Chapitre 5

Notions sur les fonctions en analyse

Dans tout ce chapitre, on note $\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan affine $\mathcal{P}$.

5.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

§1 Qu'est-ce qu'une fonction?

Définition 1

Une **fonction** ou **application** f est définie par la donnée de trois éléments : un **ensemble de départ** X, un **ensemble d'arrivée** Y et pour tout $x \in X$, la donnée d'une (unique) **image** notée $f(x) \in Y$. On note $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$.

- Lorsque $X \subset \mathbb{R}$, on parle de **fonction d'une variable réelle**.
- Lorsque $Y \subset \mathbb{R}$ (ou $Y \subset \mathbb{C}$), on parle de fonction numérique.
- Nous noterons parfois $\text{dom}(f)$ l'ensemble de départ de f.

Définition 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.
- On dit que f est **dérivable en a** si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a)$.

Remarque

- On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I.
- On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.

§2 Recherche de l'ensemble de définition

Lorsque l'on rencontre une fonction numérique, la première précision à obtenir est, bien entendu, son ensemble de définition (parfois appelé domaine de définition). En effet, cet ensemble est rarement donné de façon explicite, mais généralement une fonction est «définie» par une, ou plusieurs, formules contenant des fonctions «de base» dont les ensembles de définition font partie du domaine public. Il convient donc, en présence d'une telle fonction, de rechercher sa généalogie et les tares de ses ancêtres.

Par exemple, $f : x \mapsto \sqrt{-\sqrt{-x}}$ n'est définie qu'en 0, car le symbole $\sqrt{}$ désigne, par convention, la racine carrée arithmétique d'un nombre réel positif ou nul. Tandis que $g : x \mapsto \sqrt[3]{-\sqrt{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

La recherche de l'ensemble de définition d'une fonction f se réduit donc en général à la résolution d'inéquations correspondant aux ensembles de définition de ses constituants.

Test 3

Déterminer l'ensemble de définition des applications définies par

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$
2. $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

§3 Image d'une application

Définition 4

Soit $f : X \to Y$ une fonction. L'**image de f** ou l'**image de X par f**, notée $f(X)$ est l'ensemble des images des éléments de X par f, c'est-à-dire

$$f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\}.$$

Remarque

C'est l'ensemble des éléments $y \in Y$ tels qu'il existe $x \in X$ vérifiant $f(x) = y$.

Exemples 5

Déterminer l'image des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}.$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}.$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}.$

Théorème 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

§4 Composition de fonctions

Définition 7

Soit deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z$. On suppose que pour tout $x \in X$ on a $f(x) \in Y'$, de sorte que l'expression $g(f(x))$ a un sens et on la note $(g \circ f)(x)$. La fonction ainsi définie

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

est la **composée** des fonctions g et f.

Test 8

On considère les applications

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et } \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x-3 \end{array}.$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Remarques

- La condition pour que la composée $g \circ f$ ait un sens peut également s'écrire $\operatorname{Im} f \subset Y'$.
- Si $Y \subset Y'$, la condition $f(x) \in Y'$ est vérifiée pour tout $x \in X$. Il est souvent commode d'utiliser des diagrammes lorsque l'on manipule des composées. On note classiquement

$$X \xrightarrow{f} Y \subset Y' \xrightarrow{g} Z.$$

Théorème 9

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

1. *Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.*
2. *Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I. Dans ce cas, on a*

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

5.2 Courbe représentative d'une fonction

§1 Graphe d'une fonction

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On appelle **graphe** de f, et on note Γ_f, l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$. Ainsi

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} .$$

Définition 10

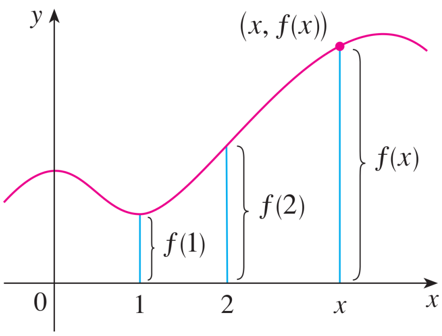
Un repère orthonormal $\mathfrak{R}$ du plan étant choisi, le graphe Γ_f de $f : X \to Y$ s'identifie à l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x décrivant X, appelé **courbe représentative** de f dans $\mathfrak{R}$. On emploiera abusivement le terme graphe de f pour désigner la courbe représentative de f dans $\mathfrak{R}$.

