# Chapter 23 Polynômes

**Exercice 1 (23.2)**

Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.
2. $X^3 + X + 2$ par $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$.
3. $4X^7 + 9X^5 + 3X^4 + 2X + 1$ par $X^3$.
4. $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.
5. $X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 2$ par $X^3 + X + 1$.
6. $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ par $X^3 + X + 1$.
7. $X^5 - X^3 + X^2$ par $X^3$.
8. $X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X + 1$ par $X^2 - 1$.

**Solution 1 (23.2)**

1. Quotient $Q = 3X^2 + 2X - 3$, reste $R = -9X^2 - X + 7$.
2. Quotient $Q = 0$, reste $R = X^3 + X + 2$.
3. Quotient $Q = 4X^4 + 9X^2 + 3X$, reste $R = 2X + 1$.
4. Quotient $Q = X^2 + (-1 + 2i)X - 3i$, reste $R = 3 + 3i$.
5. Quotient $Q = X - 3$, reste $R = 5$.
6. Quotient $Q = X^2 + X - 1$, reste $R = 0$.
7. Quotient $Q = X^2 - 1$, reste $R = X^2$.
8. Quotient $Q = X^2 + 2X + 1$, reste $R = 0$.

**Exercice 2 (23.2)**

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que le polynôme $B = X^2 + 2$ divise $A = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

**Solution 2 (23.2)**

On effectue la division euclidienne de $A$ par $B$, on trouve

$$X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + a - 2) + (b - 2)X + 6 - 2a.$$

Or le polynôme $B$ divise $A$ si, et seulement si le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ est nul, c'est-à-dire

$$(b-2)X + 6 - 2a = 0 \iff \begin{cases} b - 2 &= 0 \\ 6 - 2a &= 0 \end{cases} \iff a = 3 \text{ et } b = 2.$$

**Exercice 3 (23.2)**

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

**Solution 3 (23.2)**

On note $Q$ et $R$ les quotient et reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - X - 2$, on a donc

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q + R \text{ et } \deg R < 2. \tag{1}$$

On peut donc noter $R = a + bX$. On remarque que les racines de $X^2 - X - 2$ sont 2 et $-1$. En substituant à $X$ ses deux valeurs dans la relation (1), on obtient

$$\begin{aligned} 2^n &= 0 \times Q(2) + a + 2b \\ (-1)^n &= 0 \times Q(-1) + a - b \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{ll} a + 2b & = 2^n \\ b - b & = (-1)^n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a & = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \\ b & = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \end{array} \right. \iff R = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} + \frac{2^n - (-1)^n}{3} X.$$

**Exercice 4 (23.2)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**1.** Prouver que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^n$ par $(X-2)(X-3)$.

**3.** Déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

**Solution 4 (23.2)**

**Exercice 5 (23.3)**

Soit $A = X^3 + 1$. Déterminer quatre diviseurs de $A$ dans $\mathbb{R}[X]$ ayant des degrés deux à deux distincts.

**Solution 5 (23.3)**

$A$ a pour racine apparente $-1$, et l'on factorise

$$A = (X + 1)(X^2 - X + 1).$$

On en déduit quatre diviseurs de $A$ dans $\mathbb{R}[X]$ de degrés distincts

$$1, \quad X + 1, \quad , X^2 - X + 1, \quad X^3 + 1.$$

**Exercice 6 (23.3)**

1. Montrer que 2 est racine de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.
2. Quel est son ordre ?
3. Quelles sont les autres racines de $P$ ?
4. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. À quelle condition $Q$ divise-t-il $P$ ?

**Solution 6 (23.3)**

1. On a $P(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 - 44 \cdot 2 + 24 = 0$, donc 2 est racine de $P$.
2. On a $P' = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44$ et $P'(2) = 0$, $P'' = 12X^2 - 54X + 60$ et $P''(2) = 0$, $P''' = 24X - 54$ et $P'''(2) = -6 \neq 0$. 2 est donc une racine d'ordre 3 pour $P$.
3. On met en facteur $(X-2)^3$ dans $P$ (par exemple, en effectuant la division euclidienne) et on obtient $P = (X-3)(X-2)^3$.

