CHAPITRE 16

RELATIONS DE COMPARAISONS SUR LES SUITES

Dans ce chapitre, on supposera que les suites (u_n) et (v_n) ne s'annule pas (éventuellement à partir d'un certain rang).

Définition 1

Soient $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ deux suites de réels. On suppose que $\left(v_n\right)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.
On dit que (u_n) est **«petit o»** de (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Exemple 2

- $n = o(n^2)$ car $\lim \frac{n}{n^2} = 0$.
- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0$.
- $\frac{1}{(n+1)!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$.

Définition 3

Soient $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ deux suites de réels. On suppose que $\left(v_n\right)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.
On dit que (u_n) est **«grand O»** de (v_n) et on note $u_n = O(v_n)$ lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est bornée.

Définition 4

Soient $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ deux suites de réels. On suppose que $\left(v_n\right)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.

On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport u_n/v_n.

Théorème 5 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques qui ne s'annulent pas. On a alors les équivalences suivantes.*

1. *On a $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) est bornée.*
2. *On a $u_n = o\left(v_n\right)$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 0.*
3. *On a $u_n \sim v_n$ si, et seulement si la suite (u_n/v_n) tend vers 1.*

1. Montrer que $2n^2 - 3n + 4 = O\left(n^2\right)$.
2. Montrer que $3n^2 - 5n + 6 = o\left(5n^3\right)$.
3. Montrer que $4n^3 - 5n^2 + 8n - 9 \sim 4n^3 + n^2 - 2$.
4. Montrer que $3^n + n^2 2^n \sim 3^n$.
5. Montrer
$$\sqrt{4n^2+1} = \mathcal{O}(n), \qquad \sqrt{4n^2+1} = o\left(n^2\right), \qquad \sqrt{4n^2+1} \sim 2n.$$
6. La relation $\mathcal{O}$ est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
7. La relation o est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
8. La relation $\sim$ est elle réflexive? Est elle symétrique? Est elle transitive?
9. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est-elle vraie?
10. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$. La réciproque est-elle vraie?
11. Montrer que si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.
12. Montrer que si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$.
13. Montrer que si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o\left(a_n b_n\right)$.
14. Classer les suites suivantes de manière à ce que chacune d'entre elles soit négligeable devant les suivantes.
$$\frac{1}{n^2} \quad n^n \quad \sqrt{n} \quad n! \quad 0.5^n \quad 8n^2 \quad 23n\ln(n)$$
$$\frac{1}{n} \quad 2e^n \quad 9n^5 \quad 4321\ln(n) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 42n \quad 10^n \quad \ln(n)^3$$
15. Montrer que si $v_n = o(u_n)$, alors $u_n + v_n \sim u_n$.

16. Utiliser la propriété précédente pour montrer que

$$8n^5 - n^2 + 1000n \sim 8n^5$$
$$0.5^n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{5}{n} - \frac{18}{n^2} \sim \frac{5}{n}$$
$$n! - n^5 + 10^n \sim n!$$

17. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que (v_n) admet une limite ℓ (finie ou infinie). Montrer que (u_n) tend aussi vers ℓ.

18. On suppose que $a_n \sim b_n$ et que $u_n \sim v_n$. Montrer

$$a_n u_n \sim b_n v_n \qquad \frac{a_n}{u_n} \sim \frac{b_n}{v_n}.$$

19. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que ces deux suites sont à valeurs réelles strictement positives. Montrer que

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

20. Montrer sur un contre exemple que $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$ n'entraine pas $a_n + u_n \sim b_n + v_n$ en général.

21. Déterminer un «équivalent simple» des suites suivantes:

$$u_n = \frac{3n^3 - e^n + 28n\ln(n)}{n! - 10^n + n^{34}} \qquad v_n = \left(3n^2 - 2n + 5\right)\frac{2^n - 3^n + 5^n}{5n^2 + n\sin(n) - 23}.$$

Chapitre 17

Relations de comparaisons sur les suites

17.1 Les relations de comparaisons

§1 Définitions

Définition 1 Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites numériques.

- On dit que la suite (u_n) est **dominé** par la suite (v_n) lorsqu'il existe un entier n_0 et un réel k tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq k|v_n|.$$
On écrit $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, qui se lit «u_n est un grand O de v_n».
- On dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant la suite (v_n) lorsque
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n\right| \leq \epsilon \left|v_n\right|.$$
On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit «u_n est un petit O de v_n».
- On dit que la suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n) lorsque
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|u_n - v_n\right| \leq \epsilon \left|v_n\right|.$$
On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit «u_n est équivalente à v_n».

