Chapter 39 Intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Exercice 1 (39.4)
Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.
Exercice 2 (39.4)
Déterminer les fonctions f continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
Exercice 3 (39.4)
Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^n}{1+x} \end{array}.$$

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.
2. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

Exercice 4 (39.4)
Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{Arcsin}^n\, x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5 (39.4)
Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 (39.4)
Pour $p, n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_p(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Exercice 7 (39.4)
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer

$$H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 8 (39.4)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n (on pourra intégrer par parties).
4. En déduire une expression factorisée de I_n pour $n \in \mathbb{N}$. On écrira le résultat avec des factorielles.
5. Montrer que la suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)$ est constante.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
7. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

Exercice 9 (39.4)
f est définie par $f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \,\mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calculer $f'(x)$ de deux façons.

Exercice 10 (39.4)
On considère l'application f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations de f.
5. À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

Exercice 11 (39.4) *Une intégrale à paramètre*
Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt} \,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Étudier les variations de f.

5. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 12 (39.4)
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4}$.

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{(n+2k)^3}$.

4. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=2n}^{3n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$.

5. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$.

6. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n}$.

Exercice 13 (39.4)
En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

Exercice 14 (39.4)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1. Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$\left|u_n(x) - \cos(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. En déduire que pour tout réel x,

$$\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 15 (39.4)
On cherche à calculer $I = \int_1^2 \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5} + \frac{dx+e}{\left(x^2+2x+5\right)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 16 (39.4)

1. Trouver les coefficients a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

et en déduire

$$\int_3^4 \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \, \mathrm{d}x.$$

2. Trouver les coefficients a, b, c, d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

et en déduire

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} \, \mathrm{d}x.$$

3. Trouver les coefficients a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

et en déduire

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \, \mathrm{d}x.$$

Calcul intégral

Exercice 17 (39.4)
Vérifier les relations suivantes

1. $\displaystyle\int -\frac{6}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x^3} + C.$
2. $\displaystyle\int 8x^3 + \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C.$
3. $\displaystyle\int (x-4)(x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}} = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C.$

Exercice 18 (39.4)
Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int x\left(x^3+1\right)\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 19 (39.4)
Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}, x = 0, x = 8, y = 0.$
4. $y = (3-x)\sqrt{x}, y = 0.$
5. $y = -x^2 + 4x, y = 0.$
6. $y = 1 - x^4, y = 0.$
7. $y = \dfrac{4}{x}, x = 1, x = e, y = 0.$
8. $y = e^x, x = 0, x = 2, y = 0.$

Exercice 20 (39.4)
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x.$
Exercice 21 (39.4)
Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$
Exercice 22 (39.4)
Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
6. $f(x) = -\frac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
7. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.
8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.
17. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 23 (39.4)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

Indications :

1. $u = t^3$
2. $u = \sqrt{t}$
3. $u = 1 + t^2$
4. $u = \ln t$
5. $u = \ln t$
6. $u = \sqrt{t}$
7. $u = \cos t$
8. $u = \sin t$

Exercice 24 (39.4)
Utiliser une intégration par parties pour déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int (4x+7)e^x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int x \sin 3x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int x \cos 4x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 25 (39.4)
Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x^2\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^1 e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$.
10. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(4+x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 26 (39.4)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 27 (39.4)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$
2. Déduire I_n en fonction de n.