   Le polynôme $P$ n'a donc qu'une racine distincte de 2, c'est 3 et elle est d'ordre 1.
4. Le polynome $Q$ divise $P$ si, et seulement si, $Q$ est associé à un polynôme de la forme

$$(X-3)^a(X-2)^b \quad \text{où} \quad a \in \{\, 0, 1 \,\} \text{ et } b \in \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}.$$

**Exercice 7 (23.3)**

On considère le polynôme
$$P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1.$$
Montrer que $j = e^{2i\pi/3}$ est racine de $P$ et déterminer son ordre de multiplicité. En déduire la décomposition de $P$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

**Solution 7 (23.3)**

On a
$$P(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 = 3 + 3j + 3j^2 = 0$$
puisque $1 + j + j^2 = 0$. De plus, $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$ et
$$P'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 6 + 6j + 6j^2 = 0.$$
Ainsi, $j$ est racine d'ordre au moins 2 pour $P$. Or $P$ étant à coefficients réel, $\bar{j} = j^2$ est également racine d'ordre au moins 2 pour $P$. Puisque $P$ est de degré 4, on en déduit que les seule racine de $P$ sont $j$ et $\bar{j}$ et qu'elle sont d'ordre 2. Et puisque le coefficient dominant de $P$ est 1, on a
$$P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2.$$
Finalement, en regroupant les conjugués, on obtient la décomposition de $P$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:
$$P = (X^2 + X + 1)^2.$$

**Exercice 8 (23.3)**

Résoudre l'équation d'inconnue $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

$$(X^2 - 5X + 7)P + (X - 2)Q = 2X - 3.$$

**Exercice 9 (23.3)**

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$P_n = \cos\left((n-1)\theta\right) X^{n+1} - \cos\left(n\theta\right) X^n - \cos\left(\theta\right) X + 1.$$

Montrer que $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ divise $P_n$.

**Solution 9 (23.3)**

**Exercice 10 (23.3)**

Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 + 5X^2 - 8X - 48$ sachant qu'il admet deux racines distinctes dont la somme est égale à $-1$.

**Solution 10 (23.3)**

Notons $a, b, c$ les racines (avec multiplicité) de $P$ telles que $a+b = -1$. Les relation entre racines et coefficients permettent d'écrire

$$a + b + c = -5 \quad \text{et} \quad abc = 48.$$

Puisque $a + b = -1$, on a donc $c = -4$ puis $ab = -12$. Alors, $a$ et $b$ sont également les racines du polynôme $X^2 + X - 12$, c'est-à-dire $-4$ et $3$.

Finalement, les racine de $P$ sont $-4$ (ordre 2) et $3$ (ordre 1).

**Exercice 11 (23.3)**

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$S : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}.$$

1. Étant donnés trois complexes quelconques $x, y$ et $z$, exprimer $x^2+y^2+z^2$ et $x^3+y^3+z^3$ à l'aide de

$$\sigma_1 = x+y+z \qquad \sigma_2 = xy+xz+yz \qquad \sigma_3 = xyz$$

2. Soit $(x, y, z)$ une solution de $S$. Calculer $\sigma_1, \sigma_2$ et $\sigma_3$.
3. En utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, résoudre $S$.

**Exercice 12 (23.3)**

Juliette se réveille à la fin du cours d'algèbre du jeudi après-midi. À ce moment précis, elle entend le professeur dire «…et je vous donne comme indication que toutes les racines sont positives et réelles». En levant les yeux vers le tableau, elle découvre une équation du 20-ième degré à résoudre à la maison, qu'elle essaie de recopier à toute vitesse. Elle arrive seulement à voir les deux premiers termes : $X^{20} - 20X^{19}$ avant que le professeur n'efface complètement le tableau. Heureusement elle se souvient que le terme constant est $+1$.
Pouvez-vous aider notre héroïne à résoudre cette équation ?

