Chapitre 33

Sommes et projecteurs

33.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

§1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. La **somme** de U et V, noté $U+V$, est l'ensemble

$$U+V = \{\, u+v \mid u \in U \text{ et } v \in V \,\}.$$

♥

Pour $w \in E$,

$$w \in U+V \iff \exists (u,v) \in U \times V, u+v=w.$$

Test 2

Posons $U = \{\,0,2,3\,\}$ et $V = \{\,4,8,1\,\}$. Ce ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$. Décrire néanmoins en extension l'ensemble

$$U+V = \{\, u+v \mid u \in U \text{ et } v \in V \,\}.$$

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $U+V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Test 4

Montrer le!

Test 5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in E$. Montrer

$$\text{Vect}\{u\} + \text{Vect}\{v\} = \text{Vect}\{u, v\}.$$

Remarque

Il faut bien différencier $U + V$ de $U \cup V$. L'ensemble $U \cup V$ *n'est pas*, en général, un sous-espace vectoriel de E (voir l'exercice **??**). Le sous-espace vectoriel $U + V$ contient $U \cup V$, mais il est en général beaucoup plus gros. En fait, $U + V$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant U et V, c'est-à-dire

$$U + V = \text{Vect}(U \cup V).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 6

Soit A et B sont deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors

$$\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A \cup B).$$

Exemple 7

Soient $E = \mathbb{R}^3$,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}$$

Montrer que $U + V = \mathbb{R}^3$.

Test 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les énoncés suivants.

1. $U + V = V + U$.
2. $U + U = U$.
3. Si $U \subset V$, alors $U + V = V$.

§2 Sommes directes

Définition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $U + V$ est dite **somme directe** si

$$\forall (u, v) \in U \times V, u + v = 0 \implies u = v = 0.$$

Notation

Lorsque la somme est directe, on utilise la notation spéciale $U \oplus V$ pour désigner $U + V$. Au niveau ensembliste, ce sont les mêmes ensembles. Le symbole $\oplus$ rappelant seulement que la somme est directe.

Il existe une autre façon de caractériser les sommes directes, souvent très utile.

Théorème 10 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La somme $U + V$ est directe.*
2. *$U \cap V = \{ 0 \}$.*
3. *Tout vecteur z de la somme $U + V$ peut s'écrire de manière unique $z = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$, c'est-à-dire*

$$\forall (u, v) \in U \times V, \forall \left(u', v'\right) \in U \times V, u + v = u' + v' \implies u = u' \text{ et } v = v'.$$

Exemple 11 Soit $u, v \in E$ deux vecteurs non colinéaires. Alors, la somme $\operatorname{Vect}\{ u \} + \operatorname{Vect}\{ v \}$ est directe. Autrement dit,

$$\operatorname{Vect}\{ u, v \} = \operatorname{Vect}\{ u \} \oplus \operatorname{Vect}\{ v \}.$$

§3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = U \oplus V$.
2. $E = U + V$ et $U \cap V = \{ 0 \}$.
3. Tout vecteur $z \in E$ se décompose de manière unique dans $U + V$:

$$\forall z \in E, \exists!(u, v) \in U \times V, z = u + v.$$

Dans ce cas, on dit que U et V sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** dans E.

La notion de supplémentaire est souvent confondue avec la notion ensembliste de complémentaire qui est très différente. Les différences entre les deux notions sont nombreuses. Tout d'abord, il y a unicité du complémentaire, alors que pour un sous-espace donné, il existe généralement une infinité de supplémentaires différents. Ensuite l'intersection d'un sous-espace avec un supplémentaire n'est pas vide mais contient le vecteur nul (et uniquement celui-là). Par ailleurs, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel. Enfin, la réunion d'un sous-espace et d'un supplémentaire n'est pas égale à tout l'espace, plus subtilement, elle engendre cet espace. De façon intuitive, deux sous-espaces supplémentaires contiennent exactement l'information dont on a besoin pour reconstituer l'espace entier.

