Sujet d'étude d'après Centrale 1989 Maths I M

Suites vérifiant $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$

Exercice 1 *Suites vérifiant* $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$

Définitions et notations.

- On note S l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_0 \in \mathbb{R}_+$, $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et
$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right)$$
pour tout entier naturel n.
- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $u(x, y)$ désigne l'unique suite u de S telle que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Le terme de rang n de la suite $u(x, y)$ est noté $u_n(x, y)$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty, -\infty \}$, on note E_λ l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que la suite $u(x, y)$ tende vers λ.

Le but du problème est d'étudier les éléments de S, en particulier de décrire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que la suite $u(x, y)$ tend vers 0.

Partie A généralités

A1. (a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

(b) Soit $u \in S$. On suppose que u tend vers $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?

(c) Si $u \in S$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{n+3} - u_{n+2}$ en fonction de u_{n+2} et u_n.

A2. Dans cette question, on suppose que $u \in S$ vérifie la condition (C_1) suivante
$$(C_1) \quad \exists N \in \mathbb{N}, u_{N+2} > \max\left(u_N, u_{N+1}\right).$$

(a) Si N est fixé comme dans (C_1), montrer que $(u_n)_{n\geq N+1}$ est strictement croissante.

(b) Montrer que u tend vers $+\infty$.

On prouverait de même que si u vérifie la condition
$$(C_2) \quad \exists N \in \mathbb{N}, u_{N+2} < \min\left(u_N, u_{N+1}\right),$$
alors u converge vers 0.

A3. (a) Étudier les suite $u(2, 0)$ et $u(1, 0)$.

(b) Montrer que E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides.

A4. Dans cette question, on suppose que $u \in S$ est non nulle et vérifie la condition
$$(C_3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \min(u_n, u_{n+1}) \leq u_{n+2} \leq \max\left(u_n, u_{n+1}\right).$$

Dans les questions **A4**a et **A4**b, on suppose de plus que $u_0 \leq u_1$.

(a) Montrer que $\left(u_{2k}\right)_{k\geq 0}$ est croissante et $\left(u_{2k+1}\right)_{k\geq 0}$ est décroissante.

(b) Montrer que u converge vers 1.

(c) Si $u_0 > u_1$, que deviennent les résultats de **A4**a et **A4**b ?

A5. Déterminer $E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}$.

Partie B Étude des bassins d'attraction

B1. Soit $u \in S$. On suppose que u converge vers 1. Soit $u' \in S$ telle que $u'_0 \geq u_0$ et $u'_1 \geq u_1$, l'une au moins des deux inégalités étant stricte.

(a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $u'_n \geq u_n + \epsilon$ pour tout $n \geq 2$.

(b) Que dire de u'_n lorsque n tend vers $+\infty$?

B2. Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; u_n(x,0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$.

(a) Justifier l'existence de $a = \sup A$. Établir que $1 \leq a \leq 2$.

(b) Si $k \in \mathbb{N}$, montrer que $x \mapsto u_k(x,0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En utilisant **B2**b et les résultats de la partie A, montrer que $u(a,0)$ converge vers 1.

(d) Étudier le comportement de $u(x,0)$ selon la position de x par rapport à a.

(e) Si $x > a$ et $y \in \mathbb{R}_+$, étudier $u(x,y)$.

B3. Ici $x \in [0,a]$ est fixé.

(a) Montrer qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $u(x,y)$ converge vers 1. On note $y = \phi(x)$ ce réel. L'application ϕ est donc définie sur $[0,a]$.

(b) Décrire les trois ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ à l'aide du réel a et de l'application ϕ.

B4. (a) Montrer que ϕ est strictement décroissante sur $[0,a]$.

(b) Montrer que ϕ est continue sur $[0,a]$.

Solution 1

1. (a) Si $u \in S$ est la suite constante égale à λ, on a $\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \lambda^2\right)$, ce qui force $\lambda \in \{ 0, 1 \}$. Inversement, la suite nulle et la suite constante égale à 1 sont dans S.

(b) Comme u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la seule limite infinie possible est $+\infty$, et si $u \in S$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, par passage à la limite dans la relation de récurrence, $\lambda = \lambda^2$. Donc $\lambda \in \{ 0, 1 \}$.

(c) On a $u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 - u_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(u_{n+2}^2 - u_n^2\right)$.

2. (a) On va montrer par récurrence à deux termes sur $n \geq N+1$ la propriété $R(n)$: $u_{n+1} > u_n$.

