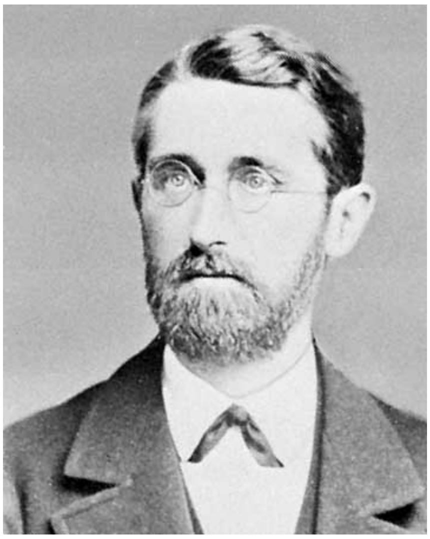
CHAPITRE

13

BORNE SUPÉRIEURE DANS $\mathbb{R}$



Richard Dedekind (1831-1916)

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sur lequel est fondé toute l'analyse est à la fois proche de notre intuition géométrique, puisqu'on se le représente comme l'ensemble des points d'une droite idéale, et dans le même temps assez difficile à appréhender. Cela est peut-être dû au fait que dans la pratique, nous ne manipulons que des nombres rationnels. Par conséquent, ces nombres irrationnels, dont le développement décimal est infini et très complexe, échappent à notre intuition. Pourtant, on ne peut s'en dispenser pour faire des mathématiques, et ce d'autant plus que la presque totalité de l'ensemble des réels est formée par les irrationnels (dans un sens qui sera précisé dans la suite du cours).

Historiquement, il semblerait que la découverte des nombres irrationnels soit le fait de Pythagore et de son école, et qu'à l'époque elle jeta un trouble certain. Par la suite, une théorie déjà assez élaborée des nombres réels positifs fut donnée par Eudoxe de Cnide au IV-ième siècle avant JC, et présentée par Euclide dans le livre V de ses *Éléments*.

Au début du X-ième siècle, un même mot, celui de *adad* (nombre), apparaît dans les mathématiques arabes, aussi bien dans la désignation des nombres rationnels (*al-addad al-muntiqa*) que dans celle des nombres irrationnels (*al addad al-summa*), montrant ainsi que les algébristes arabes voient une unité dans ces nombres. Les mathématiciens arabes Abu Kamil, Al-Samaw'al, Al-Karagi, élargissent alors le calcul aux nombres irrationnels et tendent à s'affranchir de la vision géométrique des nombres (longueurs, aires, volumes) qui est celle des Grecs, pour aller vers une vision plus arithmétique : on passe des grandeurs incommensurables aux nombres irrationnels.

Cependant, il fallut attendre le XIX-ième siècle pour qu'on dispose de constructions formelles et rigoureuses de ces nombres, abandonnant tout recours à la géométrie. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants concernant les fonctions, une réforme de l'analyse tendant vers une plus grande rigueur s'amorce au XIX-ième siècle, sous l'impulsion de Cauchy, Bolzano et Weierstrass. Toujours est-il qu'au milieu du XIX-ième siècle, aucune théorie vraiment satisfaisante des nombres n'a encore été proposée, aucun fondement logique de «l'arithmétique» n'est disponible.

C'est en particulier pour des raisons pédagogiques (pour construire son cours de calcul différentiel à l'université de Berlin sur des bases rigoureuses) que Weierstrass décide de combler cette lacune. En 1863, il propose une construction de la droite réelle. En 1872, deux autres constructions du même type sont publiées, une première due à Cantor et Heine, et une seconde due à Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*).

Concernant la première d'entre elles, Méray a, dès 1869, fait paraître une construction des réels qui en est assez proche. Pour la seconde, Dedekind a en fait conçu cette théorie dès 1858, et, là encore, c'est par une réflexion trouvant son origine dans des questions d'enseignement qu'il y est conduit[1]. La préface de *Stetigkeit und irrational Zahlen*, dont suit ici un extrait, en témoigne.

> Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. [...] Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale.

Ainsi de plusieurs manières équivalentes, le corps des nombres réels était construit rigoureusement à partir de celui des rationnels, eux-mêmes construits à partir des entiers. C'est donc avec l'axiomatisation des entiers naturels par Peano en 1889 que l'édification de cette «tour» de nombres, partant de $\mathbb{N}$ et allant à $\mathbb{R}$, s'appuyait enfin sur des bases logiques, rigoureuses, purement arithmétiques et indépendantes de tout recours à des «évidences» géométriques.

[1]Notons à ce propos que c'est aussi de la volonté d'écrire un ouvrage didactique, qui rompe avec les livres faisant autorité en analyse au début du XX-ième siècle et soit fondé sur une parfaite rigueur, qu'est né Nicolas Bourbaki.

13.1 Théorème de la borne supérieure

§1 Borne supérieure

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

Définition 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

Théorème 2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Exemples 3

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

Remarque Il est faux que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ admet une «borne supérieure» dans $\mathbb{Q}$. Par exemple avec A=$\left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2 \right\}$. L'ensemble des rationnels qui majore A est $[2, +\infty[\cap\mathbb{Q}$: il n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 4 Soit

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Alors A n'a pas de plus grand élément et $\sup(A) = 0$.

Test 5 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

§2 Borne inférieure

Définition 6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **la borne inférieure de A** et on la note $\inf A$.

Théorème 7 *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Test 8 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est minorée. Alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$.

Test 9 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{-x \mid x \in A\}$. Alors B est minorée et $\inf B = -\sup A$.

§3 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Notation On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ appelé droite numérique achevée.

13.2 Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

§1 Parties convexes de $\mathbb{R}$

Définition 10 Une partie I de $\mathbb{R}$ est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de I est inclus dans I, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in I^2, [x, y] \subset I.$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

§2 Caractérisation des parties convexes

La propriété de la borne supérieure ou inférieure permet de distinguer les partie convexe de $\mathbb{R}$ en dix types distincts selon qu'il existe ou non un majorant ou un minorant, ainsi qu'un plus grand ou plus petit élément.

Théorème 11 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**
Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles ouverts**, de la forme*

$$\begin{aligned}
]a, +\infty[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \} \\
]-\infty, b[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \} \\
]a, b[&=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- *Les **intervalles fermés**, de la forme*

$$\begin{aligned}
[a, +\infty[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \} \\
]-\infty, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \} \\
[a, b] &=]-\infty, b] \cap [a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

*Les intervalles de la forme $[a, b]$ fermés et bornées sont aussi appelés **segments**.*

- *Les intervalles de la forme*

$$\begin{aligned}
]a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \\
[a, b[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}
\end{aligned}$$

Ces intervalles ne sont ni ouverts, ni fermés.

- *L'ensemble vide :* $\emptyset$.

Remarque

- Noter que si $b < a$, alors $]a, b[= [a, b] = \emptyset$. Si $a = b$, on a $[a, a] = \{ a \}$.
- Par ailleurs, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles ouverts et fermés.
- En ce qui concerne la signification précise des symboles $+\infty$ et $-\infty$ utilisés ci-dessus ou ailleurs, il doit être précisé que

  1. ∞ par lui-même n'a aucune signification, bien que *certaines phrases le contenant* signifient quelquefois quelque chose.

  2. Chaque fois qu'une phrase ou notation contenant le symbole ∞ signifiera quelque chose, ce sera seulement parce que nous aurons antérieurement attaché une signification à cette phrase particulière au moyen d'une *définition spécifique*.

Corollaire 12 *Toute intersection d'intervalles est un intervalle.*