Chapter 8 Corps des nombres complexes

Exercice 1 (8.2)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions.

1. $(-1+4i)z+(1-2i)=iz+3$
2. $\dfrac{1+3iz}{1+3z}=i\dfrac{z+2}{z-5}$

Solution 1 (8.2)

1. En isolant la variable z dans le membre de gauche, on otient

$$(-1+4i)z+(1-2i)=iz+3 \iff (-1+3i)z=2+2i \iff z=\frac{2+2i}{-1+3i} \iff z=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i.$$

2. L'éqution est définie si $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{3},5\right\}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\frac{1+3iz}{1+3z}=i\frac{z+2}{z-5} &\iff (1+3iz)(z-5)=(1+3z)(iz+2i)\\ &\iff z+\cancel{3iz^2}-5-15iz=iz+\cancel{3iz^2}+2i+6iz\\ &\iff (1-22i)z=5+2i \iff z=\frac{5+2i}{1-22i}=-\frac{39}{485}+\frac{112}{485}i.\end{aligned}$$

Exercice 2 (8.2)

Que pensez-vous de l'assertion suivante : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(w).$$

Solution 2 (8.2)

Cette assertion est fausse. Par exemple $\mathfrak{Re}(i^2) = -1 \neq \mathfrak{Re}(i)^2 = 0$.

Exercice 3 (8.2)

À tout nombre complexe z différent de 0 et -1, on associe

$$u = \frac{z^2}{z+1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{z(z+1)}.$$

1. Déterminer z pour que u et v soient tous deux réels.
2. Calculer les valeurs correspondantes de u et v.

Exercice 4 (8.3)

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $1+i$;
2. $1-i\sqrt{3}$;
3. i ;
4. $-2\sqrt{3}+2i$;
5. $2+i$;
6. 17 ;
7. $-3i$;
8. $-\pi$;
9. $-12-5i$;
10. $-5+4i$.

Solution 4 (8.3)

1. $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) \equiv \pi/4 \pmod{2\pi}$.
2. $\left|1-i\sqrt{3}\right| = 2$, $\arg(1-i\sqrt{3}) \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi}$.
3. $|i| = 1$, $\arg(i) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$.
4. $\left|-2\sqrt{3}+2i\right| = 4$, $\arg(-2\sqrt{3}+2i) \equiv 5\pi/6 \pmod{2\pi}$.
5. $|2+i| = \sqrt{5}$, et $2+i = \sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} + i\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Les arguments de $2+i$ sont donc dans le premier cadrant. On peut par exemple choisir $\arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \arctan \dfrac{1}{2}$.
6. $|17| = 17$, $\arg(17) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
7. $|-3i| = 3$, $\arg() \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$.
8. $|-\pi| = \pi$, $\arg(-\pi) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.
9. $|-12-5i| = 13$ et $-12-5i = 13\left(-\dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}i\right)$. Les arguments de $-12-5i$ sont donc dans le troisième quadrant. On peut par exemple choisir $-\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)$, ou $\pi + \arcsin \dfrac{5}{13}$ ou $\pi + \arctan \dfrac{5}{12}$.
10. $|-5+4i| = \sqrt{41}$, $\arg(-5+4i) \equiv \pi - \arctan \dfrac{4}{5} \pmod{2\pi}$.

Exercice 5 (8.3)

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer les modules et arguments de z_1, z_2, $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Solution 5 (8.3)

1. On a $|z_1| = \sqrt{2}$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i1\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

   De plus $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

   Enfin $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

2. On a

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}-1).$$

   Par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 6 (8.3)

Déterminer le module et un argument de $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Solution 6 (8.3)

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/6} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

d'où

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\pi/6}}{e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{5i\pi/12}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20} e^{20\times 5i\pi/12} = 2^{10}e^{i\pi/3}$$

Donc $|z| = 1024$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Exercice 7 (8.3)

Établir que $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Solution 7 (8.3)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Par unicité de l'écriture sous forme algébrique, $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \mathfrak{Re}(z)$ et, sous cette hypothèse, $|z| = |\mathfrak{Re}(z)|$. Ainsi, $z \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $z = \mathfrak{Re}(z) = |z|$.

Exercice 8 (8.3)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Solution 8 (8.3)

Écrivons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation est équivalente à

$$12x^2 + 4y^2 + 8ixy = 3,$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} 12x^2 + 4y^2 = 3 \\ 8xy = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 9 (8.3)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1. $|z-2| = 3$.

2. $|2z-1+i| = 4$.

3. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

4. $\left|\dfrac{iz-2}{z+3}\right| = 1$.

Solution 9 (8.3)

1. Soit A le point d'affixe 2 et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|z-2| = 3 \iff AM = 3.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 3.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|2z-1+i| = 4 \iff \left|z - \frac{1-i}{2}\right| = 2 \iff AM = 2.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-i$ et M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq -i$. Alors

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \iff \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 \iff |z-i| = |z+i| \iff AM = BM.$$

Remarquons que $-i$ n'est pas solution de $|z-i| = |z+i|$. L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment $[A, B]$, c'est-à-dire l'axe des abscisses.