— On a $u_{N+2} > \max\left(u_{N+1}, u_N\right) \geq u_{N+1}$, d'où $R(N+1)$.

— D'après la question **A1**c, on a

$$u_{N+3} - u_{N+2} = \frac{1}{2}\left(u_{N+2}^2 - u_N^2\right) > 0,$$

car $u_{N+2} > \max\left(u_{N+1}, u_N\right) \geq u_N$; d'où $R(N+2)$.

— Soit $p \geq N+2$. Supposons $R(p)$ et $R(p-1)$, c'est-à-dire $u_{p+1} > u_p > u_{p-1}$. On a donc

$$u_{p+2} = \frac{1}{2}\left(u_{p+1}^2 + u_p^2\right) > \frac{1}{2}\left(u_p^2 + u_{p-1}^2\right) = u_{p+1},$$

d'où $R(p+1)$; ce qui achève donc la récurrence.

(b) Comme u est croissante à partir du rang $N+1$, si elle ne diverge pas vers $+\infty$, c'est qu'elle converge vers un réel λ. D'après **A1**b, $\lambda \in \{ 0, 1 \}$. Comme u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante à partir du rang $N+1$, le cas $\lambda = 0$ est exclu. Supposons donc que u converge vers 1. On a alors, pour tout $n \geq N$, $1 > u_{n+2} > u_{n+1} > u_n$; mais alors, pour un tel indice n, on aurait

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right) < u_{n+1}^2 < u_{n+1} \qquad \because u_{n+1} < 1,$$

ce qui contredit l'inégalité précédente. Il en résulte que u diverge nécessairement vers $+\infty$.

3. (a)
- Pour $u = u(2,0)$, on a $u_0 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$ et $u_4 = 4$, de sorte que l'hypothèse (C_1) est vérifiée pour $N = 2$. Donc $u(2,0)$ tend vers $+\infty$.
- Pour $u = u(1,0)$, on a $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{8}$ et $u_4 = \frac{17}{128}$ et $u_5 < \min(u_3, u_4)$. L'hypothèse (C_2) est vérifiée pour $N = 3$ et $u(1,0)$ tend vers 0.

(b) Les ensembles E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides puisque $(0,0) \in E_0$, $(1,1) \in E_1$ et $(2,0) \in E_{+\infty}$, d'après les questions **A1**a et **A3**a.

4. (a) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la relation

$$R(k) : u_0 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{2k} \leq u_{2k+1} \leq \ldots \leq u_3 \leq u_1.$$

— Pour $R(0)$, il s'agit simplement de l'hypothèse $u_0 \leq u_1$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat $R(k)$ établi. On sait alors que u_{2k+2} est compris entre $\min(u_{2k}, u_{2k+1}) = u_{2k}$ et $\max(u_{2k}, u_{2k+1}) = u_{2k+1}$ de sorte que

$$u_{2k} \leq u_{2k+2} \leq u_{2k+1}.$$

Un raisonnement analogue montrer que $u_{2k+2} \leq u_{2k+3} \leq u_{2k+1}$, ce qui démontre $R(k+1)$ et achève la récurrence.

(b) La suite $\left(u_{2k}\right)_{k\geq 0}$ est croissante et majorée par u_1, donc converge par le théorème de la limite monotone. Notons λ sa limite. De même, la suite décroissante minorée $\left(u_{2k+1}\right)_{k\geq 0}$ converge vers un réel μ. or, on a la relation $u_{2k+2} = \frac{1}{2}\left(u_{2k+1}^2 + u_{2k}^2\right)$ pour tout k, d'où, par unicité de la limite, on obtient

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\mu^2 + \lambda^2\right).$$

De même, en passant à la limite la relation $u_{2k+3} = \frac{1}{2}\left(u_{2k+2}^2 + u_{2k+1}^2\right)$, il vient

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \mu^2\right).$$

On a donc $\lambda = \mu$. Les deux suites $\left(u_{2k}\right)_{k\geq 0}$ et $\left(u_{2k+1}\right)_{k\geq 0}$ convergent vers la même limite λ et donc la suite u converge vers λ également. Si $\lambda = 0$, on aurait par croissance de la suite $0 = \sup\left\{ u_{2k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$; or $u \geq (0)$, donc la suite u serait la suite nulle, ce qu'exclut l'énoncé. Donc d'après la question **A1**c, on a $\lambda = 1$.

