CHAPITRE 14

SUITES DE NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES

> Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'Analyse. Elle est tellement dépourvue de tout plan et de tout système, qu'on s'étonne seulement qu'il y ait tant de gens qui s'y livrent, et ce qui pis est, elle est absolument dépourvue de rigueur.
>
> Abel 1826

Dans ce chapitre $(\mathbb{K}, +, .)$ désignera le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

14.1 L'ENSEMBLE DES SUITES

§1 Vocabulaire et notations

Définition 1 Un ensemble E étant donné, on appelle **suite de E** toute application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans E.
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **suite réelle**, et si $E \subset \mathbb{C}$, de **suite complexe**; ces deux cas constituent les **suites numériques**.

Notation Si u est une suite de E, on devrait normalement noter $u(n)$ l'image par u de $n \in \mathbb{N}$ (et qui est donc un élément de E). L'usage veut que l'on écrive u_n à la place ; cette notation se révèle plus pratique, surtout quand on en vient à mélanger les concepts de suites et de fonctions. On remarquera que u_n est simplement l'une des valeurs de la suite, c'est le **terme d'indice n**. La suite elle-même est u ; on peut aussi écrire la suite complète sous la forme $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

ou, en abrégé, $\left(u_n\right)$; dans cette notation les parenthèses servent à indiquer que l'on désigne toute la suite, et non un terme en particulier. En particulier, on écrira $u_n \in E$ («u_n est un élément de E ») mais $\left(u_n\right) \in E^{\mathbb{N}}$ («la suite (u_n) est à valeurs dans E).

La notion d'égalité des suites est un cas particulier de la notion d'égalité des applications.

Définition 2 Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **égales**, et on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

On appelle également suite une famille de réels dont l'ensemble d'indices est une partie A de $\mathbb{N}$. Une suite est dite **infinie** ou **finie** suivant que l'ensemble des indices est une partie infinie ou finie de $\mathbb{N}$.

Exemples 3 Par exemple, une suite définie **à partir du rang k** est une application de $[\![k, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$.

1. La suite $u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est définie à partir du rang 1.
2. La suite $\left(1/\sqrt{n-4}\right)_{n\geq 5}$ est définie à partir du rang 5.

On écrit alors la suite sous la forme $\left(u_n\right)_{n\geq p}$ et on utilise le terme **suite tronquée**.

Les suites finies ne sont pas d'un grand intérêt en analyse. Aussi supposerons nous que A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe alors une bijection strictement croissante de A sur $\mathbb{N}$ (au plus petit élément de A on associe 0, au suivant on associe 1,…). Par conséquent, nous ne considérerons dans la théorie, sauf indication contraire, que des suites définies sur $\mathbb{N}$, une suite de réels est donc un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

§2 Quelques exemples

Suites récurrentes

Revoir les suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique. Les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Séries

Définition 4 Étant donné une suite numérique (a_n), on appelle **somme partielle** d'indice n associé à la suite (a_n) la somme des termes d'indices au plus n :

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Nous appellerons **série** de **terme général** a_n le couple des deux suites (a_n) et (A_n). L'étude de la série de terme général a_n sera, par définition, l'étude de la suite (A_n).

Exemple 5

Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

(somme des termes d'une progression géométrique)

Suites définies de manière implicite

Exemple 6

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Il existe «donc» un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
Par exemple, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Cette suite $\left(u_n\right)$ est un exemple de **suite définie de manière implicite**.

§3 Variations d'une suite réelle

Définition 7

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

- **constante** si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda.$$
- **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang
$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies u_n = \lambda.$$
- **croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$
- **strictement croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$
- **décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$
- **strictement décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n.$$
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **périodique** s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n.$$

Remarque On démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante si et seulement si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \implies u_p \leq u_q.$$

Ceci est cohérent avec la définition de fonction croissante. On a un résultat similaire pour les suites décroissante ou strictement croissante/décroissante.