Théorème 2 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si, et seulement si*
$$u_n - v_n = o(v_n).$$

On peut aussi écrire $u_n = v_n + o(v_n)$.

Notation

On note $\mathcal{O}(v)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ l'ensemble des suites dominées par la suite (v_n). Cette notation est celle de Landau. Pour exprimer cette relation, on devrait écrire $u \in \mathcal{O}(v)$. En fait, l'usage est d'écrire abusivement $u = \mathcal{O}(v)$ ou $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. On doit lire « u_n est grand $\mathcal{O}$ de v_n » et non « u_n égale grand $\mathcal{O}$ de v_n ».
Ces notations traduisent une *appartenance* et non une égalité. Par exemple $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$ et $n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$ mais $n^2 \neq n^2 + 1$.

Notation

On note $o(v)$ ou $o(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant la suite (v_n). Cette notation est encore une notation de Landau. Là encore, au lieu d'écrire $u \in o(v)$, on écrit abusivement $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$. On doit lire « u_n est petit o de v_n ».

Exemples 3

1. La suite $(2n^2 - 3n + 4)$ est dominée par la suite (n^2) car pour $n \geq 1$,
$$\left|2n^2 - 3n + 4\right| \leq 2\left|n^2\right| + 3|n| + 4 \leq 9n^2.$$
2. Si à partir d'un certain rang on a $|u_n| \leq |v_n|$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
   La réciproque est fausse comme le montre l'exemple précédent.
3. La relation $u_n = \mathcal{O}(\mathbf{1})$ signifie que la suite (u_n) est bornée.
   Plus généralement, si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si la suite (v_n) est bornée, alors (u_n) est bornée.
4. Pour toute suite (u_n) et tout scalaire $\lambda \neq 0$, on a $u_n = \mathcal{O}(\lambda u_n)$.
5. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

Exemples 4

1. La relation $u_n = o(\mathbf{1})$ signifie que (u_n) tend vers 0.
   Plus généralement, si $u_n = o(v_n)$ et si la suite (v_n) est bornée, alors (u_n) converge vers 0.
2. Si (ω_n) est une suite qui tend vers 0, alors $\left(\omega_n u_n\right) = o\left(u_n\right)$.
3. $n = o(n^2)$ car $n = \frac{1}{n}n^2$ et $\frac{1}{n} \to 0$.
   On a donc également $n^2 + n \sim n^2$ car $n^2 + n - n^2 = n = o(n^2)$.
4. $\mathrm{e}^n = o(\mathrm{e}^{3n})$ car $\mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{-2n}\,\mathrm{e}^{3n}$ et $\mathrm{e}^{-2n} \to 0$.
5. On a $3n^2 + 3n - 4 = o(n^3)$ car $3n^2 + 3n - 4 = n^3\left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}\right)$ et $\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} \to 0$.
6. Pour toutes suites $(u_n), (v_n)$ et tout scalaire $\lambda \neq 0$, la relation $u_n = o(\lambda v_n)$ est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

Remarque

On notera que la relation $u_n \sim v_n$ ne signifie nullement que la différence $u_n - v_n$ tende vers 0 ; cette différence peut même être non bornée, comme le montre l'exemple $n^2 + n \sim n^2$.

§2 Comparaison des suites de référence

Proposition 5 *Si la suite (v_n) tend vers $\pm\infty$ et si la suite (u_n) est bornée, alors $u_n = o(v_n)$.*

Proposition 6 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{aligned} a^n = o\left(b^n\right) &\iff |a| < |b| \text{ ou } a = b = 0; \\ n^a = o\left(n^b\right) &\iff a < b; \\ (\ln n)^a = o\left((\ln n)^b\right) &\iff a < b. \end{aligned}$$

Proposition 7 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$.*

1. $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
2. $n^\beta = o(a^n)$. *En particulier* $n^\beta = o(\mathrm{e}^{\alpha n})$.
3. $a^n = o(n!)$.
4. $n! = o(n^n)$.

