Chapter 25 Applications linéaires

Exercice 1 (25.1)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À toute application $f \in E$, on associe l'application $A(f)$ définie par

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que A est une application de E à valeurs dans E.
2. Montre que A est linéaire.

Solution 1 (25.1)

1. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Celle-ci est donc dérivable est a fortiori continue, autrement dit $A(f) \in E$.

2. Soit $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous devons montrer l'égalité entre fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
A(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^x (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \alpha f(t) + \beta g(t) dt \\
&= \alpha \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^x g(t) dt & \because \text{linéarité de } \int_{[0,x]} \\
&= \alpha A(f)(x) + \beta A(g)(x) \\
&= (\alpha A(f) + \beta A(g))(x).
\end{aligned}$$

Cette égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

L'application A est donc linéaire.

Exercice 2 (25.1)

Vérifier la linéarité des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$.

2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \phi(0) \end{array}$.

3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.

4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2 P' \end{array}$.

5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Solution 2 (25.1)

Fait en cours.

Exercice 3 (25.1)

Montrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, 4x-2y) \end{array}$ appartient à $\mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$. Préciser f^{-1}.
Vérifier que f^{-1} est effectivement linéaire.

Solution 3 (25.1)
Soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $w = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(x+x', y+y') \\ &= (x+x'+3(y+y'), 4(x+x')-2(y+y')) \\ &= (x+3y+x'+3y', 4x-2y+4x'-2y') \\ &= (x+3y, 4x-2y) + (x'+3y', 4x'-2y') \\ &= f(v) + f(w), \\ \text{et } f(\alpha v) &= f(\alpha x, \alpha y) \\ &= (\alpha x + 3\alpha y, 4\alpha x - 2\alpha y) \\ &= \alpha(x+3y, 4x-2y) \\ &= \alpha f(v). \end{aligned}$$

Ainsi, l'application f est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que f est bijective, c'est-à-dire

$$\forall v \in \mathbb{R}^2, \exists! u \in \mathbb{R}^2 f(u) = v.$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$f(u) = v \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+3y & = x' \\ 4x-2y & = y' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+3y & = x' \\ -14y & = -4x'+y' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = \frac{1}{7}x' + \frac{3}{14}y' \\ y & = \frac{2}{7}x' - \frac{1}{14}y' \end{array} \right.$$

Ce qui assure l'existence et l'unicité de u tel que $f(u) = v$. L'application f est donc bijective et

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{7}x + \frac{3}{14}y, \frac{2}{7}x - \frac{1}{14}y\right) \end{array}.$$

Il ne (*vous*) reste plus qu'a montrer que f^{-1} est bien linéaire.

Exercice 4 (25.1)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$ vérifiant

$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) = 0. \tag{1}$$

Montrer que f est bijective.

Solution 4 (25.1)

Puisque f et Id_E sont linéaires,

$$\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) = f \circ f - \mathrm{Id}_E \circ f + f \circ (2\,\mathrm{Id}_E) - \mathrm{Id}_E \circ (2\,\mathrm{Id}_E) = f \circ f + f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0. \tag{2}$$

Ainsi,

$$f \circ f + f = 2\,\mathrm{Id}_E$$

d'où

$$f \circ \left(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)\right) = \mathrm{Id}_E \text{ et } \left(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)\right) \circ f = \mathrm{Id}_E\,.$$

L'application f est donc bijective et $f^{-1} = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right)$.

Exercice 5 (25.2)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - z, x - 3y + 3z, 2x + 4y - 4z)$.

Solution 5 (25.2)

Exercice 6 (25.2)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = X\left(P'(X+1) - P'(1)\right)$.
2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - XP' - P(0)$.

Solution 6 (25.2)

Exercice 7 (25.2)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, préciser leur noyau et leur image, préciser aussi si celles-ci sont injectives ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y - z, x + y)$.
2. $M : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $M(P) = XP$.
3. $\phi : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ définie par $\phi(f) = f' - f$.
4. $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Re}(z)$.

Solution 7 (25.2)

Exercice 8 (25.2)

Soit $\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(0), P'(1), P(2)\big) \end{array}$.

1. Prouver que ϕ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. Déterminer l'image de ϕ.
4. L'application ϕ est-elle injective? est-elle surjective?

Solution 8 (25.2)

Exercice 9 (25.2)

Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$.

1. Prouver que ϕ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. Soit $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur y pour avoir $y \in \mathrm{Im}(\phi)$.
4. L'application ϕ est-elle injective? est-elle surjective?

