

FONCTIONS LOGARITHMES, EXPONENTIELLES, PUISSANCES

6.1 RAPPEL SUR LES FONCTIONS POLYNOMIALES

§1 Vocabulaire

Définition 1

Une fonction p définie sur une partie D de \mathbb{R} et à valeurs réelles est une **fonction polynomiale** lorsqu'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que, pour tout $x \in D$, on ait

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Lorsque $a_n \neq 0$, alors l'entier n est appelé le **degré** de p .

On note souvent $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Exemples 2

1. L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré 2.
 $x \mapsto x^2 - 2x + 5$

2. L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré 3.
 $x \mapsto x^3 + 5x - 3$

3. L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré 1.
 $x \mapsto x$

4. Une fonction polynomiale de degré 0 est une fonction constante *non nulle*, c'est-à-dire, il existe $a_0 \neq 0$ tel que

$$\forall x \in D, p(x) = a_0.$$

5. Par convention, l'application nulle est aussi polynomiale et on dit que son degré est $-\infty$.

Définition 3

On dit qu'une fonction polynomiale p admet a pour **racine** lorsque $p(a) = 0$.

Retenez pour l'instant qu'une fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines. La démonstration viendra plus tard dans l'année.

§2 Propriétés

Proposition 4

Les fonctions polynomiales sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur \mathbb{R} .

Remarquez que la dérivée d'une fonction polynomiale est polynomiale.

Théorème 5

Principe d'identification

Soit I un intervalle véritable, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_p$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ tels que

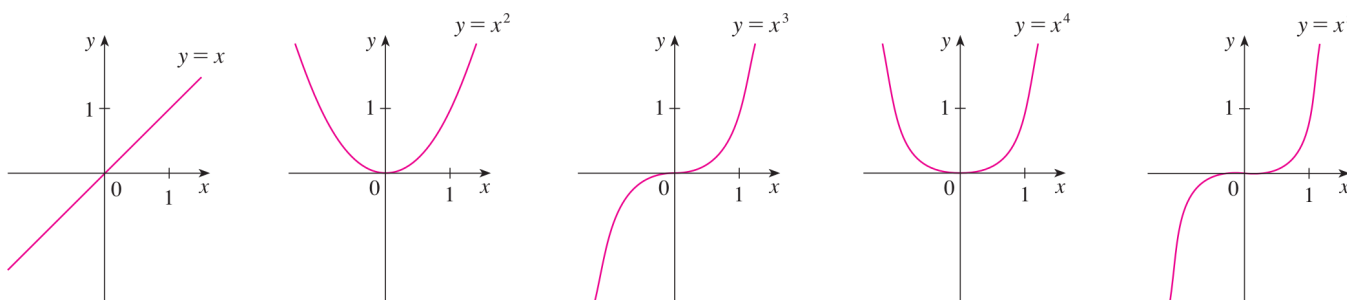
$$\forall x \in I, a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_px^p.$$

Alors $n = p$ et $a_i = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Ce théorème justifie *a posteriori* la définition de degré d'une fonction polynomiale.

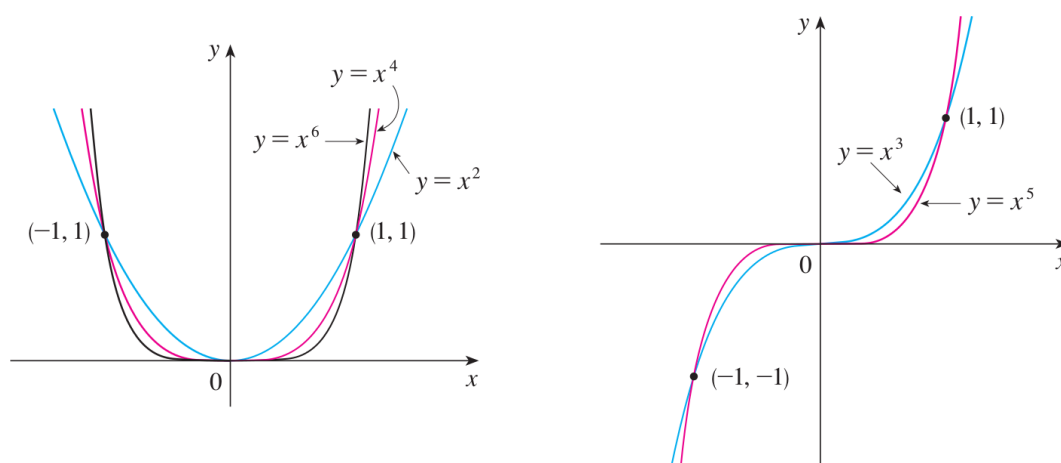
§3 Fonctions puissance n où n est entier

Ci-dessous sont représentés les courbes de $x \mapsto x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.



