Chapter 21 Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 (21.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2 (21.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 0 \\ -4x_1 & & +6x_3 & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 3 (21.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 4 (21.3)
Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauß.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 5 (21.3)
Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 2×2. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.

Exercice 6 (21.3)
Déterminer toutes les formes possibles pour une matrice échelonnée 3×3. Noter p_i pour les pivots et $*$ pour les coefficients qui peuvent éventuellement être non nuls.

Exercice 7 (21.3)
Écrire la matrice augmentée de chacun des systèmes suivants. Puis résoudre le système en réduisant chacune des matrices sous forme échelonnée réduite.

1. $$\begin{cases} x & -y & +z & = -3 \\ -3x & +4y & -z & = 2 \\ x & -3y & -2z & = 7 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x & -y & +3z & = 4 \\ x & +y & -z & = 1 \\ 5x & +2y & & = 7. \end{cases}$$

Interpréter géométriquement chacune des solutions précédente comme l'intersection de plans.

Exercice 8 (21.3)
Résoudre les systèmes d'équations suivants

1. $\begin{cases} -x & +y & -3z & = 0 \\ 3x & -2y & +10z & = 0 \\ -2x & +3y & -5z & = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x & +y & -3z & = 6 \\ 3x & -2y & +10z & = -10 \\ -2x & +3y & -5z & = 9. \end{cases}$

Exercice 9 (21.3)
Déterminer une représentation paramétrique de droite intersection des plan d'équation cartésienne

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{et} \qquad x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Quelle est l'intersection de ces deux plan et du plan d'équation cartésienne

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \text{ ?}$$

Exercice 10 (21.3)

1. Résoudre le système d'équations $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

en utilisant le procédé d'élimination de Gauß-Jordan.

2. Exprimer les solutions sous la forme $x = p + tv$, où $t \in \mathbb{R}$.

3. Vérifier votre solution en calculant Ap et Av.

4. Déterminer une matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à A. En utilisant cette forme réduite, répondre aux questions suivantes.

(a) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ est incompatible?

(b) Existe-t-il un vecteur $d \in \mathbb{R}^3$ tel que le système $Ax = d$ a une unique solution?

Exercice 11 (21.3)
Déterminer la forme échelonnée réduite par ligne de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ -3 & -1 & 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si C est la *matrice augmentée* d'un système d'équations $Ax = b$, $C = (A|b)$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

2. Si C est la *matrice des coefficients* d'un système homogène d'équations, $Cx = 0$, quelles sont ses solutions? Dans quel ensemble sont-elles incluses?

3. Soit $w = (1, 0, 1, 1, 1)^T$. Déterminer d tel que $Cw = d$. En déduire les solutions du système $Cx = d$.

Exercice 12 (21.3)
On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Déterminer les solutions du système d'équations $Ax = b$.

Exercice 13 (21.4) *Vrai ou Faux?*
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si celle-ci est vraie ou fausse. Justifier votre choix.

1. Tout système linéaire admet au moins une solution.

2. Certains systèmes linéaire ont exactement deux solutions.

3. Si une matrice A peut être transformée en une matrice B par une opération élémentaire sur les lignes, alors B peut être transformée en la matrice A par une opération élémentaire sur les lignes..

4. Si la matrice augmentée d'un système est échelonnée réduite en ligne et contient une ligne nulle, alors le système est compatible.

5. Si la matrice augmentée d'un système est échelonnée réduite en ligne et contient une ligne dont l'unique coefficient non nul est dans la dernière colonne, alors le système est incompatible.

6. Un système linéaire est dit compatible s'il possède (au moins) une solution.

7. Si A est la matrice des coefficients d'un système de m équations et n inconnues, alors A est une matrice à m lignes et n colonnes.

8. La matrice augmentée d'un système contient une colonne de plus que la matrice des coefficients.

9. Si la matrice augmentée d'un système est échelonnée réduite en ligne et contient k lignes non nulles, alors les solutions du système sont décrites par k paramètres.

Exercice 14 (21.4)
Déterminer le noyau de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de B. Calculer $d = c_1 + 2c_2 - c_3$. En déduire les solutions du système $Bx = d$.