Solution 9 (25.2)

Exercice 10 (25.2)

On désigne par $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère l'application ϕ définie sur E par

$$\forall f \in E, \phi(f) = f'(1).$$

1. Démontrer que ϕ est une forme linéaire sur E.
2. En déduire que $F = \left\{ f \in E \mid f'(1) = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Solution 10 (25.2)

1. Soit $(f, g) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\phi(f+g) = (f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = \phi(f) + \phi(g) \text{ et } \phi(\alpha f) = (\alpha f)'(1) = \alpha f'(1) = \alpha\phi f.$$

L'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ est donc une forme linéaire.

2. $F = \ker \phi$, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11 (25.2)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathbf{L}(E, F)$ et $g \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

2. Montrer que $\ker f \subset \ker g \circ f$.

3. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

Solution 11 (25.2)

1. Supposons $g \circ f = 0$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, g(f(x)) = 0.$$

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors,

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = 0$$

c'est-à-dire $y \in \ker g$.

Conclusion. $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Soit $x \in E$,

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Or $f(x) \in \operatorname{Im} f$, donc $f(x) \in \ker g$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = 0$. Ce résultat étant valable pour tout $x \in E$, on a bien $g \circ f = 0$.

2. Soit $x \in \ker f$. Alors

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g(0) = 0,$$

donc $x \in \ker g \circ f$.

On a montré $\ker f \subset \ker g \circ f$.

3. Soit $y \in \operatorname{Im} g \circ f$. Il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$. On a donc

$$y = g\left(f(x)\right) \quad \text{et} \quad f(x) \in F$$

d'où $y \in \operatorname{Im} g$.

On a montré $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

Exercice 12 (25.2)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.
Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Solution 12 (25.2)

C'est un cas particulier de l'exercie précédent…

Exercice 13 (25.2)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.
Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{ 0_E \}$.

Solution 13 (25.2)

Ça ressemble à 12 (25.2).

Exercice 14 (25.2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Exercice 15 (25.2)

Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $u \in \mathbf{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subset \ker u^{k+1} \text{ et } \operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k.$$

2. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\ker u^d = \ker u^{d+1}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \ker u^{k+1} = \ker u^k.$$

3. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a

$$\ker u^p = \ker u^{p+1} \iff \ker u^p \cap \operatorname{Im} u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$

4. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\operatorname{Im} u^d = \operatorname{Im} u^{d+1}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k.$$

Solution 15 (25.2)

Un exercice pour futur MPI!

Exercice 16 (25.2)

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espaces vectoriels F. Montrer que pour tout partie A de E,

$$f\left(\operatorname{Vect}(A)\right) = \operatorname{Vect}\left(f(A)\right).$$

Solution 16 (25.2)

Exercice 17 (25.2)

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{array}{rrcl} u: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, x - y + 2z) \end{array}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution 17 (25.2)

$$\ker f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2.$$

f est surjective et n'est pas injective.

Exercice 18 (25.2)

Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

1. Prouver que $\theta \in \mathbf{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$.
2. Montrer que θ est injective.
3. Montrer que θ est surjective.

Solution 18 (25.2)

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \theta(P+Q) &= ((P+Q)(0), (P+Q)(1), (P+Q)(2)) \\ &= (P(0)+Q(0), P(0)+Q(1), P(2)+Q(2)) \\ &= (P(0), P(1), P(2)) + (Q(0), Q(1), Q(2)) \\ &= \theta(P) + \theta(Q) \\ \text{et } \theta(\alpha P) &= ((\alpha P)(0), (\alpha P)(1), (\alpha P)(2)) \\ &= (\alpha P(0), \alpha P(1), \alpha P(2)) \\ &= \alpha\,(P(0), P(1), P(2))\,. \end{aligned}$$

L'application θ est donc linéaire.

2. Soit $P \in \ker\theta$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Ainsi P a au moins 3 racines et $\deg P \leq 2$, le polynôme P est donc nul. Ainsi $\ker\theta = \{\,0\,\}$ et l'application linéaire θ est injective.

Variante. (À la main). Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = aX^2 + bX + c$.

$$P \in \ker\theta \iff \begin{cases} P(0) &= 0 \\ P(1) &= 0 \\ P(2) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a+b+c &= 0 \\ 4a+2b+c &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c &= 0 \\ a &= -b \\ -2b &= 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0 \iff P = 0.$$

Ainsi $\ker\theta = \{\,0\,\}$ et l'application linéaire θ est injective.