L'allure générale de la courbe de $f : x \mapsto x^n$ dépend de la parité de n . Si n est pair, alors $x \mapsto x^n$ est une fonction paire et sa courbe est comparable à celle de la parabole d'équation $y = x^2$. Si n est impair, alors $x \mapsto x^n$ est une fonction impaire et sa courbe est similaire celle d'équation $y = x^3$ (pour $n \geq 3$).

Toutefois, remarquons que lorsque n augmente, la courbe d'équation $y = x^n$ s'aplatit près de l'origine et croît plus rapidement lorsque $|x| \geq 1$. (Si x est petit, x^2 est plus petite, x^3 encore plus petit, etc...)



§4 Fonctions rationnelles

Définition 6

Une fonction **rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynomiales.

Exemples 7

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle.

$$x \mapsto \frac{2x^9 - x^2}{3 + x^8}$$
- Toute fonction polynomiale est *a fortiori* une fonction rationnelle.

Proposition 8

- Soit p et q deux fonctions polynomiales sur \mathbb{R} .
 La fonction rationnelle $f = \frac{p}{q}$ est définie sur \mathbb{R} privé de l'ensemble des racines de q .
- Les fonctions rationnelles sont continues et infiniment dérivables sur leur ensemble de définition.
- La dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.

Exemple 9

La fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{6x^3 - x}{x^2 - 1}$$

est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

6.2 LOGARITHMES, EXPONENTIELLES

Exemple 10

Résolution de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x \times y) = f(x) + f(y).$$

où $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

§1 Logarithme népérien

Définition 11

Le **logarithme népérien** (ou logarithme naturel) est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. En d'autres termes

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}.$$

Proposition 12

1. Le logarithme est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .
2. La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto x^{-1}$ sur \mathbb{R}^* .

Corollaire 13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Proposition 14

On a pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\ln(1) = 0$. | 3. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$. |
| 2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. | 4. $\ln(1/x) = -\ln x$. |

Démonstration. Voici une démonstration alternative de la seconde propriété. Celle-ci requiert de savoir faire un changement de variable dans une intégrale (ici $u = xt$).

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$\ln(y) = \int_1^y \frac{1}{t} dt = \int_x^{xy} \frac{x}{u} \frac{1}{x} du = \int_x^{xy} \frac{1}{u} du = \ln(xy) - \ln(x).$$

■

La fonction $\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ est donc un morphisme de groupes.

Proposition 15

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

La fonction \ln étant continue, elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de \ln .

Remarque

L'injectivité du logarithme nous permet d'écrire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = \ln(y) \iff x = y.$$

Proposition 16

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Proposition 17

La courbe représentative de \ln présente une branche parabolique horizontale au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Plus généralement, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

On dit que le logarithme est négligeable par rapport aux puissances au voisinage de $+\infty$.

Ce résultat reste valable, même avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

