Chapter 32 Dimension

Exercice 1 (32.0)

Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \}$.
Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et calculer sa dimension.

Solution 1 (32.0)

Exercice 2 (32.0)

Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0 \}$.
Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et calculer sa dimension.

Solution 2 (32.0)

Exercice 3 (32.0)

Montrer que le sous-ensemble

$$F = \{ (\alpha + \beta, \beta, 2\alpha - \beta - \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base.

Solution 3 (32.0)

Exercice 4 (32.0)

On considère les ensembles

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Décrire les sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(U)$ et $\mathrm{Vect}(W)$. Donner une base pour chacun d'eux. Montrer que l'un des deux est un plan vectoriel et déterminer une équation cartésienne de celui-ci.

Solution 4 (32.0)

Remarquons que U et W contiennent au moins deux vecteurs linéairement indépendants puisque aucun vecteur n'est un multiple scalaire d'un autre.

Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont formée des vecteurs de U et W. On a

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = 3$, la matrice A est inversible, ses colonnes forment donc une base de $\mathbb{R}^3$, on a donc en particulier $\mathrm{Vect}(W) = \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

De plus, on a

$$B \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B est de rang 2, ainsi, $\mathrm{Vect}(U) = \mathrm{Im}(B)$ est un plan vectoriel. Puisque $\mathrm{Vect}(U)$ est de dimension 2, n'importe quel couple de vecteurs indépendants de $\mathrm{Vect}(U)$ forment une base de $\mathrm{Vect}(U)$. Par exemple, on peut prendre les deux premiers vecteurs de U : $v_1 = (-1, 0, 1)^T$ et $v_2 = (1, 2, 3)^T$.

Pour déterminer une équation de $\mathrm{Vect}(U)$, on détermine les vecteur $v = (x, y, z)^T$ tel que v est combinaison linéaire de v_1 et v_2. On considère donc le système $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v$, dont la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 4 & z + x \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & z + x - 2y \end{pmatrix}$$

Ainsi, v est combinaison linéaire de v_1, v_2 si, et seulement si $x - 2y + z = 0$. Cette dernière équation est une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(U)$.

Exercice 5 (32.0)

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,2,3,4), \qquad v_2 = (2,3,4,5), \qquad v_3 = (3,4,5,6), \qquad v_4 = (4,5,6,7).$$

Déterminer une base de V et $\dim V$.

Solution 5 (32.0)

Esquisse. On trouve, par exemple, $v_3 = 2v_2 - v_1$ et $v_4 = 3v_2 - 2v_1$. De plus, (v_1, v_2) est une famille libre, et forment donc une base de $\mathrm{Vect}\left\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \right\}$ et $\dim V = 2$.

Exercice 6 (32.0)

Soient

$$P_1 = X^2 + 1 \qquad P_2 = X^2 + X - 1 \qquad P_3 = X^2 + X.$$

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Solution 6 (32.0)

Exercice 7 (32.0)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$P_1 = (1+\alpha)X^2 + X + 1, \qquad P_2 = X^2 + (1+\alpha)X + 1, \qquad P_3 = X^2 + X + (1+\alpha).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille (P_1, P_2, P_3) soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 8 (32.0)

Soient a et b deux réels distincts, et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer que la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner un exemple d'isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. Déduire des deux questions précédentes une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs dépendants de a et b.

Solution 8 (32.0)

Exercice 9 (32.0)

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des réels. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont la restriction à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ est un polynôme d degré 2 au plus.
Montrer que E est un espace vectoriel. En donner la dimension et une base.

Solution 9 (32.0)

Exercice 10 (32.0)

Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, où

$$v_1 = (1,1,0)^T, \qquad v_2 = (-4,0,3)^T \qquad \text{et } v_3 = (3,5,1)^T.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $w = (-1,7,5)^T$ et $e_1 = (1,0,0)^T$. Déterminer les coordonnées de w et de e_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

Solution 10 (32.0)

1. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0.$$
On a alors
$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_3 & = 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rl} \alpha_1 - 4\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & = -5\alpha_3 = 15\alpha_2 \\ \alpha_3 & = -3\alpha_2 \end{array}\right.$$
et par substitution dans la première équation, $2\alpha_2 = 0$, d'où $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_3 = 0$.
Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les coordonnées de w et e_1 relativement à la base $\mathcal{B}$ revient à résoudre les équations
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = w \quad \text{et} \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = e_1.$$
Notons P la matrices dont les colonnes sont formées des vecteurs v_1, v_2, v_3:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = w \iff P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = w.$

$$(P|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ansi
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = w \iff (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-3, 1, 2)$$