Exercice 15 (21.4)
Déterminer la forme générale des solutions du système suivant en utilisant l'algorithme d'élimination de Gauß-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 &= 5. \end{cases}$$

Écrire les solutions sous forme vectorielle.

Exercice 16 (21.4)
Exprimer ce système sous forme matricielle

$$\begin{cases} -5x & +y & -3z & -8w & = 3 \\ 3x & +2y & +2z & +5w & = 3 \\ x & & +z & +2w & = -1. \end{cases}$$

Montrer que ce système est compatible et déterminer ses solutions.
En déduire les solutions du système homogène associé.

Exercice 17 (21.4)
Sachant que la matrice ci-dessous est échelonnée réduite en ligne, déterminer les coefficients manquants (notés $*$). Remplacer chaque $*$ devant être nul par 0, chaque $*$ devant être 1 par 1. Remplacer tous les $*$ qui ne doivent pas être 0 ou 1 par un 2.

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si C est équivalente par ligne à la matrice augmentée d'un système linéaire d'équations $Ax = b$, déterminer les solutions de ce système sous forme vectorielle.

- Si C est équivalente par ligne une matrice B, déterminer les solutions du système $Bx = 0$.

Exercice 18 (21.4)
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Résoudre chacun des système $Ax = b$ et $Bx = b$ par l'algorithme d'élimination de Gauß-Jordan, et écrire les solutions sous forme vectorielle.

Exercice 19 (21.4)
Donner la forme échelonnée réduite de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le système homogène $Bx = 0$. Quel est son nombre d'équations et son nombre d'inconnues? Admet-t-il une solution non triviale? Dans ce cas, résoudre $Bx = 0$.

2. Existe-t-il un vecteur $b \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = b$ soit incompatible? Déterminer un tel vecteur b si il existe et vérifier que le système $Bx = b$ est incompatible.

3. Déterminer un vecteur *non nul* $d \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $Bx = d$ soit compatible. Puis déterminer la solution générale du système $Bx = d$.

Exercice 20 (21.4)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Écrire le système d'équations linéaires $Ax = 6x$ et déterminer ses solutions.

Exercice 21 (21.4)
Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation que les coefficients a, b, c, d du vecteur v doivent vérifier afin que le système d'équation $Bx = v$ soit compatible.

Si $Bx = v$ est compatible, y a-t-il unicité de la solution?

Exercice 22 (21.4)
Un **portefeuille** est un vecteur ligne

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}$$

dans lequel y_i représente le nombre d'actifs de type «i» détenus par un investisseur. Après un an (par exemple), la valeur d'un actif évolue (en augmentant ou en diminuant) d'un certain pourcentage. On peut prévoir plusieurs scénarios d'évolution selon *l'état* de l'économie. Nous notons notre prédiction sous forme d'une matrice de retour sur investissement $R = (r_{ij})$, où r_{ij} est le facteur d'évolution de l'actif i dans l'état j de l'économie.

Supposons qu'un investisseur ait un portefeuille réparti en trois catégories: foncier (y_1), bons du trésor (y_2) et actions (y_3), et que la matrice de retour est

$$R = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.95 & 1.0 \\ 1.05 & 1.05 & 1.05 \\ 1.20 & 1.26 & 1.23 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs *totales* du portefeuille après un an d'évolution sont donné par YR, où $(YR)[j]$ est la valeur total du portefeuille dans le scénario j.

1. Déterminer la valeur totale du portefeuille $W = \begin{pmatrix} 5000 & 2000 & 0 \end{pmatrix}$ après un an pour chacun des scénarios possibles.

2. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 600 & 8000 & 1000 \end{pmatrix}$ est un portefeuille *sans risque*; c'est-à-dire que l'on obtient un résultat identique dans chaque scénario.

3. Un **arbitrage** est un portefeuille $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}$ qui a un coût total nul ($y_1 + \cdots + y_m = 0$), sans perte ($(YR)[j] \geq 0$ pour tout j), et qui aboutit à un profit dans au moins un des états ($(YR)[j] > 0$ pour au moins un j).

