Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

Aperçu

1. Ensemble des solutions
2. Résolution d'une équation d'ordre 1
3. Résolution d'une équation d'ordre 2
4. Applications

D 1 On appelle **équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants** une équation qui s'écrit sous la forme

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t), \tag{E}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, et $u : J \to \mathbb{K}$ une application continue.
Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que l'équation (E) est d'ordre n.
On appelle équation homogène associée à (E), l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

D 2 Soit $I \subset J$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f est solution de (E) sur I si

- l'application f est dérivable n fois sur I, et
- $\forall t \in I, a_n f^{(n)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 y(t) = u(t)$.

Résoudre ou **intégrer** l'équation différentielle E sur I, c'est donner toutes les solutions définies sur I.
Une **courbe intégrale** de E est la courbe représentative d'une solution de E.

N On note encore $\mathcal{S}_E(I)$ l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I.

E 3 La fonction $f : t \mapsto e^{3t} - e^{-t}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - 3y(t) = 4e^{-t}$$

mais aussi de l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0.$$

E 4 Les solutions de $y'(t) = u(t)$ sur l'intervalle I sont les primitives de la fonction u sur I.

Dans la suite... Le programme se limite aux équations d'ordre 1 et 2. Nous nous limiterons donc aux équations de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u(t) \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$, le scalaire a étant éventuellement nul. Le système homogène associé devient

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{H}$$

P 5 **Principe de superposition des solutions**

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $u_1, u_2 \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On considère les équations différentielles

$$(E_1) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u_1(t)$$
$$\text{et } (E_2) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u_2(t).$$

Si f_1 et f_2 sont solutions sur I respectivement de (E_1) et (E_2), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution sur I de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda u_1(t) + \mu u_2(t).$$

T 6 *S'il existe une solution* $f_0 \in \mathcal{S}_E(I)$, *alors*

$$\mathcal{S}_E(I) = f_0 + \mathcal{S}_H(I) = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}_H(I) \right\}.$$

P 7 *Soit a, b et c trois nombres réels, et $u : I \to \mathbb{C}$. Une application f est solution complexe de l'équation différentielle*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u(t) \tag{E}$$

si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont respectivement solutions de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \mathfrak{Re}(u)(t) \qquad \text{et} \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \mathfrak{Im}(u)(t)$$

Ce résultat est complètement faux si a, b ou c ne sont pas réels !

T 8 *Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq 0$. Les solutions de l'équation homogène*

$$ay'(t) + by(t) = 0$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions f_λ où

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) \end{array}, \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une application. Posons $r = -\dfrac{b}{a}$ et $z : t \mapsto y(t)e^{-rt}$. Autrement dit, nous allons chercher les solutions $y : I \to \mathbb{K}$ sous la forme

$$\forall t \in I, y(t) = z(t)e^{rt}.$$

∎

D 9 Le polynôme $aX + b$ est appelé **polynôme caractéristique** de l'équation différentielle

$$ay'(t) + by(t) = 0.$$

En notant $r = -b/a$ la racine de ce polynôme, les solutions de l'équation différentielle sont donc les applications $t \mapsto \lambda e^{rt}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque.

E 10 On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(E) \,:\, 3y'(t) + 4y(t) = 8.$$

Le second membre étant constant, il est facile de trouver une *solution apparente*

$$f \,:\, t \mapsto 2.$$

De plus, l'équation homogène associée à (E)

$$(H) \,:\, 3y'(t) + 4y(t) = 0,$$

a pour polynôme caractéristique $3X+4$ qui a pour racine $\frac{-4}{3}$. Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\frac{4}{3}t} \end{array}, \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'équation (E) étant linéaire, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les applications

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2 + \lambda e^{-\frac{4}{3}t} \end{array}, \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

T 11 *Soit* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq 0$, *et* $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ *un polynôme de degré* n. *Alors l'équation*

$$ay'(t) + by(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ *de la forme*

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \end{array}$ *si* $b \neq 0$.
2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & t\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n\right) \end{array}$ *si* $b = 0$ *et* $a \neq 0$.

avec $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ *à déterminer.*

T 12 *Soit* $(a,b,A,m)\in\mathbb{K}^4$, $a\neq 0$ *et* $P=aX+b$. *Alors l'équation*

$$ay'(t)+by(t)=Ae^{mt}$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ *de la forme*

1. $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{K}\\ t & \mapsto & Be^{mt}\end{array}$ *si* m *n'est pas racine de* P *(i.e.* $am+b\neq 0$*).*
2. $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{K}\\ t & \mapsto & Bte^{mt}\end{array}$ *si* m *est racine de* P *(i.e.* $am+b=0$*).*

avec $B\in\mathbb{K}$ *à déterminer.*

D 13 Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle du premier ordre (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions f de (E) qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$.

