Chapter 33 Sommes et projecteurs

Exercice 1 (33.0)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux sous-espaces vectoriels de E, C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B.
Montrer $A + B = A \oplus C$.

Solution 1 (33.0)

Exercice 2 (33.0)

Soient E un espace vectoriel et A, B, C trois sous-espace vectoriel tels que

$$A \cap B = A \cap C \tag{1}$$
$$A + B = A + C \tag{2}$$
$$B \subset C. \tag{3}$$

Montrer que $B = C$.

Solution 2 (33.0)

Exercice 3 (33.0)

Soit $u, w \in \mathbb{R}^2$ les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la définition de somme directe, montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\{\, u \,\} \oplus \text{Vect}\{\, w \,\}$.

Solution 3 (33.0)

Soit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. On cherche $u' \in \text{Vect}\{\, u \,\}$ et $v' \in \text{Vect}\{\, v \,\}$ tels que $(x, y)^T = u' + v'$. Cela revient à déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} -\alpha - 3\beta \\ 2\alpha + 5\beta \end{pmatrix}.$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\alpha - 3\beta & = x \\ 2\alpha + 5\beta & = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha - 3\beta & = x \\ -\beta & = y + 2x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = 5x + 3y \\ \beta & = -2x - y \end{array} \right.$$

Ce qui assure l'existence et l'unicité de la décomposition de tout $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ dans $\text{Vect}\{\, u \,\} + \text{Vect}\{\, v \,\}$. On a donc

$$R^2 = \text{Vect}\{\, u \,\} \oplus \text{Vect}\{\, v \,\}.$$

Exercice 4 (33.0)

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - y + z = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \{ (t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R} \} .$$

Solution 4 (33.0)

Montrons que $F \cap G = \{ 0 \}$. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$, $3x - y + z = 0$ et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (t, -t, t)$. En reportant dans l'équation, on obtient

$$3t - (-t) + t = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad t = 0.$$

Ainsi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$; On a donc $F \cap G = \{ (0, 0, 0) \}$. De plus, $\dim F = 2$ (on reconnait l'équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$) et $\dim G = 1$ (car $G = \operatorname{Vect} \{ (1, -1, 1) \}$). On a donc

$$F \cap G = \{ 0 \} \qquad \text{et} \qquad \dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

d'où $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 5 (33.0)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \{ P \in E \mid P(0) = P(1) = 0 \} \qquad F_2 = \mathbb{R}_1[X]$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.

Exercice 6 (33.0)

Soient $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $V = \{ f \in E \mid f(2) = f(3) \}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $W = \operatorname{Vect}\left\{ \operatorname{Id}_{\mathbb{R}} \right\}$ est un supplémentaire de V dans E.

Solution 6 (33.0)

Exercice 7 (33.0)

Dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est réduite à la fonction nulle.
3. Montrer que toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. En déduire $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Solution 7 (33.0)

1. La fonction nulle $\tilde{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ est paire.

   Soit $f, g \in \mathcal{P}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

   $$\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x).$$

   Ainsi, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   On effectue une démonstration analogue pour $\mathcal{I}$.

2. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$f(-x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad f(-x) = -f(x)$$

   et donc $f(x) = -f(x)$, c'est-à-dire $f(x) = 0$. On a donc $f = \tilde{0}$. Finalement $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{\tilde{0}\}$.

3. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   (CN) Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} f(x) + f(-x) &= 2g(x) \\ f(x) - f(-x) &= 2h(x) \end{cases}$$

   (CS) Posons

   $$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \qquad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}.$$

   Alors on a clairemenent,

   $$f = g + h, \quad g \in \mathcal{P} \text{ et } f \in \mathcal{I}.$$

4. On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{\tilde{0}\}$ d'après la question **2** et $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ d'après la question 3. Finalement,

   $$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}.$$

Exercice 8 (33.0)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y - z + 2t = 0 \right\} \qquad G = \mathrm{Vect}(e) \text{ où } e = (1, 1, 1, 1).$$

- Montrer que F et G sont supplémentaires.
- Soit p la projection sur F parallèlement à G, déterminer $p(u)$ pour tout u de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 (33.0)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ (1, 0, 0), (1, 1, 1) \right\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ (1, 2, 0) \right\}.$$

Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Solution 9 (33.0)

Exercice 10 (33.0)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$ et que $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.
2. Montrer que $v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \ker v$.
3. Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker u \iff \ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0 \}$.
4. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v \iff \ker v + \operatorname{Im} u = F$.

Solution 10 (33.0)

1. Montrons $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$. [1] Soit $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, montrons que $y \in \operatorname{Im} v$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (v \circ u)(x)$, c'est-à-dire
$$y = v(t) \text{ avec } t = u(x) \in F.$$
Autrement dit, $y \in \operatorname{Im} v$; ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.
Montrons $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$. Soit $x \in \ker u$. On a donc $u(x) = 0_F$ d'où
$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0_F) = 0_G;$$
c'est-à-dire $x \in \ker(v \circ u)$. Ceci montre l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.

2. ($\Longleftarrow$) Supposons $\operatorname{Im} u \subset \ker v$, montrons $v \circ u = \tilde{0}$ [2] c'est-à-dire
$$\forall x \in E, (v \circ u)(x) = 0_G.$$
Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$ or $\operatorname{Im} u \subset \ker v$ donc $u(x) \in \ker v$, c'est-à-dire $v(u(x)) = 0_G$, soit encore $(v \circ u)(x) = 0_G$.
($\Longrightarrow$) Supposons $v \circ u = \tilde{0}$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, montrons que $y \in \ker v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, d'où $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0$ car $v \circ u = \tilde{0}$, autrement dit $y \in \ker v$; ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.

3. ($\Longrightarrow$) Supposons $\ker(v \circ u) = \ker u$ et montrons $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0_F \}$. Soit $y \in \ker v \cap \operatorname{Im} u$. Puisque $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. De plus, $y \in \ker v$, c'est-à-dire $v(y) = 0_G$, on a donc
$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(y) = 0_G,$$
c'est-à-dire $x \in \ker(v \circ u)$. Or on a supposé $\ker(v \circ u) = \ker u$, d'où $x \in \ker u$, d'où
$$y = u(x) = 0_F.$$
On donc $\ker v \cap \operatorname{Im} u \subset \{ 0_F \}$, l'inclusion réciproque étant évidente. [3]
($\Longleftarrow$) Supposons $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0_F \}$. Montrons $\ker(v \circ u) \subset \ker u$. Soit $x \in \ker(v \circ u)$, on a donc $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 0_G$, d'où
$$u(x) \in \ker v.$$

[1] Rien de nouveau ici, la linéarité de u et v ne sert à rien. On aurait pu également écrire $\operatorname{Im} u = u(E) \subset F$ donc
$$\operatorname{Im}(v \circ u) = (v \circ u)(E) = v(u(E)) \subset v(F) = \operatorname{Im} v.$$

[2] $\tilde{0}$ désigne l'application nulle $0_{\mathbf{L}(E,G)}$.

[3] L'inclusion $\{ 0_F \} \subset \ker v \cap \operatorname{Im} u$ est évidente, car $\ker v$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-espace vectoriel de F.

De plus, $u(x) \in \operatorname{Im} u$, d'où $u(x) \in \ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0_F \}$, c'est-à-dire

$$u(x) = 0_F \text{ ou encore } x \in \ker u.$$

Nous avons montrer l'inclusion $\ker(v \circ u) \subset \ker u$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie d'après la question **1.**, nous avons l'égalité $\ker(v \circ u) = \ker u$.

