Relations binaires sur un ensemble

Aperçu

1. Propriétés d'une relation
2. Relation d'équivalence
3. Relation d'ordre

1. Propriétés d'une relation

2. Relation d'équivalence

3. Relation d'ordre

D 1 Soit E un ensemble. Définir une **relation binaire** R dans E, c'est se donner une partie Γ_R de $E \times E$. On écrit alors xRy pour exprimer que $(x, y) \in \Gamma_R$. Dans ce cas, on dit que x **est en relation avec** y. L'ensemble Γ_R est appelé le **graphe** de la relation R.

Une relation binaire est donc une application $\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \{ \text{Vrai}, \text{Faux} \} \\ (x, y) & \mapsto & xRy \end{array}$. Dans la suite, on parlera simplement de **relation** dans un ensemble E.

D 2 Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E. On dit que

- R est **réflexive** si
$$\forall x \in E, xRx;$$
- R est **symétrique** si
$$\forall (x,y) \in E^2, xRy \implies yRx;$$
- R est **antisymétrique** si
$$\forall (x,y) \in E^2, (xRy \text{ et } yRx) \implies x = y;$$
- R est **transitive** si
$$\forall (x,y,z) \in E^3, (xRy \text{ et } yRz) \implies xRz.$$

E 3

1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. La relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
3. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, la relation en x et y

$$xRy \iff y - x \in 5\mathbb{Z}$$

est la relation de congruence modulo 5. Cette relation est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.

4. Dans l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à trois éléments, la relation R définie par

$$ARB \iff A \cap B \neq \emptyset$$

est réflexive et symétrique, non antisymétrique, non transitive.

5. Sur tout ensemble E, la relation d'égalité $=$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On peut d'ailleurs vérifier que c'est la seule.
6. Soient R une relation sur un ensemble E et A une partie de E. En convenant que xR_Ay signifie xRy, nous définissons une relation R_A sur A qui est dite **induite** par R. Nous constatons que si R est réflexive (resp. symétrique, antisymétrique, transitive), il en est de même pour R_A. La réciproque n'est pas vraie.

D 4 Une relation sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

E 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo α pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x \text{ et } y \text{ sont congrus modulo } \alpha \text{ si et seulement si } \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha.$$

On note $x \equiv y[\alpha]$. Cette relation est une relation d'équivalence.

D 6 Soit R une relation d'équivalence sur l'ensemble E. On appelle **classe** d'équivalence de $x \in E$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\{ y \in E \mid xRy \} .$$

Il n'y a pas de notation au programme, notons ici $\mathrm{Classe}(x)$ la classe de x.

P 7 *Soit R une relation d'équivalence sur l'ensemble E. Les classes d'équivalence de R forment une partition de E. Autrement dit, elles sont non vides, leur réunion est E et elles sont deux à deux disjointes.*

E 8 Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation «être congru modulo 5». Il y a cinq classes d'équivalence qui forment une partition de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\text{Classe}(0) &= \{\ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\ \} \\
\text{Classe}(1) &= \{\ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\ \} \\
\text{Classe}(2) &= \{\ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\ \} \\
\text{Classe}(3) &= \{\ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\ \} \\
\text{Classe}(4) &= \{\ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\ \}\,.
\end{aligned}$$

On a par exemple $\text{Classe}(11) = \text{Classe}(6) = \text{Classe}(1)$.

D 9

- Une relation binaire $\preceq$ sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- On dit que $(E, \preceq)$ est un **ensemble ordonné**.
- On dit que $\preceq$ est un **ordre total** sur E si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in E^2, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

- Si $\preceq$ n'est pas total, on dit que $\preceq$ est un **ordre partiel** sur E.

$\preceq$ se lit « précède » ou « inférieur ou égal à ».

E 10 Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ l'ordre usuel, $\leq$, est un ordre total.

E 11 Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'ensembles. Alors la relation d'inclusion est une relation d'ordre dans $\mathcal{E}$. En effet, elle est réflexive (pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $A \subset A$) anti-symétrique (c'est le principe de double inclusion) et transitive ($A \subset B$ et $B \subset C \implies A \subset C$). C'est pour cette raison qu'on écrit, de façon abrégée,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

au lieu d'écrire

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{N} \subset \mathbb{C} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \text{ et } \ldots$$