T 14 **Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz**

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $u : I \to \mathbb{K}$ une application continue sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + ay(t) & = & u(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{E}$$

admet une solution unique.

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de E passant par le point $M_0(t_0, y_0)$.

Démonstration. ∎

E 15 Soit $k \in \mathbb{K}$. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{-kt} \end{array}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + ky(t) & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

E 16 Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (E) : 2y'(t) - 3y(t) & = & 7e^{-5t} + 5e^{-7t} \\ y(1) & = & \pi. \end{array} \right.$$

Étudions la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R; autrement dit, cherchons la variation du courant i et de la différence de potentiel v en fonction du temps t (figure 1).

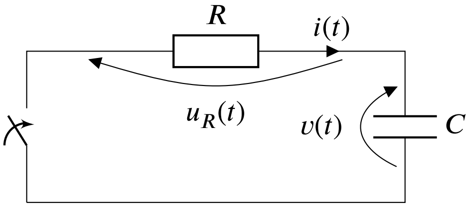


Figure:

Soient v_0 la différence de potentiel aux bornes à l'instant initial et q_0 la charge contenue dans le condensateur. Nous savons que $q_0 = Cv_0$.
Plaçons nous au bout du temps t après la fermeture de l'interrupteur. À ce moment, la charge qui *reste* dans le condensateur est q (le condensateur a déjà perdu une partie de sa charge), et la différence de potentiel aux bornes (qui varie de v_0 à 0) est devenue v, et

$$q = Cv.$$

On connaît la relation entre l'intensité du courant arrivant sur le condensateur et la variation de charge de l'armature positive

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

D'autre part, aux bornes de R, il y a une différence de potentiel $-v$, et la loi d'Ohm nous donne

$$i = -v/R \quad \text{d'où} \quad C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{R}.$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v = 0.$$

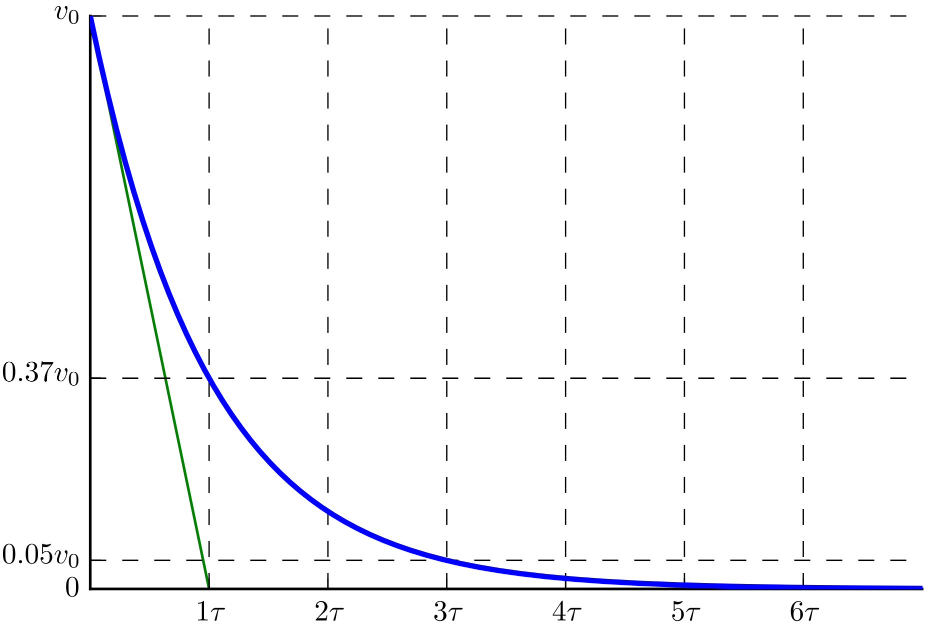
Cette équation différentielle a pour polynôme caractéristique $X + \frac{1}{RC}$ qui a pour racine $\frac{-1}{RC}$. Nous en déduisons

$$v(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Pour déterminer la constante λ, remarquons que si $t = 0$, alors $v(0) = v_0$. Donc $\lambda = v_0$ et