4. On remarque que

$$\left|\frac{iz-2}{z+3}\right| = 1 \iff \left|i\frac{z+2i}{z+3}\right| = 1 \iff \left|\frac{z+2i}{z+3}\right| = 1.$$

Comme précédemment, on trouve que l'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[A, B]$ où $A(-2i)$ et $B(-3)$.

Exercice 10 (8.3) *Identité du parallélogramme*

Prouver que pour tous nombres complexes z et w, on a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Donner une interprétation géométrique.

Solution 10 (8.3)

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\
&= z\bar{z} + \cancel{w\bar{z}} + \cancel{z\bar{w}} + w\bar{w} + z\bar{z} - \cancel{w\bar{z}} - \cancel{z\bar{w}} + w\bar{w} \\
&= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 11 (8.3)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Écrire les complexes suivants sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont des réels.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha$.
2. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.
3. $1 + i\tan\alpha$.
4. $\cos\alpha + i(1 + \sin\alpha)$.
5. $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.
6. $\dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\beta + i\sin\beta}$.
7. $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$.
8. $e^{i\beta} + e^{i\alpha}$.

On pourra également discuter modules et arguments.

Solution 11 (8.3)

Exercice 12 (8.3)

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.

2. En déduire α et β.

3. En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$ en fonctions de radicaux.

4. Déterminer $\sin \frac{\pi}{10}$ en fonction de radicaux.

Solution 12 (8.3)

Exercice 13 (8.3)

Soit z un nombre complexe différent de -1 et M le point du plan d'affixe z. On pose $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. z' soit réel ;
2. z' soit imaginaire pur ;
3. z' soit de module 2.

Solution 13 (8.3)

Exercice 14 (8.3)

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les transformer en une combinaison linéaire de termes du type $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\cos^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^5 x$.
4. $\cos^2 x \sin^3 x$.
5. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Solution 14 (8.3)

1. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.
2. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$.
3. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} - e^{-3ix} - e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}(2i\sin 5x - 2i\sin 3x - 4i\sin x) \\
&= \frac{-1}{16}(\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x).
\end{aligned}$$

5. $\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$.

Exercice 15 (8.3)

Exprimer les termes suivants en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

1. $\sin 3x$.
2. $\cos 5x$.
3. $\sin 4x$.
4. $\cos 8x$.

Solution 15 (8.3)

1. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
2. $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.
3. $\sin 4x = 4\cos x\sin x - 8\cos x\sin^3 x$.
4. $\cos 8x = 128\cos^8 x - 256\cos^6 x + 160\cos^4 x - 32\cos^2 x + 1$.

Exercice 16 (8.3)

Linéariser les expressions suivantes où $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2 x \sin x$.
2. $\sin^3 x \cos^3 x$.
3. $\sin^4 x \cos^2 x$.
4. $\cos^3 x \sin^2 x$.

Solution 16 (8.3)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{-1}{32}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32}\left(e^{5ix}+3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix}-2e^{3ix}-6e^{ix}-6e^{-ix}-2e^{-3ix}+e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{-3ix}+e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32}\left(2\cos 5x + 2\cos 3x - 4\cos x\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\cos^3(x)\sin^2(x) = -\frac{1}{16}\left(\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x\right).$$

Exercice 17 (8.3)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

2. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \;\text{ et }\; \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} k \sin(k\theta).$$

Solution 17 (8.3)

En cours!

Exercice 18 (8.3)

Soit x un réel fixé. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left((k-1)x\right).$$

Solution 18 (8.3)

Exercice 19 (8.4)

Rechercher la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des solutions de l'équation

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$$

d'inconnue complexe z.

Solution 19 (8.4)

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 5 + 8i$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(x + iy)^2 = -15 + 8i \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \\ x^2 - y^2 & = -15 \\ \quad 2xy & = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 & = 1 \\ y^2 & = 16 \\ xy & = 4 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 4) \text{ ou } (x, y) = (-1, -4)$$

$$\iff x + iy = \pm(1 + 4i).$$

Une racine carrée de $5 + 8i$ est $1 + 4i$, les solutions de l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$ sont donc

$$\frac{3 + 2i - 1 - 4i}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad \frac{3 + 2i + 1 + 4i}{2} = 2 + 3i.$$

Exercice 20 (8.4)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0. \tag{1}$$

Solution 20 (8.4)

Exercice 21 (8.4)

> Trouver les nombres complexes vérifiant $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Solution 21 (8.4)

Le polynôme $Z^2 - 30Z + 289$ a pour discriminant $-256 = (16i)^2$ et pour racines $15 - 8i$ et $15 + 8i$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff z^2 = 15 - 8i \text{ ou } z^2 = 15 + 8i.$$

Or, pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + iy)^2 = 15 - 8i \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 1 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

Les racines carrées de $15 - 8i$ sont donc $4 - i$ et $-4 + i$.

De même les racines carrées de $15 + 8i = \overline{15 - 8i}$ sont $4 + i$ et $-4 - i$.

Finalement,

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff z \in \{ 4 - i, -4 + i, 4 + i, -4 - i \}.$$

Exercice 22 (8.4)

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$.