Autrement dit, les coordonnées de w relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Pour les coordonnées de e_1, la méthode est analogue $(P|e_1) \underset{L}{\sim}$ .... On trouve

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 11 (32.0)

On pose $E = \mathbb{C}^3$ et on s'intéresse aux trois vecteurs

$$u_1 = (i, 1, -1), \qquad u_2 = (i, -1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (-1, i, 1).$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.

2. Déterminer les coordonnées de $w = (3 + i, 1 - i, 2)$ dans $\mathcal{B}$.

Solution 11 (32.0)

1. Notons

$$P = \begin{pmatrix} i & i & -1 \\ 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs u_1, u_2, u_3.

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1+i \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille de rang 3, ayant 3 vecteurs de $\mathbb{C}^3$ qui est de dimension 3; c'est donc une base de $\mathbb{C}^3$.

2. Résolvons l'équation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w$ dont la matrice augmentée est

$$(P|w) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 1 & -1 & i & 1-i \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 0 & -2 & 0 & 2i \\ 0 & 2 & 1+i & 3-3i \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1+i & 3-i \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1-2i \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1-2i \end{array}\right)$$

Ainsi $w = (-1 - 3i)u_1 - iu_2 + (1 - 2i)u_3$, c'est-à-dire $[w]_{\mathcal{B}} = (-1 - 3i, -i, 1 - 2i)^T$.

Exercice 12 (32.0)

Soient

$$P_1 = 2X^2 - X + 1, \qquad P_2 = X^2 + 2X, \qquad P_3 = X^2 - 1.$$

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est un base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer les coordonnées de $P = 3X^2 + 5X - 3$ dans cette base.

Solution 12 (32.0)

- La matrice des coordonnées de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{rg}(A) = 3$ et la famille (P_1, P_2, P_3) contient $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$. La famille (P_1, P_2, P_3) est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Variante. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0 &\implies (\alpha_1 - \alpha_3) + (-\alpha_1 + 2\alpha_2)X + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 = 0 \\
&\implies \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right. \implies \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ +2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\implies} \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ +2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 7\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right. \implies \alpha_3 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, cette famille contient $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Exercice 13 (32.0)

1. Montrer que
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
est une base de l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution 13 (32.0)

1. On peut, par exemple, montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Puisque $\mathcal{B}$ contient 4 vecteurs et que $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de E.

2. On trouve $(-7, 11, -21, 30)$.

Exercice 14 (32.0)

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ c & a+b+c & b \\ b & c & a+b+c \end{pmatrix} \middle| \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont on précisera une base $\mathcal{B}$ et la dimension.

2. Quelles sont les coordonnée de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$?

3. Calculer *tous* les produits deux à deux des éléments de la base $\mathcal{B}$ (*indiquer uniquement le résultat sur la copie*).
   Vérifier qu'ils appartiennent bien à F.

4. *En déduire* que pour tout $(M, N) \in F^2$, on a $MN \in F$.

Exercice 15 (32.0)

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées (y_1, y_2, y_3) de ce même vecteur dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs

$$\epsilon_1 = (1, 1, 0), \qquad \epsilon_2 = (1, 0, 1), \qquad \epsilon_3 = (0, 1, 1).$$

Solution 15 (32.0)
Désignons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2 + y_3\epsilon_3$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} y_1 + y_2 & = x_1 \\ y_1 + y_3 & = x_2 \\ y_2 + y_3 & = x_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} y_1 & = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ y_2 & = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \\ y_3 & = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3) \end{array} \right.$$

Ainsi, les coordonées du vecteur $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ dans la base $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ sont

$$[u]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Exercice 16 (32.0)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \qquad\qquad f_2 = e_2 + e_3.$$

Montrer que (f_1, f_2) est libre et compléter cette famille en une base de E.