Remarque Si (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$, $u_n = o(v_n)$ signifie que (v_n) tend «plus vite» que (u_n) vers $+\infty$.
Si (u_n) et (v_n) tendent vers 0, $u_n = o(v_n)$ signifie que (u_n) tend «plus vite» que (v_n) vers 0.

§3 Calculs avec la notation de Landau

Définition 8 Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + \mathcal{O}(w_n)$$

signifie $u_n - v_n = \mathcal{O}(w_n)$.

Exemple 9 Avec $u_n = n^3 + n$ et $v_n = n^3$, on obtient

$$n^3 + n = n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

car $u_n - v_n = n = \mathcal{O}(n^2)$.

Définition 10 Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites. L'écriture

$$u_n = v_n + o(w_n)$$

signifie $u_n - v_n = o(w_n)$.

Exemple 11 Avec $u_n = n^3 + n$ et $v_n = n^3$, on obtient

$$n^3 + n = n^3 + o(n^2),$$

car $u_n - v_n = n = o(n^2)$.

17.2 Calculs avec les relations de comparaisons

§1 Propriétés des relations de comparaisons

Proposition 12

1. *La relation $\mathcal{O}$ est réflexive.*
$$u_n = \mathcal{O}\left(u_n\right).$$
2. *La relation $\mathcal{O}$ est transitive.*
$$\left.\begin{array}{l} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ v_n = \mathcal{O}(w_n) \end{array}\right\} \implies u_n = \mathcal{O}(w_n).$$

Proposition 13

Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) quatre suites.

1. *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(a_n)$.*
2. *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $u_n v_n = \mathcal{O}(a_n b_n)$.*
3. *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = \mathcal{O}(a_n)$.*

Remarque

On peut résumer les résultats sous la forme
$$\mathcal{O}(a_n) + \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n), \qquad \mathcal{O}(a_n)\mathcal{O}(b_n) = \mathcal{O}(a_n b_n), \qquad \lambda\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n).$$

Proposition 14

Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) quatre suites.

1. *Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$.*
2. *Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.*
3. *Si $u_n = o(a_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = o(a_n)$.*

On peut résumer les résultats sous la forme
$$o(a_n) + o(a_n) = o(a_n), \qquad o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n), \qquad \lambda o(a_n) = o(a_n).$$

Exemple 15 ♥

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ des réels tels que $a_k \neq 0$.Alors
$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \sim a_k n^k.$$
En effet,
$$1 = o(n^k), \qquad n = o(n^k), \qquad \dots \qquad n^{k-1} = o(n^k)$$

donc $a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} = o(a_k n^k)$.
Par exemple $2n + 1 \sim 2n$ ou $8n^3 - 200n^2 + 9n - 3 \sim 8n^3$.

Exemple 16 ♥ Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ des réels tels que $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k$. Alors

$$b_1^n + b_2^n + \cdots + b_k^n \sim b_k^n.$$

En effet,

$$b_1^n = o(b_k^n), \qquad b_2^n = o(b_k^n), \qquad \ldots \qquad b_{k-1}^n = o(b_k^n)$$

donc $b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{k-1}^n = o(b_k^n)$.
Par exemple $2^n + 5^n \sim 5^n$.

Exemple 17 ♥ Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des réels tels que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$. Alors

$$\frac{1}{n^{\alpha_1}} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} \sim \frac{1}{n^{\alpha_1}}.$$

En effet, pour tout $\alpha > \alpha_1$, $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$, donc $\frac{1}{n^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha_k}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$.
Par exemple $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{25}} \sim \frac{1}{n}$.

Exemple 18 Si $u_n \to +\infty$ et si (v_n) est bornée, alors $u_n + v_n \sim u_n$.

Proposition 19 *Soient (u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n) des suites.*

1. *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.*
2. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
3. *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
4. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
   Autrement dit, la relation o est transitive.*
5. *Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$.
   En particulier, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = o(a)$ et $\lambda \neq 0$, alors $u = o(\lambda a)$.*

Théorème 20 *Dans l'ensemble des suites réelles, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

1. *La relation $\sim$ est réflexive*
$$u_n \sim u_n.$$
2. *La relation $\sim$ est symétrique*
$$u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n.$$
3. *La relation $\sim$ est transitive*
$$u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n \implies u_n \sim w_n.$$

Théorème 21

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites.

