Chapter 4 Calculs algébriques

Exercice 1 (4.1)

Comparer les cinq sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^3 \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{4} n^3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{4} k^3$$
$$S_4 = \sum_{k=2}^{5} (k-1)^3 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{4} (5-k)^3$$

Solution 1 (4.1)

En écrivant explicitement les sommes, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Exercice 2 (4.1)

Compléter les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + \cdots.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \cdots.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{\cdots} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{\cdots}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} \cdots.$

8. $\displaystyle\sum_{k=\cdots}^{\cdots} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{\cdots} \frac{\cdots}{k}.$

Solution 2 (4.1)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 + 10^2$ ou également $\displaystyle\sum_{k=10}^{10} k^2.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=1}^{10} 2^k + 1$ ou encore 2^0 ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{l=3}^{5} \frac{1}{l-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \sum_{k=5}^{7} \frac{1}{k-4}.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=-1}^{5} \frac{k+3}{2^{k+2}}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k!}.$

7. Poser $l = k-1$. Lorsque $k \in \{1,2,3\}$, on a $l = k-1 \in \{0,1,2\}$.
$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{l=0}^{2} (-1)^l \frac{(l+1)^2}{(2l+2)!}.$$
Puis l'indice étant muet, on peut écrire
$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^l \frac{(k+1)^2}{(2k+2)!}.$$

8. Poser $l = k+1$.
$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{2k}{k+1} = \sum_{l=2}^{5} (-1)^{l-1} \frac{2l-2}{l} = \sum_{k=2}^{5} (-1)^{k-1} \frac{2k-2}{k}$$

Exercice 3 (4.1)

1. Montrer par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 8×8 (les côtés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Solution 3 (4.1)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R(n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$R(0)$ est vraie car
$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0(0+1)(2\times 0+1}{6} = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $R(n)$ vraie. On a alors
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \because R(n) \\
&= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}.
\end{aligned}$$

Or $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, on a donc $R(n+1)$:
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 4 (4.1)

En remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1},$$

où a, b sont des constantes à déterminer, simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Solution 4 (4.1)

Pour tout $k \in \mathbb{N}^{\star}$, on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on obtient

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Finalement, par téléscopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 5 (4.1)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes et $4 \leq p \leq q$ deux entiers naturels. Simplifier la somme

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Solution 5 (4.1)

Une solution directe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k+1} - \sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=p-2}^{q} u_k - \sum_{k=p-4}^{q-2} u_k \\
&= \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k + u_{q-1} + u_q - \left(u_{p-4} + u_{p-3} + \sum_{k=p-2}^{q-2} u_k \right) \\
&= u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.
\end{aligned}$$

Une solution astucieuse avec télescopage, on écrit $u_{k+1} - u_{k-1} = u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) &= \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_k - u_{k-1}) \\
&= u_q - u_{p-3} + u_{q-1} - u_{p-4}.
\end{aligned}$$

Exercice 6 (4.1)

Calculer
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Solution 6 (4.1)
Pour $k \geq 2$, on a
$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - 2\ln(k) + \ln(k+1).$$

D'où
$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) \\
&= \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(1) + \ln(2) - 2\left(\cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(2) + \ln(n)\right) + \cancel{\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)} + \ln(n) + \ln(n+1) \\
&= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2) \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 (4.1)

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Solution 7 (4.1)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, d'où
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

De manière analogue, $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, d'où
$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En sommant les inégalités précédente pour $n = 1..10000$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{100000} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{10000} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

Après telescopage, on obtient
$$\sqrt{10001}-1 < \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{10000} = 100$$

Or $\sqrt{10001}-1 > \sqrt{10000}-1 = 99$, d'où
$$99 \leq \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} < 100$$

et donc
$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right\rfloor = 99.$$

Exercice 8 (4.2)

Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. $\sum_{i=1}^{n} k$.
3. $\sum_{k=1}^{n} i$.
4. $\sum_{k=1}^{n} n$.
5. $\prod_{k=1}^{n} k$.
6. $\prod_{i=1}^{n} k$.
7. $\prod_{k=1}^{n} i$.
8. $\prod_{k=1}^{n} n$.

Solution 8 (4.2)

1. $n(n+1)/2$.
2. nk.
3. ni.
4. n^2.
5. $n!$.
6. k^n.
7. i^n.
8. n^n.

Exercice 9 (4.2)

Développer.

1. $(a+b)^7$.

2. $(1-3x)^5$.

Solution 9 (4.2)

1. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

2. $1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$.

Exercice 10 (4.2)

Calculer le coefficient de x^3 dans le développement de

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}.$$

Solution 10 (4.2)

On a

$$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x)^k \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k (2x)^{3k-24}.$$

L'exposant de x vaut 3 si, et seulement si $3k - 24 = 3$, c'est-à-dire si $k = 9$, et le terme en x^3 est donc

$$\binom{12}{9} (-1)^9 (2x)^{3\cdot 9-24} = -\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} (2x)^2 = -220 \cdot 8x^3 = -1760x^3.$$

Exercice 11 (4.2)

Calculer.

1. Le terme en x^5 du développement de $(x-2)^8$.
2. Le terme en x^{20} du développement de $(x^2-y^2)^{14}$.
3. Le terme en x^6 du développement de $(3-4x^2)^5$.
4. Le terme en x^4 et le terme en x^6 du développement de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{14}$.

Solution 11 (4.2)
De manière analogue à l'exercice 10, on obtient

1. $-448x^5$.
2. $1001x^{20}y^8$.
3. $-5760x^6$.
4. $3003x^4$ et $0x^6$.

