

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

## 21.1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

### Définition 1

Un **système d'équations linéaires**, ou plus simplement, un **système linéaire** de  $m$  équations à  $n$  **inconnues**  $x_1, \dots, x_n$  est la donnée simultanée de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (E)$$

Les **coefficients** sont les scalaires  $a_{i,j}$ .

### Exemple 2

Le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

est un système de trois équations à trois inconnues  $x_1, x_2, x_3$ .

Les coefficients sont notés avec un double indice,

- le premier indice  $i$  indique la ligne c'est-à-dire l'équation,
- le second indice  $j$  indique la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle se trouve ce coefficient.

Par exemple  $a_{2,3}$  est le coefficient de  $x_3$  dans la deuxième équation.

### Définition 3

Une **solution** de (E) est un vecteur  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  tel que *chacune* des  $n$  équations est vraie lorsque

$$x_1 = s_1 \qquad x_2 = s_2 \qquad \dots \qquad x_n = s_n.$$

### Exemple 4

Le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 \qquad \qquad \qquad + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

est un exemple de système de quatre équations à cinq inconnues,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Une solution de ce système est

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 3, \qquad x_5 = 2,$$

comme on peut le vérifier en substituant ces valeurs dans chacune des équations. Chacune des équations est vérifiée par ces valeurs  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Néanmoins, ce n'est pas la seule solution de ce système ; il y en a beaucoup plus.

Si l'on s'intéresse maintenant au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 \qquad \qquad \qquad + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Aucune valeur de  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  ne vérifient les quatre équations simultanément ; ce système n'a pas de solution. Reste à savoir pourquoi !

Introduisons tout d'abord une simplification d'écriture.

### Définition 5

La matrice  $A = (a_{i,j})$ , dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  est le coefficient  $a_{i,j}$  du système d'équations linéaires est appelée la **matrice des coefficients du système** (E), ou plus simplement **matrice du système** (E).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  le **vecteur des inconnues**. Alors, le produit  $Ax$  de la matrice  $A$  de type  $(m, n)$  et du vecteur  $x$  de type  $(n, 1)$  est une matrice de type  $(m, 1)$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

- Si nous définissons le vecteur colonne  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  dont les coefficients sont les seconds membres  $b_i$  du système (E), alors le système est équivalent à l'équation matricielle d'inconnue  $x$

$$Ax = b.$$

On dit que  $b$  est le **vecteur des second membres**.

### Exemple 6

On considère le système de trois équations à trois inconnues  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de la matrice  $A$  sont les coefficients des  $x_i$ . Si nous effectuons la multiplication matricielle  $Ax$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

Si  $Ax = b$ , alors

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

et ces deux matrices  $(3, 1)$  sont égales si, et seulement si leurs coefficients sont égaux. Nous retrouvons alors exactement les trois équations linéaires.

## 21.2 OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES

### Exemple 7

Résolvons le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

### Définition 8

Nous appelons **opération élémentaire sur les lignes** d'un système d'équations les opérations suivantes :

1. la multiplication d'une ligne par un scalaire *non nul* ;

2. l'échange de deux lignes ;
3. la modification d'une ligne en lui additionnant un multiple d'une *autre* ligne.

**Définition 9**

Deux systèmes d'équations linéaires (E) et (E') ayant mêmes inconnues, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , sont dits **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

**Théorème 10**

*Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.*

**Notation**

On peut alors noter

$$(E) \iff (E').$$

Nous constatons que les opérations élémentaires influencent uniquement les coefficients du système et le second membre.

Considérons le système précédent écrit sous forme matricielle  $Ax = b$ , alors la matrice

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right),$$

où l'on a rassemblé la matrice des coefficients et des seconds membres, contient toutes les informations nécessaires pour effectuer les opérations élémentaires, et plutôt que de manipuler les équations, nous manipulerons les lignes de cette matrice.

**Définition 11**

Soit  $Ax = b$  un système d'équations linéaires où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

est appelée la **matrice augmentée** du système  $Ax = b$ .

**Définition 12**

Nous appelons **opération élémentaire sur les lignes** d'une matrice les opérations suivantes :

1. la multiplication d'une ligne par un scalaire *non nul* ;
2. l'échange de deux lignes ;
3. la modification d'une ligne en lui additionnant un multiple d'une *autre* ligne.

**Théorème 13**

*Si l'on passe d'un système (E) à un autre système (E') par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de (E') s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de (E).*

## 21.3 PROCÉDÉ D'ÉLIMINATION DE GAUSS-JORDAN

### §1 Présentation de l'algorithme; forme échelonnée réduite

**Exemple 14**

Nous allons illustrer l'algorithme sur deux exemples, la matrice augmentée  $(A|b)$  de l'exemple dans la section précédente et la matrice augmentée  $(B|b)$  d'un second système.