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

C'est une fonction exponentielle décroissante


v_0
$0.37v_0$
$0.05v_0$
0
1τ
2τ
3τ
4τ
5τ
6τ

Le produit RC s'appelle **constante de temps** du circuit et se note τ. Ce nombre caractérise la vitesse de la décharge. Le temps τ est celui au bout duquel la différence de potentiel v_0 est divisée par e; en effet, lorsque $t = \tau$,

$$v(\tau) = v_0 e^{-\tau/\tau} = v_0 e^{-1} = \frac{v_0}{e} \approx 0.37 v_0 \approx \frac{1}{3} v_0.$$

La dérivée est

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Lorsque $t = 0$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t = 0) = -v_0/\tau$; la tangente en $t = 0$ à la courbe coupe donc l'asymptote $v = 0$ en $t = \tau$.

Soit α l'angle de la tangente au point $(0, v_0)$ avec (Ox); par définition $\tan\alpha = -v_0/\tau$, et l'on voit que

- si τ est grand, l'angle α est petit, et v diminue lentement,
- si τ est petit, l'angle α est grand, et v diminue rapidement.

Le courant i est donnée par

$$i(t) = -\frac{v(t)}{R} = -\frac{v_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

et son graphe a la même forme que celui de v en fonction du temps t.

Nous allons chercher le temps au bout duquel le courant i et la différence de potentiel v sont égaux à 5% de leurs valeurs initiales. Ce temps t est défini par l'équation

$$v(t) = \frac{5}{100} v_0 = v_0 e^{-t/\tau},$$

soit

$$e^{t/\tau} = 20,$$

ou encore

$$t = \ln(20)\tau \approx 2.99573\tau \approx 3\tau.$$

De manière analogue, le temps au bout duquel le courant i et la différence de potentiel v sont égaux au centième de leurs valeurs initiales (temps au bout duquel on considère que la décharge est pratiquement terminée) est

$$t = \ln(100)\tau \approx 4.6\tau.$$

Le temps recherché est environ 5τ.

On étudie le dipôle RC en régime sinusoïdal: un générateur impose aux bornes de ce dipôle la tension

$$e(t) = E\cos(\omega t).$$

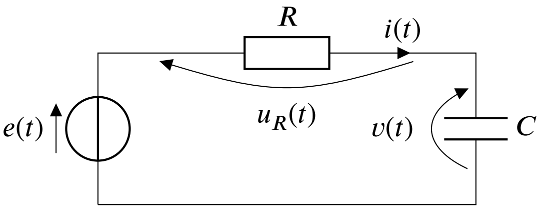


Figure:

Initialement, le condensateur est chargé: $v(t=0) = V_0$.

La loi des mailles permet d'écrire

$$Ri(t) + v(t) = e(t)$$

ce qui donne, en tenant compte que $i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = E\cos(\omega t) \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{E}{RC}\cos(\omega t) \tag{2}$$

Les solutions de l'équation homogène associée ont étés vues précédemment, elle sont de la forme

$$v(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation 2 sous forme complexe. Puisque

$$\frac{E}{RC} \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(\omega t) = \mathfrak{Re}\left(e^{j\omega t}\right),$$

(pour éviter des confusions avec l'intensité i, on note $j^2 = -1$) et que $j\omega$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $X + \frac{1}{RC}$, On cherche une solution particulière (complexe) de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{E}{RC}e^{j\omega t} \tag{3}$$

sous la forme $v(t) = ae^{j\omega t}$: injectons dans l'équation 3

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = aj\omega e^{j\omega t} + \frac{a}{RC}e^{j\omega t} = \frac{E}{RC}e^{j\omega t}$$

c'est-à-dire, puisque $e^{j\omega t}$ n'est pas nul,

$$a\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right) = \frac{E}{RC}.$$

On trouve donc $a = \frac{E}{1+jRC\omega}$ et donc une solution particulière

$$v_c(t) = \frac{E}{1+jRC\omega} e^{j\omega t} = E \frac{1 - jRC\omega}{1+(RC\omega)^2} e^{j\omega t}.$$

L'équation 2 étant linéaire et à coefficients réels, une solution particulière est donnée par

$$v_p(t) = \mathfrak{Re}\left(v_c(t)\right) = E\left(\frac{1}{1+(RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)\right).$$