Exercice 12 (4.2)

Déterminer a afin que le coefficient du terme en x^4, dans le développement de

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7$$

soit égal à 14.

Solution 12 (4.2)
On a

$$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k \left(\frac{a}{x^2}\right)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k} x^{3k-14}.$$

Le terme en x^4 de ce développement correspond à $k = 6$. Le coefficient du terme en x^4 est donc $\binom{7}{6} a = 7a$. Celui-ci est égal à 14 si, et seulement si $a = 2$.

Exercice 13 (4.2)

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $1\,000\,003^5$.

Solution 13 (4.2)
Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1000003^5 = \left(10^6+3\right)^5 &= 10^{30} + 5\times 3\cdot 10^{24} + 10\times 9\cdot 10^{18} + 10\times 27\cdot 10^{12} + 5\times 81\cdot 10^6 + 243 \\ &= 10^{30} + 15\cdot 10^{24} + 90\cdot 10^{18} + 270\cdot 10^{12} + 405\cdot 10^6 + 243 \\ &= 1\,000\,015\,090\,000\,270\,000\,405\,000\,243. \end{aligned}$$

Exercice 14 (4.2)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1}$.

Solution 14 (4.2)

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = -\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3\times\left(3^2\right)^k\binom{n}{k} = 3\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}1^{n-k}\left(3^2\right)^k = 3\left(1+3^2\right)^n = 3\cdot 10^n.$

Exercice 15 (4.2)

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall a \in \mathbb{N}$, on a $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Solution 15 (4.2)

1. Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a

$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1} \quad \text{d'où} \quad k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

Or $1 \leq k \leq p$, donc p ne divise pas k et puisque p est un nombre premier, le lemme d'Euclide assure que p divise $\binom{p}{k}$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}b^k = a^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^{p-k}b^k + b^p.$$

Or pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$, donc p divise $\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^{p-k}b^k$. Ainsi

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

3. On effectue une récurrence sur $a \in \mathbb{N}$. On a $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$.

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^p \equiv a \pmod{p}$. D'après la question précédente (avec $b = 1$), on a

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \pmod{p};$$

et puisque $a^p \equiv a \pmod{p}$, on a finalement

$$(a+1)^p \equiv a + 1 \pmod{p}.$$

Conclusion

Par récurrence, on a pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Exercice 16 (4.2)

Soit une suite arithmétique (u_n), on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer les éléments caractéristiques (premier terme u_0 et raison r) de la suite (u_n) à partir des données suivantes.

1. $u_0 = 6$ et $u_5 = 0$;
2. $u_0 = 3$ et $s_3 = 36$;
3. $r = 6$ et $s_5 = 36$;
4. $u_9 = 96$ et $s_9 = 780$;
5. $u_5 = 90$ et $u_8 = 80$;
6. $s_3 = 40$ et $s_5 = 72$.

Solution 16 (4.2)

1. $r = -6/5$.
2. $r = 4$.
3. $u_0 = -9$.
4. $u_0 = 60$ et $r = 4$.
5. $u_0 = 320/3$ et $r = -10/3$.
6. $u_0 = 7$ et $r = 2$.

Exercice 17 (4.2)

Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Solution 17 (4.2)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = \sum_{k=0}^{n} (k-k) + n + 1 = n+1.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum k = 1^n \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

Exercice 18 (4.2)

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

1. Rappeler sans démonstration les expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$.
2. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. En calculant de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$, montrer

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - (n+1). \tag{1}$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{2}$$

Solution 18 (4.2)

Exercice 19 (4.3)

Simplifier les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$.
4. $\displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} (i+j)$.
5. $\displaystyle\sum_{0 \le i,j \le n} x^{i+j}$.
6. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1}$.
7. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} (j-i)$.
8. $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2$.
9. $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i^2}{j}$.

Solution 19 (4.3)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{9}\right)^i = 3\frac{2}{9}\frac{1-(2/9)^{n+1}}{1-2/9} = \frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right)$.

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.

4. On écrit une somme double

$$\begin{aligned}\sum_{1 \le i < j \le n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + (j-1)j\right) = \frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + j = \frac{3}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}\right)\\
&= \frac{3}{2}\frac{n(n-1)(2n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

5. Si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{0 \le i,j \le n} x^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^i x^j = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\
&= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.\end{aligned}$$

6. Nous allons écrire une somme double. Puisque l'on ne sait pas calculer une somme du type $\sum_j \frac{1}{j}$, nous allons plutôt commencer par sommer sur l'indice i.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j+1} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\frac{j(j+1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

7. On peut écrire une somme double ($\sum_i \sum_j$), mais on peut aussi utiliser d'abord la linéarité.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n} (j-i) &= \sum_{1\le i\le j\le n} j - \sum_{1\le i\le j\le n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}\big((n+1)k-k^2\big) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(n+1)k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+2-3n-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}.
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2 &= \sum_{1\le i,j\le n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2 + 2i\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1+3n+3+2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}j^2 + \frac{1}{2}j + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}n = \frac{n(4n^2+6n+2+9n+9+6)}{36} \\
&= \frac{n(4n^2+15n+17)}{36}
\end{aligned}$$

Exercice 20 (4.3)

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

1. Calculer la somme $S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i + j$.
2. Calculer la somme
$$S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j).$$
On pourra scinder cette somme en deux.
3. En déduire l'expression de la somme $S_3 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i, j)$.

Remarque. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on note

$$\min(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max(i, j) = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ i & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Solution 20 (4.3)

Exercice 21 (4.4)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles

1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$;
2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$;
3. le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

Solution 21 (4.4)