Exemples 8

1. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
2. Étudier la monotonie de la suite de terme général $v_n = \frac{n^n}{n!}$

Test 9 Voici un exemple important de suite monotone. Soit (a_n) une suites de nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Si pour tout naturel k, $a_k \geq 0$, alors la suite de terme général A_n est croissante.
2. Si pour tout naturel k, $a_k \leq 0$, alors la suite de terme général A_n est décroissante.

§4 Suites bornées

Définition 10

- On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'il existe $\mu \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mu$.
- On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
  - **majorée** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
  - **minorée** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

Proposition 11 *Une suite* réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si et seulement si la suite* $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Remarque Une suite réelle bornée est évidemment minorée et majorée (par $\pm\mu$), et inversement une suite minorée et majorée est bornée (prendre $\mu = \max\{\,|m|, |M|\,\}$). Mais la notion suite bornée est utile aussi pour les suites à valeurs complexes, pour lesquelles la notion de minoré/majoré n'a pas de sens.

§5 Opérations algébriques sur les suites numériques

Définition 12

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme des suites *u* et *v*** la suite $w = \left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $u + v$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n.$$
- On appelle **produit des suites *u* et *v*** la suite $p = \left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $u.v$ ou uv, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n.v_n.$$
- On appelle **produit externe de la suite *u* par le réel** λ la suite $q = \left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\lambda \cdot u$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \lambda u_n.$$

Résumons

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n) \qquad (u_n).(v_n) = (u_n v_n) \qquad \lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n).$$

Lorsque $\lambda \in \mathbb{K}$, on confond simplement λ et la suite constante égale à λ, c'est-à-dire $\lambda = (\lambda)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda)$. La suite constante dont les termes sont nuls s'appelle la **suite nulle**, on la note $\mathbf{0}$.

Remarque

- La suite nulle, que l'on peut noter $\tilde{0}$, est l'élément neutre pour l'addition.
- De même, la suite $\tilde{1}$, dont tous les termes valent 1, est élément neutre pour la multiplication.
- Le produit externe par $\lambda \in \mathbb{R}$ et le produit interne avec la suite constante (λ) donne le même résultat : $\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda)_{n\in\mathbb{N}}.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites de nombres réels n'est évidemment pas un corps, par exemple, la suite définie par $u_{2n} = 1, u_{2n+1} = 0$ est différente de la suite $\tilde{0}$ et n'a pas d'inverse pour la multiplication.
- Les suites (u_n) qui admettent un inverse pour la multiplication sont les suites qui ne s'annulent jamais. Dans ce cas, on a
$$\frac{1}{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Test 13

- La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes,etc. . .) est croissante (resp. décroissantes,etc. . .).
- Le produit de deux suites croissantes à termes positifs ou nuls est croissante.
- Le produit d'une suite croissante par un réel positif ou nul (resp. négatif ou nul) est une suite croissante (resp. décroissante).

Test 14

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques bornées, alors leur somme, différence et produit sont des suites bornées.

Remarque

Le quotient n'est pas borné en général : considérer le cas $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^2$.

14.2 Limite d'une suite

§1 Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang

On parlera souvent non seulement de suites définies à partir d'un certain rang mais aussi des suites vérifiant une propriété P *à partir d'un certain rang* :

Définition 15

Soit (u_n) un suite dans un ensemble E et, pour tout $x \in E$, $P(x)$ une assertion sur x. On dit que (u_n) **vérifie la propriété** P si $P(u_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On dit que (u_n) vérifie la propriété P **à partir d'un certain rang** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies P(u_n).$$

Exemple 16

La suite $\left(n^2 - 23580\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. En effet, si $n \geq 1000$, on a $n^2 - 23580 \geq 1000000 - 23580 \geq 0$.

Remarque

Si (u_n) est une suite qui satisfait une propriété P à partir d'un certain rang, alors chacune de ses suites tronquées la satisfait aussi à partir d'un certain rang.

