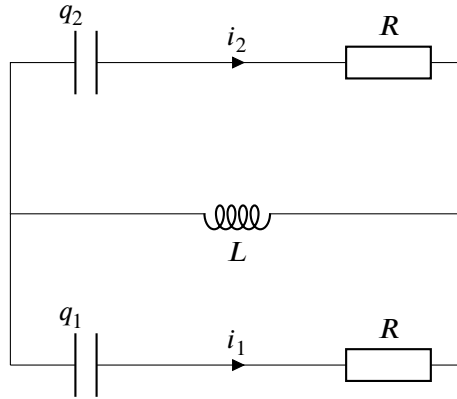


Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le mardi 3 janvier.

Exercice 1 Deux circuits RLC

On étudie le circuit électrique suivant. Les deux résistances sont identiques de même que les deux condensateurs. On note R la résistance des résistors, C la capacité des condensateurs, et L l'inductance de la bobine.

Pour tout instant $t \in \mathbb{R}$, on note $q_1(t)$ la charge du premier condensateur, $q_2(t)$ la charge du second condensateur, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ les intensités, comme indiqué sur le schéma.



À l'instant initial ($t = 0$) les intensités dans le circuit sont nulles. Pour ne pas rajouter de notations, on notera juste $q_1(0)$ et $q_2(0)$ les charges initiales des condensateurs.

Toute notation supplémentaire devra être clairement définie.

1. Vérifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} q_2(t) + CRq_2'(t) + CLq_1''(t) + CLq_2''(t) = 0 \\ q_1(t) + CRq_1'(t) + CLq_1''(t) + CLq_2''(t) = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la matrice A telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{pmatrix} q_2(t) \\ q_2'(t) \\ q_1(t) \\ q_1'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_2'(t) \\ q_2''(t) \\ q_1'(t) \\ q_1''(t) \end{pmatrix}.$$

On fixe A dans la suite.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2 , Prouver que P est inversible, et calculer P^{-1} .

4. Calculer $P^{-1}AP$.

5. Déterminer deux fonctions f et g telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, P^{-1} \begin{pmatrix} q_2(t) \\ q_2'(t) \\ q_1(t) \\ q_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix},$$

et démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -R & -2L & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}.$$

6. Écrire les équations obtenues sur f et g .

7. Dans le cas où $R = 0$, déterminer q_1 et q_2 .

Indication : N'oubliez pas les conditions initiales.

8. Dans la suite, on suppose $R \neq 0$.

À quelle condition le système sera-t-il en régime pseudo-périodique?

On suppose qu'on est dans cette situation pour la fin du problème.

9. Déterminer f et g . On pourra noter $\omega = \frac{\sqrt{8LC - R^2C^2}}{4LC}$.

10. En déduire q_1 et q_2 .

11. Quelle est la limite en $+\infty$ de q_1 et q_2 ? S'y attendait-on?

12. Que constate-t-on lorsque les deux condensateurs sont initialement à la même charge? Était-ce prévisible?