Vocabulaire relatif aux applications

Aperçu

D

Étant donné deux ensembles A et B, une **application** de A dans B est un triplet $f = (A, B, G)$ où G est une partie de $A \times B$ telle que

$$\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in G.$$

- A est appelé l'**ensemble de départ** ou **ensemble de définition** de f,
- B est **l'ensemble d'arrivée** de f. On dit que la fonction f **prend ses valeurs dans** B ou est **à image dans** B.
- Pour $x \in A$, l'unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in G$ s'appelle **l'image** de x par f, et se désigne par $f(x)$ ou f_x. On dit encore que $f(x)$ est la **valeur** de f pour l'élément x de A.
- Pour $y \in B$, en cas d'existence, tout $x \in A$ tel que $y = f(x)$ est appelé **un antécédent** de y par f.
- G est le **graphe** de f. On a

$$G = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \} = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \} .$$

N

L'ensemble des applications de A vers B se note $\mathscr{F}(A, B)$ ou B^A.
Une application $f \in \mathscr{F}(A, B)$ se note

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{ou} \quad f : A \to B$$

E

- L'application dont l'ensemble de définition ainsi que celui d'arrivée est $\mathbb{N}$; qui a chaque naturel n fait correspondre $n^2 + 1$ se note

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}.$$

  Par exemple, on a $f(4) = 4^2 + 1 = 17$.
- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la relation $y = \frac{1}{x^2-1}$ définit une application de $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

N

- Soient A et B deux ensembles et b un élément de B. L'application $f : A \to B$ définie par
$$\forall x \in A, f(x) = b$$
est une **application constante**. On la note parfois $\tilde{b}$ ou simplement b lorsqu'aucune confusion n'est possible.
- Soit A un ensemble. L'application $\mathrm{Id}_A : A \to A$ définie par
$$\forall x \in A, \mathrm{Id}_A(x) = x$$
est l'**application identique** de A, ou **identité** de A.

P

Deux applications $f : A \to B$ et $g : A' \to B'$ sont ***égales*** *si et seulement si*

- *elles ont même ensemble de départ : $A = A'$,*
- *elles ont même ensemble d'arrivée : $B = B'$,*
- *et si pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$.*

On écrit alors $f = g$.

E

Une fonction f est définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Évaluer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et représenter le graphe de f.

E

Voici un extrait des tarifs courrier pour la France métropolitaine.

Lettre verte	
Poids jusqu'à	Tarifs nets
20g	0.58€
50g	0.97€
100g	1.45€
250g	2.35€
500g	3.15€
1kg	4.15€
2kg	5.40€
3kg	6.25€

Définir la fonction coût C en fonction du poids. Représenter le graphe de C.

Voici une notion qui permet de créer un lien entre les parties d'un ensemble E et des fonctions.

D

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A (dans E), et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0, 1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

$$f(x, y).$$

D Soient $f : A \to B$ une application, et X une partie de A.

- L'ensemble des éléments de B qui possèdent un antécédent dans X s'appelle l'**image** de X par f et se désigne par $f(X)$ ou $f_*(X)$.

$$f(X) = \{ y \in B \mid \exists x \in X, y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in X \} .$$

Autrement dit, $f(X)$ est décrit par $f(x)$ quand x décrit X.

- En particulier, $f(A)$ est appelée l'**image** de f, on la note

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

c'est un abus de langage pour «image de l'ensemble de départ de f par f».

L'image de f est toujours inclue dans l'ensemble d'arrivée de f, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, f \subset Y$.

Étant donnés $f : A \to B$ et $X \subset A$,

$$y \in f(X) \iff \exists x \in X, y = f(x).$$
$$y \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

R Nous avons déjà croisé une notion très proche de la notion d'image directe. C'est la notation d'ensemble en extension. Par exemple, l'ensemble des multiple de 2π,

$$\{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

est l'image directe de $\mathbb{Z}$ par l'application $x \mapsto 2\pi\, x$.

T

Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculer

1. $f(4)$
2. $f(\{4\})$
3. $f(\{1, 3, 5\})$
4. $f(\{-1, 1\})$
5. $f([0, 2])$
6. $f([-3, 1])$
7. $f(\mathbb{R})$
8. $\mathrm{Im}\, f$

Lorsque $A \subset B$, certaines circonstances peuvent se produire.

D

Soient $f : A \to B$ une application avec $A \subset B$ et X une partie de A.