§2 Suites convergentes

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$. Lorsque n prend les valeurs entières successives, u_n prend des valeurs de plus en plus voisines de 1. Par exemple, pour que 1 et u_n soient à une distance moindre que 10^{-6}, il suffit que $n \geq 10^6$. L'intervalle ouvert $]0.999\,999; 1.000\,001[$, qui est centré sur 1, contient tous les termes u_n de la suite pour lesquels $n \geq 10^6$.

Précisons : à tout nombre $\epsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $|u_n - 1| \leq \epsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \epsilon$.

En effet, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel n_0 tel que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ et pour tout entier naturel n, tel que $n \geq n_0$ on a $n+1 \geq n \geq \frac{1}{\epsilon}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq \epsilon$ ou $|u_n - 1| \leq \epsilon$, ce qui peut encore s'écrire $1 - \epsilon \leq u_n \leq 1 + \epsilon$. Cette inégalité signifie que pour $n \geq n_0$, tous les termes u_n de la suite appartiennent à l'intervalle $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$.

Nous traduirons ce fait en disant que la suite (u_n) étudiée est convergente et admet 1 pour limite. D'une façon générale, nous donnerons la définition suivante.

Définition 17

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** ℓ, ou **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est **convergente**. Dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.

Il faut bien comprendre qu'ici ϵ est choisi *a priori*.
De façon imagée, il faut considérer «qu'on» nous impose un certain ϵ, sans aucune bienveillance particulière, et que nous n'avons aucun droit sur cet ϵ ; il faut nous en accommoder, et trouver un entier naturel n_0 qui lui convienne. On peut souligner ce point en écrivant $n_0(\epsilon)$ ou n_ϵ.
Il n'est ni nécessaire ni en général utile de donner le plus petit entier naturel n_0 convenable : dans la démonstration ci-dessus, on aurait aussi bien pu proposer un entier $n_0 > \dfrac{11}{\epsilon} + 4$.

Exemple 18 La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ admet pour limite 1.

Exemple 19 La suite (v_n), définie par $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ est-elle convergente ?

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On cherche n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $|v_n| \leq \epsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{2^n} \leq \epsilon$ ou encore $2^n \geq \frac{1}{\epsilon}$.
Remarquons que pour tout entier naturel n, on a $2^n \geq n$ (démonstration par récurrence, ou utiliser que $[\![1,n]\!] \to \mathcal{P}([\![1,n]\!]), x \mapsto \{ x \}$ est injective).
Soit donc n_0 un entier naturel $\geq \frac{1}{\epsilon}$. Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n0} \leq \epsilon.$$

La suite (v_n) est donc convergente et admet 0 pour limite. ∎

Théorème 20 **Unicité de la limite éventuelle**
La limite d'une suite convergente est unique.

Autrement dit, si (u_n) admet ℓ_1 et ℓ_2 comme limites, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Supposons qu'une suite $u = (u_n)$ possède deux limites ℓ_1 et ℓ_2 et que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Posons $\epsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3$; on a bien $\epsilon > 0$ car nous avons supposé $\ell_1 \neq \ell_2$. Puisque ℓ_1 est une limite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, $|u_n - \ell_1| \leq \epsilon$; De même, puisque ℓ_2 est une limite, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_2$, $|u_n - \ell_2| \leq \epsilon$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout entier $n \geq n_0$, on a à la fois $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$, et donc

$$|u_n - \ell_1| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |u_n - \ell_2| \leq \epsilon.$$

Choisissons un entier $n \geq n_0$, et, pour un tel entier écrivons

$$\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + u_n - \ell_2,$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$3\epsilon = |\ell_1 - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq 2\epsilon,$$

Le nombre réel ϵ vérifie donc à la fois $\epsilon > 0$ et $3\epsilon \leq 2\epsilon$ par cette inégalité, ce qui est absurde. Ainsi $\ell_1 = \ell_2$. ∎

Notation

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell; \quad \lim_{+\infty} u = \ell; \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell;$$

ou même plus simplement

$$\lim u_n = \ell; \quad \lim u = \ell; \quad u_n \to \ell; \quad u \to \ell.$$

Proposition 21

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$

L'emploi de «lim» implique bien l'existence de la limite, et pas seulement la valeur de cette dernière.