Résultat assez décevant pour le physicien! Mais ( ) nous reconnaissons une superposition de sinusoïdes : nous allons mettre $v_c(t)$ sous la forme $A\exp\left(j\left(\omega t + \phi\right)\right)$. On a

$$A = \left|\frac{E}{1+jRC\omega}\right| = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \phi = \arg(E) - \arg(1+jRC\omega) = 0 - \arg(1+jRC\omega)$$

En s'assurant que $\omega > 0$, on peut choisir

$$A = \left|\frac{E}{1+jRC\omega}\right| = \frac{E}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \phi = -\arctan(RC\omega).$$

Finalement, une solution particulière de l'équation 2 est

$$v_p(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right).$$

et la solution générale est donnée par les fonctions

$$v(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right) + \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Initialement, on a $v(t = 0) = V_0$ et donc

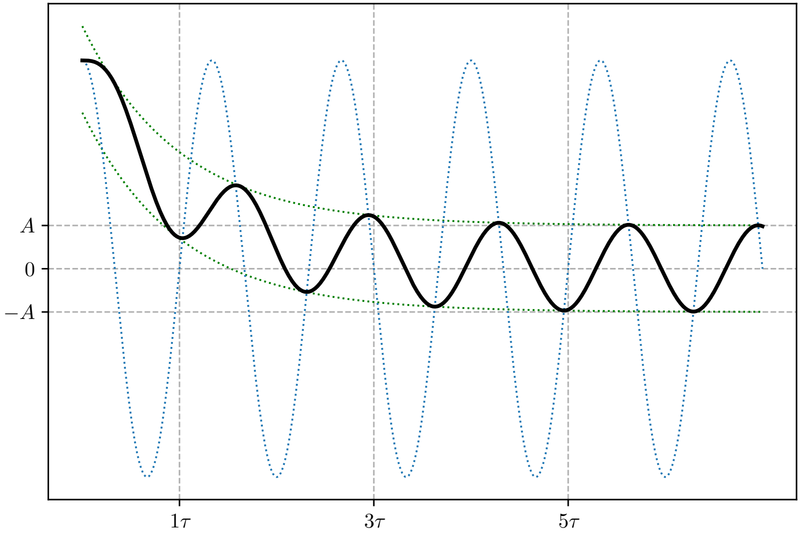
$$\frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\phi\right) + \lambda = V_0,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda = V_0 - \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\phi = V_0 - \frac{E}{1 + (RC\omega)^2}.$$

Et finalement, la solution vérifiant $v(t = 0) = V_0$ est donnée par

$$v(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan(RC\omega)\right) + \left(V_0 - \frac{E}{1 + (RC\omega)^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$



Le terme $\lambda \exp(-\frac{t}{RC})$ est un terme transitoire qui est pratiquement négligeable au bout de $5\tau = 5RC$. Le terme $A\cos(\omega t - \phi)$ est le régime permanent.

Considérons tout d'abord l'équation $ay'' + by' + cy = 0$; dans un premier temps nous allons supposer que a, b, c sont complexes et chercher les solutions complexes.
En s'inspirant de ce qu'on sait sur les solutions des équations du premier ordre, on cherche tout d'abord à savoir si des fonctions exponentielles sont solutions.
Soit donc $f_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$. Alors

$$af_r''(t) + bf_r'(t) + cf_r(t) = (ar^2 + br + c)\,\mathrm{e}^{rt},$$

et donc f_r sera solution de l'équation différentielle si et seulement si r est racine du polynôme $P = aX^2 + bX + c$.

D 17 Le polynôme

$$aX^2 + bX + c$$

est appelé **polynôme caractéristique** de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

La découverte de ce polynôme caractéristique est due à Euler.

T 18 *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H}$$

On note $P = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant de P.

1. *Si $\Delta \neq 0$, alors P admet deux racines distinctes r_1 et r_2 et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

2. *Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double $r = \dfrac{-b}{2a}$ et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{rt} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

On cherche ici les solutions réelles de (H) où a, b et c sont des nombres réels.

T 19 *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H}$$

On note $P = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant de P.

1. *Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche ici les solutions réelles de (H) où a, b et c sont des nombres réels.

T 19 *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H}$$

On note $P = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant de P.

2. *Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double $r = \dfrac{-b}{2a}$ et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{rt} \end{array} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche ici les solutions réelles de (H) où a, b et c sont des nombres réels.