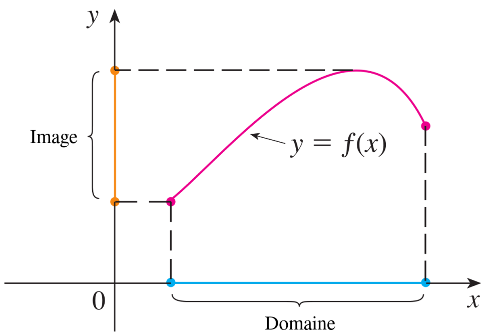
Remarque

La courbe représentative de f dans un repère $\mathfrak{R} = (Oxy)$ est la courbe d'équation

$$y = f(x)$$

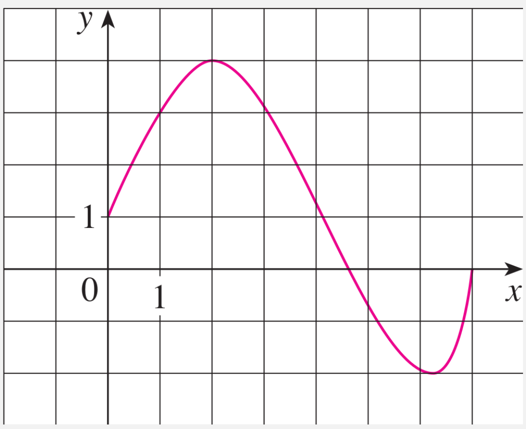
c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $x \in \mathrm{Dom}(f)$ et $y = f(x)$.





Test 11

Le graphe d'une fonction f est représenté ci-dessous



1. Quel sont les valeurs de $f(1)$ et $f(5)$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que l'image de f.

§2 Transformations élémentaires

Proposition 12 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note C la courbe représentative de f.*

1. *La courbe $y = f(x) + a$ est obtenue à partir de C par translation de vecteur $a\vec{e_2}$.*
2. *La courbe $y = f(x - a)$ est obtenue à partir de C par translation de vecteur $a\vec{e_1}$.*

En prenant $a = \pm c$ où $c > 0$. Les courbes d'équations $y = f(x) + c$, $y = f(x) - c$, $y = f(x - c)$, $y = f(x + c)$ s'obtiennent respectivement par un translation vers le haut, le bas, la droite, la gauche (voir 5.1).

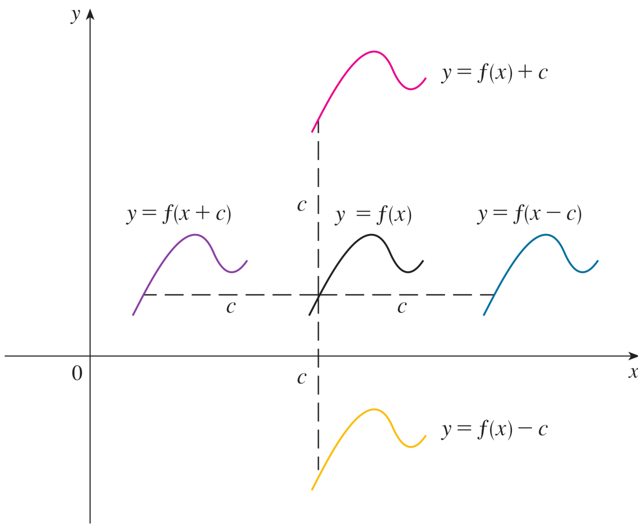


Figure 5.1: Translation d'une courbe ($c > 0$)

Test 13 Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto f(x) + a$ et $h : x \mapsto f(x + a)$?