Démonstration. Comparez leur écriture avec des quantificateurs ! ∎

Exemple 22

Nous avons vu que pour la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, la somme partielle d'ordre n est $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. On a donc $|A_n - 2| = \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2$.

Nous dirons que la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est **convergente** et a pour **somme** 2 et nous écrirons alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Ou encore, en mettant de côté le terme correspondant à $k = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \underbrace{\cdots}_{\text{ne pas oublier !}} = 1.$$

Ce résultat est apparu très mystérieux aux anciens qui appréhendaient peu les notions d'infini et de limite — voir Achille et sa tortue, Zenon et sa flèche.

Exemple 23

Considérons la suite u définie par $u_n = (-1)^n$. Démontrer que cette suite n'est pas convergente.

Démonstration. En prenant la négation de la définition 17

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } |u_n - \ell| > \epsilon.$$

En effet, quel que soit le choix de ℓ, choisissons $\epsilon = \frac{1}{2}$; l'un au moins des deux nombres $|1 - \ell|$ et $|-1 - \ell|$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Comme pour tout entier n_0, il existe des nombres pairs et des nombres impairs supérieurs à n_0, il existe donc un entier $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| \geq \frac{1}{2}$; la conclusion en résulte. ∎

Nous retrouverons plus loin cet exemple et nous donnerons alors une démonstration plus élégante de sa divergence.

§3 Suites réelles divergeant vers l'infini

Définition 24 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) **tend** vers $+\infty$, ou **diverge vers** $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) **tend** vers $-\infty$, ou **diverge vers** $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

Notation On écrira

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{+\infty} u = +\infty, \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \quad \dots$$

On remarquera que si $\lim\limits_{+\infty} u = \pm\infty$, on *ne* dit *pas* que la suite u est convergente, mais au contraire qu'elle est divergente.

Exemple 25 On considère la suite de terme général $u_n = 2^n$. Montrons qu'elle tend vers $+\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ assure l'existence d'un entier naturel $n_0 > A$.
Pour $n \geq n_0$, on a $u_n = 2^n \geq n \geq n_0$ et donc $u_n \geq A$. La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

§4 Modification d'un nombre fini de termes

Théorème 26 **Caractère asymptotique de la notion de limite**
Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques égales à partir d'un certain rang. Alors les suites (u_n) et (v_n) ont même nature ; si celles-ci ont une limite, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Le caractère asymptotique signifie que la notion de limite d'une suite est une notion qui ne dépend pas des premiers termes, en ce sens que si on change un nombre fini de termes d'une suite, on ne change pas son comportement à l'infini.

Proposition 27 *Une suite (u_n) converge si, et seulement si, ses suites tronquées convergent ; et dans ce cas, toutes ont la même limite.*

On a un résultat analogue avec les limites infinies.

§5 Exemple fondamental : suites géométriques

Théorème 28 *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*
- *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

1-ier cas : $q > 1$.

On peut alors écrire $q = 1 + h$ avec $h > 0$. La formule du binôme de Newton montre alors que l'on a pour $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$.

Soit $A > 0$ et n_0 un entier tel que $n_0 > \frac{A-1}{h}$. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $1 + nh \geq 1 + n_0 h > A$ et donc *a fortiori* $q^n > A$. Ce qui montre que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

2-ième cas : $0 < |q| < 1$.

On peut alors écrire $|q| = \frac{1}{q'}$, avec $q' > 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $\frac{1}{\epsilon} > 0$ et l'étude faite au premier cas montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\left(q'\right)^n > \frac{1}{\epsilon}$, c'est-à-dire $|q^n| < \epsilon$. Ce qui montre que la suite converge vers 0.

3-ième cas : $q < -1$.

La suite (q^n) ne peut pas avoir de limite finie car la suite $(|q^n|)$ tend vers $+\infty$ (2-ième cas).