Corollaire 18

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0.$$

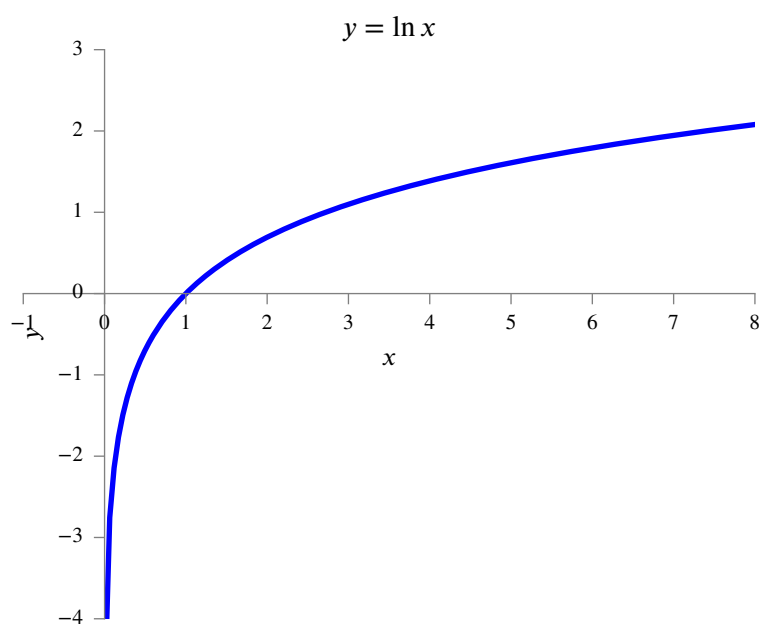


Figure 6.1: Logarithme népérien

§2 Exponentielle népérienne

Définition 19

et proposition

Le logarithme réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Sa bijection réciproque est appelée exponentielle et notée

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x,$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln x) = x,$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x) = \exp(y) \iff x = y.$

Test 20

Résoudre l'équation $\exp(5 - 3x) = 10$.

Proposition 21

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\exp(0) = 1.$ 2. $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y).$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}.$ 4. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$ |
|---|---|

Proposition 22

L'exponentielle est strictement croissante et dérivable sur \mathbb{R} (et même de classe \mathcal{C}^∞) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty.$$

L'axe des abscisse est donc asymptote à la courbe représentative de \exp au voisinage de $-\infty$:

Proposition 23

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Proposition 24

La courbe représentative de \exp présente une branche parabolique verticale au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$

Plus généralement, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty.$$

On dit que les puissances sont négligeables par rapport à l'exponentielle au voisinage de $+\infty$.

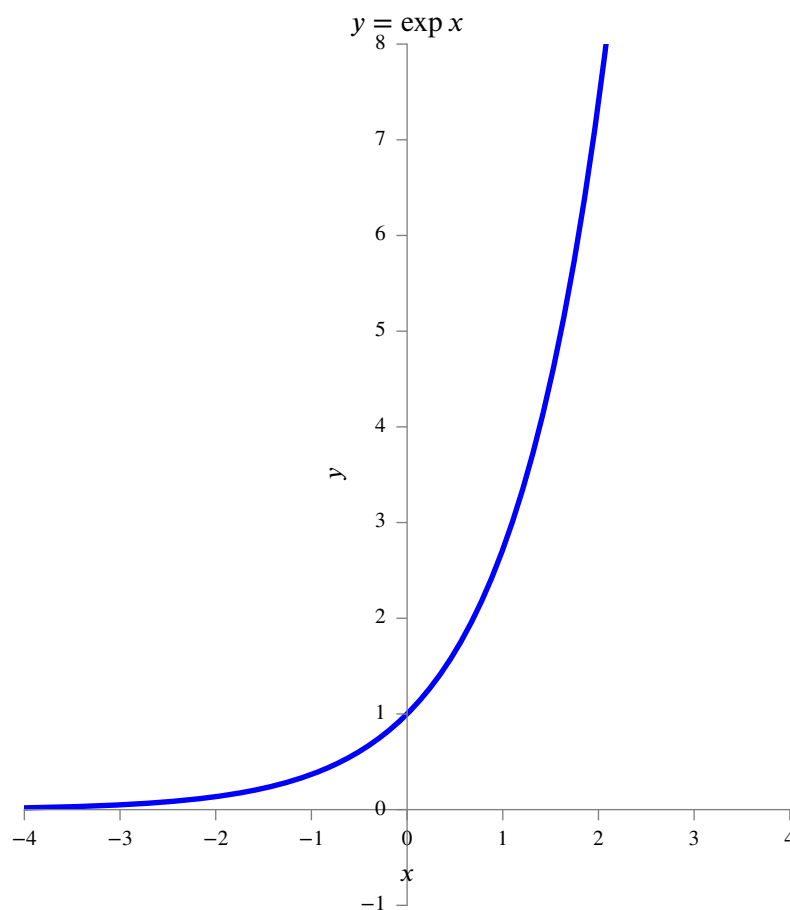


Figure 6.2: Exponentielle népérienne

Ce résultat reste valable, même avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

Test 25

Donner l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2} \exp(-x) - 1$. Tracer sa courbe et expliciter son image $\text{Im}(g)$.

