# Couples de variables aléatoires finies

# Aperçu

1. Couples de variables aléatoires
2. Indépendance
3. Covariance

**D 1** On appelle **couple de variables aléatoires réelles** toute application

$$\begin{array}{rccl} Z: & \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

où $X$ et $Y$ sont des variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
On note $Z = (X, Y)$ ce couple de variables.

Par définition, $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned} (X, Y)(\Omega) &= \{ (X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega \} \\ &\subset \left\{ \left(X(\omega_1), Y(\omega_2)\right) \,\middle|\, \left(\omega_1, \omega_2\right) \in \Omega^2 \right\} = X(\Omega) \times Y(\Omega). \end{aligned}$$

**M** Connaitre la loi du couple $(X, Y)$ revient à connaitre

- $X(\Omega) = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_n \right\}$,
- $Y(\Omega) = \left\{ y_1, y_2, \dots, y_p \right\}$,
- $p_{i,j} = P\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\}\right)$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

La loi du couple $(X, Y)$ est encore appelé **loi conjointe de $X$ et de $Y$**.

On note plus simplement $P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{i,j} = P\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\}\right)$.

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On appelle résultat le couple formé du numéro de la première boule et du numéro de la deuxième boule. Ainsi $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}^2$. Sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on choisit pour $P$ l'équiprobabilité. On a

$$X_1(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$$

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On a alors,

$$\forall (i,j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P\left((X_1 = i) \text{ et } (X_2 = j)\right) = \frac{1}{16}.$$

ce que l'on peut représenter ainsi:

| $X_1 \backslash X_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

De même, on trouve pour la loi du couple $(X_1, Y)$:

| $X_1 \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | 0 | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{4}{16}$ |

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3,1); (3,2); (3,3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

**T 3** Vérifier les autres cas pour la loi du couple $(X_1, Y)$.

**R** La famille

$$\left(\left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\} | i \in [\![1, n]\!] \text{ et } j \in [\![1, p]\!]\right)$$

forment un système complet d'événements (certains événements pouvant être vides). Ainsi,

$$\sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots p}} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} p_{i,j} = 1.$$

On note comme précédemment,

- $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$,
- $Y(\Omega) = \{ y_1, y_2, \dots, y_p \}$,
- $p_{i,j} = P\left(\{ X = x_i \} \cap \{ Y = y_j \}\right)$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

**P 4**

1. *Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P\left\{ X = x_i \right\} = \sum_{j=1}^{p} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} P\left\{ X = x_i \text{ et } Y = y_j \right\}.$$

*On note parfois* $p_{i,\bullet} = P\left\{ X = x_i \right\}$.

2. *Pour tout* $j \in [\![1, p]\!]$,

$$P\left\{ Y = y_j \right\} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} P\left\{ X = x_i \text{ et } Y = y_j \right\}.$$

*On note parfois* $p_{\bullet,j} = P\left\{ Y = y_j \right\}$.

*Démonstration.*

1. La famille $\left(\left\{ Y = y_j \right\} | j \in [\![1, p]\!]\right)$ est un système complet d'événements.
2. La famille $\left(\left\{ X = x_i \right\} | i \in [\![1, n]\!]\right)$ est un système complet d'événements.

∎

**D 5**

- Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont appelés **variables marginales** du couple $(X, Y)$.
- La loi de la variable aléatoire réelle $X$ (resp. $Y$) seule est appelé **loi marginale** de $X$ (resp. $Y$).

**E 6** On reprend l'exemple 2.

| $X_1 \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 2 | $0$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $0$ | $0$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 4 | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| Total | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{7}{16}$ | $1$ |

On (re)trouve ainsi les loi de $X_1$ et $Y$ :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{i,\bullet}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

et

| $y_j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{\bullet,j}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{7}{16}$ |

Ainsi, la connaissance de la loi du couple $(X, Y)$ permet de retrouver les lois marginales. La réciproque est bien sûr totalement fausse!

**P 7** *Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.*
*Si $y_\ell \in Y(\Omega)$,* ***la loi de $X$ conditionné par $\{ Y = y_\ell \}$*** *est caractérisée par les probabilités*

$$P\left(X = x_k | Y = y_\ell\right) = \frac{P\left(X = x_k \text{ et } Y = y_\ell\right)}{P\left(Y = y_\ell\right)} = \frac{p_{k,\ell}}{p_{\bullet,\ell}}.$$

**E 8** On reprend l'exemple 2. La loi de $X$ sachant $\{ Y = 3 \}$ est donnée par

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_{(Y=3)}\left(X = x_k\right)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 0 |

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

De même, on trouve pour la loi du couple $(X_1, Y)$:

| $X_1 \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | 0 | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{4}{16}$ |

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3,1); (3,2); (3,3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

**T 3** Vérifier les autres cas pour la loi du couple $(X_1, Y)$.

**D 9** Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$.
On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes si pour toutes parties $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$, on a

$$P\left(X\in A \text{ et } Y\in B\right)=P\left(X\in A\right)\times P\left(Y\in B\right).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

**T 10** *$X$ et $Y$ sont indépendantes si, et seulement si*

$$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega), P\left(X=x \text{ et } Y=y\right)=P\left(X=x\right)\times P\left(Y=y\right).$$

