Chapter 32 Dimension

$*$ **Exercice 1 (32.0)**
Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \}$.

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et calculer sa dimension.

$*$ **Exercice 2 (32.0)**
Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0 \}$.

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et calculer sa dimension.

$*$ **Exercice 3 (32.0)**
Montrer que le sous-ensemble

$$F = \{ (\alpha + \beta, \beta, 2\alpha - \beta - \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base.

$*$ **Exercice 4 (32.0)**
On considère les ensembles

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Décrire les sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(U)$ et $\mathrm{Vect}(W)$. Donner une base pour chacun d'eux.

Montrer que l'un des deux est un plan vectoriel et déterminer une équation cartésienne de celui-ci.

$*$ **Exercice 5 (32.0)**
Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \qquad v_2 = (2, 3, 4, 5), \qquad v_3 = (3, 4, 5, 6), \qquad v_4 = (4, 5, 6, 7).$$

Déterminer une base de V et $\dim V$.

$*$ **Exercice 6 (32.0)**
Soient

$$P_1 = X^2 + 1 \qquad P_2 = X^2 + X - 1 \qquad P_3 = X^2 + X.$$

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

$**$ **Exercice 7 (32.0)**
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$P_1 = (1 + \alpha)X^2 + X + 1, \qquad P_2 = X^2 + (1 + \alpha)X + 1, \qquad P_3 = X^2 + X + (1 + \alpha).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille (P_1, P_2, P_3) soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$**$ **Exercice 8 (32.0)**
Soient a et b deux réels distincts, et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer que la famille $\left((X - a)^k (X - b)^{n-k}\right)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner un exemple d'isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. Déduire des deux questions précédentes une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs dépendants de a et b.

*** **Exercice 9 (32.0)**
Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des réels. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont la restriction à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ est un polynôme d degré 2 au plus.

Montrer que E est un espace vectoriel. En donner la dimension et une base.

* **Exercice 10 (32.0)**
Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, où

$$v_1 = (1,1,0)^T, \qquad v_2 = (-4,0,3)^T \qquad \text{et } v_3 = (3,5,1)^T.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $w = (-1,7,5)^T$ et $e_1 = (1,0,0)^T$. Déterminer les coordonnées de w et de e_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

* **Exercice 11 (32.0)**
On pose $E = \mathbb{C}^3$ et on s'intéresse aux trois vecteurs

$$u_1 = (i,1,-1), \qquad u_2 = (i,-1,1) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (-1,i,1).$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées de $w = (3+i, 1-i, 2)$ dans $\mathcal{B}$.

* **Exercice 12 (32.0)**
Soient

$$P_1 = 2X^2 - X + 1, \qquad P_2 = X^2 + 2X, \qquad P_3 = X^2 - 1.$$

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est un base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminer les coordonnées de $P = 3X^2 + 5X - 3$ dans cette base.

* **Exercice 13 (32.0)**

1. Montrer que
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$
est une base de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de $u = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -7\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

** **Exercice 14 (32.0)**
Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & b & c\\ c & a+b+c & b\\ b & c & a+b+c \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont on précisera une base $\mathcal{B}$ et la dimension.
2. Quelles sont les coordonnée de $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$?

3. Calculer *tous* les produits deux à deux des éléments de la base $\mathcal{B}$ (*indiquer uniquement le résultat sur la copie*).
Vérifier qu'ils appartiennent bien à F.

4. *En déduire* que pour tout $(M, N) \in F^2$, on a $MN \in F$.

$**$

Exercice 15 (32.0)
Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées (y_1, y_2, y_3) de ce même vecteur dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs

$$\epsilon_1 = (1, 1, 0), \qquad \epsilon_2 = (1, 0, 1), \qquad \epsilon_3 = (0, 1, 1).$$

$*$

Exercice 16 (32.0)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \qquad f_2 = e_2 + e_3.$$

Montrer que (f_1, f_2) est libre et compléter cette famille en une base de E.

Exercice 17 (32.0)
Soit A une matrice de type $m \times k$. On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Montrer

1. $A^T A$ est une matrice symétrique de type $k \times k$,

2. $A^T A$ est une matrice inversible.

Vérifier les résultats précédents pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 (32.0)
Soit B une matrice $m \times k$ tel que $\operatorname{Im}(B^T)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation cartésienne $4x - 5y + 3z = 0$.

1. Peut-on déterminer m ou k ? Le faire si possible.

2. Déterminer le noyau de B. Écrire la solution générale de l'équation $Bx = 0$.

Exercice 19 (32.0)
Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Soit W l'ensemble des suites nulles à partir du rang 3.

Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ de dimension 3.

Problème 20 (32.0)
On donne une partie d'une matrice A ainsi que sa forme échelonnée réduite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & * & * \\ 2 & -1 & * & * \\ 3 & 2 & * & * \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de l'image de A, $\operatorname{Im}(A)$, une base du noyau de A, $\ker(A)$, ainsi qu'une base de $\operatorname{Im}(A^T)$.

2. Soit $b = (9, 0, a)^T$ où $a \in \mathbb{R}$. L'équation matricielle $Ax = b$ représente un système linéaire. Quel est son nombre d'équations? Son nombre d'inconnue?

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le système $Ax = b$ soit compatible.

3. Déterminer si possible les colonnes de A manquantes.