Chapter 22 Matrices inversibles

Exercice 1 (22.1)
Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (22.1)
En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si possible l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les solutions du système $Ax = b$. Déterminer les solutions du système $Bx = b$.

Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ soit incompatible ? Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Bx = d$ soit incompatible ? Dans chaque cas, justifier votre réponse et déterminer un tel vecteur d si il existe.

Exercice 3 (22.1)
En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

est équivalente par lignes à la matrice unité I_3. Écrire A comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 4 (22.1)
À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer, si possible, les inverses des matrice suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice C est-elle une matrice élémentaire? Si «oui», quelle est l'opération élémentaire correspondante? Si «non», l'écrire comme un produit de matrices élémentaires.

Exercice 5 (22.1)
Étant donné un système d'équations $Ax = b$ avec différente valeurs de b, il est souvent plus rapide de déterminer A^{-1}, si elle existe, afin de déterminer les solutions avec la relation $x = A^{-1}b$.

Utiliser cette méthode pour résoudre $Ax = b_r$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et chacun de vecteurs b_r, $r = 1, 2, 3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier vos solutions.

Exercice 6 (22.1)
Inverser les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (22.1)

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A = (\min(i,j))_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 8 (22.1)
Soit A et B deux matrices (n, n).

Montrer que si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Exercice 9 (22.1)
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En écrivant la matrice A comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice simple, calculer $X^T A X$.

2. En déduire que la matrice A est inversible.

Exercice 10 (22.1)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de calculer A^n.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis PAP^{-1}.

2. En déduire A^n.

Exercice 11 (22.1) *Matrice à diagonale strictement dominante, lemme d'Hadamart*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Problème 12 (22.1)

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'inversibilité de la matrice P et calculer son inverse par la méthode du pivot.

2. Soit a un réel. Former la matrice $A - aI$ où $I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer, sans calcul, les valeurs de a telles que $A - aI$ ne soit pas inversible.

La matrice A est-elle inversible?

3. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale. Que remarquez vous?

4. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Écrire la matrice A^n sous forme de tableau.

5. Exprimer A^{-1}, puis A^{-n} pour tout entier $n \geq 1$, à l'aide de P, P^{-1} et D^{-1}.

Écrire la matrice A^{-1} sous forme de tableau.

Rang, image et équations linéaires

Exercice 13 (22.2)
Résoudre le système d'équation $Ax = b$ suivant en effectuant la réduction de sa matrice augmentée.

$$(E) : \left\{ \begin{array}{cccccl} x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +7x_4 & +x_5 & = 2 \\ 2x_1 & +10x_2 & +3x_3 & +8x_4 & +5x_5 & = -5 \\ x_1 & +5x_2 & +x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = -4. \end{array} \right.$$

On note $r = \mathrm{rg}(A)$ et n le nombre de colonne de A. Montrer que les solutions de (E) peuvent s'écrire

$$x = p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-r} v_{n-r} \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Montrer également que $Ap = b$ et que $Av_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n - r$.

Exprimer le vecteur b comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A. Faire de même pour le vecteur $\mathbf{0}$.

Exercice 14 (22.2)
Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\ker(A)$, le noyau de A, et $\mathrm{Im}(A)$, l'image de A (donner une équation).

Exercice 15 (22.2)
Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (22.2)
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour quelle valeurs de λ et μ

- le système a une unique solution,
- le système est incompatible,
- le système a une infinité de solutions.

Lorsqu'elle existe, donner les solutions du système $Ax = b$.

Exercice 17 (22.2)
Le système $Bx = d$ admet pour solution générale

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Sachant que $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est la première colonne de B et $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, déterminer la matrice B.

Exercice 18 (22.2)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients du vecteur $b = (u, v, w)^T$ pour que le système $Ax = b$ soit compatible. En déduire que $\mathrm{Im}(A)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ et en donner une équation cartésienne.

Montrer que $d = (1, 5, 6)^T$ appartient à $\mathrm{Im}(A)$. Exprimer d comme une combinaison linéaire des colonnes de A. Est-il possible de le faire de deux manières différentes? Si «oui», faites le! Si «non», justifier pourquoi.

Exercice 19 (22.2)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & -6 \\ -2 & 9 & -1 & 9 \\ 5 & -6 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A et le noyau de A.

   Écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ comme une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de A, ou justifier pourquoi c'est impossible.

   Déterminer tous les réel u et v tels que $b \in \mathrm{Im}(A)$. Écrire la solution générale du système $Ax = b$.

2. En utilisant les opérations élémentaires, ou autrement, déterminer $\det(B)$. Quel est le rang de B?

   Écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ comme une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes de B, ou justifier pourquoi c'est impossible.

   Déterminer tous les réel u et v tels que $b \in \mathrm{Im}(B)$.

Exercice 20 (22.2)
Un système linéaires $Ax = d$ a pour solutions les vecteurs de la forme

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

On suppose que A est une matrice de type (m, n). On note $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les colonnes de A.

Répondre à chacune des questions ci dessous *ou* dire si il n'y a pas assez d'informations pour y répondre.

1. Que vaut n?

2. Que vaut m?

3. Quel est le rang de A?

4. Décrire le noyau de A.

5. Écrire le vecteur d comme une combinaison linéaire des colonnes de A.

6. Écrire une combinaison linéaire (non triviale) des colonnes c_i qui est égale au vecteur nul 0.

Exercice 21 (22.2)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant le procédé d'élimination de Gauß. Exprimer les solutions sous la forme $x = p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, et vérifier que $k = n - r$ où r est le rang de A. Que vaut n?

Si possible, exprimer de deux manières différente le vecteur b comme une combinaison linéaire des colonnes de A.