Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le lundi 26 septembre 2022

Problème 1

Partie A Le petit théorème de Fermat

Soit p un entier premier.

A1. Montrer
$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

A2. Montrer
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p.$$

A3. Montrer que p divise $2^p - 2$.

A4. En déduire une démonstration par récurrence du petit théorème de Fermat :
$$\forall a \in \mathbb{N}, a^p \equiv a \pmod{p}.$$

A5. En déduire que si a n'est pas multiple de p, alors le nombre $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Partie B Première application

Ici n et m sont deux entiers quelconques.

B1. Soit α un entier naturel et p un nombre premier qui ne divise ni m ni n.
Montrer que p divise $(m^\alpha)^{p-1} - 1$ et $(n^\alpha)^{p-1} - 1$.
En déduire qu'il divise $m^{\alpha(p-1)} - n^{\alpha(p-1)}$.

B2. En déduire que le nombre $S = \left(m^{60} - n^{60}\right)$ est divisible par tout nombre premier p tel que $p-1$ soit un diviseur de 60.
En déduire que S est divisible par 56786730.

Partie C Seconde application

On désire montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$, où n décrit $\mathbb{N}^\star$. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il n'existe que k nombres premiers de la forme $4n+1$. On les note $p_1, p_2, \dots, p_k$ et on pose
$$a = p_1 \times p_2 \cdots \times p_k \qquad \text{et} \qquad N = a^2 + 1.$$

C1. Soit q un facteur premier de N. On suppose que q est de la forme $4n+3$, où $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pourquoi q ne divise-t-il pas a?
(b) Montrer successivement que q divise $a^{4n+2} - 1$, n étant l'entier tel que $q = 4n+3$, puis que q divise aussi a^2+1 et a^2-1. En déduire enfin que q divise 2. Conclure.

C2. Montrer que N est divisible par 2, mais n'est pas divisible par 4.

C3. Déduire des questions précédentes que N admet au moins un facteur premier de la forme $4n+1$ et qu'un tel facteur est différent de $p_1 \times \cdots \times p_k$. Conclure.