Chapter 6 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances

Exercice 1 (6.1)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4.$$

1. Étudier les variation de f et tracer sa courbe représentative.
2. Discuter graphiquement l'existence et le signe des racines de l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 4 = m,$$

suivant les valeurs du paramètre m.

Solution 1 (6.1)

1. La fonction f est polynômiale. Elle est donc définie, continue et dérivable pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$. Sa dérivée,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

est nulle pour $x = -\frac{4}{3}$, positive pour $x < -\frac{4}{3}$ ou $x > 0$, négative pour $-\frac{4}{3} < x < 0$.

Enfin, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Tous ces résultats permettent de dresser le tableau suivant,

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow$	$-\frac{76}{27}$	$\downarrow$	-4	$\uparrow$	$+\infty$

À faire : faire un tableau plus joli et tracer la courbe (c'est à vous!).

2. Les racines de l'équation $x^3 + 2x^2 - 4 = m$, lorsqu'elles existent, ne sont autres que les abscisses des points communs à l acourbe précédente et à la droite (Δ) parallèle à $x'x$ et d'ordonnée égale à m.

Un simple examen du graphique conduit alors aux conclusions suivantes:

- $m < -4$: une racine (négative);
- $m = 4$: un racine négative et une racine double, $x = 0$;
- $-4 < m < -\frac{76}{27}$: trois racines (deux négatives et une positive);
- $m = -\frac{76}{27}$: une racine double, $x = -\frac{4}{3}$, et une racine positive;
- $m > -\frac{76}{27}$: un racine (positive).

Exercice 2 (6.2)

Résoudre
$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

Solution 2 (6.2)

Cette équation est définie pour $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/2\}$.

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\iff \ln|x+1| \leq \ln|2x+1| + \ln 2 \\
&\iff \ln|x+1| \leq \ln(2|2x+1|) \\
&\iff |x+1| \leq 2|2x+1| && \text{car ln est strictement croissante} \\
&\iff (x+1)^2 \leq 4(2x+1)^2 \\
&\iff 15x^2 + 14x + 3 \geq 0 && \text{en développant.}
\end{aligned}$$

Le polynôme $15X^2 + 14X + 3$ a pour discriminant 16 et pour racines $-3/5$ et $-1/3$. Son coefficient dominant étant positif, il est à valeurs positive «à l'exterieur des racines».

Conclusion

En prenant en considération l'ensemble de définition D, l'inéquation

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2.$$

a pour ensemble de solutions

$$S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

Exercice 3 (6.2)

Simplifier, en précisant éventuellement le domaine de validité

1. $e^{3\ln 5}$.
2. $e^{-2\ln 3}$.
3. $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)}$.
4. $e^{2\ln|x-1|-3\ln(x^2+1)}$.

Solution 3 (6.2)

1. $e^{3\ln 5} = 5^3 = 125$.
2. $e^{-2\ln 3} = 3^{-2} = 1/9$.
3. Pour $x > 0$, $2\ln\left(e^{x/2}\right) - 2e^{\ln(x/2)} = 2\dfrac{x}{2} - 2\dfrac{x}{2} = 0$.

   Remarquez que l'expression de gauche n'est définie que pour $x > 0$ alors que celle de droite aurait un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Pour $x \neq 1$, $e^{2\ln|x-1|-3\ln(x^2+1)} = \dfrac{(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^3}$.

   Remarquez que l'expression de gauche n'est définie que pour $x \neq 1$ alors que celle de droite aurait un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (6.2)

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{4x+1} + 3e^{2x+1} = 4e.$$

Solution 4 (6.2)

Exercice 5 (6.2)

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation

$$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0. \tag{1}$$

Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$.

