Chapter 16 Relations de comparaisons sur les suites

Exercice 1 (16.0)
Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = \ln n, \qquad b_n = e^n, \qquad c_n = (\ln n)^{2022}, \qquad d_n = n^{0.1}, \qquad e_n = 5^n,$$
$$f_n = 2^n, \qquad g_n = n^{10}, \qquad h_n = \sqrt{\ln n}, \qquad i_n = n!.$$

Exercice 2 (16.0)
Vrai ou Faux ?

1. $\mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^{n+1}$.
2. $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
4. Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 3 (16.0)
Classer les suites de la liste ci-dessous de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

Exercice 4 (16.0)
Pour chaque paire de suites (u_n) et (v_n) ci-dessous, A-t-on $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, $v_n = \mathcal{O}(u_n)$, $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(u_n)$ ou $u_n \sim v_n$?

1. $u_n = (n^2 - n)/2$ et $v_n = 6n$.
2. $u_n = n + 2\sqrt{n}$ et $v_n = n^2$.
3. $u_n = n \ln n$ et $v_n = n\sqrt{n}/2$.
4. $u_n = n + \ln n$ et $v_n = \sqrt{n}$.
5. $u_n = 2\,(\ln n)^2$ et $v_n = \ln(n) + 1$.
6. $u_n = 4n \ln n + n$ et $v_n = \left(n^2 - n\right)/2$.

Exercice 5 (16.0)
Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = (1000)2^n + 4^n$.
2. $u_n = n + n\ln n + \sqrt{n}$.
3. $u_n = \ln\left(n^{20}\right) + (\ln n)^{10}$.
4. $u_n = (0.99)^n + n^{100}$.

Exercice 6 (16.0)
Déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de

1. $a_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{2^n}$;
2. $b_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{10^{32}}{n^2}$;
3. $c_n = n^{-1/2} + 1$;
4. $d_n = \ln n - \sqrt{n} + (-1)^n$;
5. $e_n = 10^n + n!$;
6. $f_n = \dfrac{1}{10^n} + \dfrac{1}{n!}$;
7. $g_n = n! + n^{\sqrt{n}} + n^n$;
8. $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^k}$;
9. $i_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
10. $j_n = \ln(n+32)$.

Exercice 7 (16.0)
Déterminer un équivalent simple de

1. $u_n = \dfrac{100^n + 3(n!)}{2(n!) + 1000^n}$,
2. $v_n = \dfrac{n! + 2^n}{3^n + n^{30}}$,
3. $w_n = \dfrac{n^3 + n! + 10^n}{(n+2)! + 100^n}$,
4. $t_n = \dfrac{n! + n^n}{n^{n+3} + 1000^n}$,

et en déduire leurs limites.

Exercice 8 (16.0)
Trouver un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants.

1. $u_n = n^{1/n} - 1$;
2. $u_n = \dfrac{1 + \sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n^2}}$;
3. $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$;
4. $u_n = (n + 3\ln n)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}$;
5. $u_n = \dfrac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$;
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 9 (16.0)
Soient u et v deux suites de réels strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$.