

Chapter 40 Séries numériques

Exercice 1 (40.0)

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; construire un contre-exemple dans ce dernier cas.

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$ ont même nature.
2. Si $\sum(u_n + v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes deux.
3. si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+m}$ converge aussi et a la même somme.
4. Quel que soit $c \in \mathbb{R}$, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} cu_n$ est convergente, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
5. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n u_n = 0$.
6. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$.

Exercice 2 (40.0)

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; construire un contre-exemple dans ce dernier cas.

1. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles est majorée.
2. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que ses sommes partielles soient toutes nulles.
3. Pour qu'une série converge, il est suffisant que ses sommes partielles soient toutes nulles.
4. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que ses sommes partielles tendent vers 0.
5. Pour qu'une série converge, il est suffisant que la suite de ses sommes partielles soit décroissante.
6. Pour qu'une série converge, il est nécessaire que la suite de ses sommes partielles soit croissante.
7. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles est bornée.
8. Si une série converge, la suite de ses sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
9. Une série converge si la suite de ses sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
10. Une série converge si la suite de ses sommes partielles est constantes.

Exercice 3 (40.0)

Après avoir calculé les sommes partielles, étudier la convergence de

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} ;$$

$$2. \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) ;$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \frac{3 - n}{n(n+1)(n+2)} ;$$

$$4. \sum_{n \geq 1} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}.$$

Exercice 4 (40.0)

Pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, Claude procède comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

tandis que Dominique utilise la méthode suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots \\ &= \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{6}{5}\right) + \dots \\ &= 2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right) - \dots \\ &= 2. \end{aligned}$$

L'un des deux a-t-il raison ? Si oui, lequel ?

Exercice 5 (40.0)

1. Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Exercice 6 (40.0) Séries géométriques dérivées

On fixe un réel x tel que $0 \leq x < 1$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_{k \geq p} \binom{k}{p} x^k$ converge.
2. On pose $S_p = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.
3. Calculer $x(S_p + S_{p+1})$.
4. En déduire une expression simple de S_p en fonction de p et x .
5. En déduire la valeur de $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p}$ (série géométrique dérivée).

Exercice 7 (40.0)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants

- | | | |
|---------------------------|--|---|
| 1. $\frac{ \cos n }{n^2}$ | 2. $\sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$ | 3. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$ |
| | | 4. $\ln \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 1}$ |

5. $\frac{1}{n^2 \ln n}$	7. $\frac{n!}{n^n}$	
6. $\frac{\ln n}{n}$	8. $\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$	

Exercice 8 (40.0)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+^* , convergente. Déterminer la nature des séries de termes généraux

1. $u_n = \frac{a_n}{1 + a_n},$	3. $w_n = \frac{1 - \cos a_n}{a_n},$
2. $v_n = e^{a_n} - 1,$	4. $x_n = a_n^2.$

Exercice 9 (40.0)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants

1. $e^{-\sqrt{n}}$	3. $n^{1/n^2} - 1$	5. $\frac{1}{n \ln n}$
2. $\frac{\ln n}{n^2}$	4. $\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$	6. $\frac{1}{n (\ln n)^2}.$

Exercice 10 (40.0)

Montrer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Exercice 11 (40.0)

Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 12 (40.0)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, 1[.$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1 + \ell}{2}\right) u_n.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

3. Soient deux réels $\alpha > 0$ et $a > 1$. Déterminer la nature des trois séries suivantes

$\sum_{n \geq 0} \frac{n^\alpha}{a^n},$	$\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!},$	$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n}.$
---	-----------------------------------	-----------------------------------

Exercice 13 (40.0)

Soit $\sum u_n$ la série définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n = 2^p, p \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{1}{n^2} & n \neq 2^p. \end{cases}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Est-il exact que la convergence d'une série $\sum u_n$ entraîne le fait que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Exercice 14 (40.0)

Soient $a > 0$ et $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{1+ax} - 1$.

1. Montrer que \mathbb{R}_+ est stable par f , que f est croissante sur \mathbb{R}_+ et que $f(x) - x$ est du signe de $x(a-2-x)$. Déterminer les points fixes de f ainsi que les intervalles stables. Tracer le graphe de f pour différentes valeurs de a .
2. On suppose $a < 2$ et on considère la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que $u_n \rightarrow 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. Que dire de la suite (u_n) si $a > 2$?

Exercice 15 (40.0)

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = n^\alpha \int_0^{\pi/n} (\sin x)^\beta dx.$$

Exercice 16 (40.0)

1. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de la suite (S_n) .

2. Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de la suite (R_n) .

Exercice 17 (40.0)

Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La réel γ est appelé la constante d'Euler.

Exercice 18 (40.0)

Soit $\sum u_n$ une série de réels strictement positifs. Montre que si

- $\sum u_n$ est convergente,
- (u_n) est une suite décroissante,

alors

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 19 (40.0)

Étudier si la série de terme général

$$u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$$

converge.

Exercice 20 (40.0)

Étudier si la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

converge.

Exercice 21 (40.0)

Pour tout $n \geq 2$, posons

$$a_n = \frac{1}{n + (-1)^n} \quad \text{et} \quad u_n = (-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Exercice 22 (40.0)

Étudier la nature des deux séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Commenter les résultats.

Exercice 23 (40.0)

Soit $\sum x_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une série $\sum y_n$ absolument convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + y_n.$$

1. Montrer que $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + z_n$ où z_n est le terme général d'une série convergente.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $x_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.
3. Exemple : Nature de la série de terme général $\frac{n^n}{n! e^n}$?