- Si $f(X) \subset X$, on dira que X est une **partie stable** par f.
- Si $f(X) = X$, on dira que X est une **partie invariante** par f.
- Un élément $x \in A$ tel que $f(x) = x$ est dit **invariant** par f. On dit aussi que x est un **point fixe** de f.

D Soit $f : A \to B$ une application, et Y une partie de B. L'ensemble des éléments de A dont l'image est dans Y s'appelle l'**image réciproque** de Y par f et se désigne par $f^{-1}(Y)$ ou $f^{*}(Y)$.

$$f^{-1}(Y) = \{\ x \in A \mid f(x) \in Y\ \}.$$

Étant donnés $f : A \to B$ et $Y \subset B$,

$$x \in f^{-1}(Y) \iff x \in A \text{ et } f(x) \in Y.$$

T

Notons f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer

1. $f^{-1}(\{ 4 \})$.
2. $f^{-1}(\{ 1, 9, 25 \})$.
3. $f^{-1}(\{ -2 \})$.
4. $f^{-1}([0, 4])$.
5. $f^{-1}([-5, -3])$.
6. $f^{-1}([-4, 4])$.
7. $f^{-1}(f([0, 2]))$.
8. $f\left(f^{-1}([-4, 4])\right)$.
9. $f\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}_-\right)\right)$.

D

On dit que deux fonctions f et g **coïncident dans un ensemble** E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g, et si

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

$g : A' \to B'$ est un prolongement de $f : A \to B$ si et seulement si

$$A \subset A' \quad \text{et} \quad B \subset B' \quad \text{et} \quad (\forall x \in A, f(x) = g(x)) .$$

D

Soient $f : A \to B$ une application et X une partie de l'ensemble de définition A de f. L'application dont l'ensemble de définition est X, qui a le même ensemble d'arrivée que f est la **restriction** de f à X, et on la note f_X

$$f_X : \begin{array}{ccc} X & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} .$$

D Soit A, B et C trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, C)$. L'application définie sur A et à valeurs dans C qui à x associe $g(f(x))$ est appelée **composée** des applications g et f ; on la note

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On peut représenter la situation précédente ainsi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

P *Soient quatre ensembles A, B, C, D et trois applications définies par le diagramme*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \, .$$

On a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in \mathscr{F}(A, D).$$

On dit que l'opération $\circ$ est associative.

D Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **injection**, ou que f est une application **injective**, si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Ou de manière équivalente, f est injective si, et seulement si

$$\forall \left(x, x'\right) \in A^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x');$$

autrement dit, si deux éléments distincts de A ont des images distinctes par f.

C *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est injective.*

(ii) *Pour tout* $y \in B$*, l'équation* $f(x) = y$*, d'inconnue* $x \in A$*, admet au plus une solution.*

(iii) *Tout élément de* B *a au plus un antécédent par* f*.*

E Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$ est injective.

E Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2) \end{array}$ est injective.

T *La composée de deux injections est une injection.*

Démonstration. [1] Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications injectives. Nous allons montrer que $g \circ f : A \to C$ est injective, c'est-à-dire

$$\forall (x, x') \in A^2, (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'.$$

Considérons donc deux éléments $x, x' \in A$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque par hypothèse g est injective, nous pouvons affirmer que $f(x) = f(x')$. Puis, f étant également injective, nous avons $x = x'$.
Ceci étant vrai pour tous éléments $x, x' \in A$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, l'application $g \circ f$ est injective. ∎

[1]: Pour démontrer un énoncé aussi général, il faut commencer par se donner des objets sur lesquels on peut travailler. Ici nous avons besoin de deux injections que l'on peut composer ; notons les $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

D Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **surjection**, ou que f est une application **surjective** si

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

C *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est surjective.*

(ii) *$f(A) = B$ (ou encore $\operatorname{Im} f = B$).*

(iii) *Pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in A$, admet au moins une solution.*

(iv) *Tout élément de B a au moins un antécédent par f.*

E Montrer que l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_2 + x_3, 2x_1 - x_3) \end{array}$ est surjective.

