

Chapter 11 Relations binaires sur un ensemble

Exercice 1 (11.0)

Déterminer les propriétés des relations binaires suivantes (réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité), et détecter les relations d'équivalence, d'ordre total ou partiel.

1. \parallel sur \mathcal{D} , l'ensemble des droites du plan.
2. \perp sur \mathcal{D} , l'ensemble des droites du plan.
3. \leq sur \mathbb{R} .
4. \geq sur \mathbb{R} .
5. $\#$ (avoir le même cardinal) sur $E = \mathcal{P}(F)$.
6. \subset sur $E = \mathcal{P}(F)$.
7. «être multiple de» sur \mathbb{N} .
8. «être multiple de» sur \mathbb{Z} .
9. $<$ sur \mathbb{R} .
10. \neq sur \mathbb{R} .
11. $=$ sur \mathbb{R} .

Exercice 2 (11.0)

Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^*$, on dira que

$$a \mathcal{R} b \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, a = b^n).$$

La relation \mathcal{R} est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 3 (11.0)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit une relation \triangleleft sur E^2 par

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (x', y') \in E^2, (x, y) \triangleleft (x', y') \iff ((x \leq x' \text{ et } x \neq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$$

On peut également écrire : $(x, y) \triangleleft (x', y') \iff (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$.

1. Montrer que \triangleleft est une relation d'ordre sur E^2 .
2. La relation \triangleleft s'appelle ordre lexicographique, pourquoi ?
3. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 4 (11.0)

Soit Q l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Écrivez les éléments de $\mathcal{P}(Q)$.
2. Quels sont les majorants de $\{2, 4\}$ pour la relation d'ordre \subset dans $\mathcal{P}(Q)$?
3. Quels sont les majorants de $\{1\}$?
4. Quels sont les majorants de l'ensemble $\{\{1\}, \{2, 4\}\}$?
5. La partie $\{\{1\}, \{2, 4\}\}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-elle un maximum ?
6. Donnez un sous-ensemble à plusieurs éléments de $\mathcal{P}(Q)$ qui admette un maximum pour cette relation. Est-ce que $\mathcal{P}(Q)$ a un maximum ?
7. Reprenez pour minimum les questions posées ci-dessus pour maximum.
8. Le sous-ensemble $\{\{1\}, \{2, 4\}\}$ de $\mathcal{P}(Q)$ a-t-il une borne supérieure pour la relation d'ordre \subset ? Une borne inférieure ?

Exercice 5 (11.0)

Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$, on définit la relation \leq par

$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. Montrer que cette relation est une relation d'ordre.
2. Montrer que l'ordre est partiel.
3. Existe-t-il un plus grand et un plus petit élément ?