Solution 5 (6.2)
Compte tenu du fait que l'on a $e^{2x} = (e^x)^2$ et que e^x est positif quel que soit x, il apparait que l'équation proposée admet autant de solutions que le système suivant:

$$\begin{cases} e^x = u \\ f(u) = u^2 - 4mu + 2m + 2 = 0 \\ u > 0. \end{cases}$$

Pour que l'équation $f(u) = 0$ ait des racines, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} \Delta &= 16m^2 - 8m - 2 = 8(2m^2 - m - 1) \\ &= 8(m-1)(2m+1) \geq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$m \leq -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m \geq 1.$$

Comme, d'autre part, le produit et la somme des racines, u_1 et u_2, de cette équation (en supposant la condition précédente remplie) ont respectivement pour valeur $P = 2(m+1)$ et $S = 4m$, on voit immédiatement apparaître les conclusions suivantes, relatives à l'équation proposée:

- Pour $m < -1$, on a $u_1 < 0 < u_2$ (quitte à échanger u_1 et u_2) ; seule u_2 est acceptable et donne $e^x = u_2$, d'où $x = \ln u_2$.
- Pour $-1 \leq m < 1$, l'équation $f(u) = 0$ a deux racines négatives (si $-1 \leq m \leq -\frac{1}{2}$) ou n'en a aucune (si $-\frac{1}{2} < m < 1$); dans les deux cas, l'équation proposée n'a pas de solution.
- Pour $m > 1$, on a $0 < u_1 < u_2$; donc deux valeurs pour x sont solutions de l'équation proposée, à savoir $x_1 = \ln u_1$ et $x_2 = \ln u_2$.
- Lorsque $m = 1$, on a $u_1 = u_2 = 2$ et l'équation proposée admet une seule soltion : $x = \ln 2$.

Exercice 6 (6.2)

Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^\star$ les solutions de l'équation

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \tag{E}$$

d'inconnue réelle x.

Solution 6 (6.2)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

$$a^{x^2-x} \leq e^{x-1} \iff \left(x^2 - x\right) \ln a \leq x - 1 \iff (\ln a)x^2 - (\ln a + 1)x + 1 \leq 0.$$

- Si $a = 1$, $(E) \iff x \geq 1$. L'ensemble solution de (E) est alors $\mathscr{S} = [1, +\infty[$.
- Si $a \neq 1$, le trinôme du second degré $(\ln a)x^2 - (\ln a + 1)x + 1$ a pour discriminant $(\ln a)^2 + 2\ln a + 1 - 4\ln a = (\ln a)^2 - 2\ln a + 1 = (\ln a - 1)^2$; ses racines sont donc

$$\frac{\ln a + 1 - \ln a + 1}{2\ln a} = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln a + 1 + \ln a - 1}{2\ln a} = 1.$$

  - Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et l'ensemble solution de (E) est $\mathscr{S} =]-\infty, 1/\ln a] \cup [1, +\infty[$.
  - Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et l'ensemble solution de (E) est $\mathscr{S} = [1, 1/\ln a]$ si $1 < a < e$ et $\mathscr{S} = [1/\ln a, 1]$ si $a > e$.

Exercice 7 (6.2)

> **1.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $\phi_a : x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
>
> **2.** Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution 7 (6.2)

1. En fait, c'est une question de cours!!!

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $\phi_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est dérivable et on a

$$\phi_a'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

qui est du signe de $\ln a$. Nous distinguons alors trois cas.

- Si $a = 1$, ϕ_a est constante égale à 1.
- Si $a > 1$, ϕ_a est strictement croissante et

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} x \ln a = -\infty$. De manière similaire,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi_a'(x)$		$+$	$\ln a$	$+$	
$\phi_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $0 < a < 1$, ϕ_a est strictement décroissante et