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right), \quad (B|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

1. On détermine la première colonne non nulle  $C_j$ . Si  $A$  est nulle, il est inutile de poursuivre.

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad Bx = b \iff \begin{cases} 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Nous considérons alors la colonne 1 de  $(A|b)$  et la colonne 2 de  $(B|b)$ .

2. Dans cette colonne, on détermine un coefficient non nul. Le coefficient ainsi trouvé s'appelle un **pivot**. Si le pivot n'est pas sur la première ligne, on échange celle-ci avec la ligne contenant le pivot.
3. On **normalise** le pivot: on multiplie la première ligne par un scalaire convenable.

La matrice à gauche a déjà une valeur non nulle sur la première ligne. Pour la matrice de droite, on échange la ligne  $L_1$  et la ligne  $L_2$ .

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad Bx = b \iff \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_3 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice de gauche possède déjà un pivot unitaire. Pour la seconde matrice, on multiplie la ligne 1 par  $\frac{1}{2}$ .

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad Bx = b \iff \begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ 2x_3 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

4. On soustrait un multiple approprié de la première ligne aux suivantes de manière à obtenir des zéros en dessous du pivot («élimination»). Pour le système de gauche, on ajoute  $-2$  fois  $L_1$  à  $L_2$ , puis on ajoute  $-1$  fois  $L_1$  à  $L_3$ . Le système de droite possède déjà uniquement des zéros sous le pivot:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases} \quad Bx = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = 2 \\ & 2x_3 & = 3 \\ & x_3 & = 5 \end{cases}$$

5. On recommence les étapes 1. à 4. avec le sous-système situé en dessous du pivot.

Nous continuons ici uniquement le premier exemple,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

Nous ignorons la première ligne. Alors, la première colonne non nulle est la colonne 2. Celle-ci a déjà une valeur non nulle en haut que nous normalisons en multipliant  $L_2$  par  $-1$ :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

Nous utilisons alors le pivot pour obtenir des zéros en dessous; nous ajoutons  $2L_2$  à  $L_3$ :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \\ & & 3x_3 & = 6 \end{cases}$$

Nous ignorons alors les deux premières lignes et recommençons les étapes 1. à 4..

La première colonne non nulle est la colonne 3. Nous multiplions  $L_3$  par  $\frac{1}{3}$  pour obtenir un pivot unitaire:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & x_2 & +x_3 & = 2 \\ & & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

Ce dernier système est dit **échelonnée en ligne** ou simplement **échelonnée**.

En écrivant la matrice augmentée de ce système, on trouve

$$(A|b) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$



Il est *très important* de comprendre qu'après avoir effectué une suite d'opérations élémentaires sur une matrice, la matrice nouvellement obtenue *n'est pas* égale à la matrice originale. C'est pourquoi nous utilisons ici le symbole d'équivalence par ligne  $\underset{L}{\sim}$  et non des signes d'égalité  $=$ .

**Définition 15**

Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
- (ii) Si une ligne est non nulle, le premier coefficient non nul est appelé **pivot**. Les positions successives des pivots (leur indice de colonne) forme une suite strictement croissante.

**Exemple 16**

Les matrices suivantes sont respectivement 4-échelonnées, 5-échelonnées et 3-échelonnées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque**

Si l'on arrête l'algorithme à l'étape 5., on parle alors de l'algorithme de Gauß.

Nous pourrions alors résoudre le système par **substitution**. La dernière équation nous donne  $x_3 = 2$ , valeur que nous pouvons substituer dans la seconde équation pour obtenir  $x_2$ . Nous utilisons alors ces deux valeurs pour obtenir  $x_1$ .

- 6. Pour chaque ligne, à partir de la dernière ligne, on ajoute un multiple convenable aux lignes précédentes afin d'obtenir des zéros au dessus de chaque pivot.

À partir de la forme échelonnée, nous utilisons la ligne 3. On remplace  $L_2$  par  $L_2 - L_3$ , puis nous remplaçons  $L_1$  par  $L_1 - L_3$ :

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_2 + x_3 = 2 \\ \quad \quad x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \quad x_2 = 0 \\ \quad \quad x_3 = 2 \end{cases}$$

Nous avons alors uniquement des zéros au dessus du pivot de la troisième colonne. Il ne reste plus qu'une étape: obtenir des zéros au dessus du pivot de la deuxième colonne. La dernière étape est de remplacer  $L_1$  par  $L_1 - L_2$ :

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ \quad x_2 = 0 \\ \quad \quad x_3 = 2 \end{cases}$$

Ce système est alors **échelonné réduit en ligne**.

