Notions sur les fonctions en analyse

Aperçu

D

Une **fonction** ou **application** f est définie par la donnée de trois éléments : un **ensemble de départ** X, un **ensemble d'arrivée** Y et pour tout $x \in X$, la donnée d'une (unique) **image** notée $f(x) \in Y$. On note $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$.

- Lorsque $X \subset \mathbb{R}$, on parle de **fonction d'une variable réelle**.
- Lorsque $Y \subset \mathbb{R}$ (ou $Y \subset \mathbb{C}$), on parle de fonction numérique.
- Nous noterons parfois $\mathrm{dom}(f)$ l'ensemble de départ de f.

D

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.
- On dit que f est **dérivable en a** si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a)$.

R

- On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I.
- On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.

T

Déterminer l'ensemble de définition des applications définies par

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$
2. $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

D Soit $f : X \to Y$ une fonction. L'**image de $\boldsymbol{f}$** ou l'**image de $\boldsymbol{X}$ par $\boldsymbol{f}$**, notée $f(X)$ est l'ensemble des images des éléments de X par f, c'est-à-dire

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}.$$

R C'est l'ensemble des éléments $y \in Y$ tels qu'il existe $x \in X$ vérifiant $f(x) = y$.

E

Déterminer l'image des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}.$
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}.$
5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}.$

T

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

D Soit deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z$. On suppose que pour tout $x \in X$ on a $f(x) \in Y'$, de sorte que l'expression $g(f(x))$ a un sens et on la note $(g \circ f)(x)$. La fonction ainsi définie

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

est la **composée** des fonctions g et f.

T On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}.$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

T

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

1. *Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.*
2. *Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I. Dans ce cas, on a*

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On appelle **graphe** de f, et on note Γ_f, l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$. Ainsi

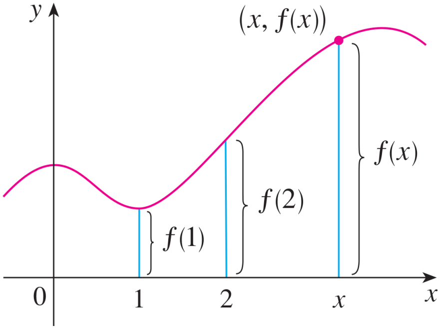
$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} .$$

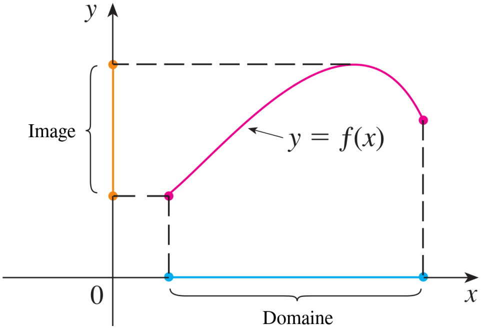
D Un repère orthonormal $\mathfrak{R}$ du plan étant choisi, le graphe Γ_f de $f : X \to Y$ s'identifie à l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x décrivant X, appelé **courbe représentative** de f dans $\mathfrak{R}$. On emploiera abusivement le terme graphe de f pour désigner la courbe représentative de f dans $\mathfrak{R}$.

R La courbe représentative de f dans un repère $\mathfrak{R} = (Oxy)$ est la courbe d'équation

$$y = f(x)$$

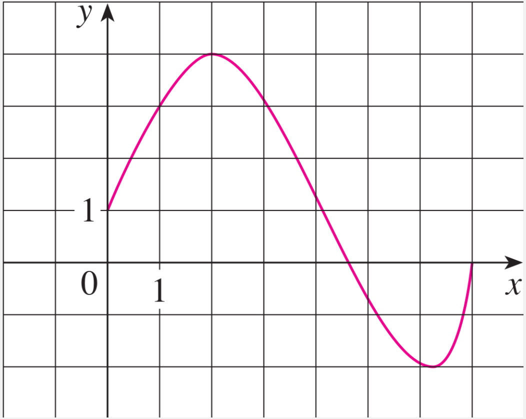
c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient
$x \in \mathrm{Dom}(f)$ et $y = f(x)$.





T

Le graphe d'une fonction f est représenté ci-dessous



1. Quel sont les valeurs de $f(1)$ et $f(5)$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que l'image de f.

P

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. *La courbe $y = f(x) + a$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par translation de vecteur $a\vec{e_2}$.*
2. *La courbe $y = f(x - a)$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par translation de vecteur $a\vec{e_1}$.*

En prenant $a = \pm c$ où $c > 0$. Les courbes d'équations $y = f(x) + c$, $y = f(x) - c$, $y = f(x - c)$, $y = f(x + c)$ s'obtiennent respectivement par un translation vers le haut, le bas, la droite, la gauche (voir 1).

