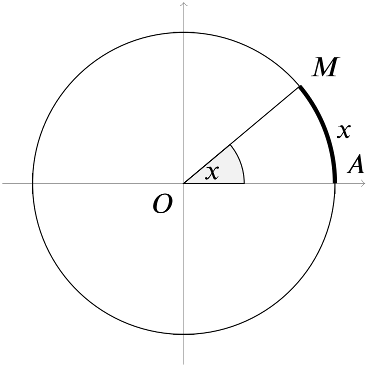
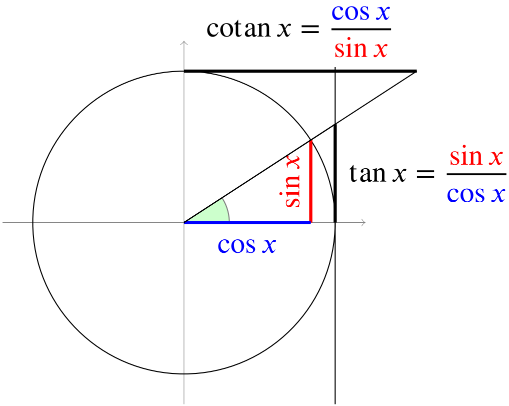
Fonctions circulaires

Aperçu

On utilisera souvent les fonctions **trigonométriques**, appelées fonctions **cosinus**, **sinus**, **tangente** et **cotangente**, abrégées par $\cos$, $\sin$, $\tan$ et cotan.




$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\sin x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$\cos x$

Par le théorème de Pythagore

P *Pour tout réel x,*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

R Pour les fonctions trigonométrique, l'habitude est de noter

$$\sin^2(x) = (\sin x)^2 \qquad \cos^2(x) = (\cos x)^2 \qquad \tan^2(x) = (\tan x)^2\,.$$

On fait de même pour les autres puissances, même pour -1:

$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad \cos^{-1}(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad \tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan x},$$

et ceci n'a rien à voir avec une quelconque fonction réciproque (qui n'existe pas pour les fonctions $\sin$, $\cos$, $\tan$).

Par le théorème de Thalès,

P

1. *Si* $x - \frac{\pi}{2}$ *n'est pas multiple de* π*, alors*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

2. *Si* x *n'est pas multiple de* π*, alors*

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

3. *Si* x *n'est pas un multiple de* $\frac{\pi}{2}$*, alors*

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

   C'est pour cela que cotangente est peu utilisé.

4. *Si* $x - \frac{\pi}{2}$ *n'est pas multiple de* π*, alors*

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

P *Si on donne deux réels u et v vérifiant $u^2 + v^2 = 1$, alors le point de coordonnées (u, v) se trouve sur le cercle trigonométrique, et il existe un réel x, unique modulo 2π, tel que*

$$u = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

P *Si x et y sont deux réels*

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi \iff x \equiv y \pmod{2\pi}.$$

	Quadrants			
x	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{cotan} x$	$+$	$-$	$+$	$-$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{cotan} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Ces égalités sont, de préférence, à mémoriser visuellement, sur le cercle trigonométrique ou sur les courbes des fonctions circulaires.

$$\begin{array}{ccc}
\sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \\
\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x & \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x} \\
\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x & \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x & \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{1}{\tan x} \\
\sin(\pi - x) = \sin x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\
\sin(\pi + x) = -\sin x & \cos(\pi + x) = -\cos x & \tan(\pi + x) = \tan x
\end{array}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x + y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

Lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, lorsque $x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$
\begin{aligned}
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right), \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right), \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).
\end{aligned}
$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

D Soit x, y, ϕ trois réels. L'écriture

$$x \equiv y \pmod{\phi}$$

signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\phi$. On dit que «x est **congru** à y **modulo** ϕ». Les réels x et y diffèrent donc d'un multiple entier de ϕ, ce que l'on peut écrire $x - y \in \phi\mathbb{Z}$.