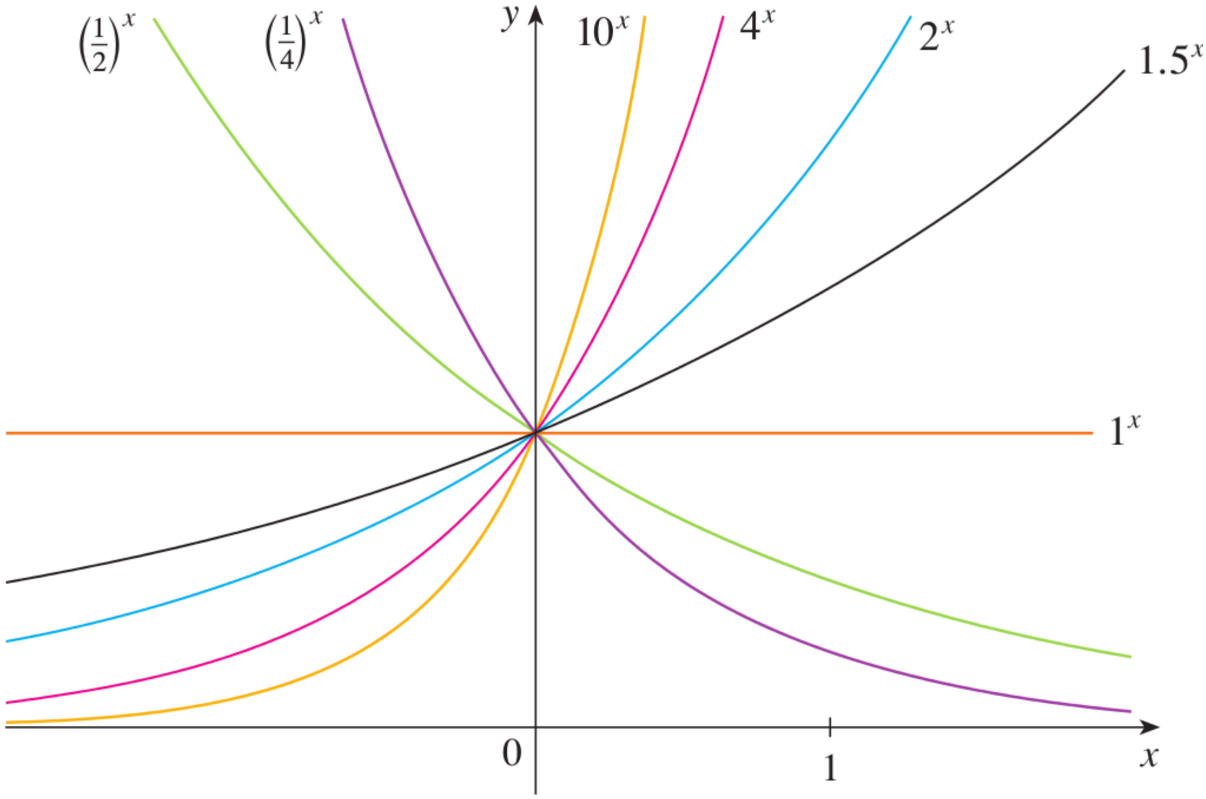
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} x \ln a = +\infty$. De manière similaire,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi_a'(x)$		$-$	$\ln a$	$-$	
$\phi_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



2. L'étude précédente montre que l'application $f \ : \ x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; l'application f est donc injective. Or $f(1) = 2^1 + 3^1 = 5$, donc

$$2^x + 3^x = 5 \iff f(x) = 5 \iff f(x) = f(1) \iff x = 1.$$

Conclusion

L'équation $2^x + 3^x = 1$ admet pour ensemble solution $\mathscr{S} = \{ \ 1 \ \}$.

Exercice 8 (6.2)

> 1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
> 2. En déduire les couples (a, b) d'entiers tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.
> 3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

Solution 8 (6.2)

1. f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

   variations:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ f(x) & -\infty & \nearrow & 1/e & \searrow & -\infty \end{array}$$

2. Puisque ln est injective,

$$a^b = b^a \iff b\ln(a) = a\ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \iff f(a) = f(b).$$

   D'après le tableau de variation, f ne peut prendre qu'au plus deux fois la même valeur et, si c'est le cas, une fois sur $]1, e[$ et l'autre fois sur $]e, +\infty[$.

   Nécessairement $1 < a < e < b$ et comme a est entiers, il ne peut valoir que 2.

   Reste à trouver b tel que $f(b) = \ln(2)/2$: on trouve facilement $b = 4$.

Exercice 9 (6.2)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x.