Test 26

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^{2305}} =$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x =$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^3 x^7 e^{-10x} =$

§3 Exponentielle de base a

Définition 27

Exponentielle de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x \ln a) \end{aligned}$$

Lemme 28

À ne pas retenir

Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\exp_a(0) = 1$. 2. $\ln(\exp_a(x)) = x \ln a$. 3. $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$. 4. $\exp_a(xy) = \exp_{\exp_a(x)}(y)$. | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)} = \exp_{1/a}(x)$. 6. $\exp_{ab}(x) = \exp_a(x) \exp_b(x)$. 7. $\exp_{a/b}(x) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)}$. |
|--|--|

Lemme 29

À ne pas retenir

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp_a(n) = a^n$.

Ce lemme légitime la notation sous forme de puissance.

Définition 30

Extension de la notation puissance

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Le réel a^x se lit « a puissance x ».

Remarque

Sachez que par convention,

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

et non $(a^b)^c$.

Le lemme 28 montre que les règles de calcul déjà connues pour des exposants entiers (et même rationnel) s'étendent au cas d'exposants réels.

Proposition 31

Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $a^0 = 1$. 2. $\ln(a^x) = x \ln a$. 3. $a^{x+y} = a^x a^y$. 4. $(a^x)^y = a^{xy}$. | <ol style="list-style-type: none"> 5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. 6. $(ab)^x = a^x b^x$. 7. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$. |
|--|--|

Test 32

Résoudre l'équation

$$2^x + 6 \times 2^{-x} = 5. \quad (6.1)$$

Proposition 33

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$ est dérivable et on a

$$\exp'_a(x) = \frac{da^x}{dx} = (\ln a)a^x$$

De plus $x \mapsto a^x$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Définition 34

La **constante de Néper** est le réel défini par $e = \exp(1)$ ou de manière équivalente par $\ln e = 1$. On dit encore que e est la base du logarithme népérien. Avec cette définition, on a donc $\exp_e = \exp$ et on peut donc écrire

$$\exp x = e^x.$$

§4 Logarithme de base a **Définition 35**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Pour tout $x > 0$, on note

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

L'application \log_a est le **logarithme de base a** .

Exemples 36

1. En particulier $\log_e = \ln$.
2. On utilise \log_{10} , appelé logarithme décimal et noté simplement \log , en physique et en chimie.
3. La fonction \log_2 (logarithme en base 2) est très utilisée en informatique.

Proposition 37

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors \log_a est la bijection réciproque de \exp_a .

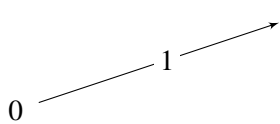
On a donc pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$a^y = x \iff y \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a} \iff y = \log_a(x).$$

Test 38

Combien de chiffres comporte l'écriture décimale de 4444^{4444} ?

Figure 6.3: Fonctions exponentielles de base $a > 1 : x \mapsto a^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	$+$	$\ln a$	$+$
$\exp_a(x)$			

