Chapter 40 Séries numériques

Exercice 1 (40.0)

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; construire un contre-exemple dans ce dernier cas.

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$ ont même nature.
2. Si $\sum(u_n + v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes deux.
3. si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+m}$ converge aussi et a la même somme.
4. Quel que soit $c \in \mathbb{R}$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} cu_n$ est convergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
5. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n u_n = 0$.
6. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Solution 1 (40.0)

Vrai. Faux. Faux. Faux. Vrai. Faux.

Exercice 2 (40.0)

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; construire un contrexemple dans ce dernier cas.

1. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles est majorée.
2. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que ses sommes partielles soient toutes nulles.
3. Pour qu'une série converge, il est suffisant que ses sommes partielles soient toutes nulles.
4. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que ses sommes partielles tendent vers 0.
5. Pour qu'une série converge, il est suffisant que la suite de ses sommes partielles soit décroissante.
6. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que la suite de ses sommes partielles soit croissante.
7. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles est bornée.
8. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
9. Une série converge si la suite de ses sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
10. Une série converge si la suite de ses sommes partielles est constantes.

Solution 2 (40.0)

Vrai. Faux. Vrai. Faux. Faux. Faux. Vrai. Faux. Faux. Vrai.

Exercice 3 (40.0)

Après avoir calculé les sommes partielles, étudier la convergence de

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3-n}{n(n+1)(n+2)}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$.

Solution 3 (40.0)

1. $S_N = 1 - 1/\sqrt{N+1}$; $S = 1$.
2. $S_N = \ln\frac{1}{2} + \ln((N+1)/N)$; $S = \ln\frac{1}{2}$.
3. $S_N = \frac{1}{4} + \frac{N-1/2}{(N+1)(N+2)}$; $S = 1/4$.
4. $S_N = \tan 1 - \tan\frac{1}{N+1}$; $S = \tan 1$.

Exercice 4 (40.0)

Pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, Claude procède comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \dots \\
&= 1.
\end{aligned}$$

tandis que Dominique utilise la méthode suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \dots \\
&= \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{6}{5}\right) + \dots \\
&= 2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right) - \dots \\
&= 2.
\end{aligned}$$

L'un des deux a-t-il raison ? Si oui, lequel ?

Solution 4 (40.0)

Clade a raison (mais son argument mériterait d'être écrit avec un peu plus de soin).

Exercice 5 (40.0)

1. Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Exercice 6 (40.0) *Séries géométriques dérivées*

On fixe un réel x tel que $0 \leq x < 1$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geq p} \binom{k}{p} x^k$ converge.
2. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.
3. Calculer $x\left(S_p + S_{p+1}\right)$.
4. En déduire une expression simple de S_p en fonction de p et x.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p}$ (série géométrique dérivée).

Solution 6 (40.0)

Exercice 7 (40.0)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants

1. $\dfrac{|\cos n|}{n^2}$
2. $\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}-\sqrt{n}$
3. $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\ln \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}$
5. $\dfrac{1}{n^2 \ln n}$
6. $\dfrac{\ln n}{n}$
7. $\dfrac{n!}{n^n}$
8. $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)-\dfrac{1}{n}$.

Solution 7 (40.0)

1. La série $\sum u_n$ converge.
2. La série $\sum u_n$ diverge.
3. La série $\sum u_n$ converge.
4. La série $\sum u_n$ converge.
5. La série $\sum u_n$ converge.
6. La série $\sum u_n$ diverge.
7. La série $\sum u_n$ converge.
8. La série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 8 (40.0)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^\star$, convergente. Déterminer la nature des séries de termes généraux

1. $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$,
2. $v_n = e^{a_n} - 1$,
3. $w_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n}$,
4. $x_n = a_n^2$.

Solution 8 (40.0)

1. La série $\sum u_n$ converge.
2. La série $\sum v_n$ converge.
3. La série $\sum w_n$ converge.
4. La série $\sum x_n$ converge.

Exercice 9 (40.0)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants

1. $e^{-\sqrt{n}}$

2. $\dfrac{\ln n}{n^2}$

3. $n^{1/n^2} - 1$

4. $\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$

5. $\dfrac{1}{n \ln n}$

6. $\dfrac{1}{n (\ln n)^2}$.