1. *Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.*
2. *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.*
3. *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
4. *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.*
5. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.*

§2 Propriétés conservées par la relation d'équivalence

Théorème 22

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \operatorname{sgn}(u_n) = \operatorname{sgn}(v_n).$$

Théorème 23

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$, et que (v_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors (u_n) tend aussi vers ℓ.

La réciproque est (heureusement) fausse comme le montre l'exemple $\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n^3$.

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$. Alors

$$u_n \sim \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Ce résultat bien sûr totalement est faux avec $\ell = 0$. En effet, $u_n \sim 0$ signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

§3 Opérations sur les équivalents

Théorème 24

Règles de calcul
Soient $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$ quatre suites réelles. On suppose $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors

1. *$u_n a_n \sim v_n b_n$,*
2. *Si (b_n) est non nulle à partir d'un certain rang, alors (a_n) également et*
$$\frac{u_n}{a_n} \sim \frac{v_n}{b_n}.$$
3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si (u_n) est à valeurs > 0 à partir d'un certain rang, alors (v_n) également et*
$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

Par contre les relations $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ n'entraînent pas $u_n + a_n \sim v_n + b_n$ comme le montre l'exemple,

$$u_n = 1 \qquad v_n = 1 \qquad a_n = -1 + \frac{1}{n} \qquad b_n = -1 + \frac{1}{n^2} \qquad \frac{1}{n} \nsim \frac{1}{n^2}.$$

La propriété

$$u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

Revient à composer (à gauche) chaque membre par l'application $x \mapsto x^\alpha$.
Ce résultat a un caractère exceptionnel car la relation d'équivalence n'est en général pas compatible avec la composition. Par exemple, on a

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} \sim 2n\pi$$

mais les suites de termes généraux

$$\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \textit{et} \quad \sin(2n\pi) = 0$$

ne sont pas équivalentes.

§4 Suites extraites et relations de comparaisons

Proposition 25 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.*

1. *Si $u_n \sim v_n$, alors $u_{\phi(n)} \sim v_{\phi(n)}$.*
2. *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $u_{\phi(n)} = \mathcal{O}\left(v_{\phi(n)}\right)$.*
3. *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{\phi(n)} = o\left(v_{\phi(n)}\right)$.*

En particulier, si $u_n \sim v_n$, alors $u_{n+1} \sim v_{n+1}$.

§5 Quelques équivalents classiques

Proposition 26 *Soit (u_n) une suite de limite nulle. Alors* [a]

1. $\sin(u_n) \sim u_n$,
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$,
3. $\tan(u_n) \sim u_n$,
4. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,
5. $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$,
6. $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{1}{2} u_n$.

[a] ⚠ Ces équivalents sont généralement faux sans l'hypothèse $u_n \to 0$.

Exemple 27 Étudier la limite de

$$a_n = \frac{(n^3 + 9)\sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n} - 5n^2 + \cos\left(\frac{n}{3}\pi\right)}.$$

Exemple 28 Trouver un équivalent simple de

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln(1 + 1/n^2)}{\sqrt{\sin(1/n)}}(n + 42).$$

17.3 Un peu d'informatique

§1 Les relations Ω et Θ

Les relations Ω et Θ ne sont pas au programme de mathématiques.
Elle sont toutefois utilisées en informatique. Dans ce cas, on utilise plutôt la notation fonctionnelle pour les suites ($U(n)$ au lieu de u_n) et les suites sont le plus souvent à valeurs strictement positives.

Définition 29

Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to]0, +\infty[$, la relation

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

signifie qu'il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

On dit que $g(n)$ est une **borne asymptotiquement approchée** de $f(n)$ ou que $g(n)$ et $f(n)$ sont semblables.

Cette relation est parfois notée $f(n) \asymp g(n)$.

Exemple 30

1. $4n^3 - 2n^2 + 3 = \Theta(n^3)$.
2. $3n^2 - 2n \ln n = \Theta(n^2)$.
3. $\frac{1}{8} n \ln n + 4n = \Theta(n \ln n)$.

Proposition 31

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $f(n) = \Theta(g(n))$.
2. $g(n) = \Theta(f(n))$.
3. $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ *et* $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Définition 32

Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to]0, +\infty[$, la relation

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

signifie qu'il existe une constante $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies 0 \leq c g(n) \leq f(n).$$

On dit que $g(n)$ est un **minorant asymptotique** de $f(n)$.

Cela revient à dire que $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.