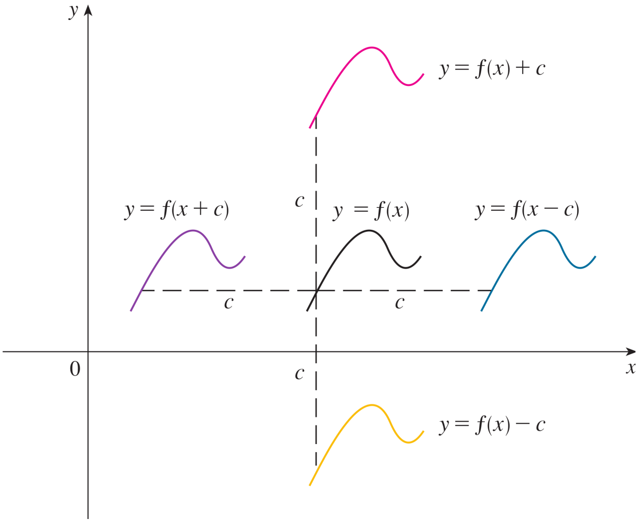


Figure: Translation d'une courbe ($c > 0$)

T Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto f(x) + a$ et $h : x \mapsto f(x + a)$?

P

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. *La courbe $y = af(x)$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par une affinité verticale de rapport a.*
2. *La courbe $y = f(ax)$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par une affinité horizontale de rapport $1/a$ ($a \neq 0$).*

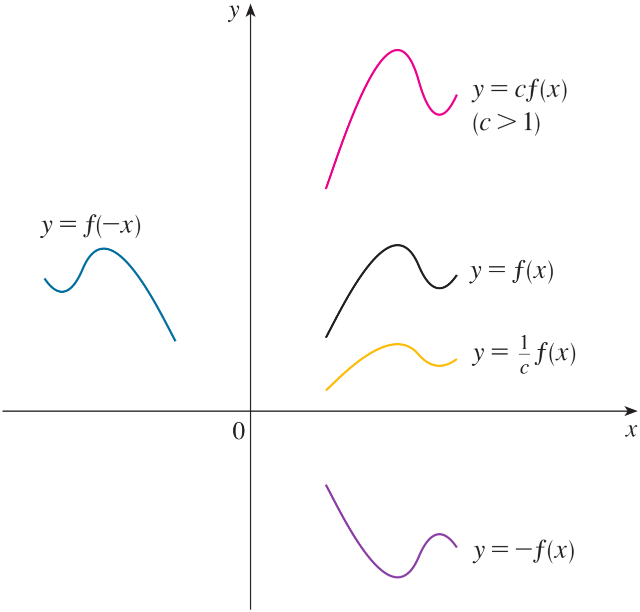


Figure: Transformation par affinité $(c > 1)$

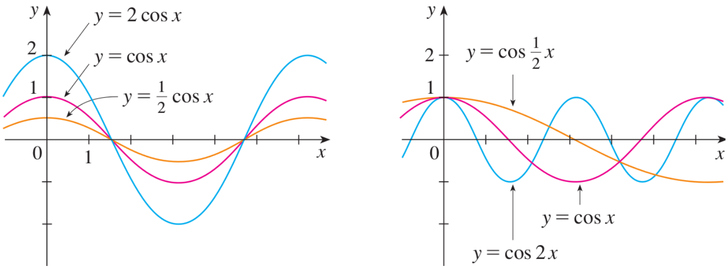


Figure: Transformation par affinité

T Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto af(x)$ et $h : x \mapsto f(ax)$?

T À partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, utiliser les transformations précédentes afin d'obtenir les courbes d'équations

1. $y = \sqrt{x} - 2$
2. $y = \sqrt{x - 2}$
3. $y = -\sqrt{x}$
4. $y = 2\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{-x}$

T Tracer les courbes d'équations

1. $y = \sin(2x)$.
2. $y = 1 - \sin(x)$.

D Soit $f : X \to Y$ une application.

- On dit que f est **injective** quand

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- On dit que f est **surjective** quand

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si, et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivé admet un antécédent par f.

R Fixons $y \in Y$ et considérons l'équation d'inconnue $x \in X$

$$f(x) = y. \tag{E}$$

- Si f est injective, l'équation (E) a au plus une solution (c'est-à-dire 0 ou 1 solution).
- Si f est injective, l'équation (E) a au moins une solution (c'est-à-dire 1, 2, beaucoup voir une infinité).

T La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est-elle injective? Est-elle surjective?

T La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est-elle injective? Est-elle surjective?

D Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **bijective** quand elle est injective et surjective. Autrement dit, pour tout $y \in Y$, l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in X$ admet exactement une solution.
Lorsque l'application $f : X \to Y$ bijective. En associant à tout élément $y \in Y$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E. Cette application est appelée **application réciproque** de l'application f (ou simplement *réciproque* de f) et notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Il en résulte évidement que f^{-1} est à son tour bijective et que sa réciproque est $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Pratiquement, on calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; en principe, cette équation doit avoir une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

T Supposons f bijective. Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(8) = -10$, déterminer $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(-10)$.

E Soit $f : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\to [0, +\infty[$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

T Soit $f : x \mapsto \sqrt{-1-x}$. Déterminer son ensemble de définition D. Montrer que f, définie comme fonction de D dans $\mathbb{R}_+$ est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

R Si f est bijective, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (d'équation cartésienne $y = x$).