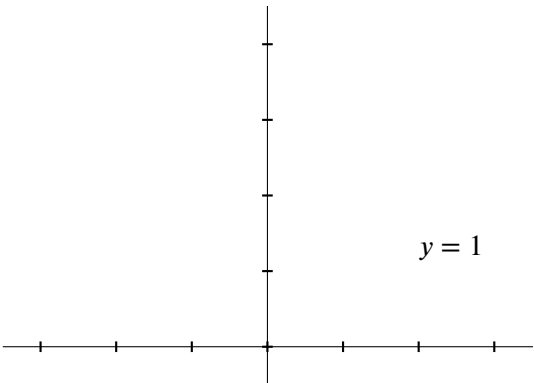
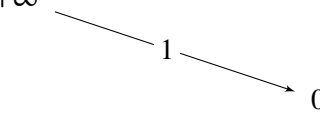
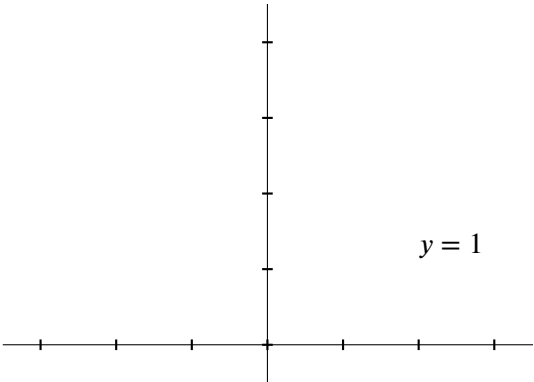
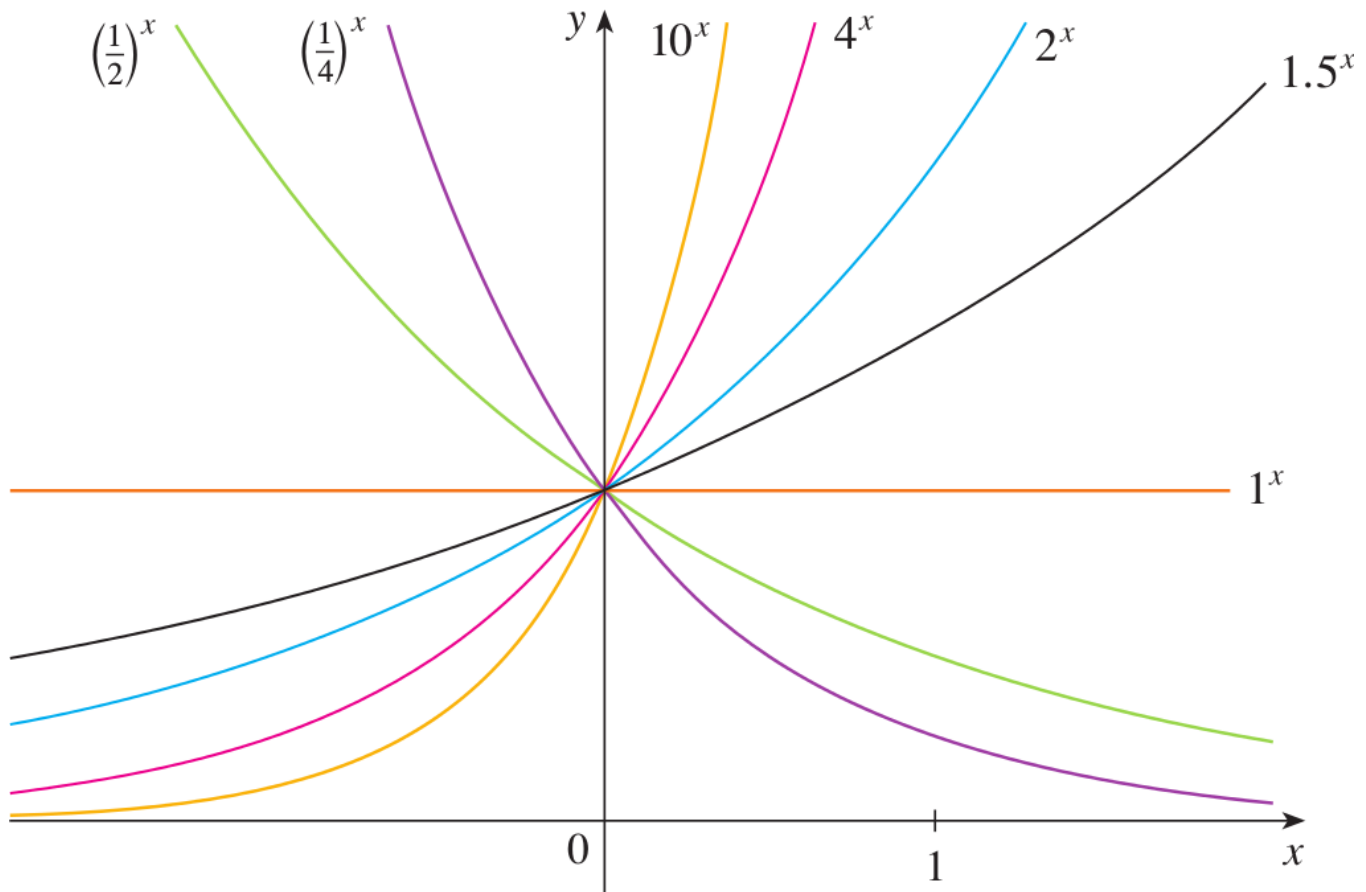