De plus, (q^n) ne peut pas tendre vers $+\infty$, car pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq 1 \implies u_{n+1} < -1 \implies u_{n+1} < 1.$$

Ainsi, on ne peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $q^n \geq 1$.

De manière analogue, (q^n) ne peut pas tendre vers $-\infty$.

4-ième cas : les scories.

- $q = 1$: la suite est constante et égale à 1.
- $q = -1$: ce cas a déjà été vu et on sait que cette suite est bornée et n'est pas convergente, elle n'a donc pas de limite.
- $q = 0$: la suite est constante et égale à 0.

∎

14.3 SUITE ET RELATIONS D'ORDRES

§1 Convergence et caractère borné

Théorème 29 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est fausse ! Il suffit de regarder par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, qui est une suite bornée mais ne converge pas.

Corollaire 30 *Si une suite n'est pas bornée, elle est divergente.*

Corollaire 31 *Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.*

Remarque La même propriété vaut pour les suites réelles «minorées» ou «majorées».

§2 Limite et signes

Proposition 32 *Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\ell > 0$, alors il existe $c > 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n > c$.*
2. *Si $\ell < 0$, alors il existe $c < 0$ tel que à partir d'un certain rang, $u_n < c$.*
3. *Si $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$.*

§3 Limite infinie et caractère borné

Proposition 33 *Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.*

1. *Si $\lim\limits_{+\infty}(u_n) = +\infty$ alors $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et n'est pas majorée.*
2. *Si $\lim\limits_{+\infty}(u_n) = -\infty$ alors $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et n'est pas minorée.*

§4 Compatibilité de la limite avec les relations d'ordre

Proposition 34 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.*

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. Suivant l'hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit l'entier naturel $n \geq k$, $u_n \leq v_n$.

Notons a la limite de u et b celle de v. Montrons par l'absurde que $a \leq b$. Supposons donc que $a > b$.

Posons $\epsilon = \frac{a-b}{3}$. On a alors,

$$b - \epsilon < b < b + \epsilon < a - \epsilon < a < a + \epsilon.$$

Puisque la suite (u_n) converge vers a, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$a - \epsilon \leq u_n \leq a + \epsilon.$$

Puisque la suite (v_n) converge vers b, il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$,

$$b - \epsilon \leq v_n \leq b + \epsilon.$$

Soit n le plus grand des entiers k, n_1 et n_2, alors on a à la fois

$$a - \epsilon \leq u_n \qquad u_n \leq v_n \qquad v_n \leq b + \epsilon.$$

Ainsi $a - \epsilon \leq b + \epsilon$, d'où la contradiction. ∎

Corollaire 35 *Supposons $m \leq u_n \leq M$ à partir d'un certain rang et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite (finie ou infinie). Alors*

$$m \leq \lim_{n\to\infty} (u_n) \leq M$$

Ces propriétés ne sont pas vraies si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple, les suites de termes généraux $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout entier n, mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

§5 Convergence par domination

Théorème 36

Existence de limite par domination

Soient (u_n) une suite numérique, $\ell \in \mathbb{K}$ et (α_n) une suite réelle.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et qu'à partir d'un certain rang

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Puisque (α_n) converge vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \leq \epsilon$. Donc pour $n \geq n_0$, on a également

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \epsilon.$$

Ce qui prouve que $\lim_{+\infty} u = \ell$. ∎

Corollaire 37 *On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq \big|u_n - \ell\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où le résultat par domination. ∎

§6 Convergence par encadrement

Théorème 38 **Existence de limite par encadrement**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Si (u_n) est une suite satisfaisant

$$a_n \le u_n \le b_n$$

à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Rappelons que l'on a l'équivalence

$$|u_n - \ell| \le \epsilon \iff \ell - \epsilon \le u_n \le \ell + \epsilon;$$

et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \ge k$, on a $a_n \le u_n \le b_n$.

Puisque (a_n) a pour limite ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \ge n_1$ on ait $|a_n - \ell| \le \epsilon$. De même, puisque (b_n) a pour limite ℓ, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \ge n_2$ on ait $|b_n - \ell| \le \epsilon$.

