CHAPITRE 22

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES, RANG

22.1 MATRICES INVERSIBLES ET OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

§1 Matrices d'opérations élémentaires

Soit A une matrice de type (m, n) et soit A_i la i-ème ligne de A. Nous pouvons écrire A sous la forme d'une colonne de m lignes,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Cette notation permet d'illustrer facilement les opérations élémentaires sur les lignes. Par exemple, voici les matrices obtenues à partir de A par une opération élémentaire

$L_2 \leftarrow 3L_2$	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$
$\begin{pmatrix} A_1 \\ 3A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + 4A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

Remarquons maintenant que le produit matriciel AB s'écrit simplement par bloc:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix}.$$

Effectuons maintenant une opération élémentaire sur les lignes du produit AB. Par exemple, ajoutons 4 fois la lignes 1 à la ligne 2:

$$\begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B + 4A_1 B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ (A_2 + 4A_1)B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + 4A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B.$$

Plus généralement, on peut énoncer

Lemme 1

$$\begin{aligned}&(\textit{matrice obtenue par une opération élémentaire sur } AB) \\ &\qquad = (\textit{matrice obtenue par la même opération élémentaire sur } A) \times B.\end{aligned}$$

En particulier, en prenant $A = I_n$, on a

$$\begin{aligned}&(\text{matrice obtenue par une opération élémentaire sur } B) \\ &\qquad = \big(\text{matrice obtenue par la même opération élémentaire sur } I_n\big) \times B.\end{aligned}$$

Définition 2

Une **matrice d'opération élémentaire**, E, est une matrice carrée (n, n) obtenue à partir de la matrice unité I_n en effectuant exactement *une* opération élémentaire.

Exemple 3

Les matrices suivantes sont des matrices d'opérations élémentaires:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première est obtenue à partir de I_3 en multipliant la deuxième ligne par 3. La seconde en échangeant les deux premières lignes. La troisième en ajoutant 4 fois la première ligne à la deuxième ligne.

Test 4

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont-elles des matrices d'opérations élémentaires?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la première matrice comme produit de deux matrices d'opérations élémentaires.

Définition 5

Une matrice d'opération élémentaire est

- une **matrice de dilatation** lorsqu'elle est obtenue en multipliant une ligne par un scalaire non nul dans I_n;
- une **matrice de transposition** lorsqu'elle est obtenue en échangeant deux lignes de I_n;

- une **matrice de transvection** lorsqu'elle est obtenue en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne dans I_n.

Les matrices d'opérations élémentaires permettent de traduire les opérations élémentaires en terme de produit de matrices. En particulier, elle permettent de relier une matrice à sa forme échelonnée réduite.

Exemple 6 Supposons que l'on cherche la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme première opération élémentaire, nous choisissons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons la même opération sur la matrice unité I_3, nous obtenons une matrice d'opération élémentaire notée E_1:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1.$$

On peut alors vérifier

$$E_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 *Une matrice d'opération élémentaire est inversible, et son inverse est aussi une matrice d'opération élémentaire.*

Test 8 Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer E^{-1}. Vérifier que $EE^{-1} = I_3$ et $E^{-1}E = I_3$.

Exemple 9 Nous avons calculer précédemment

$$E_1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons «annuler» cette opération élémentaire et retrouver la matrice B en multipliant à gauche par E_1^{-1}:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&6\\-1&0&1\end{pmatrix}=B.$$

§2 Matrice équivalentes par lignes

Définition 10 Deux matrices sont dites **équivalentes par lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Dans ce cas, on note

$$A \underset{L}{\sim} A'.$$

Théorème 11 *La relation $\underset{L}{\sim}$ est une relation d'équivalence.*

- *réflexive :* $A \underset{L}{\sim} A$.
- *symétrique :* $A \underset{L}{\sim} B \implies B \underset{L}{\sim} A$.
- *transitive :* $A \underset{L}{\sim} B$ *et* $B \underset{L}{\sim} C \implies A \underset{L}{\sim} C$

où $A, B, C \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Test 12 Montrer le!