T 19 *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \qquad \text{(H)}$$

On note $P = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant de P.

3. *Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ et*

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))\, \mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Démonstration.

1. Même démonstration que le cas complexe $\Delta \neq 0$.
2. Même démonstration que le cas complexe $\Delta = 0$.
3.

(CN) Supposons que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une solution réelle de (H). Alors y est en particulier une solutions à valeurs complexes. Il existe donc deux *complexes* λ et μ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(\lambda\, e^{i\omega t} + \mu\, e^{-i\omega t}\right) e^{\alpha t}.$$

Or, y étant à valeurs réelles, nous avons $y = \mathfrak{Re}(y)$. Donc, [1]

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\mathfrak{Re}(\lambda)\cos(\omega t) - \mathfrak{Im}(\lambda)\sin(\omega t) + \mathfrak{Re}(\mu)\cos(\omega t) + \mathfrak{Im}(\mu)\sin(\omega t))\, e^{\alpha t}.$$

Il existe donc deux nombres *réels* λ' et μ' tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(\lambda' \cos(\omega t) + \mu' \sin(\omega t)\right) e^{\alpha t}.$$

■

[1] ⚠ Il ne suffit pas d'imposer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ dans les solutions complexes pour obtenir les solutions réelles.

Démonstration.

1. Même démonstration que le cas complexe $\Delta \neq 0$.
2. Même démonstration que le cas complexe $\Delta = 0$.
3.
   (CS) Réciproquement, on considère les fonctions y_1 et y_2 définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t} + \mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)t}\right) = \cos(\omega t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t} - \mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)t}\right) = \sin(\omega t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,.$$

   Ces deux fonctions sont solutions réelles de (H) car elles sont solutions complexes de (H) et sont clairement à valeurs réelles. Le principe de superposition assure qu'il en est donc de même de toutes leurs combinaisons linéaires réelles.

∎

[1] Il ne suffit pas d'imposer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ dans les solutions complexes pour obtenir les solutions réelles.

R Dans le cas $\Delta < 0$, les solutions de (H) peuvent également être données par les fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi) \end{array}$ avec $(A, \phi) \in \mathbb{R}^2$.

E 20 Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2 + X + 1$, son discriminant est $-3 < 0$, et ses racines sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions complexes de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + \mu e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-t/2} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

E 21 Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2 - 3X + 2$, son discriminant est $1 > 0$, et ses racines sont 1 et 2. Les solutions complexes de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^t + \mu e^{2t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^t + \mu e^{2t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

E 22 Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2 - 4X + 4$, son discriminant est 0, et sa racine (double) est 2. Les solutions complexes de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)e^{2t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)e^{2t} \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

T 23 *Soit* $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$, $a\neq 0$, *et* $Q=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ *un polynôme de degré* n. *Alors l'équation*

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ *de la forme*

1. $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{K}\\ t & \mapsto & b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n\end{array}$ *si* $c\neq 0$.
2. $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{K}\\ t & \mapsto & t\left(b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n\right)\end{array}$ *si* $c=0$ *et* $b\neq 0$.
3. $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{K}\\ t & \mapsto & t^2\left(b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n\right)\end{array}$ *si* $c=0$ *et* $b=0$.

avec $b_0,\ldots,b_n\in\mathbb{K}$ *à déterminer.*

T 24 *Soit* $(a, b, c A, m) \in \mathbb{K}^4$, $a \neq 0$ *et* $P = aX^2 + bX + c$. *Alors l'équation*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = Ae^{mt}$$

admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ *de la forme*

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Be^{mt} \end{array}$ *si* m *n'est pas racine de* P.
   (i.e. $am^2 + bm + c \neq 0$*).*
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Bte^{mt} \end{array}$ *si* m *est racine simple de* P.
   (i.e. $am^2 + bm + c = 0$ *et* $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$*).*
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Bt^2e^{mt} \end{array}$ *si* m *est racine double de* P.
   (i.e. $am^2 + bm + c = 0$ *et* $\Delta = b^2 - 4ac = 0$*).*

avec $B \in \mathbb{K}$ *à déterminer.*

E 25 Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$

M Lorsque $(a, b, c, \alpha, \omega) \in \mathbb{R}^5$, $a \neq 0$, les solutions des équations différentielles

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$$
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

sont les parties réelles et imaginaire des solutions (complexes) de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{(\alpha + i\omega)t}.$$

E 26 Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{-2t}\sin(t)$.