4. ($\Longrightarrow$) Supposons que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ et montrons $\ker v + \operatorname{Im} u = F$. Soit $x \in F$. [4] On a $v(x) \in \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(v \circ u)$, d'où l'existence de $t \in E$ tel que

$$v(x) = (v \circ u)(t).$$

Posons $y = u(t)$ et $z = x - y$, alors

$$v(z) = v(x) - v(y) = v(u(t)) - v(u(t)) = 0_G.$$

On a donc

$$x = y + z \qquad y = u(t) \in \operatorname{Im} u \qquad z \in \ker v;$$

ce qui montre que $x \in \operatorname{Im} u + \ker v$. Par conséquent, nous avons montrer $F \subset \operatorname{Im} u + \ker v$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie car $\operatorname{Im} u$ et $\ker v$ sont des sous-espace vectoriel de F, nous avons l'égalité annoncée.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\operatorname{Im} u + \ker v = F$ et montrons $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(v \circ u)$. Soit $y \in \operatorname{Im} v$. Il existe $x \in F$ tel que $y = v(x)$. Puisque $F = \operatorname{Im} u + \ker v$, il existe $t \in E$ et $z \in \ker v$ tels que

$$x = u(t) + z.$$

On a alors $y = v(x) = v(u(t)) + \cancel{v(z)} = (v \circ u)(t) \in \operatorname{Im}(v \circ u)$. Nous avons montré l'inclusion $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(v \circ u)$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie d'après la question **1.**, nous avons l'égalité $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

[4]C'est la partie CS d'un raisonnement par CN et CS. Voici la partie CN : Supposons qu'il existe $y \in \operatorname{Im} u$ et $z \in \ker v$ tels que $x = y + z$. Ainsi, $y = u(t)$ avec $t \in E$, d'où nécessairement $v(x) = v(y) + v(z) = v((u(t))$. On doit donc choisir $t \in E$ tel que $v \circ u(t) = v(x)$, ce qui est toujours possible puisque $v(x) \in \operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

Exercice 11 (33.0)

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E, P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

1. Montrer que $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
2. Montrer que si P divise Q, alors

$$\ker P(f) \subset \ker Q(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f).$$

3. Montrer que si D est le PGCD de P et Q, alors

$$\ker D(f) = \ker P(f) \cap \ker P(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} D(f) = \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f).$$

Solution 11 (33.0)

Exercice 12 (33.0)

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs réelles,

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f = 0, f(0) = 0, f'(1) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left(e_0, e_1, e_2\right) \text{ avec } e_k : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 13 (33.0)

Soit

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right) \end{array}.$$

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de p.

3. Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}\, p$ suivant la direction $\ker p$.

Solution 13 (33.0)

1. p est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or

$$A^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

On a donc $p \circ p = p$: l'application p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

2. On a directement,

$$\ker(p) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + y = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\,\{\,(1,-2)\,\}$$
$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\,\{\,(2,1)\,\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 0 \right\}..$$

Remarque. On peut également utiliser le fait que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$, et puisque $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -4/5 \end{pmatrix}$, on retrouve $\ker(p - \mathrm{Id}_E) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0 \right\}$.

3. En notant s la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}\, p$ et suivant la direction $\ker p$, on a $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, d'où

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, s(x,y) = \left(\frac{3x+4y}{5}, \frac{4x-3y}{5}\right).$$

Exercice 14 (33.0)

Soit dans $E = \mathbb{R}^3$ un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
Montrer que l'application ϕ qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur

$$x - (x_1 + x_2 + x_3)v$$

est un projecteur.
Préciser son image et son noyau.

Solution 14 (33.0)

Exercice 15 (33.0)

Soit $n \geq 2$ et soit $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P''(0)X^2 - 2P(0) \end{array}$.

1. Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que s est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Solution 15 (33.0)

Exercice 16 (33.0)

Soit p un projecteur de E.
Montrer que si le scalaire λ est distinct de 0 et 1, alors $p - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est un automorphisme, et expliciter son inverse.