Exemple 13 Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels formés respectivement des fonctions constantes, et des fonctions valant 0 en 0 sont supplémentaires.

Test 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $E = U \oplus V$ si, et seulement si

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U \times V & \to & E \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

En général, ce supplémentaire n'est pas unique.

Inutile de chercher un contre-exemple en dimension infinie. En effet, ce résultat reste vrai en supposant l'axiome du choix.

Définition 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E si il existe une droite vectorielle $D = \operatorname{Vect}\{\, a \,\}$ telle que

$$E = H \oplus D.$$

§4 Somme directe et applications linéaires

Une application linéaire définie sur $U \oplus V$ est entièrement déterminée par ses restrictions à U et V. Autrement dit,

Théorème 17

Caractèrisation universelle
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E tels que la somme $U + V$ est directe.
Soit $g \in \mathbf{L}(U, F)$ et $h \in \mathbf{L}(V, F)$, alors, il existe une unique application linéaire $f \in \mathbf{L}(U \oplus V, F)$ telle que

$$\forall x \in U, f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in V, f(x) = h(x).$$

33.2 Projecteurs

§1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

Définition 18

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E. Chaque vecteur $z \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application $p : E \to E$ qui à z associe u est le **projecteur vectoriel sur U parallèlement à V**. On dit également que V est la **direction** de ce projecteur.

L'application $q : E \to E$ qui à z associe v est donc le projecteur vectoriel sur V parallèlement à U.

Si p est le projecteur sur U parallèlement à V, et q le projecteur sur V parallèlement à U, alors

$$\forall z \in E, \quad z = p(z) + q(z) \text{ et } p(z) \in U \text{ et } q(z) \in V.$$

Test 19

Pourquoi demande-t-on que la somme $E = U \oplus V$ soit directe?

Proposition 20

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note p la projection sur U parallèlement à V. Alors,

1. *p est un endomorphisme de E.*
2. $U = \operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_E) = \{ z \in E \mid p(z) = z \}$.
3. $V = \ker(p) = \{ z \in E \mid p(z) = 0 \}$.

Remarque

Vous aurez peut-être reconnu le contenu du théorème de Thalès : celui-ci veut dire au fond qu'une projection (vectorielle) sur une droite est une application linéaire.

§2 Exemples

Exemple 21

Avec $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus V$, où U est le sous-espace vectoriel formés des fonctions constantes, et V le sous-espace vectoriel des fonctions valant 0 en 0. Les projecteurs sur U parallèlement à V et sur V parallèlement à U sont

$$p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(0)) \end{array} \qquad \text{et} \qquad q : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x) - f(0)) \end{array}$$

Exemple 22

Soit $U = \operatorname{Vect}\left\{ (1, 2, -1)^T, (1, 0, 1)^T \right\}$ et $V = \operatorname{Vect}\{ (1, -1, -1)^T \}$.
Soit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation linéaire

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in W} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = x \\ 2\alpha - \gamma & = y \\ -\alpha + \beta - \gamma & = z \end{cases}$$

qui a pour unique solution

$$\alpha = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6}, \quad \beta = \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, \quad \gamma = \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}.$$

Cela prouve que tout vecteur $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de U et un vecteur de V. Le projecteur sur U parallèlement à V est défini par

$$p\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z\\\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z\\\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\end{pmatrix}.$$

Test 23 Vérifier le calcul précédent.

§3 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

Définition 24 Une application $p : E \to E$ est **idempotente** si

$$p\circ p = p.$$

Si p est linéaire, cela s'écrit également $p^2 = p$.

Définition 25 Une matrice carrée A est **idempotente** si $A^2 = A$.