D 27 Un **problème de Cauchy du second ordre** est la donnée d'une équation différentielle du second ordre (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions f de (E) qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

T 28 **Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ une application continue sur un intervalle I. Pour tous $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $y'_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = & u(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y'_0 \end{array}\right.$$

admet une solution unique.

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de E passant par un point $M_0(t_0, y_0)$ déterminée du plan et admettant en ce point une tangente fixée.

Démonstration. Admise. Si l'on suppose l'existence, il est facile de montrer l'unicité.

1. Ensemble des solutions
2. Résolution d'une équation d'ordre 1
3. Résolution d'une équation d'ordre 2
4. Applications

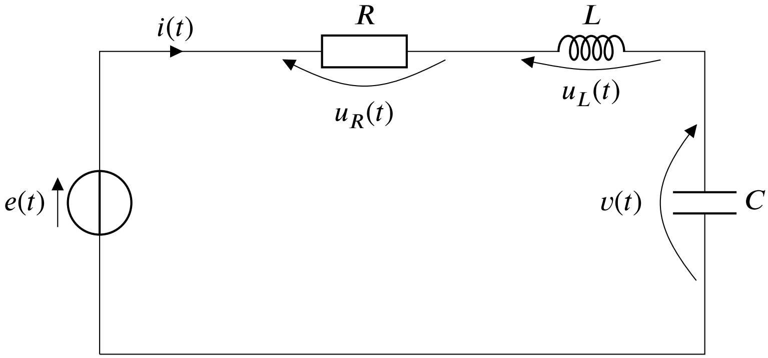


Figure:

À l'aide de la loi des mailles; on obtient

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t)$$

et puisque $i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, on obtient

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t). \tag{4}$$

L'équation différentielle correspondant à ce régime libre est l'équation homogène associée à (4)

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = 0. \tag{5}$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

nous obtenons l'équation fondamentale

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v(t) = 0. \tag{6}$$

Son polynôme caractéristique est $P = X^2 + 2\alpha X + \omega_0^2$.

Premier cas : $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$. C'est-à-dire $(R/2L)^2 > 1/LC$, ou encore

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique a deux racines réelles,

$$r_1 = -\alpha + \beta, \quad r_2 = -\alpha - \beta, \quad \text{où} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = Ae^{(\beta-\alpha)t} + Be^{-(\beta+\alpha)t},$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer.

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = C\left(A(\beta-\alpha)e^{(\beta-\alpha)t} - B(\beta+\alpha)e^{-(\beta+\alpha)t}\right).$$

Compte tenu des conditions initiales pour $t = 0$:

$$v(t=0) = v_0 \quad \text{et} \quad i(t=0) = 0,$$

Les constantes A et B sont donc données par le système

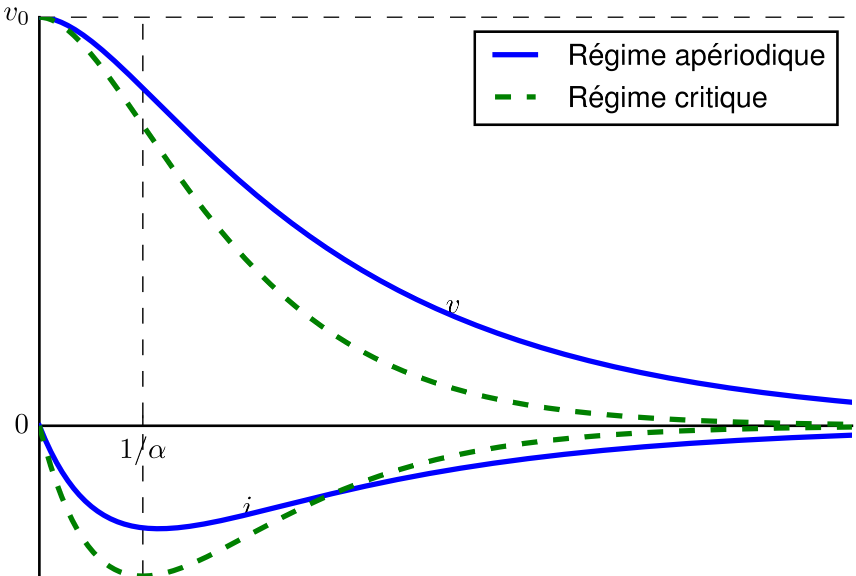
$$\left\{ \begin{array}{rl} A + B & = v_0 \\ A(\beta - \alpha) - B(\beta + \alpha) & = 0 \end{array} \right. \iff A = \frac{v_0(\beta + \alpha)}{2\beta} \text{ et } B = \frac{v_0(\beta - \alpha)}{2\beta}.$$