Exercice 17 (33.0)

Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Dans ce cas, montrer

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q.$$

Solution 17 (33.0)

1. L'application $p + q$ est linéaire. De plus, $p^2 = p$ et $q^2 = q$, donc

$$(p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q \circ p + q^2 = p + p\circ q + q\circ p + q$$

Ainsi $p + q$ est un projecteur si, et seulement si $p\circ q + q\circ p = 0$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $p\circ q = q\circ p = 0$. Alors $p\circ q + q\circ p = 0$ et donc $p + q$ est un projecteur.

($\Longrightarrow$) Réciporquement, supposons que $p+q$ soit un projecteur, alors $p\circ q = -q\circ p$. En composant cette relation à gauche par p, on obtient

$$p\circ(p\circ q) = p\circ(-q\circ p) = -(p\circ q)\circ p = (q\circ p)\circ p = q\circ p^2 = q\circ p.$$

Et puisque $(p\circ p)\circ q = p\circ q$, on obtient

$$q\circ p = p\circ q.$$

De la relation $p\circ q + q\circ p = 0$, on déduit alors $p\circ q = q\circ p = 0$.

2. Si $x \in \ker p \cap \ker q$, alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où

$$(p+q)(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad x \in \ker(p+q).$$

On a donc $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(p+q)$. On remarque que $p\circ(p+q) = p^2 + \cancel{p\circ q} = p$, d'où

$$p(x) = p\left((p+q)(x)\right) = p(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad x \in \ker p.$$

De même, $q\circ(p+q) = \cancel{q\circ p} + q^2 = q$, d'où

$$q(x) = q\left((p+q)(x)\right) = q(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad x \in \ker q.$$

On a donc bien $x \in \ker p \cap \ker q$. Ainsi $\ker(p+q) \subset \ker p \cap \ker q$, et par double inclusion,

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q.$$

Montrons que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Tout d'abord, montrons que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Im}(p+q)$. On a $(p+q)\circ p = p^2 + \cancel{q\circ p} = p$ donc Si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors

$$x = p(x) = (p+q)\,(p(x)) \in \mathrm{Im}(p+q);$$

d'où $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p+q)$.
De même $(p+q)\circ q = q$ et l'on obtient $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$.
Ainsi $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}(p+q)$.
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p+q)$, alors il existe $v \in E$ tel que $x = (p+q)(v)$. Ainsi,

$$x = p(v) + q(v) \qquad p(v) \in \mathrm{Im}\, p \qquad q(v) \in \mathrm{Im}\, q.$$

On a donc $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et par double inclusion

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$

Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Puisque p et q sont des projecteurs, $p(x) = x$ et $q(x) = x$, d'où

$$p\circ q(x) = p\,(q(x)) = p(x) = x.$$

Or $p\circ q = 0$, d'où $x = 0$. On a donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{\, 0 \,\}$.
Finalement,

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 18 (33.0)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On pose $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = f\left(\ker f^2\right)$.
2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{ 0 \}$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f + \ker f = E$.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau et l'image de f soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution 18 (33.0)

Exercice 19 (33.0)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbf{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$.
2. Montrer que $E = \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.
3. En déduire que $E = \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$.

Solution 19 (33.0)

Exercice 20 (33.0)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que

$$f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0 \qquad\qquad (\text{ici } f^2 = f \circ f).$$

Montrer

$$\ker\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right) = E.$$

Solution 20 (33.0)

Soit $x \in E$. On cherche $y \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et $z \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$.

(CN) Si de tels y, z existent, on a $f(y) = 2y$ et $f(z) = 3z$, d'où $f(x) = f(y+z) = f(y) + f(z) = 2y + 3z$. Ainsi

$$\begin{cases} y + z &= x \\ 2y + 3z &= f(x) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} -y &= f(x) - 3x \\ z &= f(x) - 2x \end{cases}$$

Ce qui prouve l'unicité des y et z recherchés.

