# Chapter 8 Corps des nombres complexes

**Exercice 1 (8.2)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1+4i)z+(1-2i)=iz+3$
2. $\dfrac{1+3iz}{1+3z}=i\dfrac{z+2}{z-5}$

**Exercice 2 (8.2)**
Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw)=\mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

**Exercice 3 (8.2)**
À tout nombre complexe $z$ différent de 0 et $-1$, on associe

$$u=\frac{z^2}{z+1} \text{ et } v=\frac{1}{z(z+1)}.$$

1. Déterminer $z$ pour que $u$ et $v$ soient tous deux réels.
2. Calculer les valeurs correspondantes de $u$ et $v$.

**Exercice 4 (8.3)**
Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1+i$ ;
2. $1-i\sqrt{3}$ ;
3. $i$ ;
4. $-2\sqrt{3}+2i$ ;
5. $2+i$ ;
6. $17$ ;
7. $-3i$ ;
8. $-\pi$ ;
9. $-12-5i$ ;
10. $-5+4i$.

**Exercice 5 (8.3)**
Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

1. Calculer les modules et arguments de $z_1$, $z_2$, $z_1z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

**Exercice 6 (8.3)**
Déterminer le module et un argument de $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

**Exercice 7 (8.3)**
Établir que $z\in\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z)=|z|$.

**Exercice 8 (8.3)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2+8|z|^2-3=0$.

**Exercice 9 (8.3)**
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que

1. $|z-2|=3$.
2. $|2z-1+i|=4$.
3. $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$.
4. $\left|\frac{iz-2}{z+3}\right|=1$.

**Exercice 10 (8.3)** *Identité du parallélogramme*
Prouver que pour tous nombres complexes $z$ et $w$, on a

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

**Exercice 11 (8.3)**
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où $\rho$ et $\theta$ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.
2. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.
3. $1+i\tan\alpha$.
4. $\cos\alpha+i(1+\sin\alpha)$.
5. $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.
6. $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\beta+i\sin\beta}$.
7. $e^{i\beta}-e^{i\alpha}$.
8. $e^{i\beta}+e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

**Exercice 12 (8.3)**
Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$.

1. Calculer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$.
2. En déduire $\alpha$ et $\beta$.
3. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonctions de radicaux.
4. Déterminer $\sin\frac{\pi}{10}$ en fonction de radicaux.

**Exercice 13 (8.3)**
Soit $z$ un nombre complexe différent de $-1$ et $M$ le point du plan d'affixe $z$. On pose $z'=\frac{z-1}{z+1}$. Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que

1. $z'$ soit réel ;
2. $z'$ soit imaginaire pur ;
3. $z'$ soit de module 2.

**Exercice 14 (8.3)**
Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n\in\mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x\sin^3 x$.
5. $\cos^2 x\sin^4 x$.

**Exercice 15 (8.3)**
Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

**1.** $\sin 3x$.

**2.** $\cos 5x$.

**3.** $\sin 4x$.

**4.** $\cos 8x$.

**Exercice 16 (8.3)**
Linéariser les expressions suivantes où $x \in \mathbb{R}$.

**1.** $\cos^2 x \sin x$.

**2.** $\sin^3 x \cos^3 x$.

**3.** $\sin^4 x \cos^2 x$.

**4.** $\cos^3 x \sin^2 x$.

**Exercice 17 (8.3)**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

**1.** Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

**2.** En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

**3.** En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin(k\theta).$$

**Exercice 18 (8.3)**
Soit $x$ un réel fixé. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left((k-1)x\right).$$

**Exercice 19 (8.4)**
Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe $z$.

**Exercice 20 (8.4)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$

$$z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0. \tag{1}$$

**Exercice 21 (8.4)**
Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

**Exercice 22 (8.4)**
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=13i \end{cases}$.

**Exercice 23 (8.4)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3-(1+i)z^2+(1-2i)z+6+8i=0. \tag{1}$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

**Exercice 24 (8.4)**
Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0=0, u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=5u_{n+1}-3u_n$.
2. $u_0=1, u_1=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, 2u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$.
3. $u_0=-3, u_1=4$ et $\forall n\in\mathbb{N}, 4u_{n+2}=12u_{n+1}-9u_n$.
4. $u_0=1, u_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

**Exercice 25 (8.5)**
Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

2. $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

**Problème 26 (8.5)**
Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5-1=0. \tag{1}$$

1. Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (1) sous forme trigonométrique.
2. On va maintenant résoudre (1) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale $Q$ telle que pour tout $z\in\mathbb{C}$,
$$z^5-1=(z-1)\,Q(z). \tag{2}$$
3. Déterminer des réels $a$, $b$, $c$ tels que pour tout $z\in\mathbb{C}^\star$,
$$\frac{Q(z)}{z^2}=a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c. \tag{3}$$
4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$,
$$aZ^2+bZ+c=0. \tag{4}$$
5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z)=0$.
6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de
$$\cos\frac{2\pi}{5},\quad \sin\frac{2\pi}{5},\quad \cos\frac{4\pi}{5},\quad \text{et}\quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$
7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

**Exercice 27 (8.5)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

**1.** $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

**2.** $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1$.

**3.** $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

**Exercice 28 (8.6)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$