Compte-tenu du fait que $\beta^2 - \alpha^2 = -\omega_0^2$, on obtient

$$v(t) = \frac{v_0}{2\beta}\left((\beta + \alpha)e^{(\beta-\alpha)t} + (\beta - \alpha)e^{-(\beta+\alpha)t}\right)$$

$$\text{et } i(t) = -\frac{v_0 C\omega_0^2}{2\beta}\left(e^{(\beta-\alpha)t} - e^{-(\beta+\alpha)t}\right).$$

On remarquera que les coefficients $\beta - \alpha$ et $-(\beta + \alpha)$ sont tous deux strictement négatifs. La fonction v, somme de deux exponentielles décroissantes, est elle-même décroissante. On dit qu'il y a **régime apériodique amorti**.



Deuxième cas : $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$ C'est-à-dire $(R/2L)^2 = 1/LC$, ou encore

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique a une racine double, à savoir $r = -\alpha$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = e^{-\alpha t}(A + Bt),$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer.

De plus,

$$i(t) = C\left(-\alpha(A + Bt) + B\right)e^{-\alpha t}.$$

Un calcul analogue au précédent fournit aussitôt

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}(1 + \alpha t) \qquad\qquad i(t) = -CV\alpha^2 t e^{-\alpha t}.$$

Puisque $i = C\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$, on voit que v est encore décroissante. D'autre part $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = CV\alpha^2 e^{-\alpha t}(1 - \alpha t)$. Donc i passe par un maximum lorsque $t = 1/\alpha$, correspondant bien sûr à un point d'inflexion pour v. Les graphe ont la même allure que dans le cas précédent. On dit qu'il y a **régime critique**. C'est également un régime apériodique amorti.

Troisième cas : $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ C'est-à-dire $(R/2L)^2 < 1/LC$, ou encore

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = -\alpha + j\beta \quad r_2 = -\alpha - j\beta \qquad \text{avec } \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, v(t) &= e^{-\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \\ \text{et } \ i(t) &= Ce^{-\alpha t}\left((A\beta - B\alpha)\cos(\beta t) - (B\alpha + A\beta)\sin(\beta t)\right).\end{aligned}$$

Les conditions initiales conduisent cette fois à $A = v_0$ et $A\alpha - B\beta = 0$. D'où $B = A\alpha/\beta = v_0\alpha/\beta$ et

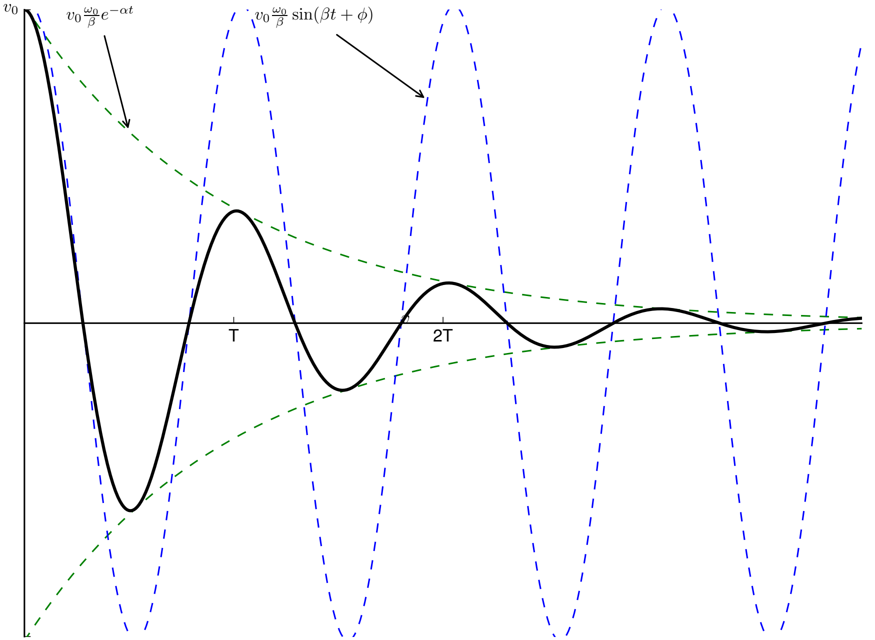
$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} \left(\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t) \right).$$

Si l'on pose $\phi = \arctan(\beta/\alpha)$, on en déduit

$$\cos\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\alpha}{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad \sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\beta}{\omega_0};$$

d'où

$$v(t) = v_0 \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \qquad\qquad i(t) = \frac{C v_0 \omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t).$$



On dit qu'il y a **régime pseudo-périodique**.