Solution 16 (32.0)
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \implies \alpha(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \beta(e_2 + e_3) = 0 \implies \alpha e_1 + (2\alpha + \beta)e_2 + (2\alpha + \beta)e_3 = 0.$$

Or la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, donc

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \implies \begin{cases} \alpha &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \end{cases} \implies \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0.$$

Ainsi, la famille (f_1, f_2) est libre.

On souhaite compléter cette famille en une base. Puisque $\dim E = 3$, il suffit de lui ajouter un vecteur f_3 tel que la famille (f_1, f_2, f_3) soit libre. De plus, on peut choisir ce vecteur parmis une famille génératrice de E, prenons (e_1, e_2, e_3).

On remarque que $f_1 = e_1 + 2f_2$, ainsi, la famille (f_1, f_2, e_1) est liée.

Montrons que (f_1, f_2, e_3) est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma e_3 = 0.$$

Alors

$$\alpha(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \beta(e_2 + e_3) + \gamma e_3 = 0 \text{ donc } \alpha e_1 + (2\alpha + \beta)e_2 + (2\alpha + \beta + \gamma e_3) = 0.$$

Or la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, d'où

$$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

Et l'on obtient par substitution $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. La famille (f_1, f_2, e_3) est donc libre. C'est de plus une famille de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

Exercice 17 (32.0)

Soit A une matrice de type $m \times k$. On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Montrer

1. $A^T A$ est une matrice symétrique de type $k \times k$,
2. $A^T A$ est une matrice inversible.

Vérifier les résultats précédents pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 17 (32.0)

Exercice 18 (32.0)

Soit B une matrice $m \times k$ tel que $\operatorname{Im}(B^T)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation cartésienne $4x - 5y + 3z = 0$.

1. Peut-on déterminer m ou k ? Le faire si possible.

2. Déterminer le noyau de B. Écrire la solution générale de l'équation $Bx = 0$.

Solution 18 (32.0)

1. Puisque l'image de B^T est un plan de $\mathbb{R}^3$, les colonnes de B^T doivent être des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour, B cela signifie que B a trois colonnes : $k = 3$.

   On ne peut pas déterminer exactement m. Néanmoins, on peut affirmer que $m \geq 2$ car $\operatorname{rg}(B^T) = 2 \leq m$.

2. On peut déterminer le noyau de B. En effet,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(B^T) \iff 4x - 5y + 3z = 0 \iff 4x = 5y - 3z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les lignes de B (qui sont les colonnes de B^T) sont toutes combinaison linéaire des vecteurs $(5, 4, 0)$ et $(-3, 0, 4)$. Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker B \iff \left\{ \begin{array}{rl} 5x + 4y & = 0 \\ -3x + 4z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} y & = -\frac{5}{4}x \\ z & = \frac{3}{4}x \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de B est donc une droite vectorielle:

$$\ker B = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 19 (32.0)

Soit $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Soit W l'ensemble des suites nulles à partir du rang 3.
Montrer que W est un sous-espace vectoriel de S de dimension 3.

Solution 19 (32.0)

La suite nulle est bien sûr nulle à partir du rang 3, donc $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in W$. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de W, on a

$$\forall n \geq 3, u_n = 0 \text{ et } v_n = 0$$

donc

$$\forall n \geq 3, u_n + v_n = 0,$$

autrement dit, la suite $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 3: $u + v \in W$. Enfin, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall n \geq 3, \alpha u_n = \alpha 0 = 0,$$

donc $\alpha u = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$.

Conclusion

W est un sous-espace vectoriel de S.

Montrons que W est de dimension 3. On définit trois suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $a, b, c \in W$. De plus, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$, on a clairement de manière unique

$$u = u_0 a + u_1 b + u_2 c,$$

ainsi (a, b, c) est une base de W, donc $\dim W = 3$.

Problème 20 (32.0)

On donne une partie d'une matrice A ainsi que sa forme échelonnée réduite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & * & * \\ 2 & -1 & * & * \\ 3 & 2 & * & * \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de l'image de A, $\mathrm{Im}(A)$, une base du noyau de A, $\ker(A)$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(A^T)$.
2. Soit $b = (9, 0, a)^T$ où $a \in \mathbb{R}$. L'équation matricielle $Ax = b$ représente un système linéaire. Quel est son nombre d'équations? Son nombre d'inconnue?

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le système $Ax = b$ soit compatible.
3. Déterminer si possible les colonnes de A manquantes.

Solution 20 (32.0)