Figure 6.4: Fonctions exponentielles de base $a < 1 : x \mapsto a^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	$-$	$\ln a$	$-$
$\exp_a(x)$			





6.3 FONCTIONS PUISSANCES

Définition 39

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** d'exposant α l'application

$$\begin{aligned} \phi_\alpha :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{aligned}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on retrouve les fonctions puissances déjà connues.

Théorème 40

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable (donc continue) sur \mathbb{R}_+^* . Sa dérivée est la fonction

$$\phi'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$

2. Limites en 0 et $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

3. Si $\alpha \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* . Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

4. Positions relatives. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$, alors

$$\forall x \in]0, 1], x^\beta \leq x^\alpha;$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, x^\alpha \leq x^\beta.$$

Remarques

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est généralement notée $\sqrt[n]{*} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Les fonctions $\sqrt{*}, \sqrt[3]{*}, \sqrt[4]{*}, \dots$ ne sont pas dérivables sur tout \mathbb{R}_+ , mais seulement sur \mathbb{R}_+^* .
2. Pour $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en une fonction continue définie sur tout \mathbb{R}_+ en posant $0^\alpha = 0$. Mais attention, ce prolongement est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$.

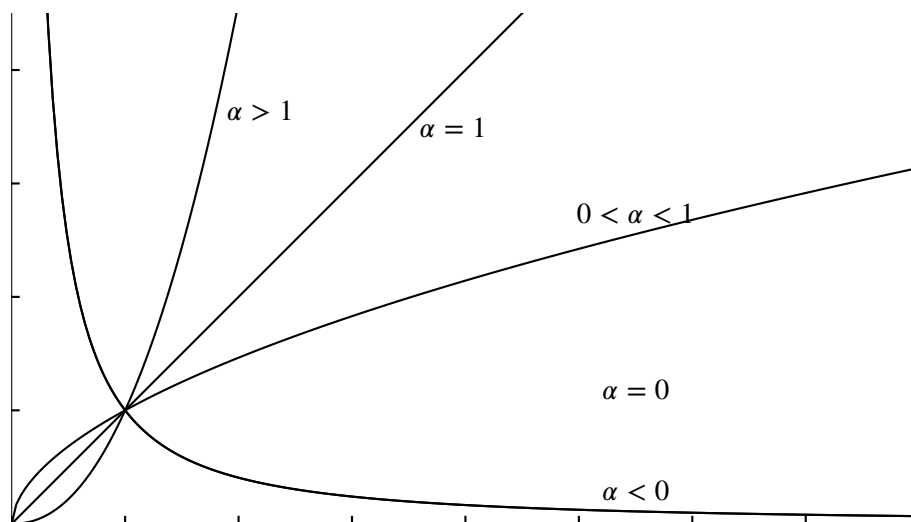


Figure 6.5: Fonctions puissances et positions relatives

6.4 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

§1 Les fonctions ch et sh

Définition 41

On définit les fonctions **sinus hyperbolique** et **cosinus hyperbolique** par

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \quad \text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} & & \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Proposition 42

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch } x \geq 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch } x + \text{sh } x = e^x$ et $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh } x < \frac{e^x}{2} < \text{ch } x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Proposition 43

1. La fonction sh est impaire et la fonction ch est paire.
2. Les fonctions ch et sh sont dérivables (donc continues) sur \mathbb{R} et

$$\text{sh}' = \text{ch} \quad \text{et} \quad \text{ch}' = \text{sh}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty \\ \lim_{-\infty} \text{ch} = \lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty \end{aligned}$$

§2 La fonction tanh

Définition 44

On définit la fonction **tangente hyperbolique** par

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\rightarrow]-1, 1[\\ x &\mapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

Proposition 45

1. La fonction tanh est impaire.
2. La fonction tanh est dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} , strictement croissante et on a

$$\tanh' = \frac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \tanh^2.$$

3. $\lim_{-\infty} \tanh = -1$ et $\lim_{+\infty} \tanh = +1$.