**Exercice 13 (23.4)**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$,
2. $X^2P'' + 2XP' - P = 0$.

**Solution 13 (23.4)**

1. Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$. On a $P' = \sum_{n\geq 1} a_nnX^{n-1}$ et $P'' = \sum_{n\geq 2} a_nn(n-1)X^{n-2}$, d'où

$$\begin{aligned} X^2P'' + 2XP' - 2P &= \sum_{n\geq 2} a_nn(n-1)X^n + 2\sum_{n\geq 1} a_nnX^n - 2\sum_{n\geq 0} a_nX^n \\ &= -2a_0 + 2a_1X - 2a_1X + \sum_{n\geq 2} a_n\left(n(n-1) + 2n - 2\right)X^n \\ &= -2a_0 + \sum_{n\geq 2} a_n\left(n^2+n-2\right)X^n. \end{aligned}$$

Or un polynôme est nul si, et seulement si ses coefficient sont nuls. On en déduit donc

$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0 \iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 a_n\left(n^2+n-2\right) = 0.$$

Or $n^2 + n - 2 = 0$ si, et seulement si $n \in \{ -2, 1 \}$, ainsi

$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0 \iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 a_n = 0 \iff P = a_1X.$$

Conclusion

Les solutions de l'équation $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$ sont les polynômes de la forme $aX$ avec $a \in \mathbb{R}$.

**2.** La résolutions est similaire. On obtient cette fois ci,

$$\begin{aligned} X^2P'' + 2XP' - P &= \sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)X^n + 2\sum_{n\geq 1} a_n nX^n - 2\sum_{n\geq 0} a_n X^n \\ &= -a_0 + 2a_1X - a_1X + \sum_{n\geq 2} a_n\left(n(n-1)+2n-1\right)X^n \\ &= -a_0 + a_1X + \sum_{n\geq 2} a_n\left(n^2+n-1\right)X^n. \end{aligned}$$

Or $n^2 + n - 1 = 0$ si, et seulement si $n \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ (impossible avec $n \in \mathbb{N}$). On a donc

$$X^2P'' + 2XP' - P = 0 \iff a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2, a_n = 0 \iff P = 0.$$

L'unique solution de l'équation $X^2P'' + 2XP' - P = 0$ est le polynôme $P = 0$.

**Exercice 14 (23.4)**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère le polynôme $P = X^n + 1$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P$ par $X(X-1)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-1)^2$.

**Solution 14 (23.4)**

1. Notons $Q$ et $R$, le quotient et le reste de la division euclidienne de $P$ par $X(X-1)$. On a

$$P = X(X-1)Q + R \text{ et } \deg R < 2. \tag{1}$$

On peut donc écrire $R = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. En substituant à $X$ les valeurs 0 et 1 dans l'équation (2), on obtient les équations

$$P(0) = 0Q(0) + b \text{ et } P(1) = 0Q(1) + a + b,$$

c'est-à-dire $b = 1$ et $a + b = 2$. On a donc $R = X + 1$.

2. Notons $Q$ et $R$, le quotient et le reste de la division euclidienne de $P$ par $X(X-1)$. On a

$$P = (X-1)^2Q + R \text{ et } \deg R < 2. \tag{2}$$

On peut donc écrire $R = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc $P - R = (X-1)^2Q$ : l'ordre de multiplicité de1 comme racine de $P - R$ est donc au moins 2. On a donc,

$$(P-R)(1) = 0 \text{ et } (P-R)'(1) = 0$$

c'est-à-dire, puisque $P - R = X^n + 1 - aX - b$,

$$2 - a - b = 0 \text{ et } n - a = 0.$$

c'est-à-dire $a = n$ et $b = 2 - n$. On a donc $R = nX + 2 - n$.

Variante. On peut utiliser la formule de Taylor. Voir exercice 15.

**Exercice 15 (23.4)**

Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^3$.