(CS) Réciproquement, si l'on pose

$$\begin{cases} y &= -f(x) + 3x \\ z &= f(x) - 2x \end{cases}$$

Alors $y + z = x$. De plus, $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$, d'où $f^2(x) = 5f(x) - 6x$, et donc

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(-f(x) + 3x\right) = -f^2(x) + 3f(x) = -2f(x) + 6x = 2y \\ f(z) &= f\left(f(x) - 2x\right) = f^2(x) - 2f(x) = 3f(x) - 6x = 3z. \end{aligned}$$

Finalement,

$$x = y + z \qquad\qquad y \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \qquad\qquad z \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E).$$

ce qui montre l'existence des y et z recherchées.

Conclusion

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \times \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$. Autrement dit,

$$E = \ker\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right).$$

Exercice 21 (33.0)

Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $u \in \mathbf{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, c'est-à-dire
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subset \ker u^{k+1} \text{ et } \operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k.$$
2. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\ker u^d = \ker u^{d+1}$. Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \ker u^{k+1} = \ker u^k.$$
3. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a
$$\ker u^p = \ker u^{p+1} \iff \ker u^p \cap \operatorname{Im} u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$
4. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\operatorname{Im} u^d = \operatorname{Im} u^{d+1}$. Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k.$$
5. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a
$$\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p+1} \iff E = \ker u^p + \operatorname{Im} u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$
6. On suppose les deux suites $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ stationnaires. Soit p le plus petit entier strictement positif tel que $\ker u^p = \ker u^{p+1}$. Soit q le plus petit entier strictement positif tel que $\operatorname{Im} u^q = \operatorname{Im} u^{q+1}$.

   Montrer que dans ces condition l'on a $p = q$ et
$$E = \ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p.$$

Solution 21 (33.0)

Exercice 22 (33.0) *X MP*

Soit E un espace vectoriel.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$: $E = S \oplus \operatorname{Im} u$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in S^2$ tel que $x = y + u(z)$. On pose $z = v(x)$ et $y = w(x)$.

(b) Montrer que v est linéaire et calculer $u \circ v + v \circ u$.

(c) Montrer que w est linéaire et calculer $u \circ w + w \circ u$.

2. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe v dans $\mathbf{L}(E)$ tel que $u \circ v + v \circ u = \operatorname{Id}_E$. A-t-on nécessairement $\ker u = \operatorname{Im} u$?

3. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u \circ w + w \circ u = u$. A-t-on nécessairement $\ker u = \operatorname{Im} u$?

Solution 22 (33.0)

Exercice 23 (33.0)

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{ f \in E \mid f(1) = f(2) = 0 \}.$$

1. Soit
$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & f & \mapsto & (f(1), f(2)) \end{array}.$$
Montrer que $\phi \in \mathbf{L}(E, \mathbb{R}^2)$. Comment interpréter F ? ϕ est-elle surjective ?

2. Trouver un sous-espace vectoriel G de E sur lequel ϕ induit un isomorphisme entre G et $\mathbb{R}^2$.

Solution 23 (33.0)

1. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\phi(\lambda f + \mu g) = ((\lambda f + \mu g)(1), (\lambda f + \mu g)(2)) &= (\lambda f(1) + \mu g(1), \lambda f(2) + \mu g(2)) \\ &= \lambda\,(f(1), f(2)) + \mu\,(f(2), g(2)) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g).\end{aligned}$$
Donc ϕ est linéaire.

   F est le noyau de ϕ puisque l'on a l'équivalence pour $f \in E$,
$$f \in \ker\phi \iff (f(1), f(2)) = (0,0) \iff f(1) = f(2) = 0 \iff f \in F.$$
Montrons que l'application ϕ est surjective. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(f) = (a,b)$, c'est-à-dire $f(1) = a$ et $f(2) = b$. On peut choisir par exemple $f : x \mapsto b(x-1) - a(x-2)$.