N Pour tous nombres réels a et b, on note $a + b\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + kb$, où $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit

$$a + b\mathbb{Z} = \{\, a + kb \mid k \in \mathbb{Z} \,\}\,.$$

E L'ensemble des multiples entiers de π sera donc noté $\pi\mathbb{Z}$, celui des multiples entiers de 2π est noté $2\pi\mathbb{Z}$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

P

Règles de calcul sur les congruences

Soient $x, x', y, y', \phi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Si* $x \equiv y \pmod{\phi}$ *et* $x' \equiv y' \pmod{\phi}$ *alors* $x + x' \equiv y + y' \pmod{\phi}$.
2. $x \equiv y \pmod{\phi}$ *si et seulement si* $\lambda x \equiv \lambda y \pmod{\lambda\phi}$.
3. *Si* $x \equiv y \pmod{n\phi}$ *alors* $x \equiv y \pmod{\phi}$

T Déterminer l'unique nombre réel α appartenant à $[0, 2\pi[$ et congru à $-\frac{7}{15}\pi$ modulo 2π.

T Résoudre l'équation $5x + \pi/2 \equiv 0 \pmod{\pi}$.
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

T

Si x et y sont deux réels, alors

$$\cos x = \cos y \iff \left(x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi}\right)$$

$$\sin x = \sin y \iff \left(x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi}\right)$$

Si x et y appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on a

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \pmod{\pi}$$

P

Superposition des sinusoïdes

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *alors, il existe* $\phi \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \phi).$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, *alors* ϕ *est unique modulo* 2π.

P

1. *Pour tout réel* x,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \textit{et} \qquad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

2. *Les fonctions cosinus et sinus sont* 2π*-périodiques. Pour tout réel* x *et tout entier* k,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \textit{et} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

3. *La fonction* $\cos$ *est paire et la fonction* $\sin$ *est impaire. Pour tout réel* x,

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \textit{et} \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

Le lemme suivant, relativement clair sur le dessin, ne se démontre pas si facilement géométriquement.

L **Admis**

Pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) \leq |x|.$$

L **Continuité du sinus et du cosinus en** 0

Les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0*, c'est-à-dire*

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \;\; \textit{et} \;\; \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Des premier et second lemmes, nous déduisons la limite du rapport $\sin(x)/x$ lorsque x tend vers 0 ; cette quantité n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0. Ce résultat prouve donc la dérivabilité de la fonctions sinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du sinus en 0 : $\sin'(0) = 1$.
Le second résultat prouve la dérivabilité du cosinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du cosinus en 0 : $\cos'(0) = 0$.

L

1. *Le rapport* $\frac{\sin x}{x}$ *tend vers* 1 *lorsque* x *tend vers* 0.
2. *Le rapport* $\frac{\cos x - 1}{x}$ *tend vers* 0 *lorsque* x *tend vers* 0.

T

Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions $\sin$ *et* $\cos$ *sont définies et dérivables (donc continues) sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

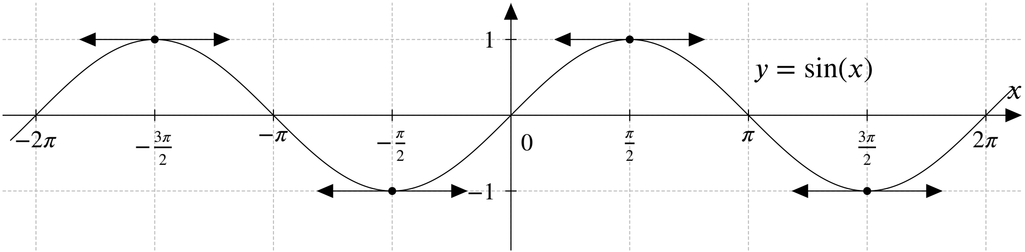
$$\cos' = -\sin \qquad \textit{et} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Démonstration. Soit $x, h \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h),$$

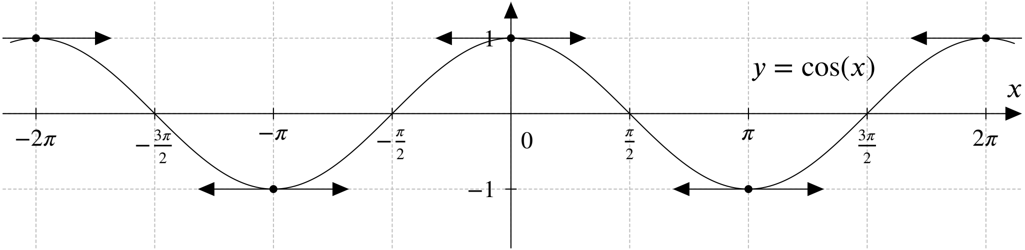
la fonction sinus est dérivable en x de dérivée $\sin(x) \times 0 + \cos(x) \times 1 = \cos(x)$.
On raisonne de la même façon pour la fonction cosinus. ∎