**Solution 15 (23.4)**

En notant $P = X^n$, on a pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k}$. La formule de Taylor pour les polynôme appliqué à $P$ au point 1 donne

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + (X-1)^3 \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-3}$$

Le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^3$ est donc le polynôme

$$\begin{aligned} P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 &= 1 + n(X-1) + \frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}X^2 - n(n-2)X + \frac{n(n-3)}{2} + 1. \end{aligned}$$

**Exercice 16 (23.4)**

On considère le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}.$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

**Solution 16 (23.4)**

(CN) Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit racine d'ordre au moins 2, alors

$$\begin{aligned} P_n(\alpha) &= 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} = 0 \\ \text{et } P_n'(\alpha) &= 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux relation, on obtient $\alpha^n = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$.

(CS) On a $P_n(0) = 1$, donc 0 n'est pas racine de $P_n$.

Conclusion

Le polynôme $P_n$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

**Exercice 17 (23.4)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\left(A - I_2\right)^2$.
2. En déduire $A^{100}$.

**Solution 17 (23.4)**

1. On trouve $\left(A - I_2\right)^2 = 0$.
2. On considère la division euclidienne de $X^{100}$ par $(X-1)^2$. Il existe des polynômes $Q, R$ tels que

$$X^{100} = (X-1)^2 Q + R \text{ et } \deg R < 2.$$

On peut donc écrire $R$ sous la forme $R = aX + b$. En substituant 1 à $X$ dans la relation $X^{100} = (X-1)^2 Q + R$, on obtient

$$1 = 0Q(1) + a + b,$$

c'est-à-dire $a+b = 1$. En dérivant cette même relation, on obtient $100X^{99} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + R'$ que l'on évalue en 1 pour obtenir

$$100 = 0Q(1) + 0Q'(1) + a$$

c'est-à-dire, $a = 100$. Ainsi, on a $R = 100X - 99$. Puisque toutes les puissances de $A$ commutent deux à deux, on a donc

$$A^{100} = (A - I_2)^2 Q(A) + R(A),$$

c'est-à-dire

$$A^{100} = 100A - 99I_2 = \begin{pmatrix} 51 & 50 \\ -50 & -49 \end{pmatrix}.$$

Variante On utilise la formule du binôme en remarquant que $A = (A - I_2) + I_2$ et que $A - I_2$ et $I_2$ commutent.

**Exercice 18 (23.4)**

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^3 + pX + q$. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

1. Montrer que $P$ possède une racine double si et seulement si $\Delta = 0$.
2. Montrer que si $P$ possède trois racines réelles deux à deux distinctes, alors $\Delta < 0$.

**Exercice 19 (23.4)**

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $P = (X+1)^n - e^{2in\theta}$.

1. Déterminer les racines de $P$ ainsi que leur ordre de multiplicité.
2. En considérant le produit des racines de $P$, déterminer une expression simplifiée de

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right).$$

**Solution 19 (23.4)**

**Exercice 20 (23.4)**

Soient $p$ et $q$ des élément de $\mathbb{K}$. Montrer que le polynôme $X^3 - 3pX + 2q$ admet une racine multiple si et seulement si $p^3 = q^2$.

**Exercice 21 (23.4)**

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré $n$, tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient tous deux impairs.

1. Montrer
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \frac{P^{(k)}(1)}{k!} \in \mathbb{Z}.$$
2. Montrer que $P$ n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}$.

**Solution 21 (23.4)**

1. $P$ n'est pas le polynôme nul et si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_n \neq 0$ on a pour $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\frac{P^{(k)}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i X^{i-k},$$
Finalement,
$$\frac{P^{(k)}(1)}{k!} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i \in \mathbb{Z}.$$
2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P(x)$ est impair, donc non nul.
   - Si $x$ est pair, on écrit
   $$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x^j = P(0) + x \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1},$$
   donc $P(x)$ a même parité que $P(0)$ et $P(x)$ est impair.
   - Si $x$ est impair, alors par application de la formule de Taylor pour les polynômes au point 1, on a
   $$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = P(1) + (x-1) \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^{k-1},$$
   donc d'après la question **1**. et le fait que $x - 1$ est pair, on en conclut que $P(x)$ et $P(1)$ ont même parité donc que $P(x)$ est impair.

