ est un majorant de $\{ p_{n+4}, p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7} \}$, d'où

$$M_{n+4} = \max \{ p_{n+4}, p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7} \} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) La suite $\left(M_{n+4}\right)$ est une suite extraite de la suite (M_n), elle est donc convergente et admet pour limite M. Par compatibilité de la relation $\leq$ avec le passage à la limite, on déduit de la dernière inégalité

$$M \leq \frac{3}{4}M + \frac{1}{4}m \quad \text{c'est-à-dire} \quad M \leq m.$$

De plus, nous avons démontré à la question **1.c**. que $m \leq M$: nous avons donc $m = M$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons les inégalités

$$m_n \leq p_n \leq M_n.$$

Puisque (m_n) et (M_n) convergent vers une même limite, la suite (p_n) converge par encadrement et

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = m = M.$$

Exercice 7 (15.0)

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer un intervalle I stable par f (c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$) et contenant u_0. En déduire que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. Montrer que u converge et donner sa limite.

Exercice 8 (15.0)

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).$$

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle donnée par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$.

2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

4. *Première méthode*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. On pose également $g = f \circ f$.

(a) Vérifier que α est l'unique point fixe de g et donner le sens de variation de g sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont monotones, de monotonies opposées et qu'elles convergent vers α.

(c) Conclure sur la convergence de la suite u.

(d) Écrire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

5. *Seconde méthode*.

(a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n.$$

Retrouver ainsi le fait que la suite u converge vers α.

(b) En déduire une suite d'instructions qui permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Solution 8 (15.0)