Plus précisément, nous étudions l'équation (4) équivalente à

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 9v(t) = 3\sin(2t). \tag{7}$$

Considérons alors l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 9v(t) = \exp(j2t). \tag{8}$$

Puisque $2j$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $X^2 + 4X + 9$, on peut trouver une solution particulière de (8) sous la forme

$$v(t) = Be^{j2t}.$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 2Bje^{j2t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} = -4Be^{j2t}$$

ce qui donne, en injectant dans (8)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 9v(t) = e^{j2t} &\iff (-4B + 8Bj + 9B)e^{j2t} = e^{j2t} \\ &\iff B\,(5 + 8j) = 1 \\ &\iff B = \frac{1}{5+8j} = \frac{5-8j}{89}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation (8) est donc

$$v_c(t) = \frac{5-8j}{89}\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right),$$

L'équation (4) étant linéaire à coefficients réels, on en déduit une solution particulière donnée par

$$v_p(t) = 3\,\mathfrak{Im}\left(v_c(t)\right) = \frac{15}{89}\sin(2t) - \frac{24}{89}\cos(2t) = \frac{3}{89}(5\sin(2t) - 8\cos(2t))$$

ou bien avec $\phi = \arctan(8/5)$

$$v_c(t) = \frac{1}{\sqrt{89}}e^{-j\phi}e^{2jt} = \frac{1}{\sqrt{89}}e^{j(2t-\phi)}$$

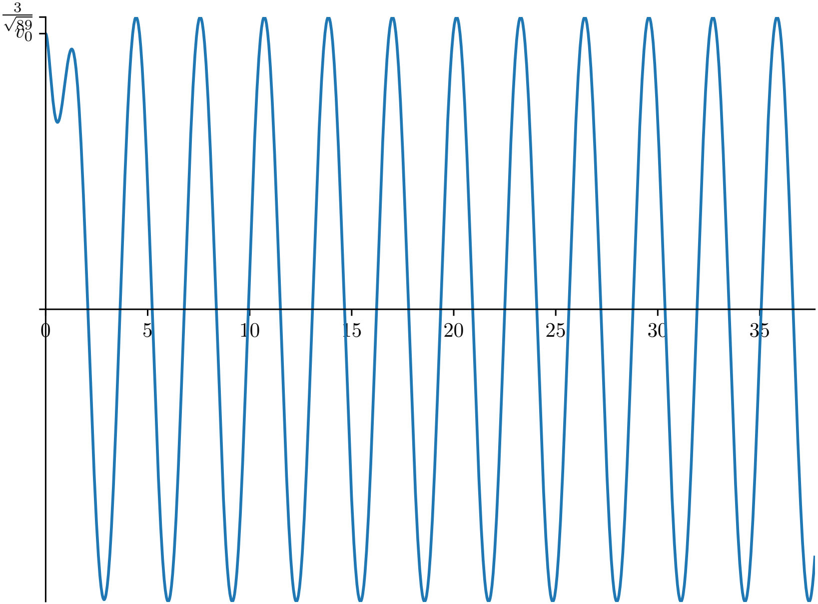
$$v_p(t) = \frac{3}{\sqrt{89}}\sin\left(2t-\phi\right).$$

La solution générale de l'équation différentielle est donnée par les fonctions

$$v(t) = e^{-2t}\left(\lambda\cos\left(\sqrt{5}t\right) + \mu\sin\left(\sqrt{5}t\right)\right) + \frac{3}{\sqrt{89}}\sin\left(2t-\phi\right).$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer en fonction des conditions initiales $v(t=0)$ et $i(t=0)$.

Remarquons qu'au bout de quelques périodes, on a $v(t) \approx \frac{3}{\sqrt{89}} \sin(2t - \phi)$.



Voici un autre exemple, avec des calculs un peu plus pénibles, mais un résultat plus amusant...