   Finalement, $P$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice 22 (23.4)**

Soit $P = \frac{1}{n!}X^n(X-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$.

**Solution 22 (23.4)**

0 et 1 sont racines d'ordre $n$ de $P$, donc

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1) = 0.$$

$\deg P = 2n$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2n \implies P^{(k)} = 0$$

ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2n \implies P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1) = 0.$$

Il reste à determiner $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$ pour $k \in [\![n, 2n]\!]$.

En utilisant la formule de Taylor au point $a = 0$, on obtient

$$P = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

car $P^{(k)}(0) = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc

$$\frac{1}{n!}X^n(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^{n+k} = \frac{1}{n!}X^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k,$$

et puisque $\mathbb{R}[X]$ est intègre,

$$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k,$$

et donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{n!} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

ce que l'on peut écrire

$$\forall k \in [\![n, 2n]\!], P^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} = (-1)^k \frac{k!}{(k-n)!(2n-k)!}.$$

De manière analogue avec la formule de Taylor au point 1, on obtient

$$\forall k \in [\![n, 2n]\!], P^{(k)}(1) = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!(2n-k)!}.$$

**Exercice 23 (23.5)**

1. Montrer que $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
2. Déterminer explicitement une relation de Bézout entre $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$.

**Solution 23 (23.5)**

**Exercice 24 (23.5)** *Arithmétique autour des polynômes $X^n - 1$*

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant et $k$ un entier non nul. Montrer que $P - 1$ divise $P^k - 1$.

2. Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels non nuls. Posons $n = qm + r$ la division euclidienne de $n$ par $m$.

   - Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est $X^r - 1$.
   - En déduire l'équivalence

   $$(X^m - 1) \,\Big|\, (X^n - 1) \iff m \,\Big|\, n.$$

   - Montrer que

   $$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

**Solution 24 (23.5)**

**Exercice 25 (23.5)**

Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, non constants, premiers entre eux.

1. Montrer qu'il existe au moins un couple $(U_0, V_0)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que
$$AU_0 + BV_0 = 1 \text{ et } \deg(U_0) < \deg(B) \text{ et } \deg(V_0) < \deg(A). \tag{1}$$
2. Déterminer alors tous les couples $(U, V)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$. En déduire l'unicité du couple tel que $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.
3. Déterminer $U_0$ et $V_0$ lorsque $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + 1$.
4. Déterminer un polynôme $P$ vérifiant le système
$$X^2 + 1 \mid P(X) + 1 \text{ et } X^3 + 1 \mid P(X) - 1. \tag{S}$$

**Solution 25 (23.5)**

**Exercice 26 (23.5)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $P_n = X^n - a^n$ ($a \in \mathbb{K}^\star$ donné). On conviendra que $P_0 = 0$.

1. Pour $m \leq n$, effectuer la division euclidienne de $P_n$ par $P_m$. À quelle condition a-t-on $P_m \mid P_n$ ?
2. Soient $a, b, c, d$ quatre entiers naturels tels que $a < b$ et $c < d$. À quelle condition a-t-on $X^b - X^a \mid X^d - X^c$ ?
3. Déterminer le PGCD des polynômes $P_m$ et $P_n$.
4. Déterminer le PGCD des polynômes

$$A = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \text{ et } B = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

**Solution 26 (23.5)**

**Exercice 27 (23.5)**

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de polynômes réels définis par

$$P_1 = 1, P_2 = X, \text{ et }, \forall n \geq 3, P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}.$$

1. Préciser le degré de $P_n$, montrer que $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$ est constant, puis que $P_{n-1} \wedge P_n = 1$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a

$$P_{n+p} = P_n P_{p+1} - P_{n-1} P_p. \tag{1}$$

   et en déduire que $P_{n+p} \wedge P_p = P_n \wedge P_p$.
3. Montrer que $P_n \wedge P_p = P_{n\wedge p}$.

