# Chapter 4 Calculs algébriques

**Exercice 1 (4.1)**
Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$

$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

**Exercice 2 (4.1)**
Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$

8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

**Exercice 3 (4.1)**

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier $8 \times 8$ (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

**Exercice 4 (4.1)**
En remarquant que l'on peut écrire
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$
où $a, b$ sont des constantes à déterminer, simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

**Exercice 5 (4.1)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

**Exercice 6 (4.1)**
Calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

**Exercice 7 (4.1)**

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

**Exercice 8 (4.2)**
Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} i.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n.$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k.$
6. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} k.$
7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} i.$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n.$

**Exercice 9 (4.2)**
Développer.

1. $(a+b)^7.$
2. $(1-3x)^5.$

**Exercice 10 (4.2)**
Calculer le coefficient de $x^3$ dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

**Exercice 11 (4.2)**
Calculer.

1. Le terme en $x^5$ du développement de $(x-2)^8$.
2. Le terme en $x^{20}$ du développement de $(x^2-y^2)^{14}$.
3. Le terme en $x^6$ du développement de $(3-4x^2)^5$.
4. Le terme en $x^4$ et le terme en $x^6$ du développement de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{14}$.

**Exercice 12 (4.2)**
Déterminer $a$ afin que le coefficient du terme en $x^4$, dans le développement de

$$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^7$$

soit égal à 14.

**Exercice 13 (4.2)**
En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

**Exercice 14 (4.2)**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1}$.

**Exercice 15 (4.2)**
Soit $p$ un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p$ divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall a \in \mathbb{N},$ on a $a^p \equiv a \pmod{p}$.

**Exercice 16 (4.2)**
Soit une suite arithmétique $(u_n)$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme $u_0$ et raison $r$) de la suite $(u_n)$ à partir des données suivantes.

1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$ ;
2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$ ;
3. $r = 6$ et $s_5 = 36$ ;
4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$ ;
5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$ ;
6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$.

**Exercice 17 (4.2)**
Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

**3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$;

**4.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

**Exercice 18 (4.2)**

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

**1.** Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.

**2.** Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \tag{1}$$

**3.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{2}$$

**Exercice 19 (4.3)**

Simplifier les sommes suivantes.

**1.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

**2.** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

**3.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$.

**4.** $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$.

**5.** $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} x^{i+j}$.

**6.** $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1}$.

**7.** $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i)$.

**8.** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$.

**9.** $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j}$.

**Exercice 20 (4.3)**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

**1.** Calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i + j$.

**2.** Calculer la somme

$$S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j).$$

On pourra scinder cette somme en deux.

**3.** En déduire l'expression de la somme $S_3 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$.

**Remarque.** Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note

$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i,j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

**Exercice 21 (4.4)**
Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;
2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;
3. le terme général de la suite $(u_n)$ donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$