CHAPITRE 2

NOMBRES ENTIERS, ITÉRATIONS

2.1 NOMBRES ENTIERS

Dans la suite, je vous épargne les propriétés de la relation d'ordre... Ce sont les mêmes que pour les réels !

§1 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$

Théorème 1

Axiomatique
L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre totale $\leq$ vérifiant les deux propriétés fondamentales suivantes

1. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
2. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*
3. *$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.*

Notation

Si p et q sont des entiers, on note

$$[\![p, q]\!] = \{ n \in \mathbb{N} \mid p \leq n \leq q \}.$$

Remarque

Si p et q sont des entiers,

$$p \leq q \iff p < q + 1.$$

§2 Le principe de récurrence

On rappelle qu'un **prédicat** ou une **propriété** sur $\mathbb{N}$ est une relation contenant une variable $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathcal{B} = \{ \text{Vrai}, \text{Faux} \}$. Si R est un tel prédicat, on écrit «on a $R(n)$» ou plus simplement «$R(n)$» pour exprimer que la valeur de $R(n)$ est Vrai. Par exemple, si $R(n)$ est «$2n \geq n^2$», on a $R(1)$ et $R(2)$ mais on n'a pas $R(3)$.

Théorème 2

Principe de récurrence
Soit R un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose que

- $R(0)$ *est vraie,*
- $\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1)$.

Dans ces conditions, la propriété $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Utiliser ces propriétés, c'est faire un **raisonnement par récurrence**.

Démonstration non exigible. Effectuons un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est faux ; autrement dit, l'ensemble

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{non } R(n) \} .$$

n'est pas vide. Or $A \subset \mathbb{N}$ donc A admet un plus petit élément, noté a.

$R(0)$ est vraie, donc $a \geq 1$. Par définition de a, on a $a-1 \notin A$, c'est-à-dire que l'assertion $R(a-1)$ est vraie. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1);$$

donc $R(a)$ est vraie, c'est absurde.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$. ∎

Méthode

Au moment d'entamer un raisonnement par récurrence, on doit obligatoirement annoncer qu'on va utiliser ce type de raisonnement, et indiquer quelle propriété va être établie.

On doit ensuite démontrer que la propriété est vraie pour le plus petit naturel pour lequel on veut la démontrer (c'est «l'initialisation»).

Puis on doit donner l'hypothèse de récurrence : on suppose qu'étant donné un naturel n, la propriété est vraie pour ce naturel ; à l'aide de cette hypothèse, on démontre alors que la propriété est vraie pour $n+1$.

On peut enfin conclure que la propriété est vraie pour tout naturel.

Exemple 3

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion

$$R(n) \,:\, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}.$$

- L'assertion $R(0)$ est vraie[1] puisque $5^2 = 4^2 + 3^2$.

[1] Initialisation : $R(0)$.

- Soit un entier $n \geq 0$. On suppose que $R(n)$ est vraie, c'est-à-dire $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$. Ainsi[2]

$$\begin{aligned} 5^{n+3} &= 5 \times 5^{n+2} \\ &\geq 5 \times \left(4^{n+2} + 3^{n+2}\right) && \text{d'après } R(n). \end{aligned}$$

  Or $5 \times 4^{n+2} \geq 4^{n+3}$ et $5 \times 3^{n+2} \geq 3^{n+3}$; on peut donc affirmer

$$5^{n+3} \geq 4^{n+3} + 3^{n+3},$$

  d'où $R(n+1)$.

- D'après le principe de récurrence, [3] l'assertion $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

∎

On utilise souvent, sous le nom de «principe de récurrence» divers critères qui se déduisent aisément du théorème précédent, et dont nous allons indiquer les plus importants.

Corollaire 4 **Récurrence à deux pas**
Soit R un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose que

$$R(0) \qquad \textit{et} \qquad R(1) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (R(n) \;\; \textit{et} \;\; R(n+1)) \implies R(n+2).$$

Dans ces conditions,

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

Ce résultat peut se généraliser à la récurrence à trois pas, quatre pas…

Corollaire 5 **Récurrence à partir du rang k**
Soit R un prédicat sur $[\![k, +\infty[\![$. On suppose que

$$R(k) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \geq k, R(n) \implies R(n+1).$$

Dans ces conditions,

$$\forall n \geq k, R(n).$$

Corollaire 6 **Récurrence limitée à un intervalle**
Soit a, b deux entiers tels que $a \leq b$, et soit R un prédicat sur $[\![a, b]\!]$ tel que l'on ait

$$R(a) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in [\![a, b-1]\!], R(n) \implies R(n+1).$$

Alors

$$\forall n \in [\![a, b]\!], R(n).$$

Corollaire 7 **Récurrence avec prédécesseurs**
Soit R un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose que

$$R(0) \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (R(0) \;\; \textit{et} \;\; R(1) \;\; \textit{et} \;\; \dots \;\; \textit{et} \;\; R(n)) \implies R(n+1).$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, R(n).$$

---

[2] Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \implies R(n+1)$.
[3] Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$.