Posons $n_0 = \max(k, n_1, n_2)$. Pour tout entier $n \ge n_0$, on a à la fois

$$\ell - \epsilon \le a_n \le u_n \qquad \text{et} \qquad u_n \le b_n \le \ell + \epsilon;$$

donc $\ell - \epsilon \le u_n \le \ell + \epsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \le \epsilon$. ∎

§7 Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

Proposition 39 *Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \implies |u_n v_n| \le \epsilon.$$

Puisque la suite (v_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \le M.$$

De plus, la suite (u_n) tend vers 0, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \implies |u_n| \le \frac{\epsilon}{M}.$$

Pour tout entier $n \ge n_0$, on a donc

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \le \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon;$$

d'où le résultat. ∎

Exemple 40 La suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ converge vers 0.

En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et la suite $(\sin(n\theta))$ est bornée:

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n\theta) \leq 1.$$

§8 Divergence par minoration ou majoration

Théorème 41

Théorèmes de divergence par minoration ou majoration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

14.4 Opérations algébriques

§1 Opérations algébriques sur les limites finies

Théorème 42

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. *Alors les suites $\left(u_n + v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(u_n v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\lambda u_n + \mu v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et de plus*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(u_n + v_n\right) &= \lim_{n\to+\infty}(u_n) + \lim_{n\to+\infty}(v_n)\\
\lim_{n\to+\infty}\left(u_n v_n\right) &= \lim_{n\to+\infty}(u_n)\lim_{n\to+\infty}(v_n)\\
\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda u_n + \mu v_n\right) &= \lambda \lim_{n\to+\infty}(u_n) + \mu \lim_{n\to+\infty}(v_n).
\end{aligned}$$

2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) \neq 0$, alors les suites $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ sont définies à partir d'un certain rang et sont convergentes et on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)}; \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)}.$$

Proposition 43

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n, on note x_n la partie réelle de u_n et y_n sa partie imaginaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) (u_n) *tend vers* $\ell \in \mathbb{C}$.

(ii) (x_n) *tend vers* $\mathfrak{Re}(\ell)$ *et* (y_n) *tend vers* $\mathfrak{Im}(\ell)$.

§2 Opérations avec limites infinies

On présente les résultats sous forme de tableau. Par commodité, on rappelle les résultats avec les limites finies.

Somme

Lemme 44 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.*

1. *Si (u_n) est minorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.*
2. *Si (u_n) est majorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.*

On en déduit

Théorème 45 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $u_n + v_n$ tend vers*
ℓ	m	$\ell + m$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	*«F.I.»*
$+\infty$	$-\infty$	*«F.I.»*

- Les cas «F.I.» représentent ce qu'il est convenu d'appeler des « Formes indéterminées ». Celles-ci ne signifient pas que la limite n'existe pas, mais juste que l'on ne peut pas énoncer de résultat général concernant cette opération.
- Ces conditions ne sont que des conditions suffisantes pour l'existence de $\lim u + v$. La somme de deux suites ne possédant pas de limites peut en posséder une.

Produit interne

Théorème 46 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $u_n \cdot v_n$ tend vers*
ℓ	m	ℓm
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	*«F.I.»*

Produit externe

Théorème 47

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\lambda, \ell \in \mathbb{R}$.

Si	*et si u_n tend vers*	*alors λu_n tend vers*
$\lambda \in \mathbb{R}$	ℓ	$\lambda\ell$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$+\infty$

Si $\lambda = 0$, alors $\left(\lambda u_n\right)$ est la suite nulle et converge vers 0.

Inverse

Définition 48

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs supérieures** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n > \ell$ à partir d'un certain rang. Dans ce cas, on note
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell+.$$
- On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs inférieures** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n < \ell$ à partir d'un certain rang, on note
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell-.$$

Lemme 49

Soit (u_n) est une suite de réels strictement positifs, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0+ \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0+$$

Pour une suite (u_n) quelconque, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'est peut-être même pas définie, même à partir d'un certain rang.