**Définition 17**

Une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Explicitement, une matrice échelonnée réduite vérifie les propriétés suivantes:

- (i) Chaque ligne non nulle commence avec un pivot unitaire.
- (ii) Un pivot dans une ligne inférieure est plus à droite.

(iii) Les lignes nulles sont les dernières de la matrice.

(iv) Chaque colonne avec un pivot a des zéros ailleurs.

Nous pouvons alors lire les solutions depuis la matrice. Le système original est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

ce qui donne la solution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce système possède une *unique* solution.

Nous pouvons vérifier que cette solution est correcte en la substituant dans les équations originales, ou, de manière équivalente, en effectuant la multiplication  $Ax$  pour montrer que  $Ax = b$ .

### Test 18

Faites le! Vérifiez que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exemple  $(B|b)$ . À la suite des étapes **1.** à **4.**, nous effectuons l'étape **5.**. Nous ignorons la première ligne et appliquons de nouveau les étapes **1.** à **4.**. Nous souhaitons obtenir un pivot unitaire sur la seconde ligne, nous allons donc échanger la ligne 2 et la ligne 3:

$$Bx = b \iff \begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ 2x_3 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_3 = 5 \\ 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Nous obtenons alors un zéro sous le pivot en remplaçant la ligne 3 avec la ligne 3 plus  $(-2)$  fois la ligne 2:

$$Bx = b \iff \begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_3 = 5 \\ 0 = 7 \end{cases}$$

Finalement, on multiplie la dernière ligne par  $-\frac{1}{7}$ :

$$Bx = b \iff \begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_3 = 5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Ce système est alors échelonné par lignes, mais nous avons aucun intérêt à continuer jusqu'à la forme échelonnée réduite. En effet, la dernière ligne est  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ , c'est-à-dire  $0 = 1$ , ce qui est impossible! Ce système n'a pas de solution.



**Remarque**

Il se peut que l'une des équations soit de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = b,$$

dite **condition de compatibilité**. Deux cas peuvent se produire

- $b \neq 0$ . Le système est incompatible : ils n'a pas de solution.
- $b = 0$ , l'équation est de la forme  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = 0$ , on peut la supprimer.

**Remarque**

L'algorithme présenté est souvent le plus efficace pour résoudre un système d'équations. Dans une variante (usuelle) de l'algorithme de Gauß-Jordan, on combine les étapes 4. et 6. en une seule étape 4.' où l'on utilise le pivot pour obtenir des zéros au dessous (comme dans l'algorithme) mais également au-dessus.

## §2 Systèmes compatibles et incompatibles

**Définition 19**

Un système d'équations linéaires est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Lorsque le système n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**.

**Proposition 20**

*Si la matrice augmentée  $(A|b)$  d'un système est équivalente à une matrice qui contient une ligne  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$ , alors le système est incompatible.*

Considérons les systèmes représentés par les matrices augmentées

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right), \quad (B|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Il s'écrivent

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Le second système est incompatible. En effet, on voit immédiatement que les deux premières équations ne peuvent pas être vraies en même temps que la troisième.

- Le premier représente trois plans qui s'intersectent au point  $(1, 0, 2)$ .
- Le second représente trois plans, dont deux sont parallèles (ceux d'équations  $2x_3 = 3$  et  $x_3 = 5$ ).

Pour simplifier les résolutions, on utilise le codage suivant pour les opérations élémentaires sur les systèmes ou sur les matrices.

Les équations, ou les lignes sont notées  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Les opérations élémentaires sont codées ainsi :

Opération élémentaire	Codage
multiplication par un scalaire <i>non nul</i>	$L_i \leftarrow \alpha L_i$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$ ;
échange de deux lignes	$L_i \leftrightarrow L_j$ où $i \neq j$ ;
addition d'un multiple d'une <i>autre</i> ligne	$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ où $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Exemple 21**

Effectuer la réduction de  $(A|b)$  en utilisant les codages précédents afin d'illustrer la résolution du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

**Test 22**

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß-Jordan afin de résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

### §3 Variables libres

**Exemple 23**

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß-Jordan afin de résoudre le système<sup>a</sup>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

<sup>a</sup>Écrit de manière peu pratique, attention aux zéros dans la matrices!

**Définition 24**

Les inconnues correspondant aux colonnes contenant un pivot sont appelées **variables principales** ou **variables liées**. Les autres inconnues sont appelées **variables libres** ou **paramètres**.