2. Soit $G = \{ f \in E \mid \exists p, q \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\, f(x) = px + q \}$ l'ensemble des fonctions affines. Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E.

   L'application nulle $\tilde{0} : x \mapsto 0x + 0$ est affine.

   Soit $f : x \mapsto px + q$ et $g : x \mapsto p'x + q'$ deux éléments de G et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda p + \mu p')x + (\lambda q + \mu q');$$
l'application $\lambda f + \mu g$ appartient donc bien à G.

   Le calcul de la question précédente montre que la restriction de ϕ à G,
$$\begin{array}{rccl} \phi_G : & G & \to & \mathbb{R}^2 \\ & f & \mapsto & (f(1), f(2)) \end{array},$$
est surjective. De plus, si $f \in \ker\phi_G$, alors $f \in G$ et $f(1) = f(2) = 0$; or une application affine qui est nulle en deux point est l'application nulle (écrire un système pour ceux qui ne sont pas convaincus), d'où $\ker\phi_G = \left\{ \tilde{0} \right\}$: l'application ϕ_G est injective.

   Conclusion : l'application ϕ induit un isomorphisme entre G et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24 (33.0)

Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et F, G deux sous-espace vectoriel de E. On note

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathbf{L}(E) \mid \ker f = F \text{ et } \operatorname{Im} f = G \} ;$$

et on suppose $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{H}$ induit sur G un automorphisme.
2. Montrer que $(\mathcal{H}, \circ)$ est un groupe.

Solution 24 (33.0)

Sommes en dimension finie

Exercice 25 (33.0)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(w_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On décompose chaque vecteur w_i suivant la somme précédente ; cela donne pour tout i,

$$w_i = u_i + v_i,$$

égalité dans laquelle u_i appartient à F et v_i appartient à G.
On suppose la famille $(u_i)_{i \in I}$ libre. Prouver qu'il en est de même de la famille $(w_i)_{i \in I}$.

Solution 25 (33.0)

Exercice 26 (33.0)

Soit

$$X = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad Y = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}.$$

La somme $X + Y$ est-elle directe ? Déterminer une base de $X + Y$.

Solution 26 (33.0)

Soit $z \in X \cap Y$. Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$z = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \alpha - \delta & = 0 \\ -\gamma & = 0 \\ \alpha - \delta & = 0 \\ \beta + \delta & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = \delta \\ \beta & = -\delta \\ \gamma & = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi $X \cap Y \neq \{ 0 \}$ (on a $X \cap Y = \operatorname{Vect}\left\{ (1,0,1,-1)^T \right\}$); la somme $X + Y$ n'est donc pas directe.
Remarque. On peut également montrer que les quatre vecteurs forment une famille liée. Remarquez que cela abouti à peu près aux même calculs.

Le calcul précédent montre que

$$(1,0,1,-1)^T = (1,0,1,0)^T - (0,0,0,1)^T,$$

on a donc

$$X + Y = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

ces trois vecteurs formant une famille libre (cf calculs précédents), il forment donc une base de $X + Y$.
Remarque. On peut également exploiter la formule de Grassmann...

Exercice 27 (33.0)

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \operatorname{Vect}(u, v, w)$ et $G = \operatorname{Vect}(x, y)$ avec

$$u = (0, 1, -1, 0) \qquad v = (1, 0, 1, 0) \qquad w = (1, 1, 1, 1) \qquad x = (0, 0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad y = (1, 1, 0, -1).$$

Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$?

Solution 27 (33.0)

Exercice 28 (33.0)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{ 0 \}$.

Solution 28 (33.0)

Exercice 29 (33.0) *Centrale PSI*

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E.

1. Soient F et F' dans $\mathcal{S} \setminus \{ E \}$. Montrer que $F \cup F' \neq E$.
2. Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{S}$ tel que $H \oplus D = H' \oplus D = E$.
3. Soit $d : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$d(E) = n \qquad \text{et} \qquad \forall F, F' \in \mathcal{S}, F \cap F' = \{ 0 \} \implies d\left(F + F'\right) = d(F) + d\left(F'\right).$$

Montrer que $\forall F \in \mathcal{S}, d(F) = \dim(F)$.