(c) Si $u_0 > u_1$, on montre que les suites $\left(u_{2k}\right)_{k\geq 0}$ et $\left(u_{2k+1}\right)_{2k+1}$ sont encore monotone, mais cette fois c'est la première qui est décroissante et la seconde qui est croissante. La suite u converge toujours vers 1.

5. L'une au moins des trois condition (C_1), (C_2) ou (C_3) est satisfaite pour toute suite non nulle de S. Les questions **2.** et **4.** montrent alors que toute suite de S est soit divergente de limite $+\infty$, soit convergente de limite 0 ou 1. En d'autre termes, $E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

1. (a) Il est clair que $u'_2 > u_2$ et $u'_3 > u_3$. Soit $\epsilon = \min(u'_2 - u_2, u'_3 - u_3)$. On va prouver par récurrence sur deux termes que pour tout $n \geq 2$

$$R(n) : u'_n \geq u_n + \epsilon.$$

$R(2)$ et $R(3)$ sont vraies par choix de ϵ.

Soit $n \geq 2$ tel que $R(n)$ et $R(n+1)$, c'est-à-dire

$$u'_n \geq u_n + \epsilon \qquad \text{et } u'_{n+1} \qquad \geq u_{n+1} + \epsilon.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} u'_{n+2} = \frac{1}{2}\left({u'_{n+1}}^2 + {u'_n}^2\right) &\geq \left(u_{n+1}^2 + 2\epsilon u_{n+1} + \epsilon^2 + u_n^2 + 2\epsilon u_n + \epsilon^2\right) \\ &\geq \left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right) + \epsilon\left(u_{n+1} + u_n\right) \\ &\geq u_{n+2} + \epsilon\left(u_{n+1} + u_n\right). \end{aligned}$$

Or l'étude faite à la partie A montrer que la suite u, convergeant vers 1, vérifie la condition (C_3). On a donc, pour tout $k \geq 1$ l'inégalité $\max\left(u_{2k+1}, u_{2k}\right) \geq 1$, et en particulier $u_{n+1} + u_n \geq 1$. Il en résulte que $u'_{n+2} \geq u_{n+2} + \epsilon$, d'où $R(n+2)$ et le résultat par récurrence.

(b) La question précédente et le fait que u converge vers 1 montrent que u' ne peut converger vers 0 ou 1. D'après la question **5.**, la suite $\left(u'_n\right)$ tend forcément vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) D'après la question **A3**a, $1 \in A$, $2 \notin A$. Soit $x > 2$. On a pour tout n, $u_n(x,0) \geq u_n(2,0)$ et $u_n(2,0)$ tend vers $+\infty$. Donc $x \notin A$, de sorte que A est majoré par 2. Comme A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure a, et on a $1 \leq a \leq 2$.

(b) On montrer par récurrence à deux termes sur k que $x \mapsto u_k(x, 0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On a $u_0(x, 0) = x$ et $u_1(x, 0) = 0$, donc $x \mapsto u_k(x, 0)$ est continue si $k = 0$ ou $k = 1$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \mapsto u_k(x, 0)$ et $u_{k+1}(x, 0)$ soient continues, alors

$$x \mapsto u_{k+2}(x, 0) = \frac{1}{2}\left(u_{k+1}(x, 0)^2 + u_k(x, 0)^2\right)$$

et donc encore continue par les théorème opératoire sur les applications continues.

(c) On va montrer par l'absurde que la suite $u(a, 0)$ ne peut ni converger vers 0, ni tendre vers $+\infty$, la question **5.** permettant alors de conclure.
Supposons tout d'abord que $u(a, 0)$ converge vers 0, c'est-à-dire que $a \in A$. Comme $a > 0$, la suite $u(a, 0)$ n'est pas la suite nulle et la partie A montre alors qu'elle vérifie nécessairement la condition (C_2). Il existe donc un entier N tel que

$$u_{N+2}(a, 0) < \min\left(u_N(a, 0), u_{N+1}(a, 0)\right).$$

Or, la fonction fonction $x \mapsto u_{N+2}(x, 0) - \min\left(u_{N+1}(x, 0), u_N(x, 0)\right)$ est continue et strictement négative en a. De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty} a + \frac{1}{k} = a$, donc il existe $\alpha = \frac{1}{k} > 0$ tel que

$$u_{N+2}(a + \alpha, 0) < \min\left(u_N(a + \alpha, 0), u_{N+1}(a + \alpha, 0)\right),$$

c'est-à-dire la suite $u(a + \alpha, 0)$ vérifie la condition (C_2) et converge donc vers 0. Ainsi $a + \alpha \in A$, ce qui contredit la définition de a.
Pour écarter la possibilité $u(a, 0) \underset{+\infty}{\longrightarrow}$, on effectue un raisonnement par l'absurde analogue à l'aide de la condition (C_1), qui montre l'existence de $\alpha \in]0, 1[$ tel que $u(a - \alpha, 0)$ tende vers $+\infty$. Mais alors $u(x, 0)$ tend vers $+\infty$ pour tout $x \in [a - \alpha, a]$, de sorte que $a - \alpha$ majore A, ce qui contredit à nouveau le fait que $a = \sup A$.