Ainsi, deux matrice A et B sont équivalentes par lignes si, et seulement si il existe une matrice $E = E_r \dots E_1$ produit de matrices d'opérations élémentaires telle que

$$B = EA.$$

§3 Algorithme pour le calcul de l'inverse

Proposition 13 **Traduction matricielle de l'algorithme de Gauß-Jordan**
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par ligne. Autrement dit, pour toute matrice A, il existe une matrice $E = E_r \dots E_1$ produit de matrices d'opérations élémentaires et une unique matrice R échelonnée réduite R telles que

$$EA = E_r \dots E_1 A = R.$$

Théorème 14 *Soit A un matrice carrée (n, n).*

1. *La matrice A est inversible si, et seulement si $A \underset{L}{\sim} I_n$.*

2. *Si* $\left(A|I_n\right) \underset{L}{\sim} \left(I_n|B\right)$, *alors* A *est inversible et* $A^{-1} = B$.

3. *La matrice* A *est inversible si, et seulement si* A *est un produit de matrices d'opérations élémentaires.*

Corollaire 15 *Étant donnée deux matrices* A *et* B, *alors* $A \underset{L}{\sim} B$ *si, et seulement si il existe* P *inversible telle que* $A = PB$.

Ainsi, si A est inversible, il existe une suite d'opération élémentaire aboutissant à I_n. Si nous appliquons *les même opérations élémentaires* à la matrice I_n que pour réduire A vers I_n, nous obtenons la matrice A^{-1}.

Exemple 16 Déterminons, s'il existe, l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test 17 Vérifier que $AA^{-1} = I_3$ (on peut aussi vérifier $A^{-1}A = I_3$).

Test 18 Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

§4 Calcul de l'inverse par résolution du système $Ax = y$

Méthode La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si pour tout $y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Ax = y$ admet une unique solution. Alors, on peut écrire

$$Ax = y \iff x = A^{-1}y.$$

Exemple 19 Déterminons, s'il existe, l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22.2 Rang

§1 Rang d'une matrice

Définition 20 Soit A une matrice (m, n). Le **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le nombre de ligne non nulles dans une matrice échelonnée équivalente à A.
De manière équivalente, le **rang** de A est aussi le nombre de pivots dans la forme échelonnée réduite de A.

L'unicité de la forme échelonnée réduite de A assure que cette définition est correcte.

Proposition 21 *Soit A, B deux matrice (m, n). Si $A \underset{L}{\sim} B$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.*

Proposition 22 *Si A est une matrice de type (m, n), alors*

$$\mathrm{rg}(A) \leq \min\{\, m, n \,\}.$$

Exemple 23 Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice est échelonnée et a deux lignes non nulles. Ainsi $\mathrm{rg}(M) = 2$.

Test 24 Montrer que la matrice B est de rang 3 où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

§2 Rang et solutions d'un système linéaire

Dans cette partie, Rien de fondamentalement nouveau. C'est une écriture en fonction du rang des résultats des chapitres précédents.

Définition 25 Le rang d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ est le rang de A.

Exemple 26

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = 4. \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est la matrice B du test 24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = -2. \end{cases}$$

Ce système est incompatible car aucune valeurs de x_1, x_2, x_3 ne vérifie la dernière équation $0 = 2$.
Poursuivons la réduction de la matrice des coefficients A et de la matrice augmentée $(A|b)$.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice des coefficients est $\mathrm{rg}(A) = 2$, mais celui de la matrice augmentée $(A|b)$ est 3.

Proposition 27

Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A)$.

Exemple 28

Considérons maintenant le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = 6. \end{cases} \tag{22.1}$$

Ce système a la même matrice des coefficients A que le système de le système précédent et $\mathrm{rg}(A) = 2$. La matrice augmentée du système est la matrice M de l'exemple 23 qui est aussi de rang 2, ce système est donc compatible.

Test 29

Résoudre le système précédent. Remarquer que puisque A est de rang 2 et a 3 colonnes, il y a une variable libre, et donc une infinité de solutions.