Solution 29 (33.0)

Exercice 30 (33.0)

Soient

$$r = (1, 0, 0, 1), \qquad s = (-1, 1, 0, 0), \qquad t = (0, 0, 1, 1), \qquad u = (2, 0, 1, 0), \qquad \text{et } v = (2, -1, 2, 3).$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(r, s)$, $G = \mathrm{Vect}(t, u)$ et $H = \mathrm{Vect}(t, v)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

2. Donner une base de $F + H$ et de $F \cap H$.

Solution 30 (33.0)

Exercice 31 (33.0)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note

$$F = \left\{ P \in E \;\middle|\; P(-1) = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\} \text{ et } G = \operatorname{Vect}\left\{ 1 - X - X^2, 1 + X + X^3 \right\}.$$

On ne demande pas de vérifier que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Déterminer une base de F et une base de G. En déduire les dimensions de F et G.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

3. Donner l'expression de la projection π sur F parallèlement à G.

Exercice 32 (33.0)

Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(1, 2, 0)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

2. Donner l'expression de la projection p sur $\mathcal{P}$ parallèlement $\mathcal{D}$.

Solution 32 (33.0)

1. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff x + y - z = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + y \end{cases} \iff (x, y, z) \in \operatorname{Vect}\{ (1, 0, 1), (0, 1, 1) \}.$$

Ces deux vecteurs forment donc une famille génératrice de $\mathcal{P}$. Or ils sont non colinéaires , ils forment donc aussi une famille libre. Donc $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une base de $\mathcal{P}$ et $\dim \mathcal{P} = 2$. De plus $\dim \mathcal{D} = 1$ car $((1, 2, 0))$ est une base de $\mathcal{D}$. Ainsi

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D}.$$

Vérifions que $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$. Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

- Puisque $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 0)$.
- De plus $(x, y, z) \in \mathcal{P}$, on a donc $x + y - z = 0$.

On a donc $0 = x + y - z = \lambda + 2\lambda = 3\lambda$ et ceci entraîne $\lambda = 0$ donc $(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puis $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$. Ainsi, on a donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ et $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D}$, ce qui prouve

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}.$$

2. On note p cette projection. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à exprimer $p(x, y, z)$. Notons pour cela

$$(X, Y, Z) = p(x, y, z)$$

et cherchons (X, Y, Z) en fonction de x, y, z.

- On sait que $p(x, y, z) = (X, Y, Z)$ appartient à $\mathcal{P}$ donc $X + Y - Z = 0$[5].
- De plus, $p(x, y, z) - (x, y, z)$ appartient à $\mathcal{D}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(X, Y, Z) - (x, y, z) = p(x, y, z) - (x, y, z) = \lambda(1, 2, 0)$. On a donc

$$X = x + \lambda, \quad Y = y + 2\lambda, \quad Z = z.$$

De $X + Y - Z = 0$, on déduit $(x + \lambda) + (y + 2\lambda) - z = 0$, ce qui donne

$$\lambda = -\frac{x + y - z}{3}.$$

On en déduit que

$$p(x, y, z) = (X, Y, Z) = \left(x - \frac{x + y - z}{3}, y - 2\frac{x + y - z}{3}, z\right) = \left(\frac{2x - y + z}{3}, \frac{-2x + y + 2z}{3}, z\right).$$

[5]Puisque l'on a une base de $\mathcal{P}$, on peut également écrire $(X, Y, Z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1)$, mais cela rallonge un peu les calculs...

Exercice 33 (33.0)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On considère $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \right\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

2. Soit $G = \operatorname{Vect}\left(X, X^2\right)$. Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit π la projection sur F parallèlement à G, déterminer $\pi(P)$ pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution 33 (33.0)