Chapter 24 Espaces vectoriels

Exercice 1 (24.1)
On considère dans $\mathbb{K}^3$ les vecteurs

$$u = (1,0,0); \qquad v = (1,1,0); \qquad w = (1,1,1); \qquad g = (\alpha,\beta,\gamma).$$

où α,β,γ sont des scalaires quelconques.

1. g est-il combinaison linéaire de u, v, w ?

2. g est-il combinaison linéaire de v et de w ?

Exercice 2 (24.1)
Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $x = (7,\alpha,-6) \in \mathbb{R}^3$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $a = (2,-1,3)$ et $b = (1,3,7)$.

Exercice 3 (24.1)
Montrer que le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, défini par $Q(X) = 7X^3 - 5X^2 + 11$ est combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 définis par

$$P_1(X) = X^3 + X^2 + X + 1 \qquad P_2(X) = X^2 + X + 1 \qquad P_3(X) = X + 1 \qquad P_4(X) = 1$$

Exercice 4 (24.2)
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = y = 3x \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z + y = 3x \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; zy = 3x \right\}, \qquad S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}.$$

Donner une démonstration ou un contre-exemple pour justifier votre réponse.

Exercice 5 (24.2)
On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^5$ suivants

$$F = \left\{ (x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x + y = z + t + w \right\}$$
$$\text{et } G = \left\{ (x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x = y \text{ et } z = t = w \right\}.$$

Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis déterminer $F \cap G$.

Exercice 6 (24.2)
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \left\{ (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \;\middle|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ (x,y,z) \in E \mid x + 2y = 0 \}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 7 (24.2)
Soit A une matrice (n, n) et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire fixé. Montrer que l'ensemble

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8 (24.2)
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

1. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *symétrique* lorsque $A^T = A$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.
2. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Exercice 9 (24.2)
Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

1. $A = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P(1) \}$.
2. $B = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \;\middle|\; (X^2 + 1) \text{ divise } P \right\}$.
3. $C = \left\{ a(X^3 - 3) + b(X^2 - 2) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

Exercice 10 (24.2)
Soit $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication externe usuelle (point par point).

1. Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des sous-espace vectoriel de F?

$$S_1 = \{ f \in F \mid f(0) = 1 \}, \qquad S_2 = \{ f \in F \mid f(1) = 0 \}.$$

2. Montrer que l'ensemble

$$S_3 = \left\{ f \in F \;\middle|\; f \text{ est dérivable et } f' - f = 0 \right\}$$

   est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 11 (24.2)
Soit U et V deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.
3. Donner un exemple de sous-espace U et V de $\mathbb{R}^3$ qui illustre le fait que $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel, mais que $U \cup V$ ne l'est pas.

Exercice 12 (24.2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\left(F_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espace vectoriel de E, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n \subset F_{n+1}.$$

Montrer que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 13 (24.2)
Montrer que
$$F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\phi) \right\}.$$
est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 14 (24.2)
Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice $(2,2)$ à coefficients réels.

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?
$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 15 (24.2)
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- en utilisant la définition (ou caractérisation) d'un sous-espace vectoriel ;
- en les décrivant comme le noyau d'une matrice ou comme l'image d'une matrice.

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-z=0 \right\}.$

2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s+t \\ s-t \\ s+t \end{pmatrix} \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-y+z=0 \text{ et } x+y-z=0 \right\}.$

4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-y-2z=0 \right\} \bigcap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x-y-z=0 \right\}.$

5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$

Exercice 16 (24.2)

1. Écrire, si possible, le vecteur $v = (1,1,-3) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs
$$u_1 = (-3,1,2), \quad u_2 = (4,-2,1), \quad u_3 = (-5,1,7).$$

2. Montrer que $\operatorname{Vect}\{ u_3 \} \subset \operatorname{Vect}\{ u_1, u_2 \}$ mais que ces deux sous-espaces vectoriels ne sont pas égaux.

Exercice 17 (24.2)
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (2, -1, 1), \qquad a = (1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad b = (0, 1, 1).$$

Démontrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(a, b)$.

Exercice 18 (24.2)

1. Écrire, si possible, le vecteur $v = (5, 1, 6) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs
$$u_1 = (0, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3), \quad u_3 = (2, -1, 3).$$
2. Montrer que $\text{Vect}\left\{ v, u_1, u_3 \right\} = \text{Vect}\left\{ u_1, u_2, u_3 \right\}$.

Exercice 19 (24.2)
On considère les vecteur suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est combinaison linéaire de v_1 et v_2 et expliciter cette combinaison linéaire. Montrer que w n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.
2. Comparer les quatres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants
$$\text{Vect}\left\{ v_1, v_2 \right\} \qquad \text{Vect}\left\{ v_1, v_2, u \right\} \qquad \text{Vect}\left\{ v_1, v_2, w \right\} \qquad \mathbb{R}^3.$$
3. En déduire que $\text{Vect}\left\{ v_1, v_2, u, w \right\} = \mathbb{R}^3$.
4. Montrer également que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ peut être exprimer comme combinaison linéaire de v_1, v_2, u, w d'une infinité de manières différentes.

Exercice 20 (24.2)
Soit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Expliquer la différence entre les ensembles

$$A = \{ v, w \} \qquad \text{et} \qquad B = \text{Vect}\{ v, w \}.$$

Exercice 21 (24.2)
On considère l'ensemble

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

1. en utilisant la définition de sous-espace vectoriel;
2. en exhibant une famille finie qui engendre V;
3. en écrivant V comme le noyau d'une matrice.

Exercice 22 (24.2)
On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}) = \mathrm{Vect}\,(\exp, \phi)\,.$$

Exercice 23 (24.2)
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(A)$.

1. $F_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' - 2f = 0 \right\}$.
2. $F_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - \omega^2 f = 0 \right\}$ où $\omega \in \mathbb{R}_+^\star$.
3. $F_3 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 2f' + f = 0 \right\}$.
4. $F_4 = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - 4f = 0 \right\}$.

Exercice 24 (24.2)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En calculant A^{-1}, résoudre l'équation suivante d'inconnue α et β:
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{1}$$
2. Soit $w_1 = (1, 2)^T$ et $w_2 = (1, -1)^T$. Montrer que $\mathrm{Vect}\left\{ w_1, w_2 \right\} = \mathbb{R}^2$. C'est-à-dire, montrer que *tout* vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de w_1 et $w_2$en résolvant l'équation $b = Ax$ d'inconnue x:
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$
3. Montrer que si v et w sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, avec $v = (a, c)^T$ et $w = (b, d)^T$, alors
$$\mathrm{Vect}\,\{ v, w \} = \mathbb{R}^2 \iff \forall t \in \mathbb{R}, v \neq tw \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercice 25 (24.2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties quelconques de E.

1. Comparer $\mathrm{Vect}\,(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}\,(A) \cap \mathrm{Vect}\,(B)$.
2. Comparer $\mathrm{Vect}\,(A \cup B)$ et $\mathrm{Vect}\,(A) \cup \mathrm{Vect}\,(B)$.