**Solution 27 (23.5)**

**Exercice 28 (23.6)**

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

**1.** $X^5 - 1$,

**2.** $X^6 - 1$,

**3.** $X^8 + 1$,

**4.** $X^4 + X^2 + 1$.

**Exercice 29 (23.6)**

Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

**1.** Montrer que $j = e^{2i\pi/3}$ est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.

**2.** Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de $P$ ?

**3.** Décomposer $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

**Solution 29 (23.6)**

**1.** 1, $j$ et $j^2$ sont les trois racines cubiques de l'unité donc $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$, d'où

$$P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(1 + j + j^2) = 0$$

Donc $j$ est racine de $P$ ; déterminons son ordre de multiplicité à l'aide du critère différentiel. On a

$$\begin{aligned}
P' &= 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X \\
P'(j) &= 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(1 + j + j^2) = 0 \\
P'' &= 56X^6 + 60X^4 + 36X^2 + 4 \\
P''(j) &= 56j^6 + 60j^4 + 36j^2 + 4 = 56 + 60j + 36j^2 + 4 = 60(1 + j + j^2) - 24j^2 = -24j^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc $j$ est racine d'ordre 2 de $P$.

**2.** $P$ est pair donc $P(-j) = 0$ ; $P'$ est impair donc $P'(-j) = -P'(j) = 0$ et $P''$ est pair donc $P''(j) = P''(-j) \neq 0$.

Donc $-j$ est racine double de $P$.

**3.** Puisque $P$ est à coefficients réels, on en déduit que $\bar{j}$ et $-\bar{j}$ sont également racines doubles de $P$. Comme $P$ est de degré 8 et de coefficient dominant 1, on a

$$P = (X - j)^2(X + j)^2(X - \bar{j})^2(X + \bar{j})^2.$$

En regroupant les termes conjugués

$$\begin{aligned}
(X - j)(X - \bar{j}) &= X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(j)X + j\bar{j} = X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1 = X^2 + X + 1, \\
(X + j)(X + \bar{j}) &= X^2 + 2\,\mathfrak{Re}(j)X + j\bar{j} = X^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1 = X^2 - X + 1.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la décomposition de $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

**Exercice 30 (23.6)** *Factorisation d'un polynôme dans* $\mathbb{C}[X]$

Déterminer la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes suivants.

1. $P_1 = X^5 + 1$ ;
2. $P_2 = X^3 - (1+i)X^2 + (1+i)X - i$ ;
3. $P_3 = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX - 3i + 1$, sachant qu'il admet une racine réelle.

**Solution 30 (23.6)**

**Exercice 31 (23.6)**

Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1. Montrer que si $|P(i)| < 1$, alors $P$ admet au moins une racine complexe non réelle.

**Solution 31 (23.6)**

Si $\deg P = 0$, alors $P$ est le polynôme constant égal à 1 puisque son terme dominant est 1, ce qui est contraire à l'hypothèse $|P(z)| < 1$.

Donc $P$ est un polynôme de degré $n \geq 1$.

D'après le théorème de D'Alembert, $P$ admet $n$ racines complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$ distinctes ou confondues. Comme son coefficient dominant est égal à 1, il se factorise sous la forme

$$P = \prod_{k=1}^{n} \left(X - x_k\right).$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que toutes ces racines sont réelles, alors, pour tout $k$, on a

$$|i - x_k| = \sqrt{1 + x_k^2} \geq 1$$

par conséquent

$$|P(i)| = \prod_{k=1}^{n} |i - x_k| \geq 1$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur $P$.

Donc $P$ admet au moins une racine complexe non réelle.

**Exercice 32 (23.6)**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} - 2X^n \cos(a) + 1$.

**Exercice 33 (23.6)**

On considère un entier $n \geq 1$ et un réel $\alpha$ non multiple de $\pi$.
Déterminer les racines complexes du polynôme

$$P = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} \sin(q\alpha) X^{n-q}.$$

**Solution 33 (23.6)**