   Montrer que $Z = \begin{pmatrix} 1000 & -2000 & 1000 \end{pmatrix}$ est un arbitrage (la valeur -2000 représente un emprunt).

   Pouvez-vous trouver un vecteur arbitrage plus performant que celui-ci?

Exercice 23 (21.4)

Déterminer les vecteurs colonnes b de manière à ce que le système $Ax = b$ soit compatible où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Problème 24 (21.4)

Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout entier naturel k, on désigne par $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial «k parmi n» et on rappelle que, par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k > n$.

On cherche à calculer les trois sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p\leq n}} \binom{n}{3p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$$

$$S_2 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p+1\leq n}} \binom{n}{3p+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$$

$$S_3 = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ 0\leq 3p+2\leq n}} \binom{n}{3p+2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$$

Notons que, compte tenu de la convention rappelée ci-dessus, ces trois sommes sont bien finies.

1. On suppose, *dans cette question uniquement*, que $n = 7$. Calculer alors S_1, S_2 et S_3.
2. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$ en fonction de n.
3. On rappelle que l'on note $j = e^{2i\pi/3}$.
   (a) Rappeler, en les justifiant, les expressions de $1 + j + j^2$ et $1 + j^2 + j^4$.
   (b) Déterminer les formes trigonométriques de $j + 1$, de $\bar{j} + 1$, de $j - 1$ et de $\bar{j} - 1$.
   (c) En utilisant la formule du binôme, exprimer $(1 + j)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.
   (d) Exprimer $\left(1 + \bar{j}\right)^n$ à l'aide de S_1, S_2 et S_3.
4. En déduire trois complexes α, β, γ dépendant de n tels que

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + S_3 = \alpha \\ S_1 + jS_2 + j^2S_3 = \beta \\ S_1 + j^2S_2 + jS_3 = \gamma. \end{cases}$$

5. Déterminer les expressions de S_1, S_2 et S_3 en fonction de n (simplifier les résultats obtenus).

Exercice 25 (21.4)

On considère le système suivant, exprimant y_1, y_2 et y_3 en fonctions de x_1, x_2 et x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = y_3. \end{cases}$$

Rechercher le système qui exprime x_1, x_2 et x_3 en fonction de y_1, y_2, y_3.

Exercice 26 (21.4)

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les systèmes suivants sont impossibles ou indéterminés.

1. $\begin{cases} mx + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 2x + (m-5)y = 5 \\ 4x - 3my = 5m \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (m-1)x - 3y = 1 \\ mx + y = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 10x - 2y = m - 3 \end{cases}.$

Exercice 27 (21.4)
Résoudre et discuter les systèmes suivants, d'inconnues x et y, en fonction du paramètre réel m.

1. $\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 5 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + m^2y = m \end{cases}.$

Exercice 28 (21.4)
Discuter le nombre de solutions du système suivant en fonction des valeurs des paramètres a et b et le résoudre lorsque c'est possible

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \\ ax & +y & +az & = b \\ ax & +ay & +az & = b. \end{cases}$$

Exercice 29 (21.4)
Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant suivant les valeurs du paramètre m.

$$(S) : \begin{cases} 2mx & +y & +z & = 2 \\ x & +2my & +z & = 4m \\ x & +y & +2mz & = 2m^2. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 30 (21.4)
Trouver les valeurs du réel a tel que le système

$$\begin{cases} x & +y & -z & = 1 \\ 2x & +3y & +az & = 3 \\ x & +ay & +3z & = 2 \end{cases} \tag{1}$$

ait

1. aucune solution ;
2. une solution unique ;
3. plusieurs solutions.

Exercice 31 (21.4)
Résoudre

$$\begin{cases} x & +ay & +a^2z & = 1 \\ x & +ay & +abz & = a \\ bx & +a^2y & +a^2bz & = a^2b \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\left\{\begin{array}{llll} ax & +by & +2z & = 1 \\ ax & +(2b-1)y & +3z & = a \\ ax & +by & +(b+3)z & = 2b-1 \end{array}\right. \tag{2}$$

a, b étant des paramètres réels.