Proposition 14 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note C la courbe représentative de f.*

1. *La courbe $y = af(x)$ est obtenue à partir de C par une affinité verticale de rapport a.*
2. *La courbe $y = f(ax)$ est obtenue à partir de C par une affinité horizontale de rapport $1/a$ ($a \neq 0$).*

Test 15 Que peut-on dire des domaines de définition de $g : x \mapsto af(x)$ et $h : x \mapsto f(ax)$?

Test 16 À partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, utiliser les transformations précédentes afin d'obtenir les courbes d'équations

1. $y = \sqrt{x} - 2$
2. $y = \sqrt{x - 2}$
3. $y = -\sqrt{x}$
4. $y = 2\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{-x}$

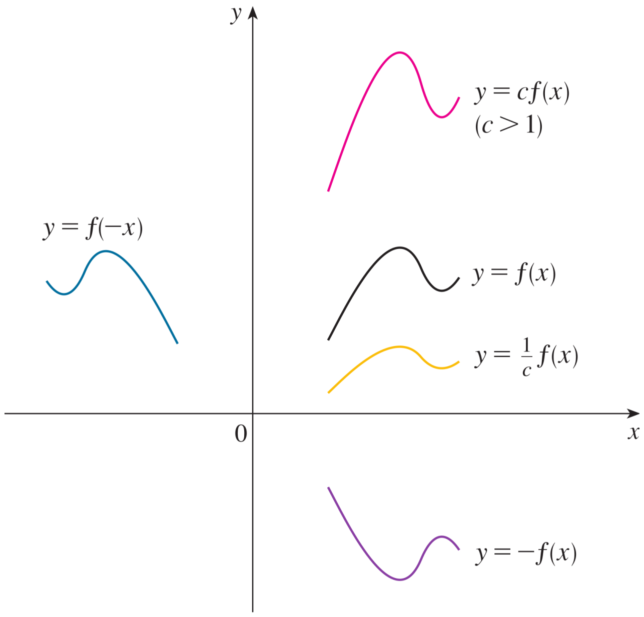


Figure 5.2: Transformation par affinité ($c > 1$)

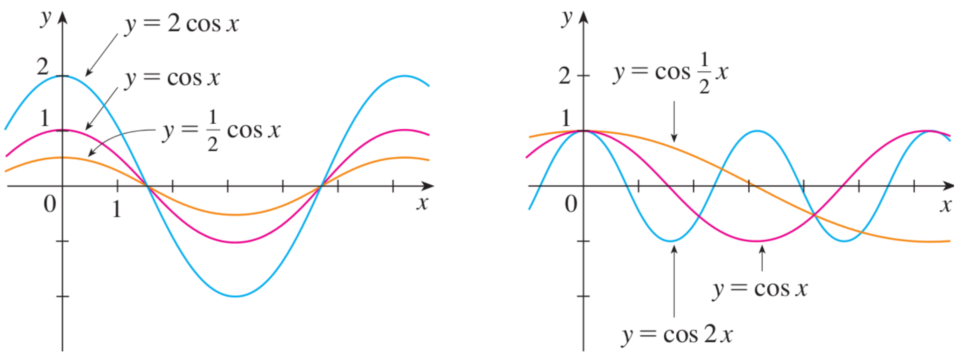


Figure 5.3: Transformation par affinité

Test 17

Tracer les courbes d'équations

1. $y = \sin(2x)$.

2. $y = 1 - \sin(x)$.

5.3 Injections, surjections, bijections

§1 Injections, surjections

Définition 18

Soit $f : X \to Y$ une application.

- On dit que f est **injective** quand

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- On dit que f est **surjective** quand

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si, et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivé admet un antécédent par f.

Remarque Fixons $y \in Y$ et considérons l'équation d'inconnue $x \in X$

$$f(x) = y. \tag{E}$$

- Si f est injective, l'équation (E) a au plus une solution (c'est-à-dire 0 ou 1 solution).
- Si f est injective, l'équation (E) a au moins une solution (c'est-à-dire 1, 2, beaucoup voir une infinité).

Test 19 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est-elle injective? Est-elle surjective?

Test 20 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est-elle injective? Est-elle surjective?