Proposition 30

Si A est une matrice de type (m, n) et $\mathrm{rg}(A) = m$ alors pour tout vecteur b, $Ax = b$ est compatible.

Remarquons que si $\mathrm{rg}(A) = m$, on a nécessairement $n \geq m$.

Exemple 31 Supposons que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

est la matrice des coefficients d'un système de trois équations à quatre inconnues, $Bx = d$, avec $d \in \mathbb{R}^3$. Nous avons déjà effectuer la réduction de B dans l'exemple **??** (où elle était vue comme la matrice augmentée du système (S)).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est de type $(3, 4)$ et est de rang 3, le système $Bx = d$ est donc *toujours* compatible.

Regardons plus précisément ses solutions. Toute matrice augmentée $(B|d)$ est équivalente par ligne a une matrice échelonnée réduite dont les quatre première colonnes sont les même que la forme échelonnée réduite de B, c'est-à-dire

$$(B|d) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Ce système possède une infinité de solutions pour chaque choix de $d \in \mathbb{R}^3$. Il y a une colonne sans pivot, et donc une variable libre.

Test 32 Si $p_1 = 1, p_2 = -2$ et $p_3 = 0$ et $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, déterminer les solutions du système $Bx = d$ sous forme vectorielle. En déduire le vecteur d.

Si le rang r d'un système est strictement inférieur au nombre d'inconnues n, alors le système, s'il est compatible, possède une infinité de solutions. Précisons.

Exemple 33 Considérons un système dont la matrice augmentée est équivalente par ligne à la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, le rang de cette matrice est $r = 3$, qui est strictement inférieur au nombre d'inconnues, $n = 5$.

La forme échelonnée réduite de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Test 34 Vérifier le!

Notre système est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 & = -28 \\ \quad\quad x_3 + 2x_4 & = -14 \\ \quad\quad\quad\quad x_5 & = 5. \end{cases}$$

Les inconnues x_1, x_3 et x_5 correspondent aux colonnes contenant les pivots, ce sont les variables principales. Les deux autres inconnues, x_2 et x_4 sont les variables libres. La forme échelonnée de l'équation nous permet d'affirmer que l'on peut attribuer des valeur arbitraires, s et t, à x_2 et x_4 ; et alors une solution est donnée par

$$x_1 = -28 - 3s - 4t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -14 - 2t, \qquad x_4 = t, \qquad x_5 = 5.$$

Il y a une infinité de solutions puisque les «variables libres» x_2 et x_4 peuvent prendre des valeurs $s, t \in \mathbb{R}$ quelconques.

Théorème 35 *On considère un système de m équations à n inconnue, noté $Ax = b$, où la matrice des coefficient A est une matrice (m, n) de rang r.*

- *Si la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée $(A|b)$ contient une ligne de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors le système $Ax = b$ est incompatible; il n'a aucune solution. Dans ce cas*
$$\mathrm{rg}(A) = r < m \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg}(A|b) = r + 1.$$
- *Si la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée $(A|b)$ ne contient de ligne de la forme précédente, le système est compatible, et la solution générale s'exprime avec $n - r$ variables libres.*

  Lorsque $r < n$, il y a donc une infinité de solutions, mais lorsque $r = n$, il n'y a pas de variable libre et le système admet une unique solution.

Le théorème s'applique également à un système homogène, celui-ci étant toujours compatible.

Théorème 36 *La solution générale d'un système homogène s'exprime avec $n - r$ variables libres, où r est le rang du système et n le nombre d'inconnues.*
Lorsque $r < n$, celui-ci a une infinité de solutions, mais lorsque $r = n$, il y a une unique solution, la ***solution triviale***, *$x = 0$.*

22.3 Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^n$

§1 Notation vectorielle

Reprenons l'exemple 33. La solution générale du système s'exprime avec deux variables libres, ou **paramètres**, s et t. On peut écrire les solutions, x, sous forme de vecteur colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28-3s-4t \\ s \\ -14-2t \\ t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t \\ 0 \\ -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on peut écrire les solutions sous la forme

$$x = p + sv_1 + tv_2, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$p = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -14 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, les solutions d'un système compatible $Ax = b$ de rang r avec n inconnues sont de la forme

$$x = p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-r} v_{n-r}, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

où $p, v_1, \dots, v_{n-r}$ sont tels que $Ap = b$ et $Av_i = 0$.