1. $3^x \leq 2^x$.
2. $\log_2(2^x + 1) < x + 1$.
3. $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$.

Solution 9 (6.2)

1. L'inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Puisque ln est strictement croissante

$$3^x \leq 2^x \iff x \ln 3 \leq x \ln 2 \iff x(\ln 3 - \ln 2) \leq 0 \iff x \leq 0.$$

L'ensemble solution est $\mathscr{S} =]-\infty, 0]$.

2. L'inéquation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on a $2^x + 1 \geq 1$). L'application $x \mapsto 2^x = e^{x \ln 2}$ est strictement croissante car $\ln 2 > 0$. D'où

$$\begin{aligned} \log_2(2^x + 1) < x + 1 \iff 2^x + 1 < 2^{x+1} \iff 1 < 2 \times 2^x - 2^x \\ \iff 1 < 2^x \iff 0 < x \ln 2 \iff 0 < x. \end{aligned}$$

L'inéquation $\log_2(2^x + 1) < x + 1$ a pour ensemble solution $\mathscr{S} =]0, +\infty[$.

3. L'inéquation $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$ est définie pour $x > 0$ ($x^{(x^2)} = \exp(x^2 \ln x)$). On a alors,

$$\begin{aligned} x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x &\iff x^2 \ln x \leq x \ln x^2 && \because \text{ln est strictement croissante} \\ &\iff x^2 \ln x \leq 2x \ln x \\ &\iff x \ln x \leq 2 \ln x && \because x > 0 \\ &\iff (x-2) \ln x \leq 0. \end{aligned}$$

Résumons à l'aide d'un tableau de signes :

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)\ln x$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation $x^{(x^2)} \leq \left(x^2\right)^x$ est donc $\mathscr{S} = [1, 2]$.

Exercice 10 (6.2)

Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers naturels p vérifiant

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.

2. Montrer que, pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.

Solution 10 (6.2)

1. On a $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, $7^6 = 117649$, $7^7 = 823543$,...

Ainsi,

$$50^0 < 7^p < 50^1 \iff 1 < 7^p < 50 \iff p \in \{ 0, 1, 2 \}$$

d'où $I_0 = 3$.

De même,

$$50^1 < 7^p < 50^2 \iff 50 < 7^p < 2500 \iff p \in \{ 3, 4 \}$$

d'où $I_1 = 2$.

Enfin,

$$50^2 < 7^p < 50^3 \iff 2500 < 7^p < 125000 \iff p \in \{ 5, 6 \}$$

d'où $I_2 = 2$.

2. Supposons $50^n < 7^p < 50^{n+1}$. La fonction ln est strictement croissante, on a donc

$$n \ln 50 < p \ln 7 < (n + 1) \ln 50$$

d'où

$$n\frac{\ln 50}{\ln 7} < p < (n + 1)\frac{\ln 50}{\ln 7}$$

Or l'intervalle $\left[n\frac{\ln 50}{\ln 7}, (n + 1)\frac{\ln 50}{\ln 7}\right]$ a pour longueur $\frac{\ln 50}{\ln 7}$ et $2 < \frac{\ln 50}{\ln 7} < 3$; il contient donc 2 ou 3 entiers. C'est-à-dire $I_n = 2$ ou $I_n = 3$.

Exercice 11 (6.3)

Résoudre l'équation

$$x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0.$$

Solution 11 (6.3)

Cette équation est définie pour $x \in]0, +\infty[$.

On peut penser à passer sous forme exponentielle, mais cela ne simplifie par grand chose. Ou alors faire un changement d'inconnue ($X = x^{1/12}$ par exemple) mais on ne sait par résoudre l'équation $X^3 + 2X^{20} - 3 = 0$.

Néanmoins, ce permet de remarquer que $x = 1$ est une solution apparente de l'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} = 3$. Nous allons montrer que c'est la seule solution.

Pour $x > 0$, posons $f(x) = x^{1/4} + 2x^{5/3}$. La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions (usuelles) strictement croissantes (on peut également dériver f et trouver $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} + \frac{10}{3}x^{2/3} > 0$).

