#### **CHAPITRE**

# 34

## APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION

#### 34.1 APPLICATION LINÉAIRE EN DIMENSION FINIE

#### §1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Test 1

On considère la base  $S=(v_1,v_2)$  de  $E=\mathbb{R}^2$  donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
 et  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On suppose donnée une application linéaire  $f:E\to\mathbb{R}^3$  telle que

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} -2\\3\\-1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image du vecteur  $v = (2, -5)^T$  par f.

Théorème 2

Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$  une base de E. Soit F un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$  une famille de n vecteurs de F. Alors, il existe une unique application linéaire  $T:E\to F$  telle que

$$\forall j \in [[1, n]], T(v_j) = y_j.$$

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

#### §2 Caractérisation des isomorphismes par les bases

#### Théorème 3

Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de E. Soit F un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f: E \to F$  une application linéaire. Alors, f est un isomorphisme si, et seulement si la famille

$$f(\mathcal{B}) = (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$$

est une base de F.

#### **Proposition 4**

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

#### **Proposition 5**

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f: E \to F$  un isomorphisme. Alors, pour toute famille  $S = (w_1, w_2, \dots, w_p)$  de vecteurs de E, on a

$$\operatorname{rg}\left(f(w_1),f(w_2),\ldots,f(w_p)\right)=\operatorname{rg}\left(w_1,w_2,\ldots,w_p\right).$$

En particulier, si E est de dimension finie et  $\mathcal{B}$  est une base de E, alors

$$\operatorname{rg}\left(w_{1}, w_{2}, \ldots, w_{p}\right) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_{1}\right), \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_{2}\right), \ldots, \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_{p}\right)\right)$$
$$= \operatorname{rg}\left(\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}\left(w_{1}, w_{2}, \ldots, w_{p}\right)\right).$$

#### §3 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

#### Théorème 6

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathbf{L}(E, F)$ . On suppose  $\dim(E) = \dim(F)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1. f est bijective.
- 2. f est surjective.
- 3. f est injective.

#### Corollaire 7

Soit f un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est bijective si, et seulement si f est injective.

#### Exemple 8

On reprend l'exemple de l'application  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

Montrer (rapidement) que T est bijective.

### 34.2 RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

#### §1 Applications linéaires de rang fini

#### **Définition 9**

Soit E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f: E \to F$  une application linéaire. On dit que f est de **rang fini** lorsque l'image de f est de dimension finie. La dimension de cette image est alors appelée **rang** de f que l'on note  $\operatorname{rg}(f)$ :

$$rg(f) = dim(Im(f))$$
.

#### Théorème 10

Soit E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f: E \to F$  une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie  $n \ge 1$  et que  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une base de E. Alors f est de rang fini et

$$Im(f) = Vect (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)).$$

On a donc

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \qquad \operatorname{rg}(f) \le \dim(E) \qquad \operatorname{rg}(f) \le \dim(F).$$

#### §2 Théorème du rang pour les application linéaires

#### Théorème 11

#### Forme géométrique du théorème du rang

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f: E \to F$  une application linéaire. Soit H est un supplémentaire de  $\ker f$  dans E alors

$$g = f_H^{\operatorname{Im} f}$$
:  $H \to \operatorname{Im} f$   
 $x \mapsto f(x)$ 

est un isomorphisme. C'est-à-dire que tout supplémentaire de  $\ker f$  dans E est isomorphe à  $\operatorname{Im} f$ .

On dit que f induit un isomorphisme g de H sur Im f.

#### Théorème 12

#### Théorème du rang

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E étant de dimension finie et  $f: E \to F$  une application linéaire. Alors f est de rang fini et

$$rg(f) + dim(ker(f)) = dim E.$$
 (Théorème du rang)



Dans le cas où  $f \in \mathbf{L}(E)$ , il n'y a aucune raison de croire que ker f et  $\mathrm{Im}\ f$  sont supplémentaires. Par contre, si ker  $f \cap \mathrm{Im}\ f = \{\ 0_E\ \}$ , ils sont alors supplémentaires.

#### Corollaire 13

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f: E \to F$  une application linéaire. Alors si  $(b_1, \ldots, b_p)$  est une base de  $\mathrm{Im}\, f$ , et, pour chaque  $i \in [\![1,p]\!]$ ,  $a_i$  un élément de E tel que  $f(a_i) = b_i$ , la famille  $(a_1, \ldots, a_p)$  est libre et engendre un sous-espace supplémentaire de  $\mathrm{ker}(f)$ .

#### Remarque

Soit une matrice A de type (m, n) et  $T: x \mapsto Ax$ . Alors T est une application linéaire de  $E = \mathbb{K}^n$ dans  $F = \mathbb{K}^m$ . De plus,  $\ker(T) = \ker(A)$  et  $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(A)$ , donc  $\operatorname{rg}(T) = \operatorname{rg}(A)$ . Le théorème du rang affirme donc que

$$rg(A) + dim(ker A) = n,$$

où *n* est la dimensions de  $E = \mathbb{K}^n$ , qui est égale au nombre de colonnes de *A*.

#### Test 14

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et  $f: E \to F$  une application linéaire. Alors

- 1. On a  $rg(f) \le dim(E)$ , et rg(f) = dim(E) si, et seulement si f est injective.
- 2. On a  $rg(f) \le dim(F)$ , et rg(f) = dim(F) si, et seulement si f est surjective.

En particulier, f est bijective si, et seulement si rg(f) = dim(E) = dim(F).

#### Test 15

Existe-il une application  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  linéaire telle que  $\ker(T) = \operatorname{Im}(T)$ ?

#### Rang d'une composée **§3**

#### **Proposition 16**

Soit E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimension finie,  $f \in L(E, F)$  et  $g \in L(F, G)$ , alors

- 1.  $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f \operatorname{et} \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$ .
- **2.** Si g est injective, alors  $rg(g \circ f) = rg f$ .
- 3. Si f est surjective, alors  $rg(g \circ f) = rg g$ .

Corollaire 17 💚 Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche, ou à droite, par un isomorphisme.