§2 Droites de $\mathbb{R}^2$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose a ou b non nul. L'équation d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

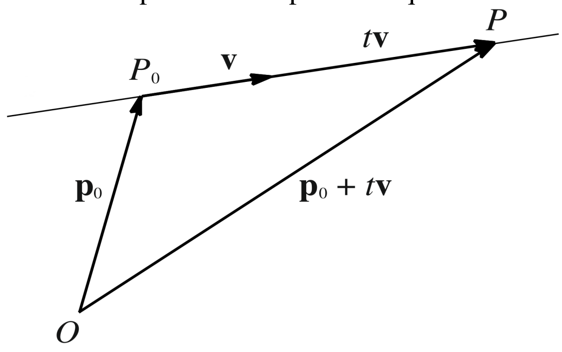
$$ax + by = c$$

est un «système» de rang 1 à deux inconnues. Il est toujours compatible et ses solutions sont les vecteurs s'écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P_0 + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ est une droite passant par le point $P_0 = (x_0, y_0)^T$ et dirigée par le vecteur $v = (\alpha, \beta)^T$.

Figure 22.1: Représentation paramétrique d'une droite



§3 Droites et plans de $\mathbb{R}^3$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On suppose a, b, c non tous nuls. Le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

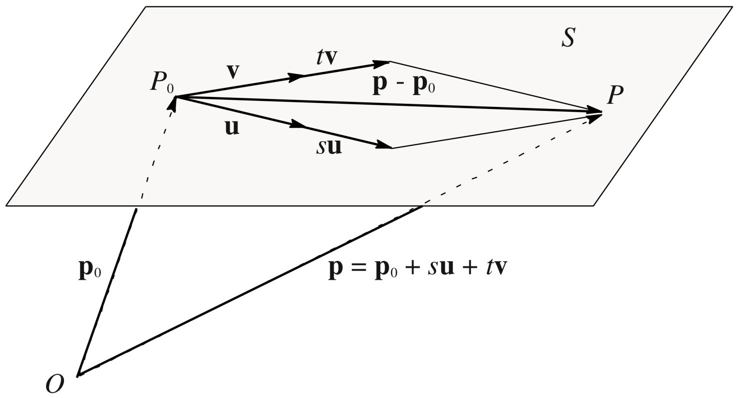
$$ax + by + cz = d$$

est un «système» de rang 1 à trois inconnues. Il est toujours compatible et ses solutions sont les vecteurs s'écrivant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = P_0 + su + tv \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + cz = d$ est un plan passant par le point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ et dirigée par les vecteurs $u = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ et $v = (\alpha', \beta', \gamma')^T$. On peut montrer que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.

Figure 22.2: Représentation paramétrique d'un plan



Considérons maintenant le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{cases}$$

Supposons ce système de rang 2, ce qui revient à dire que les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas colinéaires. Géométriquement, cela signifie que les plans (ce sont bien des plans)

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = d \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Q} : a'x + b'y + c'z = d'$$

ne sont pas parallèles. Ce système est toujours compatible et ses solutions sont les vecteurs s'écrivant
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P_0 + tv \quad t \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, l'ensemble de ses solutions du système, c'est-à-dire $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, est une droite passant par le point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ et dirigée par le vecteur $v = (\alpha, \beta, \gamma)^T$.

