# Indépendance linéaire, bases

# Aperçu

1. Compléments sur les familles et parties génératrices
2. Liberté
3. Bases

1. Compléments sur les familles et parties génératrices
1.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
1.2 Combinaison linéaire
1.3 Espace vectoriel de dimension finie

2. Liberté

3. Bases

1. Compléments sur les familles et parties génératrices
1.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
1.2 Combinaison linéaire
1.3 Espace vectoriel de dimension finie

2. Liberté

3. Bases

**T 1** Soit $v_1, v_2, \dots v_k$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
Si $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$ et $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$, Alors $v + w$ et $\alpha v$ $(\alpha \in \mathbb{K})$ sont également combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \dots, v_k$ est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_k$.

**T 2** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $v_1, v_2, \dots, v_k$ des vecteurs de $E$. Le* ***sous-espace vectoriel engendré*** *par $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$, que l'on note $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \dots, v_k)$.*

$$\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \dots, v_k) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k \right\}.$$

Lorsque $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \dots, v_k)$, on dit que la famille $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ **engendre** $V$ ou encore que $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est une **famille génératrice** de $V$.

1. Compléments sur les familles et parties génératrices
1.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
1.2 Combinaison linéaire
1.3 Espace vectoriel de dimension finie

2. Liberté

3. Bases

**D 3** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $A$ une famille ou une partie quelconque d'éléments de $E$. Un vecteur est dit **combinaison linéaire des éléments de $A$** s'il est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $A$.

**E 4** Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

**T 5** *Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Alors le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $A$.*

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^\star, \exists (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in A^n, \exists (\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right\}.$$

**D 6** Soit $I$ un ensemble quelconque et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires indexée par $I$.

- On appelle **support** de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\left\{ j \in I \;\middle|\; \lambda_j \neq 0 \right\}$.
- On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **à support fini** lorsque son support est fini.

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini de $\mathbb{K}^I$.

**D 7** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'élément du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ indexée par l'ensemble $I$. Soit par ailleurs $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini. On définit la somme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i,$$

où $J$ est le support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$.

**P 8** *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'élément du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ indexée par l'ensemble $I$. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_i$:*

$$\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \,\middle|\, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

**R** Lorsque l'on dispose d'une partie $A$, on peut indexer ses éléments par elle-même. On peut alors écrire

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a\in A} \lambda_a a \,\middle|\, (\lambda_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.$$

1. Compléments sur les familles et parties génératrices
1.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
1.2 Combinaison linéaire
1.3 Espace vectoriel de dimension finie

2. Liberté

3. Bases

**D 9** On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ qu'il est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie et on note alors $\dim E < \infty$. Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de **dimension infinie** et on note $\dim E = \infty$.

**E 10**

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté
2.1 Relations linéaires
2.2 Unicité de la décomposition
2.3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

3. Bases

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté
2.1 Relations linéaires
2.2 Unicité de la décomposition
2.3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

3. Bases

**L 11** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $k \in \mathbb{N}^\star$, $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de $E$ et $j \in [\![1, k]\!]$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, tels que*

$$\alpha_j \neq 0 \qquad \textit{et} \qquad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E;$$

2. *le vecteur $v_j$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_i$, avec $i \neq j$.*

**D 12** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$.

- La famille $(v_1, \dots, v_k)$ est **libre** si et seulement si

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E \implies \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0.$$

- La famille $(v_1, \dots, v_k)$ est **liée** si et seulement si

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ et } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E.$$

**E 13** Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.
En effet, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ 2\alpha - \beta & = 0 \end{cases}$$

Et ce système homogène a pour unique solution $\alpha = 0, \beta = 0$. Ainsi, les vecteurs $v$ et $w$ sont linéairement indépendants.

**T 14** Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que les vecteurs

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants en écrivant une relation de dépendance linéaire non triviale entre $p$ et $q$.

**E 15** Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

sont linéairement dépendants. En effet (vérifiez!),

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

Remarquons que l'on peut également écrire $v_3 = 2v_1 + v_2$.

**P 16** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $k \in \mathbb{N}^\star$, $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de $E$. Alors la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $v_i$ est combinaison linéaire des $n-1$ autres.*

Ainsi, une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ est liée si, et seulement si (au moins) un vecteur $v_i$ est combinaison linéaire des autres vecteurs.