§2 Bijections et réciproques

Définition 21 Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **bijective** quand elle est injective et surjective. Autrement dit, pour tout $y \in Y$, l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in X$ admet exactement une solution.
Lorsque l'application $f : X \to Y$ bijective. En associant à tout élément $y \in Y$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E. Cette application est appelée **application réciproque** de l'application f (ou simplement *réciproque* de f) et notée f^{-1}.
Elle est caractérisée par la relation

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Il en résulte évidement que f^{-1} est à son tour bijective et que sa réciproque est $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Pratiquement, on calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; en principe, cette équation doit avoir une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

Test 22 Supposons f bijective. Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(8) = -10$, déterminer $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(-10)$.

Exemple 23 Soit $f : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\to [0, +\infty[$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Test 24

Soit $f : x \mapsto \sqrt{-1-x}$. Déterminer son ensemble de définition D. Montrer que f, définie comme fonction de D dans $\mathbb{R}_+$ est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

Remarque

Si f est bijective, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (d'équation cartésienne $y = x$).

§3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 25

Soient f une application continue et strictement monotone d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ *et $J = f(I)$ l'intervalle image de I par f et $g : J \to I$ l'application réciproque de f. Supposons la fonction f dérivable en un point $a \in I$. Alors g est dérivable au point $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) = f'(g(b)) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Ce qui s'écrit généralement,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Remarque

Lorsque $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

5.4 Notions liées à l'ordre

§1 Fonctions majorées, minorées et bornées

Définition 26

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que

  $$\forall x \in A, f(x) \leq M.$$

  Dans ce cas, le réel M est appelé un **majorant** de f.

- On dit que f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que

  $$\forall x \in A, f(x) \geq m.$$

  Dans ce cas, le réel m est appelé un **minorant** de f.

Définition 27

Une fonction f est **bornée** lorsque elle est majorée et minorée.

Proposition 28

La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un réel μ tel que

$$\forall x \in A, |f(x)| \leq \mu.$$

Autrement dit, f est bornée si et seulement si $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

§2 Sens de variation

Définition 29 Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **croissante** sur A si
$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$
- f est **strictement croissante** sur A si
$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$
- f est **décroissante** sur A si
$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$
- f est **strictement décroissante** sur A si
$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Proposition 30 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et $f : A \to \mathbb{R}$. Supposons f strictement croissante, alors*

1. *f est injective.*
2. $\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.
3. $\forall (x_1, x_2) \in A^2, x_1 \leq x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$.

On a bien sûr une proposition similaire pour les fonctions strictement décroissantes. Ce lemme est particulièrement utile lors de la résolution d'inégalités.

Exemple 31 Soit $x, y \in]0, \pi/2[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin y} &\iff \sin x \geq \sin y && \text{car } \sin x \text{ et } \sin y \text{ sont } > 0 \\ & && \text{et } x \mapsto 1/x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^\star, \\ &\iff x \geq y && \text{car } \sin \text{ est strictement croissante sur }]0, \pi/2[. \end{aligned}$$

Nous disposerons plus tard d'un moyen technique pour étudier les variations d'une fonction suffisamment régulière (vous savez bien, le signe de la dérivée...).

Définition 32 Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Étudier les **variations** de f sur A, c'est chercher à partager A en sous-ensembles tels que sur chacun d'eux f soit monotone.

Proposition 33

Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective.
Si f est monotone, alors f^{-1} est monotone et de même monotonie que f.

Théorème 34

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On suppose f strictement monotone et continue. Alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$, c'est-à-dire que l'application

$$g : \begin{array}{rcl} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective. De plus g^{-1} est continue.

5.5 Symétries du graphe

Dans un but d'économies d'énergie, nous allons chercher à réduire au maximum l'ensemble des valeurs où il est nécessaire d'étudier une fonction. Pour cela nous exploiterons les éventuelles propriétés algébriques de f.

§1 Parité, imparité

Définition 35

L'ensemble D est **symétrique par rapport à 0** si

$$\forall x \in D, -x \in D.$$

Définition 36

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0.