Variante (à la main). Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\theta(P) = (x, y, z)$.

$$\theta(P) = (x,y,z) \iff \begin{cases} P(0) &= x \\ P(1) &= y \\ P(2) &= z \end{cases} \iff \begin{cases} c &= x \\ a+b+c &= y \\ 4a+2b+c &= z \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c &= y \\ -2b-3c &= z-4y \\ c &= x \end{cases}$$

Ce système est toujours compatible : $(x, y, z) \in \operatorname{Im}\theta$. Ainsi θ est une application surjective.

Exercice 19 (25.2)

Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$.
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+z, x-z) \end{array}$.
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y+z, x+y+z) \end{array}$.
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$.
5. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}$.
6. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(0) \end{array}$.
7. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' \end{array}$.
8. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & u_3 \end{array}$.
9. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.
10. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Exercice 20 (25.3)

Vérifier que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires et déterminer dans chaque cas l'image et le noyau. En déduire si u est injective, surjective, bijective.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$.
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P-(X-2)P' \end{array}$.

Solution 20 (25.3)

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$u(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = u(P) + u(Q) \text{ et } u(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha u(P).$$
L'application u est donc linéaire.
Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$.
$$u(P) = 0 \iff P' = 0 \iff \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}X^n = 0$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} = 0 \iff \forall n \geq 1, a_n = 0 \iff P = a_0.$$
On a donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.
Soit $Q = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. En posant $P = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n+1} X^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{b_{n-1}}{n} X^n$, on a bien $P \in \mathbb{R}[X]$ et $u(P) = P' = Q$, et donc $Q \in \operatorname{Im}(u)$. Finalement, $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}[X]$.
L'application u est donc surjective, mais n'est pas injective.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$u(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = u(P) + u(Q) \text{ et } u(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha u(P).$$

L'application u est donc linéaire.

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$u(P) = 0 \iff P' = 0 \iff a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 = 0 \iff a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0 \iff P = a_0.$$

On a donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

Soit $Q = b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. On cherche s'il existe $P = a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $u(P) = Q$.

$$u(P) = Q \iff a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \iff \left\{\begin{array}{rl} a_1 & = b_0 \\ 2a_2 & = b_1 \\ 3a_3 & = b_2 \\ 0 & = b_3. \end{array}\right.$$

Ce système, d'inconnues $a_0, \dots, a_3$ est compatible si, et seulement si, $b_3 = 0$, c'est-à-dire $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$, autrement dit, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a donc $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}_2[X]$.

L'application u est donc ni surjective, ni injective.

3. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(P+Q) &= ((P+Q)(-1), (P+Q)(0), (P+Q)(1)) = (P(-1)+Q(-1), P(0)+Q(0), P(1)+Q(1)) \\ &= (P(-1), P(0), P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) = u(P) + u(Q) \\ \text{et } u(\alpha P) &= ((\alpha P)(-1), (\alpha P)(0), (\alpha P)(1)) = (\alpha P(-1), \alpha P(0), \alpha P(1)) \\ &= \alpha\,(P(-1), P(0), P(1)) = \alpha u(P). \end{aligned}$$

L'application u est donc linéaire.

De plus,

$$P \in \ker(u) \iff P(-1) = 0, P(0) = 0, P(1) = 0$$

on a donc

$$\ker u = \{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(-1) = 0 \text{ et } P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\ \} = \{\ (X+1)X(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\ \}.$$

L'application linéaire u n'est donc pas injective.

On remarque que

$$u(X(X-1)) = (2,0,0) \quad u((X-1)(X+1)) = (0,-1,0) \quad u(X(X+1)) = (0,0,2)$$

Ainsi

$$\mathrm{Vect}\ \{\ (2,0,0), (0,-1,0), (0,0,2)\ \} \subset \mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3.$$

Et on vérifie facilement que $((2,0,0), (0,-1,0), (0,0,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$: l'application u est surjective.

4. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(P+Q) &= (P+Q) - (X-2)(P+Q)' = P + Q - (X-2)(P'+Q') \\ &= P - (X-2)P' + Q - (X-2)Q' = u(P) + u(Q) \\ \text{et } u(\alpha P) &= \alpha P - (X-2)(\alpha P)' \\ &= \alpha P - (X-2)\alpha P' = \alpha(P - (X-2)P') = \alpha u(P). \end{aligned}$$

L'application u est donc linéaire.