**C 17** *Deux vecteurs forment une famille liée si, et seulement si l'un est un multiple scalaire de l'autre.*

**E 18** Les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)^T$ et $v_2 = (2, 1, 5)^T$ sont linéairement indépendants.

**T 19** Obtenir une relation de dépendance linéaire pour les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)^T$, $v_2 = (2, 1, 5)^T$ et $v_3 = (4, 5, 11)^T$.

**T 20** Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_i$ est le vecteur dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $i$-ème qui vaut $1$. C'est-à-dire,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Il est également utile d'avoir en tête les résultats suivants.

**P 21**

1. *Tout famille extraite d'une famille libre est une famille libre.*
2. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*

Il est exact que si la famille $(u, v, w)$ est libre, alors les familles $(u, v)$, $(u, w)$ et $(v, w)$ le sont également. Mais la réciproque est fausse.

**E 22** Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

**E 23** Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer quelles familles sont libres.

$$L_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad L_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$L_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad L_4 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $L_2$ est libre car aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre. La famille $L_3$ est par contre liée (Test). La famille $L_3$ est une sous-famille de $L_4$ et $L_1$; ces deux familles sont donc également liées.

**T 24** Montrer que $L_3$ est liée. Écrire une relation de dépendance linéaire non triviale. Écrire l'un des vecteur comme combinaison linéaire des 2 autres.

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté
2.1 Relations linéaires
2.2 Unicité de la décomposition
2.3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

3. Bases

**T 25** *Soit* $(v_1, v_2, \dots, v_m) \in E^m$ *une famille libre de vecteurs de* $E$ *et soit* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$ *des scalaires tels que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m,$$

*alors*

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \dots\dots \qquad \alpha_m = \beta_m.$$

**T 26** Montrer le!

**R** Qu'implique le théorème pour un vecteur $v$, combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_m$, s'écrivant

$$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m?$$

Le théorème affirme que *si* un vecteur $v$ est combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants, cette écriture est *unique*.

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté
2.1 Relations linéaires
2.2 Unicité de la décomposition
2.3 Indépendance linéaire et sous espace engendré

3. Bases

**T 27** *Soit $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ et $w \in E$. Alors la famille $(v_1, v_2, \dots, v_k, w)$ est libre si, et seulement si, $w$ n'est pas combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_k$, c'est-à-dire $w \notin \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.*

Supposons que la famille $S = (v_1, \dots, v_k)$ engendre l'espace vectoriel $V$, c'est-à-dire $\operatorname{Vect}(S) = V$.

- Si $S$ est libre, alors une sous famille de $S$ n'engendre pas $V$. En effet, si l'on supprime un vecteur, disons $v_i$, alors la sous famille de $k-1$ vecteurs ne peut engendrer $V$ puisque $v_i$ (qui appartient à $V$) n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Si $S$ est liée, alors un vecteur $v_i$ est combinaison linéaire des autres. Si l'on supprime le vecteur $v_i$ dans la famille $S$, la nouvelle famille reste une famille génératrice.
  En effet, formons la famille $T = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$ (il manque $v_i$), alors $v_i \in \operatorname{Vect}(T)$ et plus généralement $\{ v_1, v_2, \dots, v_k \} \subset \operatorname{Vect}(T)$. Puisque $S$ engendre $V$, on obtient

  $$V = \operatorname{Vect}\{ v_1, v_2, \dots, v_k \} \subset \operatorname{Vect}(T) \subset V$$

  c'est-à-dire $\operatorname{Vect}(T) = V$.

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté

3. Bases
3.1 Bases d'un espace vectoriel
3.2 Théorème de la base extraite
3.3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté

3. Bases
3.1 Bases d'un espace vectoriel
3.2 Théorème de la base extraite
3.3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

**D 28** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de $E$ est une **base** de $E$ si, et seulement si

- La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une famille libre
- et la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ engendre $E$, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Ou encore, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une **base** de $E$ si, et seulement si tout vecteur $v \in E$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\forall v \in E, \exists! \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right) \in \mathbb{K}^n, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v.$$

Par convention, on dira l'espace vectoriel $\{ 0 \}$ admet pour base la famille vide $\mathcal{F} = (\quad)$.