Solution 9 (40.0)

1. La série $\sum u_n$ converge.

2. La série $\sum u_n$ converge.

3. La série $\sum u_n$ converge.

4. La série $\sum u_n$ diverge.

5. Comparaison série/intégrale : la série $\sum u_n$ diverge.

6. Comparaison série/intégrale : la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 (40.0)

Montrer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Solution 10 (40.0)

Exercice 11 (40.0)

Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 11 (40.0)

Exercice 12 (40.0)

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictements positifs. On suppose

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0,1[\,.$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right) u_n.$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

3. Soient deux réels $\alpha > 0$ et $a > 1$. Déterminer la nature des trois séries suivantes

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^\alpha}{a^n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}.$$

Solution 12 (40.0)

1. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - \ell\right| \leq \epsilon.$$

En spécialisant avec $\epsilon = (1-\ell)/2 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \ell - \epsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \epsilon = \frac{1+\ell}{2}.$$

Étant donnée que $u_n > 0$, on a donc pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right) u_n.$$

2. Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} u_N.$$

Or $\frac{1+\ell}{2} < 1$, donc la série géométrique

$$\sum \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$$

est convergente. D'après le critère de comparaison des série à terme général positif, la série $\sum_{n\geq N} u_n$ est convergente. Il en est donc de même de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

3.
- Posons $u_n = \frac{n^\alpha}{a^n} > 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{a}.$$

  Or $\frac{1}{a} < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc convergente.

- Posons $v_n = \frac{a^n}{n!} > 0$. Alors
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1.$$
La série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est donc convergente.
- Posons $w_n = \frac{n!}{n^n} > 0$. Alors
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$
On reconnaît un équivalent usuel :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$
Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{e} < 1.$$
La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est donc convergente.

Exercice 13 (40.0)

Soit $\sum u_n$ la série définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n = 2^p, p \in \mathbb{N}^\star, \\ \frac{1}{n^2} & n \neq 2^p. \end{cases}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

2. Est-il exact que la convergence d'une série $\sum u_n$ entraîne le fait que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Exercice 14 (40.0)

Soient $a > 0$ et $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{1 + ax} - 1$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f, que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x) - x$ est du signe de $x(a - 2 - x)$. Déterminer les points fixes de f ainsi que les intervalles stables. Tracer le graphe de f pour différentes valeurs de a.

2. On suppose $a < 2$ et on considère la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que $u_n \to 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. Que dire de la suite (u_n) si $a > 2$?

Solution 14 (40.0)

Exercice 15 (40.0)

Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = n^\alpha \int_0^{\pi/n} (\sin x)^\beta \, \mathrm{d}x.$$

Solution 15 (40.0)

Exercice 16 (40.0)

1. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de la suite (S_n).

2. Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de la suite (R_n).

Solution 16 (40.0)

Exercice 17 (40.0)

Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La réel γ est appelé la constante d'Euler.

Solution 17 (40.0)

Exercice 18 (40.0)

Soit $\sum u_n$ une série de réels strictement positifs. Montre que si

- $\sum u_n$ est convergente,
- (u_n) est une suite décroissante,

alors

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution 18 (40.0)

Encadrer u_{2n}, puis u_n, avec $\sum_{k=n}^{2n} u_n$...

Exercice 19 (40.0)

Étudier si la série de terme général

$$u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$$

converge.

Exercice 20 (40.0)

Étudier si la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

converge.

Exercice 21 (40.0)

Pour tout $n \geq 2$, posons

$$a_n = \frac{1}{n + (-1)^n} \qquad \text{et} \qquad u_n = (-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

Solution 21 (40.0)

Exercice 22 (40.0)

Étudier la nature des deux séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Commenter les résultats.

Solution 22 (40.0)

Exercice 23 (40.0)

Soit $\sum x_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une série $\sum y_n$ absolument convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + y_n.$$

1. Montrer que $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + z_n$ où z_n est le terme général d'une série convergente.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $x_n \sim \frac{A}{n^{\lambda}}$.
3. Exemple : Nature de la série de terme général $\frac{n^n}{n!\, \mathrm{e}^n}$?