La fonction f est donc injective : l'équation $f(x) = 3$ a donc zéro ou une solution. Puisque $f(1) = 3$, on en déduit.

Conclusion

L'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} - 3 = 0$ a pour unique solution $x = 1$.

Exercice 12 (6.3)

Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation
$$x^{(x^x)} = (x^x)^x \,.$$

Solution 12 (6.3)

Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
x^{(x^x)} = (x^x)^x &\iff x^x \ln(x) = x \ln\left(x^x\right) && \because \text{ln est injective}\\
&\iff x^x \ln(x) = x^2 \ln(x)\\
&\iff x^x = x^2 \;\text{ ou }\; \ln(x) = 0\\
&\iff x\ln(x) = 2\ln(x) \;\text{ ou }\; x = 1 && \because \text{ln est injective}\\
&\iff x = 2 \;\text{ ou }\; x = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ dans $]0,+\infty[$ sont est

$$\mathscr{S} = \{\, 1, 2 \,\}\,.$$

Exercice 13 (6.4)

Établir pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Solution 13 (6.4)

Mettre le membre de droite sous forme exponentielle et développer brutalement...

Exercice 14 (6.4)

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x = m$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité?

Solution 14 (6.4)

- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh} x = m \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x - e^{-x} = 2m \iff e^x - 2m - e^{-x} = 0$$

Or $e^x \neq 0$, d'où, en multipliant par e^x la dernière égalité,

$$\operatorname{sh} x = m \iff e^{2x} - 2me^x - 1 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 2mX - 1$ a pour discriminant $4m^2 + 4 = 4(m^2+1) > 0$ et pour racine

$$m - \sqrt{m^2+1} < 0 \qquad \text{et} \qquad m + \sqrt{m^2+1} > 0.$$

On a donc

$$\operatorname{sh} x = m \iff e^x = \underbrace{m - \sqrt{m^2+1}}_{<0} \text{ ou } e^x = m + \sqrt{m^2+1}$$
$$\iff \boxed{x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)}.$$

Conclusion

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $\operatorname{sh} x = m$ admet pour unique solution $x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$. L'application sh est donc bijective et

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sh}^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x = m \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = m \iff e^x + e^{-x} = 2m$$
$$\iff e^x - 2m + e^{-x} = 0 \iff e^{2x} - 2me^x + 1 = 0.$$

Or le polynôme $X^2 - 2mX + 1$ a pour discriminant $4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$.

  - Si $m < 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = m$ n'a pas de solution (on le savait).
  - Si $m = 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = 1$ a une seule solution $x = 0$ (on le savait aussi).
  - Si $m > 1$, alors le polynôme $X^2 - 2mX + 1$ a pour racine

$$m - \sqrt{m^2-1} > 0 \qquad \text{et} \qquad m + \sqrt{m^2-1} > 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x = m &\iff e^x = m - \sqrt{m^2-1} \ \text{ ou } \ e^x = m + \sqrt{m^2-1} \\ &\iff x = \ln\left(m - \sqrt{m^2-1}\right) \ \text{ ou } \ x = \ln\left(m + \sqrt{m^2-1}\right).\end{aligned}$$

L'équation $\operatorname{ch} x = m$ admet deux solutions si $m > 1$, qui sont $x = \ln\left(m \pm \sqrt{m^2-1}\right)$.

Conclusion

L'application ch n'est donc pas bijective.

Exercice 15 (6.4)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $1 - e^x = -2e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}$.
2. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx).$$
On exprimera le résultat avec les fonctions ch et sh.

Solution 15 (6.4)

On a
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k .$$

- Si $x \neq 0$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1 - (e^x)^{n+1}}{1 - e^x} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}} \frac{e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} = e^{nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}.$$
De même, en remplaçant x par $-x$, on obtient,
$$\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k = e^{-nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}.$$
D'où
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2} e^{nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} e^{-nx/2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(e^{nx/2} + e^{-nx/2}\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{nx}{2} \operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}.$$

- Si $x = 0$, on a $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = n + 1$.