**Test 25**

Poser  $s = 0$  et  $t = 0$  et montrer (par substitution ou en calculant  $Ax_0$ ) que  $u = (1, -1, 0, 3, 0)^T$  est une solution de  $Ax = b$ .

Poser  $s = 1$  et  $t = 2$ , et montrer que le nouveau vecteur obtenu  $v$  est également solution.

**Test 26**

Écrire le système de trois équations à trois inconnues représenté par l'équation matricielle  $Av = b$  où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Utiliser le procédé d'élimination de Gauß-Jordan pour résoudre ce système. Exprimer les solutions sous forme vectorielle. En interprétant chaque équation comme l'équation cartésienne d'un plan de  $\mathbb{R}^3$ , donner une description de l'intersection de ces trois plans.

## §4 Quelques successions d'opérations élémentaires classiques

**Remarque**



Il est important de se restreindre à des opérations qui peuvent être décomposées en une succession d'opérations élémentaires. Sinon, rien n'assure que l'on conserve le même ensemble de solutions.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ n'est pas équivalent à } \begin{cases} 2x - 2y = 3 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x - 2y = 3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

**Remarque**

### Quelques opérations parfois utiles

Les opérations suivantes peuvent être décomposées en une succession d'opérations élémentaires. Elles permettent donc de passer d'un système à un système équivalents.

1. Modification de l'ordre des lignes de  $(E)$ .
2. Addition à une ligne  $L_i$ ,  $i$  fixé, d'une combinaison linéaire des *autres* lignes de  $(E)$ .
3. Remplacer une ligne  $L_i$ ,  $i$  fixé, par une combinaison linéaire des lignes dont le coefficient devant  $L_i$  est non nul.
4. Ajout d'un multiple d'une ligne  $L_i$ ,  $i$  fixé, aux *autres* lignes de  $(E)$ .

**Remarque**

### Somme et différence de deux lignes

Si  $L$  et  $L'$  désignent deux lignes d'un système, on a l'équivalence

$$\begin{cases} L \\ L' \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L + L' \\ L - L' \\ \vdots \end{cases}$$



Ces opérations permettent donc de passer d'un système à un système équivalent, ou d'une matrice à une matrice équivalente en ligne. Elles permettent parfois d'aller un peu plus vite mais elles sont à utiliser avec prudence.

Remarquez qu'elles ne sont pas employées dans l'algorithme de Gauß. Leur utilisation est donc uniquement basée sur la définition 9 et le théorème 10.

## 21.4 SYSTÈMES HOMOGÈNES ET NOYAU

### §1 Ensemble solution

**Théorème 27**

*Un système d'équations linéaire admet aucune, exactement une, ou une infinité de solution.*

## §2 Systèmes homogènes

### Définition 28

Un système de la forme  $Ax = \mathbf{0}$  est dit **homogène**.

Un résultat facile, mais très important:

### Proposition 29

1. Un système homogène  $Ax = \mathbf{0}$  est toujours compatible.
2. Si  $Ax = \mathbf{0}$  a une unique solution, alors c'est la solution triviale  $x = \mathbf{0}$

### Remarque

Si nous formons la matrice augmentée  $(A|\mathbf{0})$  d'un système homogène, alors la dernière colonne est composée entièrement de zéros. De plus, cette colonne restera une colonne nulle quelle que soit l'opération élémentaire réalisée. Il est donc inutile d'écrire la dernière colonne. À la place, nous effectuons le procédé d'élimination de Gauss-Jordan sur la matrice  $A$  des coefficients, en se souvenant que nous résolvons  $Ax = \mathbf{0}$ .

### Exemple 30

Résoudre le système linéaire homogène

$$\begin{cases} x + y + 3z + w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ y + 2z + 2w = 0. \end{cases}$$

### Test 31

Expliciter quelles opérations élémentaires sont effectuées à chaque étape pour obtenir un système échelonné réduit par l'algorithme de Gauss-Jordan. Par exemple, la première opération est  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ .

Écrivons maintenant la solution générale du système  $Av = 0$  (n'oublions pas que nous avons écrit la forme échelonnée réduite de la matrice  $A$ , qui représente le système homogène  $Av = 0$ ). Les solutions s'écrivent

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

qui est une droite passant par l'origine,  $v = t\vec{a}$  avec  $\vec{a} = (3, 2, -2, 1)^T$ . Le système possède donc une infinité de solutions, une pour chaque valeur de  $t \in \mathbb{R}$ .

