Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le mardi 7 décembre

Problème 1 *Deux méthodes pour la résolution d'une équation différentielle*
On cherche à résoudre l'équation différentielle (E), d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$t^2 y''(t) - t y'(t) + y(t) = 2t. \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1), d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$t y'(t) + y(t) = \frac{2}{t}. \tag{E_1}$$

2. *Résolution de (E) par changement de fonction inconnue.*

(a) Montrer que l'équation homogène associée à (E), c'est-à-dire

$$t^2 y''(t) - t y'(t) + y(t) = 0, \tag{H}$$

admet une solution de la forme $y(t) = t^\alpha$ où α est une constante réelle que l'on déterminera.

(b) Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
Pour $t > 0$, on pose $g(t) = \dfrac{f(t)}{t^\alpha}$ où α est la constante déterminée dans la question précédente.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g' est solution (E_1).

(c) En déduire les solutions de (E).

3. *Résolution de (E) par changement de variable.*
Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et on pose

$$z : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array}.$$

(a) Indiquer pourquoi la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis exprimer $z'(x)$ et $z''(x)$ en fonction de y', y'' et de x.

(b) Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$z''(x) - 2z'(x) + z(x) = 2e^x. \tag{E_2}$$

(c) Résoudre (E_2).

(d) Retrouver l'expression des solutions de (E).

4. *Résolution d'une équation fonctionnelle.*
On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall t > 0, f'(t) = t f\left(\frac{1}{t}\right) - 1. \tag{P}$$

(a) Montrer que toute solution f de (P) est au moins deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
En déduire que f est solution de l'équation différentielle (E).

(b) Résoudre (P).