(d) On vient de voir que la suite $u(a, 0)$ converge vers 1. D'après la question **B1**b, la suite $u(x, 0)$ tend vers $+\infty$ pour $x > a$. Supposons maintenant $x < a$. Par définition de la borne supérieure, il existe $y \geq x$ appartenant à A. Comme on a pour tout n, $0 \leq u_n(x, 0) \leq u_n(y, 0)$ et que $u(y, 0)$ tend vers 0, la suite $u(x, 0)$ converge vers 0 par le théorème d'existence de limite par encadrement.

(e) Si $x > a$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x, y) \geq u_n(x, 0)$ pour tout n. Comme $u(x, 0)$ tend vers $+\infty$ d'après la question précédente, $u(x, y) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. (a) Pour $x = a$, l'unique réel $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $u(a, y)$ converge vers 1 est 0. On suppose dans la suite $x < a$. On a alors $u(x, 0)$ qui tend vers 0. Posons

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; u_n(x, y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

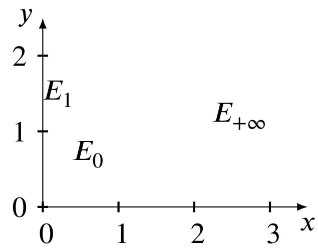
Il s'agit d'une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Elle est majorée par 2, car, pour $y \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x, y) \geq u_n(x, 2) \geq u_n(0, 2) \qquad \text{et} \qquad (0, 2) \in E_{+\infty}.$$

Cela permet de poser $\phi(x) = \sup A_x$. On montre alors exactement comme dans la question **B2**c que $u\,(x, \phi(x))$ converge vers 1, que $u(x, y)$ converge vers 0 si $y < \phi(x)$ et tend vers $+\infty$ si $y > \phi(x)$.

(b) On a donc

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{ (x, y) \in [0, a] \times \mathbb{R}_+ \;\middle|\; y < \phi(x) \right\}, \\ E_1 &= \{ (x, \phi(x)) \mid x \in [0, a] \} \\ \text{et } E_{+\infty} &= \left\{ (x, y) \in [0, a] \times \mathbb{R}_+ \;\middle|\; y > \phi(x) \right\} \cup]a, +\infty[\times \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$



Les bassins d'attraction de la suite (u_n).

4. (a) Soient x et y deux réels vérifiant $0 \leq x < y \leq a$. Comme $u(x, \phi(x))$ tend vers 1, la question **B1**b montre que $u(y, \phi(x))$ diverge vers $+\infty$, ce qui signifie que $\phi(y) < \phi(x)$. Donc ϕ est strictement décroissante sur $[0, a]$.

(b) En échangeant les rôles de x et y dans la question **B3**a, on montre que pour tout $y \in [0, \phi(0)]$, il existe $x \in [0, a]$ tel que $u(x, y)$ tende vers 1, c'est-à-dire $\phi : [0, a] \to [0, \phi(0)]$ est surjective. Comme ϕ est strictement décroissante, elle est injective et établit donc une bijection strictement décroissante de l'intervalle $[0, a]$ sur l'intervalle $[0, \phi(0)]$. Cela permet d'affirmer que ϕ est continue sur $[0, a]$. En effet, soit $x_0 \in \,]0, a[$. Comme ϕ est strictement décroissante, elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \phi(x) \geq \phi(x_0) \geq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \phi(x).$$

Si l'une des inégalités était stricte, disons par exemple la première, les réels de l'intervalle $\left]\phi(x_0), \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \phi(x)\right[$ ne seraient pas atteints par ϕ, ce qui contredirait la surjectivité. Donc

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \phi(x) = \phi(x_0).$$

Mutatis mutandis, on montre que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \phi(x) = \phi(x_0)$, ce qui signifie que ϕ est continue en x_0.

On raisonne de même pour la continuité en 0 et en a.