- f est **paire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = f(x).$$
- f est **impaire** si
$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

Test 37

Déterminer la parité de chacune des fonctions définies par

1. $f(x) = x^5 + x$ | **2.** $g(x) = 1 - x^4$ | **3.** $h(x) = 2x - x^2$

Méthode

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D de réels symétriques par rapport à 0. Notons C la représentation graphique de f et C_+ et C_- les représentations respectives des restrictions de f aux intersections de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ avec D.

- Si f est paire, alors on obtient C en traçant C_+ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors on obtient C en traçant C_+ et en complétant ce lieu par son symétrique par rapport au point O.

Les propriétés de parité permettent donc de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction f à $D \cap \mathbb{R}_+$ ou $D \cap \mathbb{R}_-$.

Figure 5.4: Courbe représentative d'une fonction paire

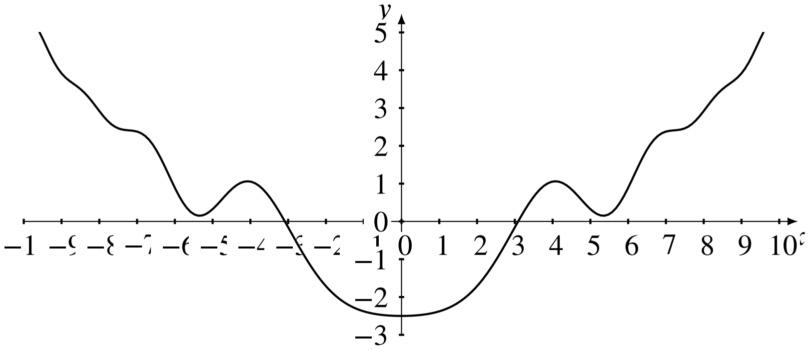
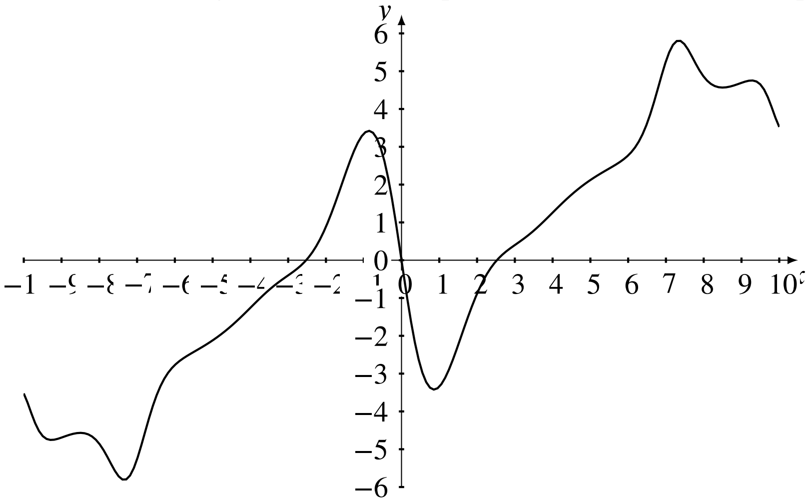


Figure 5.5: Courbe représentative d'une fonction impaire



Proposition 38 *Soient X, Y des parties de $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ une application bijective. Si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.*

Test 39 Pourquoi n'énnonce-t-on pas une propriété analogue pour les fonctions paires?

§2 Périodicité

Définition 40

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

- f est **périodique de période T** si
  - $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$
  - $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$.
- f est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.
- Si f est périodique de période T et si, pour tout $T' \in]0, T[$, f n'est pas périodique de période T', on dit que T est **la période principale** de f.

Méthode

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique et soit I un intervalle semi-ouvert de longueur T. La connaissance de la restriction de f à $I \cap D$ détermine f sur tout son ensemble de définition. Cette remarque a une traduction géométrique simple. Pour cela notons C_f la représentation graphique de f et C la représentation graphique de la restriction de f à $I \cap D$. Alors C_f est la réunion de C et des transformées de C par les translations de vecteurs $nT\overrightarrow{e_1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les translations de mesure algébrique nT parallèlement à l'axe des abscisses.

Figure 5.6: Courbe représentative d'une fonction périodique