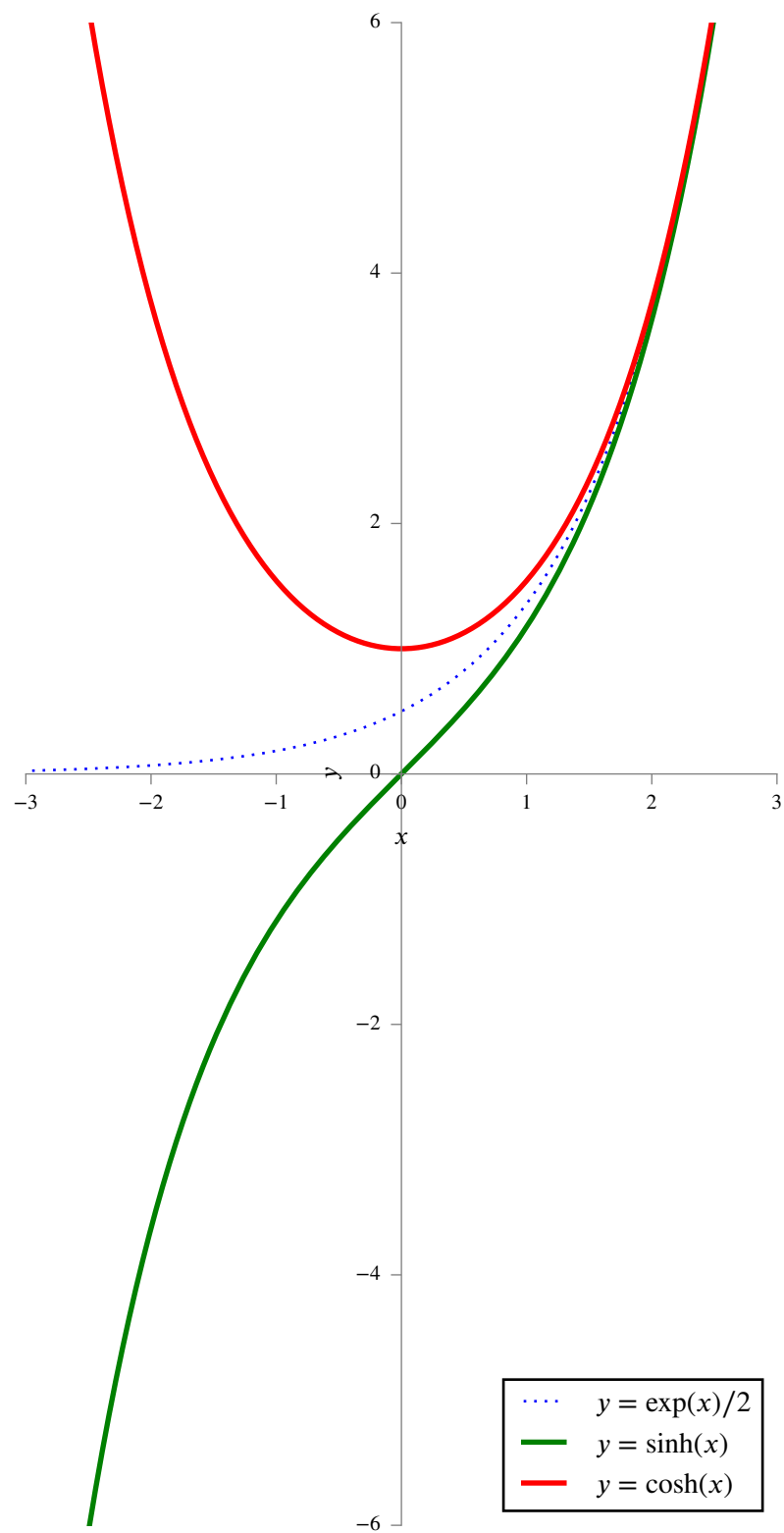


Figure 6.6: Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Figure 6.7: Tangente hyperbolique