§3 L'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$

Théorème 8 *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est muni d'une relation d'ordre totale $\leq$ vérifiant les deux propriétés fondamentales suivantes*

1. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*
2. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.*

2.2 Suites définies par une relation de récurrence

On doit à Fibonacci le problème suivant (peu réaliste et incestueux). On suppose qu'au premier jour du mois 1, on dispose d'un jeune couple de lapins. Au premier jour du mois 2, ce couple donne naissance à un nouveau couple de lapins. Au premier jour du mois 3, chacun de ces deux couples donne naissance à un nouveau couple. Au premier jour du mois 4, le couple du mois 1 est trop vieux, et ne donne plus de nouveaux lapins, mais le couple né au mois 2 et les deux couples nés au mois 3 donnent chacun naissance à un nouveau couple de lapins. Et ainsi de suite…

Soit n un entier naturel ; notons F_n le nombre de couples nés au début du mois n. On peut écrire que

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Ces relations définissent une suite et une seule. Cette suite s'appelle **suite de Fibonacci**.

Nous dirons que nous avons défini cette suite par récurrence.

§1 Suites arithmétiques

Définition 9 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre complexe r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Ce nombre r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement,

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, u_q = u_p + (q-p)r.$$

§2 Suites géométriques

Définition 11 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre complexe r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n.$$

Ce nombre r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 r^n.$$

Plus généralement, si $r \neq 0$.

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, u_q = u_p r^{q-p}.$$

§3 Suites arithmético-géométriques

Définition 13 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux nombres complexes a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Méthode Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = ax + b$. On considère la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n).$$

On suppose $a \neq 1$, (sinon (u_n) est une suite arithmétique).

- Déterminons le(s) point(s) fixe(s) de f: pour $x \in \mathbb{C}$,

$$f(x) = x \iff ax + b = x \iff (a-1)x = -b \iff x = \frac{b}{1-a}.$$

  L'application f a donc un unique point fixe $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

- Introduisons la suite $\left(v_n\right)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell = u_n - \frac{b}{1-a},$$

  alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell \\ &= av_n + a\ell + b - \ell = av_n + \cancel{f(\ell)} - \cancel{\ell} = av_n. \end{aligned}$$

  Ainsi, la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0.$$

  d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \ell = a^n(u_0 - \ell) + \ell = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Test 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 9u_n + 56$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les premiers termes de la suites, u_0, u_1, u_2.
2. La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique? une suite géométrique?
3. Exprimer u_n en fonction de n.

Programme Le programme officiel stipule que vous devez connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique. Le résultat ci-dessous, en plus d'être plutôt indigeste, est donc hors-programme.

Proposition 15

Hors-Programme

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Alors, si $a \neq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

§4 Définition d'une suite par récurrence

On admet le résultat suivant:

Théorème 16

Soit E un ensemble, f une application de E dans E, a un élément de E. Il existe une et une seule suite $\left(x_n\right)_n \in \mathbb{N}$ de E telle que

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

C'est ainsi, par exemple, que l'on définira les suites arithmétiques et géométriques. On peut aussi définir une suite par des relations de récurrence plus compliquées.

Théorème 17

Soit E un ensemble, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de E dans E, a un élément de E. Il existe une et une seule suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f_n(x_n). \end{cases}$$

Exemple 18

Avec $E = \mathbb{N}$, $f_n(x) = (n+1)x$, et $a = 1$. On définit ainsi par récurrence la suite

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

(pour $n > 0$). Ce nombre, qui est le produit des n premiers entiers > 0 s'appelle **factorielle** de n. On convient que $0! = 1$.

$n!$ intervient dans de nombreuses formules; $n!$ prend rapidement de «grandes valeurs»: $10! = 3\,628\,800$; $50!$ est un nombre de 65 chiffres en base 10 ; $100!$ est un nombre à 158 chiffres en base 10.

Exemple 19

Avec $E = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \sqrt{x+n}$, et $a = 1$. On définit ainsi par récurrence une suite (x_n) telle que

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{2}+2}, \quad x_4 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+3}, \ldots$$

Remarque

On définit aussi des suites par récurrence d'ordre k où k est un entier naturel non nul. Il s'agit de suites (x_n) de E définies à l'aide d'une suite d'applications de (f_n) de E^k dans E, pour lesquelles on se donne les k premières valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ et pour tout n

$$x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}\right).$$

Étant donnés $\left(a_0, \ldots, a_{k-1}\right) \in E^k$, il y a encore existence et unicité de la suite $\left(x_n\right)$ de E telle que

$$\begin{cases} x_0 = a_0, x_1 = a_1, \ldots, x_{k-1} = a_{k-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+k} = f_n\left(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}\right). \end{cases}$$

Exemple 20

La suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Exemple 21

Dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n) telle que

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 3x_n - 2x_{n+1} - n. \end{cases}$$

Il arrive même que l'on définisse une suite par une relation de récurrence dans laquelle chaque terme se calcule à l'aide de tous les précédents. Là aussi on admet l'existence et l'unicité.