**E 11** On reprend l'exemple 2.

- $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.
- $X_1$ et $Y$ ne sont pas indépendantes car

$$P\left(X_1=2 \text{ et } Y=1\right)=0\neq P(X_1=2)\times P(Y=1)=\frac{4}{16}\times\frac{1}{16}.$$

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On appelle résultat le couple formé du numéro de la première boule et du numéro de la deuxième boule. Ainsi $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}^2$. Sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on choisit pour $P$ l'équiprobabilité. On a

$$X_1(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!] \quad Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$$

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

On a alors,

$$\forall (i,j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P\left((X_1 = i) \text{ et } (X_2 = j)\right) = \frac{1}{16}.$$

ce que l'on peut représenter ainsi:

| $X_1 \backslash X_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

**E 2** On considère une urne avec 4 boules numérotée de 1 à 4 et les tirages successifs de 2 boules avec remise. On note

- $X_1$ le numéro de la boule obtenue au premier tirage,
- $X_2$ le numéro de la boule obtenue au second tirage,
- $Y$ le plus grand numéro obtenu lors des deux tirages.

De même, on trouve pour la loi du couple $(X_1, Y)$:

| $X_1 \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | 0 | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{4}{16}$ |

Par exemple, l'événement $\left\{ X_1 = 3 \right\}$ et $\{ Y = 3 \}$ est $\{ (3,1); (3,2); (3,3) \}$, d'où

$$p_{i,j} = P\left(X_1 = 3 \text{ et } Y = 3\right) = \frac{3}{16}.$$

**T 3** Vérifier les autres cas pour la loi du couple $(X_1, Y)$.

**T 12** *Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.*
*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

*Démonstration.* On remarque que

$$\{ f(X) \in A \} = \{ \omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) \in A \} = \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) \in f^{-1}(A) \right\} = \left\{ X \in f^{-1}(A) \right\}.$$

De même $\{ g(Y) \in B \} = \left\{ Y \in g^{-1}(B) \right\}$. Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P\left(f(X) \in A \text{ et } g(Y) \in B\right) &= P\left(X \in f^{-1}(A) \text{ et } Y \in g^{-1}(B)\right) \\ &= P\left(X \in f^{-1}(A)\right) \times P\left(Y \in g^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute parties $A$ et $B$ de $\mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. ∎

**E 13** Si $X$ et $Y$ sont indépendantes,

- $X^2$ et $Y^2$ sont indépendantes,
- $X^2$ et $aY + b$ sont indépendantes.

**T 14** *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes,*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Démonstration.* On utilise le théorème de transfert (qui s'applique également aux couples):

$$E\left(XY\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j P\left(X = x_i \text{ et } Y = y_j\right)$$

où l'on a noté $X\left(\Omega\right) = \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \right\}$ et $Y\left(\Omega\right) = \left\{ y_1, y_2, \ldots, y_p \right\}$. ∎

**D 15** On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$P\left(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n\right) = P\left(X_1 = x_1\right) \times P\left(X_2 = x_2\right) \times \cdots \times P\left(X_n = x_n\right).$$

**P 16** *$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si, et seulement si pour toute famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ dévénements,*

$$\left\{ X_1 \in A_1 \right\}, \quad \left\{ X_2 \in A_2 \right\}, \quad \dots \quad \left\{ X_n \in A_n \right\}$$

*sont des événements mutuellement indépendants.*

Rappelons que cela signifie que pour toute sous-famille $i_1, i_2, \dots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ X_{i_k} \in A_{i_k} \right\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left\{ X_{i_k} \in A_{i_k} \right\}.$$

**T 17** **Lemme des coalitions**

*Soient* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *des variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. *Soit*

$$f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_k(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : X_{k+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

*Si* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires*

$$f(X_1, \dots, X_k) \quad \text{et} \quad g(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

*sont indépendantes.*

*Démonstration.* Démonstration hors programme. ∎

Ce résultat s'étend au cas de plus de deux coalitions.

**T 18** *Soit $p$ un réel, $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.*
*Alors la variable aléatoire*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

*suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.*

*Esquisse de démonstration.* On effectue une récurrence sur $n$. On remarque que pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = k\right) &= P\left(X_n = 0\right) P\left(S_{n-1} = k\right) + P\left(X_n = 1\right) P\left(S_{n-1} = k - 1\right) \\
&= (1-p)\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} + p\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

∎

**D 19** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, on appelle **covariance** de $X$ et $Y$ le réel noté $\mathrm{Cov}(X, Y)$ défini par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

**T 20** **Formule de König-Huygens**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

**T 21** *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

⚠ La réciproque est fausse.
Quand on est malade, il ne faut surtout pas aller à l'hôpital : la probabilité de mourir dans un lit d'hôpital est 10 fois plus grande que dans son lit à la maison.

**P 22** *Soient $X, Y, Z, T$ des variables aléatoires réelles et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. $\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X + Y, Z + T) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(X, T) + \mathrm{Cov}(Y, Z) + \mathrm{Cov}(Y, T)$.
4. $V(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

**T 23** **Variance d'une somme**

*Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires, alors*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)$$
$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\operatorname{Cov}(X,Y).$$

*De même, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X,Y).$$

*Plus généralement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires, alors*

$$V(X_1+\dots+X_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j).$$

**P 24** *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$