La fonction sinus est impaire et 2π-périodique ; il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.[1] La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$. Le sinus est donc croissant sur $[0, \pi/2]$ (de 0 à 1) puis décroissant sur $[\pi/2, \pi]$ (de 1 à 0). La courbe représentative du sinus admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $x \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$. La tangente à l'origine est d'équation $y = x$ (il s'agit de la première bissectrice du repère). On en déduit la courbe représentative de la fonction sinus.



[1]On pourrait encore réduire l'intervalle d'étude car pour $x \in [0, \pi]$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. La courbe de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$.

On peut faire une étude similaire pour le cosinus, mais la relation $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, montre que la courbe de la fonction cosinus s'obtient en translatant celle du sinus du vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{e_1}$.



P

1. *La fonction* $\tan$ *est définie sur*

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right).$$

   par la relation $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

2. *La fonction* $\tan$ *est* π*-périodique. Pour tout réel* x *tel que* $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ *et tout entier* k*,*

$$\tan(x + k\pi) = \tan x.$$

3. *La fonction* $\tan$ *est impaire. Pour tout réel* x *tel que* $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$*,*

$$\tan(-x) = -\tan(x).$$

T

Dérivabilité de la fonction tangente

La fonction tan *est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition et on a*

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Démonstration. Puisque le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire là où le dénominateur ne s'annule pas, la fonction tangente est dérivable et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

∎

P *On a les limites suivantes au bornes de l'ensemble de définition*

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -\pi/2 \\ >}} \tan(x) = -\infty.$$

Les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ sont donc asymptotes verticales à la courbe de la fonction $\tan$.

Démonstration. On rappelle que pour tout réel x appartenant à $[0, \pi/2[$, on a $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, or,

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \sin(x) = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \cos(x) = 0+$$

d'où $\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \tan(x) = +\infty$.

On a un résultat analogue en $-\pi/2$ car $\tan$ est une fonction impaire. ∎

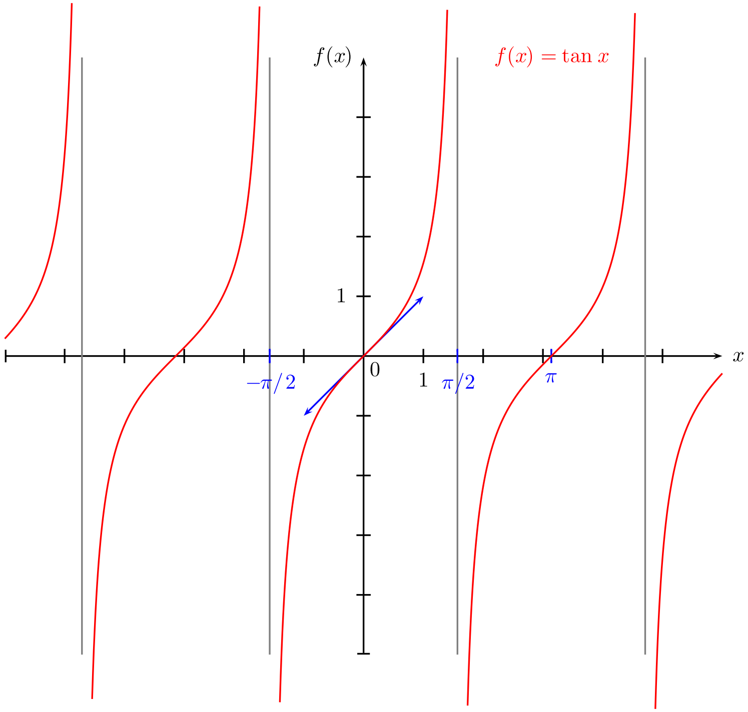
La fonction tangente est définie sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} .$$

La tangente est une fonction impaire et π-périodique : il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/2[$ pour tracer sa courbe représentative sur $\mathcal{D}$. Enfin, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

La fonction tangente est donc strictement croissante sur $[0, \pi/2[$. De plus, $\tan'(0) = 1$; la droite d'équation $y = x$ est donc tangente à la courbe représentative de $\tan$.
Remarquez que la fonction tangente réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$.



