

CALCULS ALGÈBRIQUES

4.1 LE SYMBOLE SOMME \sum

§1 Règles de calcul

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. La somme des termes de u_p à u_q est notée

$$\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

La somme $\sum_{k=p}^q u_k$ se note aussi $\sum_{p \leq k \leq q} u_k$.

Pour tous entiers naturels $p \leq q$, la somme $\sum_{k=p}^q$ comporte $q - p + 1$ termes.

Exemples 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers non nuls est

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k.$$

Remarque

L'indice k est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre indice. Il convient de ne jamais confondre k et n . Ainsi

$$\underbrace{n + n + n \cdots + n}_n = \sum_{k=1}^n n \neq \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n.$$

Test 3

Calculer $S = \sum_{k=230}^{580} 1$. Combien de termes contient cette somme ?

Test 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du symbole \sum la somme suivante

$$S_n = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 775 + 777$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

§2 Propriétés

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q < n$ trois entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^q u_k + \sum_{k=q+1}^n u_k$$

Remarque

Cela vous rappelle peut-être $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Mais attention : pour une intégrale, les bornes « c » sont identiques, ce qui n'est pas le cas d'une somme $\sum_{k=p}^n$. Il y a beaucoup de points communs entre

\int_a^b et $\sum_{k=p}^n$. La première est une somme continue, la deuxième une somme discrète. Les deux sont des cas particuliers de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Proposition 6

Pour tous nombres complexes λ et μ , toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

$$\sum_{k=p}^q (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^q a_k \qquad \sum_{k=p}^q (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=p}^q b_k$$

On dit que $\sum_{k=p}^q$ est linéaire.

On peut écrire directement,

$$\sum_{k=p}^q (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^q a_k + \mu \sum_{k=p}^q b_k.$$

Proposition 7

Pour toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

$$\Re \left(\sum_{k=p}^q a_k \right) = \sum_{k=p}^q \Re(a_k); \quad \Im \left(\sum_{k=p}^q a_k \right) = \sum_{k=p}^q \Im(a_k); \quad \overline{\sum_{k=p}^q a_k} = \sum_{k=p}^q \overline{a_k}.$$

§3 Changement d'indices

La somme $S = 6 + 8 + 10 + \dots + 26 + 28$ possède de nombreuses écritures

$$S = \sum_{k=3}^{14} 2k = \sum_{k=2}^{13} (2k + 2) = \sum_{k=4}^{15} (2k - 2)$$

Plus généralement, on a $\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

Méthode

Effectuons le changement de variable $l = k + 1$ dans la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_{k+1}$$

L'application

$$\begin{aligned} \{0, 1, \dots, n\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\} \\ k &\mapsto k+1 \end{aligned}$$

est une bijection : lorsque k décrit l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$, $l = k + 1$ décrit l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+1\}$, d'où

$$S_n = \sum_{l=1}^{n+1} u_l$$

L'indice l étant muet, on préfère écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k.$$



Pour certain changement d'indice, il faut faire attention à l'ordre des bornes : $\sum_{l=n}^0$ n'a pas de sens si $0 < n$. On aura par exemple,

$$\sum_{k=0}^n u_k \stackrel{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^n u_{n-l}.$$

Proposition 8**Changements d'indices utiles (à savoir retrouver)**

1. Par translation :

$$\sum_{k=p}^q u_{k+m} = \sum_{k'=p+m}^{q+m} u_{k'} = \sum_{k=p+m}^{q+m} u_k$$

car $p \leq k \leq q$ équivaut à $p+m \leq k+m \leq q+m$.

2. Par symétrie :

$$\sum_{k=p}^q a_{p+q-k} = \sum_{k'=p}^q u_{k'} = \sum_{k=p}^q u_k$$

car $p+q-k$ est le symétrique de k par rapport à $\frac{p+q}{2}$ et $p \leq k \leq q$ équivaut à $p \leq p+q-k \leq q$.

§4 Simplification télescopiques**Proposition 9**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

Test 10

En remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

4.2 SOMMES USUELLES**§1 Somme d'une progression arithmétique****Proposition 11**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. Notons $S = \sum_{k=0}^n k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ donc

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2$$

et $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=0}^n 2k + 1 = 2S + (n+1).$

D'où $2S = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1-1)(n+1) = n(n+1).$ ■

Théorème 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique, $p \leq q$ deux entiers naturels alors

$$\sum_{k=p}^q u_k = (q-p+1) \frac{u_p + u_q}{2}$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 + kr = u_0 + pr + (k-p)r = u_p + (k-p)r.$

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q u_k &= \sum_{k=p}^q u_p + (k-p)r \\ &= (q-p+1)u_p + \sum_{k'=0}^{q-p} k' r && (k' = k-p) \\ &= (q-p+1)u_p + \frac{(q-p+1)(q-p)}{2} r \\ &= \frac{q-p+1}{2} (u_p + u_p + (q-p)r) \\ &= \frac{q-p+1}{2} (u_p + u_q). \end{aligned}$$

■



La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple 13

$$\sum_{k=p}^q k = (q-p+1) \frac{p+q}{2}.$$

§2 Factorisation de $a^n - b^n$

Théorème 14

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

On peut également écrire

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

Test 15

- $a^7 - b^7 =$
- $a^7 - 1 =$
- $a^n - 1 =$

Corollaire 16



Soit $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

§3 Somme d'une progression géométrique

Théorème 17

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r , $p \leq q$ deux entiers naturels alors

$$\sum_{k=p}^q u_k = \begin{cases} u_p \frac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ (q - p + 1)u_p & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\neq 1$ est donnée par la formule

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

ou encore

$$\frac{\text{premier terme écrit} - \text{dernier terme non écrit}}{1 - \text{raison}}$$

Test 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$.

2. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.

Méthode

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b) = a(u_{n+1} - u_n) = av_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison a . On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1-a^n}{1-a} = ((a-1)u_0 + b) \frac{1-a^n}{1-a} = u_0(a^n - 1) + b \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Par télescopage, on a également,

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

et après simplification,

$$u_n = u_0 a^n + b \frac{1-a^n}{1-a}.$$

§4 Formule du binôme**Définition 19**

- Soit n un entier ; on note $n!$, qui se lit **factorielle n**, l'entier défini par

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

On a donc $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices n et p** le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

On pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout couple d'entiers naturels tels que $p < 0$ ou $p > n$.

Test 20

- Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} =$.
- Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} =$.
- Pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} =$.

Proposition 21

1. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.
3. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ (formule de Pascal).
4. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p}$ est un entier naturel.

Théorème 22**Formule du binôme de Newton**

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On peut également écrire

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esquisse de démonstration. Démonstration par récurrence sur n . Pour l'hérédité, on utilise $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n$. On développe et on effectue le changement de variable adéquat pour retrouver des termes en $a^{n+1-k} b^k$. On découpe les indices qui dépassent, on regroupe les autres grâce à la formule de Pascal. ■

Remarque**Interprétation combinatoire**

En développant le produit

$$(a + b)^n = (a + b) \cdots (a + b),$$

on obtient des termes du type $a^{n-k} b^k$ avec $0 \leq k \leq n$, l'indice k correspondant au nombre de facteurs du produit $(a + b) \cdots (a + b)$ pour lesquelles on a choisi b . Puisque l'on dénombre $\binom{n}{k}$ choix possible de k facteurs parmi n , on obtient

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

§5 Somme de puissances successives**Proposition 23**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4.3 GÉNÉRALISATION DE LA NOTATION \sum

§1 Somme d'une famille finie

Si on rajoute une condition sous le symbole \sum , cela signifie qu'on se limite aux indices qui vérifient la condition.

Exemple 24

La somme $u_{2p} + u_{2p+2} + \dots + u_{2q-2} + u_{2q}$ peut être notée $\sum_{k=p}^q u_{2k}$, mais également

$$\sum_{\substack{k=2p \\ k \text{ pair}}}^{2q} u_k \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{k=2p \\ k \in 2\mathbb{N}}}^{2q} u_k.$$

Exemple 25

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{10} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$$

Notation

Soit $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ un ensemble fini et u_{i_1}, \dots, u_{i_n} des complexes alors on note

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \dots + u_{i_n}$$

Exemple 26

Si $I = \{0, 2, \dots, 2n\}$,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k$$

§2 Sommes doubles

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ une famille de nombres complexes. Une telle famille peut être rangée dans un tableau que nous appellerons **matrice** à p lignes et q colonnes. Par exemple, dans le cas où $p = 3$ et $q = 5$:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{array}$$

Théorème 27

Permutation des \sum

La somme des nombre $a_{i,j}$ est

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j} = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p a_{i,j}$$

Lorsque i et j décrivent le même ensemble d'indices, on écrit abrégativement

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}.$$

§3 Produit de deux sommes finies

Théorème 28

Soient $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket}$ deux familles finies de nombres complexes. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{j=1}^q b_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_i b_j.$$

§4 Sommes triangulaires

Théorème 29

Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de nombres complexes

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}$$

et

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}$$

Exemple 30

Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

4.4 LE SYMBOLE PRODUIT \prod

§1 Règles de calcul

Définition 31

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $p \leq q$ deux entiers naturels. Le produit des termes u_p à u_q est notée

$$\prod_{k=p}^q u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

Exemple 32

- Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \leq q$ deux entiers naturels, $\prod_{k=p}^q \alpha = \alpha^{q-p+1}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.

Proposition 33

Pour tout nombre complexe λ , tout entier n , toutes suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et tous entiers naturels $p \leq q$, on a

1. $\prod_{k=p}^q (a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^q a_k \right) \times \left(\prod_{k=p}^q b_k \right).$
2. $\prod_{k=p}^q (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^q a_k.$
3. $\prod_{k=p}^q (a_k^n) = \left(\prod_{k=p}^q a_k \right)^n.$

Proposition 34

Simplification télescopique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls et $p \leq q$ deux entiers naturels. Alors

$$\prod_{k=p}^q \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$$