Théorème 50

Soient $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si u_n tend vers	*alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers*
$\ell \neq 0$	$\frac{1}{\ell}$
$0-$	$-\infty$
$0+$	$+\infty$
$+\infty$	$0+$
$-\infty$	$0-$
0	*«F.I.»*

Quotient

Proposition 51 *Si la suite (v_n) tend vers $\pm\infty$ et si la suite (u_n) est bornée, alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Théorème 52 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers*
ℓ	$m \neq 0$	$\frac{\ell}{m}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$-\infty$	$m < 0$	$+\infty$
$-\infty$	$m > 0$	$-\infty$
$+\infty$	$m < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$m > 0$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*«F.I.»*
$\pm\infty$ *ou* ℓ	0	*«F.I.»*

De manière générale, la limite d'une suite de la forme $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est indéterminée dès que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Cette suite n'est peut-être même pas définie, même à partir d'un certain rang. Néanmoins, en distinguant limite par valeur supérieure et inférieure, on obtient les précisions suivantes.

Théorème 53 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$; de sorte que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ soit définie à partir de ce rang. Alors*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers*
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$0-$	$+\infty$
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$0+$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$0-$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$0+$	$+\infty$
$0\pm$	$0\pm$	*«F.I.»*

§3 Résumé des «formes indéterminées»

Les «formes indéterminées» sont les mêmes que pour les opérations algébriques dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad \pm\infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0} \quad \text{et plus généralement } \frac{\ell}{0} \text{ pour } \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Néanmoins, pour $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, $\ell \neq 0$, on peut lever les indéterminations $\frac{\ell}{0^+}$ et $\frac{\ell}{0^-}$ en utilisant la « règle des signes ».

Exemple 54

Quelle est la limite de $\frac{n^3}{n^2+1}$?

Exemple 55

Théorème de Cesàro
Soit (a_n) une suite réelle indexée par $\mathbb{N}^\star$. On lui associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des moyennes arithmétiques de ses n premiers termes:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si la suite (a_n) tend vers ℓ, alors la suite (b_n) tend aussi vers ℓ.

14.5 Suites monotones

§1 Convergence et divergence des suites monotones

Théorème 56

Soit $u = (u_n)$ une suite croissante.

1. *Si la suite (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers*
$$\sup \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$
2. *Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Théorème 57

Soit $u = (u_n)$ une suite décroissante.

1. *Si la suite (u_n) est minorée, alors (u_n) converge vers*
$$\inf \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$
2. *Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.*

Corollaire 58

Toute suite monotone admet une limite.

Exemple 59

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Montrer que (u_n) converge.

Exemple 60

On considère la suite de terme général

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Montrer que (S_n) est convergente.

Démonstration. Pour $k \geq 1$, on a $k! \geq 2^{k-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}};$$

on a donc $S_n \leq u_n$. Or la suite (u_n) est croissante et converge vers $1 + 2 = 3$, elle est donc majorée par 3. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq u_n \leq 3$. La suite (S_n) est donc majorée ; de plus elle est croissante. La suite (S_n) est donc convergente. On peut même affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n \leq 3$.

En fait, on peut montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \mathrm{e}$. ∎

§2 Suites adjacentes

Définition 61

Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

- la suite (a_n) est croissante,
- la suite (b_n) est décroissante,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$.

Exemple 62

$a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 63

Théorème des suites adjacentes

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont une limite commune ℓ. Ce réel ℓ est l'unique réel qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n.$$

14.6 Suites extraites

§1 Suites extraites et limite

Définition 64

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
On appelle **suite extraite** de (u_n) selon ϕ, ou **sous-suite** de (u_n), la suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Une suite extraite est donc une suite obtenue en ne gardant qu'un certain nombre de termes de la suite initiale. Mais les termes conservés ont toujours un indice croissant (dans la suite de départ).