T *Soient f une application continue et strictement monotone d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $J = f(I)$ l'intervalle image de I par f et $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Supposons la fonction f dérivable en un point $a \in I$. Alors g est dérivable au point $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) = f'(g(b)) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ce qui s'écrit généralement,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

R Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

D

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in A, f(x) \leq M.$$

  Dans ce cas, le réel M est appelé un **majorant** de f.
- On dit que f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in A, f(x) \geq m.$$

  Dans ce cas, le réel m est appelé un **minorant** de f.

D Une fonction f est **bornée** lorsque elle est majorée et minorée.

P *La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un réel μ tel que*

$$\forall x \in A, |f(x)| \leq \mu.$$

Autrement dit, f est bornée si et seulement si $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

D Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **croissante** sur A si

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

- f est **strictement croissante** sur A si

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

- f est **décroissante** sur A si

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

- f est **strictement décroissante** sur A si

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

P *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et $f : A \to \mathbb{R}$. Supposons f strictement croissante, alors*

1. *f est injective.*
2. $\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.
3. $\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$.

On a bien sûr une proposition similaire pour les fonctions strictement décroissantes.
Ce lemme est particulièrement utile lors de la résolution d'inégalités.

E Soit $x, y \in]0, \pi/2[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin y} &\iff \sin x \geq \sin y && \text{car } \sin x \text{ et } \sin y \text{ sont } > 0 \\ & && \text{et } x \mapsto 1/x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^\star, \\ &\iff x \geq y && \text{car } \sin \text{ est strictement croissante sur }]0, \pi/2[. \end{aligned}$$

D

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Étudier les **variations** de f sur A, c'est chercher à partager A en sous-ensembles tels que sur chacun d'eux f soit monotone.

P

Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective.
Si f est monotone, alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

T

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On suppose f strictement monotone et continue.
Alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$, c'est-à-dire que l'application

$$g : \begin{array}{ccc} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective. De plus g^{-1} est continue.

D L'ensemble D est **symétrique par rapport à 0** si

$$\forall x \in D, -x \in D.$$

D Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0.

- f est **paire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = f(x).$$
- f est **impaire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

T Déterminer la parité de chacune des fonctions définies par

1. $f(x) = x^5 + x$
2. $g(x) = 1 - x^4$
3. $h(x) = 2x - x^2$

M Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0. Notons $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$ les représentations respectives des restrictions de f aux intersections de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ avec D.

- Si f est paire, alors on obtient $\mathcal{C}$ en traçant $\mathcal{C}_+$ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors on obtient $\mathcal{C}$ en traçant $\mathcal{C}_+$ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport au point O.

Les propriétés de parité permettent donc de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction f à $D \cap \mathbb{R}_+$ ou $D \cap \mathbb{R}_-$.

Figure: Courbe représentative d'une fonction paire

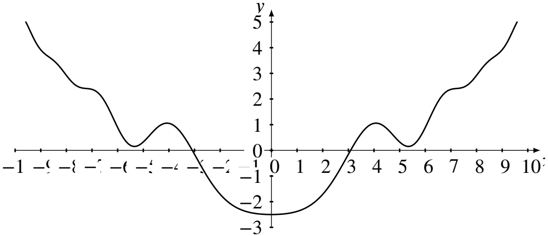
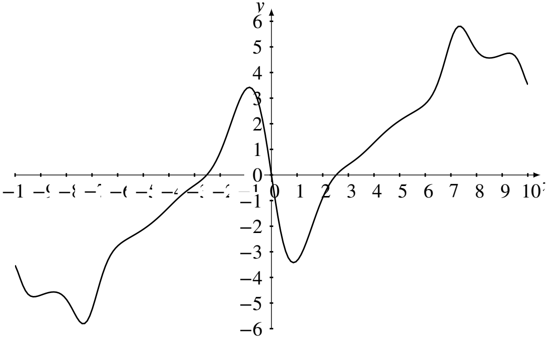


Figure: Courbe représentative d'une fonction impaire



P *Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective. Si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.*

T Pourquoi n'énnonce-t-on pas une propriété analogue pour les fonctions paires?

D

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

- f est **périodique de période T** si
  - $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$
  - $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$.
- f est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.
- Si f est périodique de période T et si, pour tout $T' \in]0, T[$, f n'est pas périodique de période T', on dit que T est **la période principale** de f.

M Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique et soit I un intervalle semi-ouvert de longueur T. La connaissance de la restriction de f à $I \cap D$ détermine f sur tout son ensemble de définition. Cette remarque a une traduction géométrique simple. Pour cela notons $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la restriction de f à $I \cap D$. Alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion de $\mathcal{C}$ et des transformées de $\mathcal{C}$ par les translations de vecteurs $nT\overrightarrow{e_1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les translations de mesure algébrique nT parallèlement à l'axe des abscisses.

Figure: Courbe représentative d'une fonction périodique