Soit $P \in \ker(u)$, alors $u(P) = 0$, c'est-à-dire, $P = (X-2)P'$. En dérivant cette relation, on obtient $P' = P' + (X-2)P''$ d'où $(X-2)P'' = 0$ et donc $P'' = 0$. Ainsi, $\deg(P) \leq 1$. On peut donc écrire $P = aX + b$ où $a, b \in R$. On a alors,

$$\begin{aligned} u(P) = 0 \iff P - (X-2)P' = 0 \iff aX + b - (X-2)a = 0 \\ \iff b + 2a = 0 \iff b = -2a \iff P = a(X-2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(u) = \mathrm{Vect}\,\{\, X-2 \,\}$ et l'application u n'est pas injective.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, on cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u(P) = Q$. Notons $Q = \sum_{n \geq 0} b_n (X-2)^n$ et $P = \sum_{n \geq 0} a_n (X-2)^n$ (cette écriture est possible, on peut par exemple invoqué la formule de Taylor). Alors

$$u(P) = P - (X-2)P' = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (1-n)(X-2)^n = a_0 + \sum_{n \geq 2} a_n (1-n)(X-2)^n.$$

Ainsi,

$$u(P) = Q \iff \begin{cases} a_0 = b_0 \\ 0 = b_1 \\ a_n = \frac{b_n}{1-n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi $Q \in \mathrm{Im}(u)$ si, et seulement si $b_1 = 0$. L'application u n'est donc pas surjective. De plus,

$$\mathrm{Im}(u) = \left\{\, a_0 + (X-2)^2 A \;\middle|\; A \in \mathbb{R}[X] \,\right\}.$$

Exercice 21 (25.3)

On définit sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ deux applications A et B par

$$A\left(P(X)\right) = P'(X) \qquad \text{et} \qquad B\left(P(X)\right) = XP(X).$$

Démontrer les assertion suivantes.

1. A et B sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}[X]$ et $\ker A \neq \{\, 0 \,\}$.
3. $\ker B = \{\, 0 \,\}$ et B n'a pas d'application réciproque.
4. $A \circ B - B \circ A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^{\star}$, $A^k \circ B - B \circ A^k = kA^{k-1}$.

Solution 21 (25.3)

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$A(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = A(P) + A(Q) \text{ et } A(\alpha P) = (\alpha P)' = \alpha P' = \alpha A(P).$$

L'application A est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

De plus,

$$B(P+Q) = X(P+Q) = XP + XQ = B(P) + B(Q) \text{ et } B(\alpha P) = X(\alpha P) = \alpha XP = \alpha B(P).$$

L'application B est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

2. Soit P un polynôme, $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. On pose

$$R(X) = \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} X^n + \cdots + a_0 X.$$

On a $A(R) = P$ donc $P \in \operatorname{Im} A$. Ainsi $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}[x]$.

De plus, si Q est un polynôme constant, $A(Q) = 0$. Par conséquent $\ker A \neq \{\, 0 \,\}$ (en fait $\ker A = \mathbb{R}_0[X]$).

3. Soit P un polynôme, $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. On a

$$B(P) = XP(X) = a_n X^{n+1} + a_{n-1} X^n + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X.$$

Si $B(P) = 0$, alors $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $P = 0$. Ainsi $\ker B = \{\, 0 \,\}$. Par ailleurs, B n'est pas surjective, puisqueles polynômes constants différents du polynôme nul n'ont pas d'antécédent. L'application B n'étant pas bijective, elle n'a pas d'application réciproque.

4. Avec les même notations que précédement, on a

$$\left(A \circ B - B \circ A\right)(P) = (XP)' - XP' = P + XP' - XP' = P = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}(P).$$

d'où $A \circ B - B \circ A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.

5. On a déjà démontré la proposition pour $k = 1$ à la question précédente. On suppos qu'elle est vérifiée pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$. On a alors,

$$\begin{aligned}
(k+1)A^k &= A\circ kA^{k-1} + A^k \\
&= A\circ(A^k\circ B - B\circ A^k) + A^k \\
&= A^{k+1}\circ B - \left(A\circ B - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}\right)\circ A^k \\
&= A^{k+1}\circ B - (B\circ A)\circ A^k \\
&= A^{k+1}\circ B - B\circ A^{k+1}.
\end{aligned}$$

On a ainsi établi par récurrence que $A^k\circ B - B\circ A^k = kA^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.