Supposons ce système de rang 1, ce qui revient à dire que les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont colinéaires Géométriquement, cela signifie que les plans (pour avoir des plans, il faut supposer de plus les triplet (a, b, c) et (a', b', c') non nuls) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèle. On distingue alors deux possibilités:

- Le système est incompatible (les deux plans sont distincts),
- ou le système est compatible (les deux équations sont proportionnelle) et leur intersection est donc le plan $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

22.4 Image d'une matrice

§1 Définition

Définition 37 Soit A une matrice (m,n). L'image de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est la partie de $\mathbb{K}^m$ définie par

$$\mathrm{Im}(A) = \{ Ax \mid x \in \mathbb{K}^n \} = \{ y \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \in \mathbb{K}^n, Ax = y \}.$$

Autrement dit, l'image de A est l'ensemble des vecteurs $b \in \mathbb{K}^m$ pour lesquels le système $Ax = b$ est compatible.

Exemple 38 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Im}(A)$.

Test 39 Notons $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de A, ainsi $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$. Si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n$, nous avons vu que Ax s'exprime comme combinaison linéaire des colonnes de A, explicitement

$$Ax = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n.$$

C'est une bonne occasion de le démontrer à nouveau. Expliciter chaque côté de l'égalité en utilisant $c_i = \left(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{mi}\right)^T$.

À partir de maintenant, nous utiliserons fréquemment ce résultat.

Proposition 40 *Soit A une matrice (m,n). L'image de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A.*
Si $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ où c_i est la i-ème colonne de A, alors

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Exemple 41 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, pour $x = (\alpha_1, \alpha_2)^T$,

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \left(\alpha_1, \alpha_2\right) \in \mathbb{K}^2 \right\},$$

ou encore

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \right\} \quad \text{où l'on a} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 42 *Le système $Ax = b$ est compatible si, et seulement si b est combinaison linéaire des colonnes de A.*

§2 Matrice équivalentes par colonnes

Brève extension des définitions et résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

- Les opérations élémentaires sur les colonnes sont analogues à celles sur les lignes:

$$C_i \leftarrow \alpha C_i \qquad\qquad C_i \leftrightarrow C_j \qquad\qquad C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$$

- Faire des opération élémentaires sur les colonnes de A «revient à» faire des opérations élémentaires sur les lignes de A^T.
- Deux matrices A et B sont **équivalentes par colonnes** (notation $A \underset{C}{\sim} B$) si l'on peut obtenir la matrice B à partir de la matrice A en effectuant une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.
- Une opération élémentaire sur les colonnes se traduit par la multiplication à droite par une matrice d'opération élémentaires(ce sont les mêmes «par ligne» que «par colonne»).
- Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si $A \underset{C}{\sim} I_n$
- Si $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix}$ Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition 43 *Si $A \underset{C}{\sim} A'$, alors* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A')$.

22.5 Critères d'inversibilité d'une matrice

§1 Critères d'inversibilité

Théorème 44 *Pour A une matrice carrée (n, n). Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible.*
2. *Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ admet une unique solution.*
3. *Le système $Ax = 0$ n'admet que la solution nulle.*
4. $\mathrm{rg}(A) = n$.
5. $A \underset{L}{\sim} I_n$.
6. $\ker(A) = \{ \mathbf{0} \}$.
7. *Pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $Ax = b$ admet une solution.*
8. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.
9. $A \underset{C}{\sim} I_n$.

Ici $\mathbb{K}^n$ désigne $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

§2 Inverse à droite, inverse à gauche

Théorème 45 *Soit A et B deux matrice carrée (n, n).*
Si $AB = I_n$ alors A et B sont inversibles, et $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

Autrement dit,

- une matrice carrée inversible à gauche est inversible,
- une matrice carrée inversible à droite est inversible.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Bx = 0$. Alors

$$(AB)x = A(Bx) = A0 = 0.$$

Or $AB = I_n$, donc $(AB)x = x$ et donc $x = 0$.

On a donc montrer que l'unique solution du système $Bx = 0$ est la solution nulle. En utilisant les critères d'inversibilité d'une matrice (théorème 44), on a montré que B était inversible.

En multipliant à droite par B^{-1} l'identité $AB = I_n$, on obtient alors

$$A = I_n B^{-1} = B^{-1},$$

d'où A est inversible et $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$. ∎