**E 29** Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_i$ est le vecteur dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $i$-ème qui vaut $1$. C'est-à-dire,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Nous avons déjà montré que la famille $\mathcal{B}$ était libre. De plus, il est facile de voir que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{K}^n$, puisque tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ s'écrit

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

c'est-à-dire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est appelée la **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.

**E 30** Déterminons une base de $W$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\}.$$

Si $u = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u \in W \iff x + y - 3z = 0 \iff x = -y + 3z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff u = y \cdot v + z \cdot w \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Cela montre que les vecteurs $v = (-1, 1, 0)^T$ et $w = (3, 0, 1)^T$ engendrent $W$. La famille $(v, w)$ est également libre. Cela se montre facilement grâce aux coefficients 0 et 1, si $\alpha v + \beta w = 0$, on a directement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

**E 31** La famille

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.
On peut montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Nous allons plutôt montrer que tout vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b.$$

Or la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible puisque $\det(A) \neq 0$. L'équation ci-dessus admet donc une unique solution, c'est-à-dire que $b$ s'écrit de manière unique

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b$$

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté

3. Bases

3.1 Bases d'un espace vectoriel

3.2 Théorème de la base extraite

3.3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

**L 32** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $E$ si, et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale de $E$, c'est-à-dire que si l'on considère une sous-famille de $\mathcal{B}$ où l'un des $v_i$ est supprimé, la nouvelle famille n'est plus génératrice.*

T 33 **Théorème de la base extraite**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
*De toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$.*

Plus généralement, de toute partie génératrice $\mathcal{G} \subset E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $E$, on peut extraire une famille génératrice finie, et donc également extraire une base.

*Démonstration.* Une version plus générale de ce théorème, le théorème de la base incomplète, sera démontré ultérieurement. Donnons une esquisse de la démonstration, qui explicite une manière d'obtenir une base à partir d'une partie génératrice finie qui contient $k$ vecteurs

$$S = \{ w_1, w_2, \dots, w_k \} .$$

Si les vecteurs de $S$ sont liés, alors l'un des vecteur est combinaison linéaire des $k-1$ autres. L'ensemble $S_1$ obtenu en enlevant ce vecteur à l'ensemble $S$ engendre toujours $E$. Si les vecteurs de $S_1$ sont linéairement indépendant, ils forment une base.
Sinon, on répète le processus: l'un des $k-1$ vecteurs est combinaison linéaire des $k-2$ autres. L'ensemble $S_2$ obtenu en enlevant ce vecteur à l'ensemble $S_1$ engendre toujours $E$. Si les vecteurs de $S_2$ sont linéairement indépendant, ils forment une base.
On répète ainsi le processus jusqu'à obtenir une partie génératrice de $E$ contenant des vecteurs linéairement indépendants... ∎

**T 33** **Théorème de la base extraite**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
*De toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$.*

Plus généralement, de toute partie génératrice $\mathcal{G} \subset E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $E$, on peut extraire une famille génératrice finie, et donc également extraire une base.

**T 34** *Tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ admet une base.*

1. Compléments sur les familles et parties génératrices

2. Liberté

3. Bases
3.1 Bases d'un espace vectoriel
3.2 Théorème de la base extraite
3.3 Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

## D 35 Coordonnées d'un vecteur

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de $E$. Étant donné $v$ un vecteur de $E$, il se décompose dans la base $S$ sous la forme

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les **coordonnées** de $v$ relativement à la base $S$.
On appelle **matrice colonne des coordonnées de $v$ relativement à la base $S$** la matrice

$$\mathrm{Coord}_S(v) = M_S(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

**E 36** On considère les familles $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{S} = (v_1, v_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les familles, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées du vecteur $v = (2, -5)^T$ dans chacune de ces bases sont

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En effet, $v = 2e_1 - 5e_2$ : dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, les coordonnées de $v$ sont exactement ses coefficients.
Dans la base $\mathcal{S}$, on obtient les coordonnées de $v$ en remarquant (ou en résolvant $\alpha v_1 + \beta v_2 = v$) que

$$v = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{S}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**T 37** Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 3z = 0 \right\},$$

admet pour base $\mathcal{B} = (v, w)$ avec $v = (-1, 1, 0)^T$ et $w = (3, 0, 1)^T$.
Montrer que le vecteur $c = (5, 1, 2)^T$ appartient à $W$ et déterminer ses coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$.