Exemples 65

1. Le décalage de k indices remplace (u_n) par $(v_n) = (u_{n+k})$. Ici $\phi(n) = n + k$.
2. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite de (u_n) constituée par ses termes d'indices pairs.
3. $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+11})_{n\in\mathbb{N}}$, sont des suites extraites de (u_n).
4. $(u_{n^2-n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de (u_n) car le terme u_0 est répété pour $n = 0$ et $n = 1$.

Lemme 66 *Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n.$$

Démonstration. Récurrence immédiate. ∎

Théorème 67 *Si une suite (u_n) possède une limite (finie ou infinie) ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) tend vers ℓ.*

Démonstration. Soit u une suite de nombres réels qui admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ et v une suite extraite de u : il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque u tend vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \epsilon$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$. Dès lors, si $n \geq n_0$, $\phi(n) \geq n \geq n_0$, donc

$$|v_n - \ell| = |u_{\phi(n)} - \ell| < \epsilon.$$

Le cas $\ell = \pm\infty$ est analogue. ∎

Exemple 68 Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b,$$

où $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$.
Si $\left(u_n\right)$ converge vers une limite ℓ, alors la suite extraite $\left(u_{n+1}\right)$ également. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} au_n + b = a\ell + b.$$

On a donc nécessairement $\ell = a\ell + b$, c'est-à-dire $(1 - a)\ell = b$. La seule limite *éventuelle* de la suite (u_n) est donc $\frac{b}{1-a}$.

Théorème 69 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ. Alors u tend vers ℓ.*

Démonstration. Il convient de distinguer trois cas : $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$. On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

Puisque (u_{2n}) a pour limite ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$ on ait $|u_{2n} - \ell| < \epsilon$.

Puisque (u_{2n+1}) a pour limite ℓ, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_2$ on ait $|u_{2n+1} - \ell| < \epsilon$.

Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Soit un entier $n \geq n_0$. Si n est pair, on écrit $n = 2p$ où $p \geq \frac{n_0}{2} \geq n_1$, donc $|u_{2p} - \ell| < \epsilon$. Si n est impair, on écrit $n = 2p+1$ où $p \geq \frac{n_0-1}{2} \geq n_2$, donc $|u_{2p+1} - \ell| < \epsilon$. Dans tous les cas on a

$$|u_n - \ell| < \epsilon.$$

∎

Méthode Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, il peut être commode d'exhiber deux suites extraites admettant des limites différentes ou une suite extraite n'admettant pas de limite.

Exemples 70

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car $(u_{2n}) = (1)$ et $(u_{2n+1}) = (-1)$ ont pour limites respectives 1 et -1.

  Ceci montre que la réciproque de la propriété est inexacte, c'est-à-dire qu'il existe des suites n'ayant pas de limite dont on peut extraire des suites ayant une limite.

- La suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ n'a pas de limite. En effet, $u_{6n+3} = (-1)^n$: la suite extraite $\left(u_{6n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite donc la suite (u_n) aussi.

§2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 71 *Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge.*

14.7 Traduction séquentielle de certaines propriétés

§1 Caractérisation séquentielle de la densité

Définition 72 On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un point de cette partie.

Autrement dit, une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, u < v \implies \exists z \in A, u < z < v.$$

Théorème 73 **Caractérisation séquentielle de la densité**
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si pour tout réel x, il existe une suite de points de A tendant vers x.

Théorème 74

1. *L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

§2 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 75 **Caractérisation séquentielle de la borne supérieure**
Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant *de A.*
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *M est la borne supérieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.*
3. *Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.*

Démonstration. Voir exercices. ∎

On a un résultat analogue pour la borne inférieure.

Théorème 76 **Caractérisation séquentielle de la borne inférieure**
Soit A une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$ et m un minorant *de A.*
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *m est la borne inférieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers m.*
3. *Il existe une suite décroissante d'éléments de A convergente vers m.*

14.8 Comparaison des suites de référence

Proposition 77 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. Alors*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0+.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0+.$ *En particulier* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{e^{\alpha n}} = 0.$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0+.$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0+.$