Théorème 26 *Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note p le projecteur sur U parallèlement à V. Alors,*

1. *L'application p est idempotente : $p\circ p = p$.*
2. *$q = \mathrm{Id}_E - p$ est la projection sur V parallèlement à U. On a $p\circ q = 0$ et $q\circ p = 0$.*

Théorème 27 *Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p\circ p = p$. Alors*

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$$

et p est la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$. On a donc

$$\operatorname{Im} p = \ker\left(p - \mathrm{Id}_E\right) \qquad E = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(p).$$

Les espaces $\ker(p - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(p)$ sont appelés les **sous-espaces propres** de p.

33.3 Symétries

§1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

Définition 28 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E. Chaque vecteur $z \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application $s : E \to E$ qui a z associe $u - v$ **symétrie par rapport à U parallèlement à V**.

Proposition 29 *Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note s la symétrie sur U parallèlement à V. Alors,*

1. *Si p désigne la projection sur U parallèlement à V et q la projection sur V parallèlement à U, alors*
$$s = p - q = 2p - \operatorname{Id}_E = \operatorname{Id}_E - 2q;$$
on a également $p = \frac{1}{2}(s + \operatorname{Id}_E)$.
2. *s est un automorphisme de E et*
$$s \circ s = \operatorname{Id}_E \quad \textit{d'où} \quad s^{-1} = s.$$
On a donc $\operatorname{Im} s = E$ et $\ker s = \{0_E\}$.
3. $U = \ker\left(s - \operatorname{Id}_E\right) = \{\, z \in E \mid s(z) = z \,\}$.
4. $V = \ker\left(s + \operatorname{Id}_E\right) = \{\, z \in E \mid s(z) = -z \,\}$.

Les espaces $\ker(s - \operatorname{Id}_E)$ et $\ker(s + \operatorname{Id}_E)$ sont appelés les **sous-espaces propres** de s.

§2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

Définition 30 Une application $s : E \to E$ telle que $s \circ s = \operatorname{Id}_E$ est appelée **involution**.

Ce qui s'écrit également lorsque s est linéaire, $s^2 = \operatorname{Id}_E$.

Théorème 31 **Caractèrisation des symétries**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $s \in \mathbf{L}(E)$ tel que $s \circ s = \operatorname{Id}_E$. Alors

$$E = \ker(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(s + \operatorname{Id}_E)$$

et s est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(s - \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \operatorname{Id}_E)$.

33.4 Sommes et dimension

§1 Base adaptée à une décomposition en somme directe

Théorème 32

Soit $\left(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\right)$ *est une famille libre d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. Alors les sous-espaces vectoriels* $\operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ *et* $\operatorname{Vect}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ *sont en somme directe. Autrement dit*

$$\operatorname{Vect}\left\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\right\} = \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} \oplus \operatorname{Vect}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

Théorème 33

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* U *et* V *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On suppose que la somme* $U + V$ *est directe.*
Soit $(v_1, \dots, v_k)$ *est une base de* U *et* $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ *est une base de* V*. Alors* $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ *est une base de* $U \oplus V$*. En particulier*

$$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V).$$

La base $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ obtenue par **juxtaposition** des bases de U et V est dite **adaptée** à la décomposition en somme directe $U \oplus V$.

§2 Formule de Grassmann

Théorème 34

Formule de Grassmann
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* U *et* V *deux sous-espaces vectoriels de* E *de dimension finie. Alors* $U + V$ *est de dimension finie et*

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

§3 Caractérisation dimensionnelle des sous-espaces supplémenataires

Théorème 35

Caractérisation en dimension finie
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soient* U *et* V *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $E = U \oplus V$.
2. $E = U + V$ *et* $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$.
3. $U \cap V = \{0\}$ *et* $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$.

Exemple 36

Soit D et D' deux droites vectorielles distinctes du plan $E = \mathbb{R}^2$. Alors $E = D \oplus D'$.

Exemple 37

Dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$. Soient respectivement D une droite vectorielle et P un plan vectoriel ne contenant pas D. Alors $V = D \oplus P$.