### Théorème 32

Si  $A$  est une matrice de type  $(m, n)$  avec  $m < n$ , alors le système homogène  $Ax = 0$  possède une infinité de solutions.

*Démonstration.* Compter le nombre maximum de pivots. En déduire le nombre de variables libres. ■

Qu'en est-il d'un système  $Ax = b$ ? Si  $A$  est de type  $(m, n)$  avec  $m < n$ , le système  $Ax = b$  a-t-il une infinité de solutions? Si le système est compatible, la réponse est oui!

**Exemple 33**

Le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

est incompatible. Ces équations représentent deux plans parallèles dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 34**

On considère le système

$$\begin{cases} x + y + 3z + w = 2 \\ x - y + z + w = 4 \\ y + 2z + 2w = 0. \end{cases}$$

Remarquer que la matrice des coefficients de ce système est la même matrice  $A$  que celle de l'exemple 30.

La matrice augmentée du système est

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Test 35**

Montrer que la forme échelonnée réduite de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire les solutions du système original.

La solution générale de ce système s'écrit

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = p + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une droite *ne passant pas par l'origine*. Elle est parallèle à la droite solution du système homogène  $AX = 0$ , et passe par le point de vecteur position  $p$ . On peut en effet comparer

$$\begin{array}{ccc} AX = 0 & & AX = b \\ A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (A|b) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \\ X = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & & X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La forme réduite de la matrice augmentée d'un système  $AX = b$  contient toujours toutes les informations pour résoudre  $AX = 0$ .

**Définition 36**

Soit  $Ax = b$  un système d'équations linéaires. Le système linéaire  $Ax = 0$  est appelé **système homogène associé** au système  $Ax = b$ .

**Test 37**

Reprenons la forme échelonnée réduite de la matrice  $A$  de l'exemple 30:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi pour tout  $b \in \mathbb{R}^3$ , le système  $Ax = b$  est compatible et a une infinité de solutions.

**Test 38**

Résoudre le système  $Ax = b$  donnée par

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Déterminer également les solutions du système homogène associé  $Ax = \mathbf{0}$ . Pour chacun des deux systèmes, décrire géométriquement l'intersection des trois plans.

### §3 Noyau d'une matrice

**Définition 39**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ . On appelle **noyau** de  $A$ , le sous-ensemble de  $\mathbb{K}^n$  défini par

$$\ker A = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \mathbf{0} \}$$

où  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$  est le vecteur nul de  $\mathbb{K}^m$ .

**Théorème 40**

*Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau. Autrement dit, si deux matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes par lignes, alors  $\ker(A) = \ker(B)$ .*

**Théorème 41**

*Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . On suppose le système  $Ax = b$  compatible et que  $p$  est une solution. Alors l'ensemble des solutions de  $Ax = b$  est l'ensemble des vecteurs de la forme  $p + z$  où  $z \in \ker A$ ; c'est-à-dire*

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \} = \{ p + z \mid z \in \ker A \} = p + \ker A.$$

Le résultat précédent se généralise à d'autres équations «linéaires». On l'exprime généralement en disant que la solution générale d'un système linéaire compatible  $Ax = b$  est la somme d'une solution particulière  $p$  (où  $Ap = b$ ) et de la solution générale du système homogène associé.

$$\{ \text{solutions de } Ax = b \} = p + \{ \text{solutions de } Ax = \mathbf{0} \}.$$

**Exemple 42**

Retour sur l'exemple 34

$$\begin{cases} x + y + 3z + w = 2 \\ x - y + z + w = 4 \\ y + 2z + 2w = 0. \end{cases}$$

Les solutions étaient de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = p + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

où  $X = tv$  est la solution du système homogène associé (voir exemple 30). Il est clair que  $p$  est une solution particulière du système (prendre  $t = 0$ ).

**Résumé**

- Si  $Ax = b$  est compatible, les solutions sont de la forme  $x = p + z$  où  $p$  est une des solutions particulières et  $z \in \ker A$ , le noyau de  $A$ .
  - Si  $Ax = b$  a une unique solution, alors  $Ax = 0$  a pour seule solution la solution triviale.
  - Si  $Ax = b$  a une infinité de solutions, alors  $Ax = 0$  également.
- Le système  $Ax = b$  peut être incompatible, mais le système  $Ax = 0$  est *toujours* compatible.

**Test 43**

Reprendre l'exemple 23, page 10

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

Montrer que la solution trouvée alors est de la forme

$$x = p + sv + tw, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

où  $p$  est une solution particulière de  $Ax = b$  et  $sv + tw$  est la solution générale du système homogène associé  $Ax = 0$ .