$f(x)$
$f(x) = \tan x$
1
0
1
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
x

D La restriction $\widetilde{\sin}: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ de la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ est appelée l'**arcsinus** et notée

$$\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \widetilde{\sin}^{-1}(x) \end{array}$$

La fonction $\arcsin$ est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arcsin x) \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

La fonction arcsinus *n'est pas* la réciproque de $\sin$, mais celle d'une restriction bien choisie.

E

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

T

Calculer.

1. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$.
2. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right)$.

P

Propriétés de l'arcsinus

1. $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin(x)) = x$ *et* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \iff \arcsin(\sin x) = x$.

Démonstration.

1. Soit $x \in [-1,1]$. D'après la définition de l'arcsinus, $\arcsin(x)$ est une mesure d'angle dont le sinus vaut x. Ainsi $\sin(\arcsin(x)) = x$. On a de plus $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. La fonction cosinus étant positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ auquel appartient $\arcsin(x)$, on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Soit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par définition de l'arcsinus, $\arcsin(\sin x)$ est l'unique $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin\alpha = \sin x$; puisque $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $x = \alpha = \arcsin(\sin x)$.
   Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arcsin(\sin x) = x$. Puisque l'arcsinus est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$, on a bien $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

∎

P

Étude de l'arcsinus

1. *L'application* $\arcsin$ *est impaire et continue sur* $[-1, 1]$.
2. *L'arcsinus est dérivable sur* $]-1, 1[$ *avec*

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

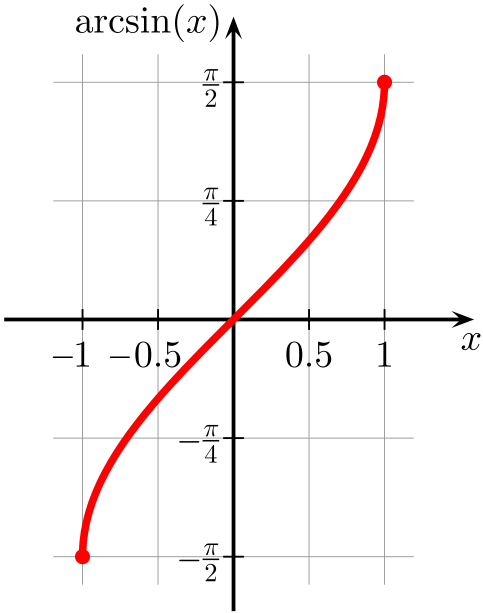
3. *L'arcsinus n'est pas dérivable en* ± 1, *sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.*

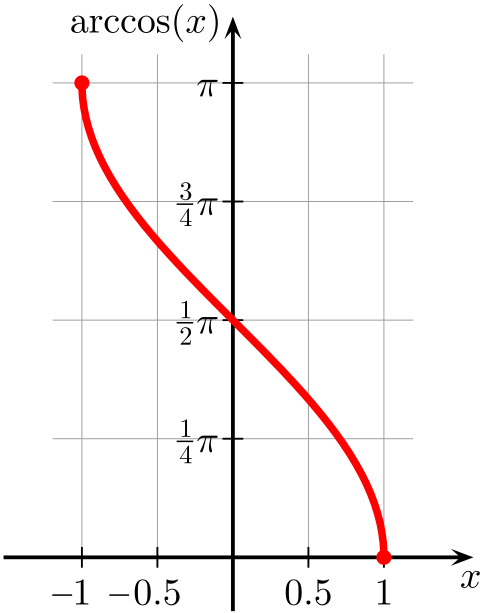
Démonstration.

1. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos$, qui est positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, ne s'annulant sur cet intervalle qu'en $\pm\pi/2$. La fonction sinus réalise donc une bijection strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. De plus, ces deux ensembles étant des intervalles et $\sin$ étant continue sa bijection réciproque $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue. De plus, l'arcsinus est une fonction impaire ; en effet, pour $x \in [-1, 1]$,
$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin x) = -x \text{ et } -\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$
c'est-à-dire $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$.[2]
2. Soit $y \in [-1, 1]$. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction arcsinus est dérivable en y si et seulement si
$$\sin'(\arcsin(y)) = \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2} \neq 0,$$
c'est-à-dire, si et seulement si $y \neq \pm 1$. La fonction $\arcsin$ est donc dérivable sur $]-1, 1[$, avec sur cet intervalle $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
3. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, le calcul de $\sin'(\arcsin y)$ montre que la courbe représentative de la fonction $\arcsin$ admet une tangente verticale aux points d'abscisses ± 1.

∎

[2] De manière générale, on peut montrer que la réciproque d'une bijection impaire est impaire.


arcsin(x)
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
−1
−0.5
0.5
1
x


arccos(x)
π
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{4}\pi$
−1
−0.5
0.5
1
x

D La restriction $\widetilde{\cos} : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ de la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\cos}$ est appelée l'**arccosinus** et notée

$$\arccos : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & [0, \pi] \\ x & \mapsto & \widetilde{\cos}^{-1}(x) \end{array}$$

La fonction arccos est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arccos x) \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}.$$

E

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-1) = \pi \qquad \arccos(1) = 0$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} \qquad \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

T

Calculer

1. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$.
2. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right)$.

P

Propriétés de l'arccosinus

1. $\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos(x)) = x$ *et* $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \pi \iff \arccos(\cos x) = x$.

T

Démontrer la proposition précédente.

P

Étude de l'arccosinus

1. *L'application* arccos *est n'est ni paire ni impaire. Elle est continue sur* $[-1,1]$.
2. *L'arccosinus est dérivable sur* $]-1,1[$ *avec*

$$\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. *L'arccos n'est pas dérivable en* ± 1, *sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.*

Démonstration. ∎

R

Soit $x \in [-1,1]$. On a $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$. La courbe représentative de la fonction arccos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

D La restriction $\widetilde{\tan} : \begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$ de la fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\tan}$ est appelée l'**arctangente** et notée

$$\arctan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \widetilde{\tan}^{-1}(x) \end{array}$$

La fonction arctan est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arctan x) \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

E

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

T

Calculer

1. $\arctan\left(\tan\left(\frac{33\pi}{7}\right)\right)$.
2. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right)$.
3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right)$.

P

Propriétés de l'arctangente

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \iff \arctan(\tan x) = x.$

P

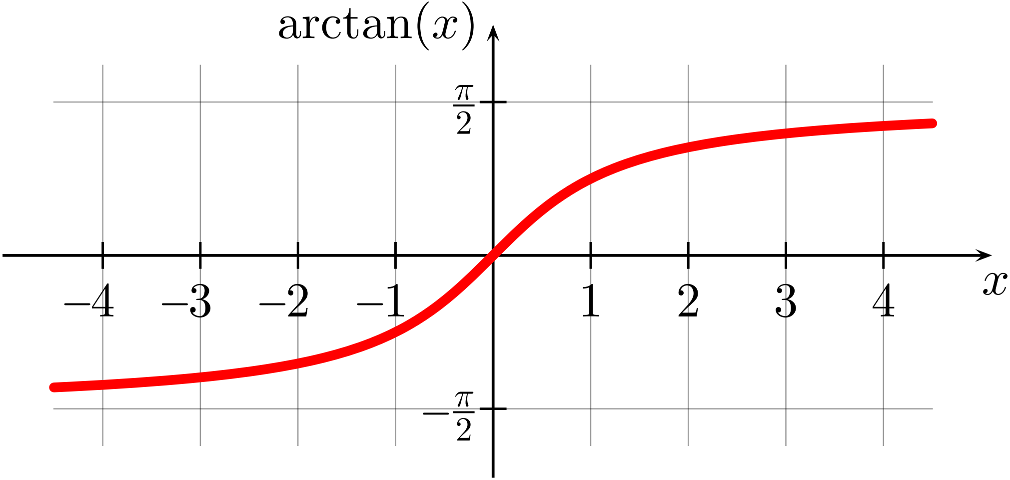
Étude de l'arctan

1. *L'application* arctan *est impaire et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *L'arctangente est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. $\lim\limits_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Les limites en $\pm\infty$ sont admises en début d'année. ∎



$\arctan(x)$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x

T

Montrer que $2 \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}$.