T *La composée de deux surjections est une surjection.*

Démonstration. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications surjectives. Nous allons montrer que $g \circ f : A \to C$ est surjective, c'est-à-dire

$$\forall z \in C, \exists x \in A, g \circ f(x) = z.$$

[2] Soit $z \in C$. On cherche $x \in A$ tel que $g \circ f(x) = z$.
Puisque par hypothèse g est surjective, z a un antécédent au moins par g ; c'est-à-dire qu'il existe $y \in B$ tel que $z = g(y)$. Puisque B est aussi l'espace d'arrivée de f et que f est surjective, y a au moins un antécédent dans A : il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
On constate que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

ce qui montre que z a au moins un antécédent par $g \circ f$.
Ceci étant vrai pour tout élément de C, l'application $g \circ f$ est surjective. ∎

[2]: Rappelons que dans les assertions quantifiées, les «variables» sont muettes. Il sera ici un peu plus pratique d'utiliser z plutôt que y.

D Soit f une application de A dans B. On dit que f est une **bijection**, ou que f est une application **bijective**, si

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

E Montrer à l'aide de la définition que que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$ est bijective.

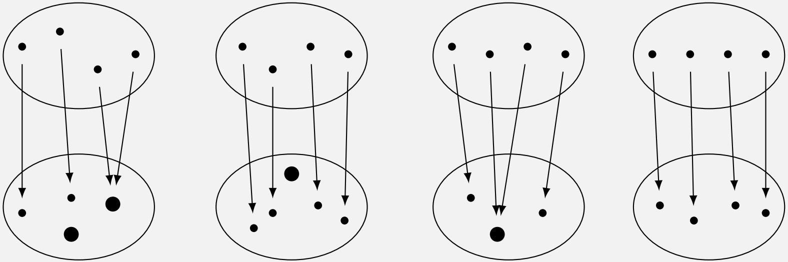
C *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est bijective.*

(ii) *f est à la fois injective et surjective.*

(iii) *Pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in A$, admet une et une seule solution.*

E



Ni injective
ni surjective

Injection
non surjective

surjection
non injective

bijection

E

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est ni injective, ni surjective.
2. $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective mais n'est pas surjective.
3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective mais n'est pas injective.
4. $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

T **et définition**

Soient A et B deux ensembles. Soit f une bijection de A vers B.
Il existe une application unique g de B vers A qui est une bijection telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

*L'application g est appelée **application réciproque** de l'application f et on la note f^{-1}.*

C *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

1. $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x.$
2. $\forall y \in B, f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$

C *Soit $f : A \to B$ une application bijective.*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \left(y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\right)$$

E Montrer que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \end{array}$ est bijective et expliciter sa bijection réciproque.

P

Soient A et B deux ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans A. Si

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B,$$

alors f et g sont bijectives et on a $g = f^{-1}$.

T

Soit trois ensembles A, B, C et deux applications bijective définies par

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \ .$$

Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration.

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_B \circ f = f^{-1} \circ \left(\mathrm{Id}_B \circ f\right) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

et

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_B \circ g^{-1} = \left(g \circ \mathrm{Id}_B\right) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_C \ .$$

∎

D

Soit A un ensemble. On appelle **famille** d'éléments de A **indexée** par l'ensemble I toute application de I dans A notée

$$\begin{array}{ccc} I & \to & A \\ i & \mapsto & x_i \end{array}.$$

L'ensemble I qui est appelé **ensemble des indices**. On utilise généralement la notation $\left(x_i\right)_{i\in I}$ pour désigner une telle famille.

E

- Une suite est une famille dont l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ (ou $\left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \right\}$).
- Si $I = \{ 1, 2, 3 \}$, alors l'ensemble des familles d'éléments de A indexées par I est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) où x, y, z sont trois éléments quelconques de A.

D Considérons une famille d'ensemble $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

- On appelle **intersection de la famille $\mathcal{A}$** l'ensemble $\bigcap_{i \in I} A_i$ dont chacun de ses éléments appartienne à tous les ensembles de $\mathcal{A}$.

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i.$$

- On appelle **réunion de la famille $\mathcal{A}$** l'ensemble $\bigcup_{i \in I} A_i$ dont chacun de ses éléments appartienne à au moins un des ensembles de $\mathcal{A}$.

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i.$$

E Montrer les égalités suivantes.

1. $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k] = \mathbb{R}$.
2. $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^\star} \left[0, \frac{1}{k}\right] = \{ 0 \}$.

D

Une **partition** d'un ensemble E est une famille $(E_i)_{i\in I}$ de parties de E telle que

- $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = E$,
- $\forall i \in I, E_i \neq \emptyset$,
- $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \implies E_i \cap E_j = \emptyset$.