Solution 22 (8.4)

1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est $-4 = (2i)^2$ et ses solutions sont donc $1 + i$ et $1 - i$.

Les solutions du système $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$ sont donc les couples

$$(x, y) = (1 + i, 1 - i) \quad \text{et} \quad (x, y) = (1 - i, 1 + i)$$

2. Le polynôme $z^2 - (1 + i)z + 13i$ a pour discriminant $-50i = 25 \times (-2i) = (5 - 5i)^2$ et pour racines $3 - 2i$ et $-2 + 3i$. Les solutions du système $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$ sont donc les couples

$$(x, y) = (3 - 2i, -2 + 3i) \quad \text{et} \quad (x, y) = (-2 + 3i, 3 - 2i)$$

Exercice 23 (8.4)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0. \tag{1}$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Solution 23 (8.4)
Pour $z \in \mathbb{R}$,

$$iz^3-(1+i)z^2+(1-2i)z+6+8i = 0 \iff -z^2+z+6+i(z^3-z^2-2z+8) = 0 \iff \begin{cases} z^2 - z - 6 = 0 \\ z^3 - z^2 - 2z + 8 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de la première équation sont -2 et 3 et l'on vérifie que -2 est solution de la seconde équation (et 3 ne l'est pas) donc $z = -2$ est solution de l'équation (1).

Nous pouvons dès lors écrire pour $z \in \mathbb{C}$,

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = (z+2)(az^2 + bz + c).$$

Par identification des coefficient, on trouve $a = i$, $c = 3 + 4i$ et $2a + b = -(1+i)$ d'où $b = -(1+3i)$.

Finalement, l'équation du second degré $iz^2-(1+3i)z+3+4i = 0$ a pour discriminant $8-6i = (\pm(3-i))^2$ et pour racine $1 - 2i$ et $2 + i$.

Finalement

$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0 \iff z \in \{ -2, 1-2i, 2+i \}.$$

Exercice 24 (8.4)

Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.

2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.

4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

Solution 24 (8.4)

1. L'équation est $r^2 - 5r + 3 = 0$ a pour racines $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n = \alpha\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta & = 0 \\ \alpha\frac{5-\sqrt{13}}{2} + \beta\frac{5+\sqrt{13}}{2} & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \beta & = -\alpha \\ -\alpha\sqrt{13} & = 1 \end{array}\right. \iff \alpha = -1/\sqrt{13} \text{ et } \beta = 1/\sqrt{13}.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

2. L'équation est $2r^2 - r + 1 = 0$ a pour racines $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $\frac{1+i\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ où $\theta = \arctan\sqrt{7}$. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n = \frac{1}{2^{n/2}}\left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha & = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha & = 0 \\ \beta\sin\theta & = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Or $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{4}{\sqrt{7}}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{4\sin\left(n\arctan\sqrt{7}\right)}{2^{n/2}\sqrt{7}}.$$

3. L'équation $4r^2 - 12r + 9r = 0$ a une racine double, $\frac{3}{2}$. La suite (u_n) est donc de la forme

$$u_n = (\alpha n + \beta)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. La condition $u_0 = -3$, $u_1 = 4$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{rl} \beta & = -3 \\ \frac{3}{2}(\alpha+\beta) & = 4 \end{array}\right. \iff \alpha = \frac{17}{3} \text{ et } \beta = -3.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{17n}{3} - 3\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

4. Une récurrence immédiate montre que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. D'où

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5} \iff \ln\left(u_{n+2}\right) = 6\ln\left(u_{n+1}\right) - 5\ln\left(u_n\right).$$

On pose $v_n = \ln\left(u_n\right)$ et on a donc

$$v_0 = 0, \quad v_1 = \ln 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n.$$

L'équation $r^2 - 6r + 5 = 0$ a pour racines 1 et 5, ainsi

$$u_n = \alpha + \beta 5^n$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à determiner. Puisque $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln 2$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta & = 0 \\ \alpha+5\beta & = \ln 2 \end{array}\right. \iff \alpha = -\frac{1}{4}\ln 2 \text{ et } \beta = \frac{1}{4}\ln 2.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln 2}{4}(5^n - 1)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{v_n} = 2^{1/4}\exp(5^n - 1).$$

Exercice 25 (8.5)

Trouver les nombres complexes vérifiant :

1. $z^6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

2. $z^8 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Solution 25 (8.5)

1. On a

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{2i\pi/3} = \left(e^{i\pi/9}\right)^6.$$

Les racine sixième de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sont obtenue en multipliant un racine sixième particulière par les racines sixième de l'unité. Elle sont donc de la forme

$$e^{i\frac{\pi}{9}}e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{i\frac{3k+1}{9}\pi}, \quad k \in [\![0,5]\!].$$

c'est-à-dire

$$e^{i\pi/9}, e^{4i\pi/9}, e^{7i\pi/9}, e^{10i\pi/9}, e^{13i\pi/9}, e^{16i\pi/9}.$$

2. On a

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5i\pi/12} = \left(\frac{1}{2^{1/16}}e^{5i\pi/96}\right)^8.$$

D'où

$$z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \iff \exists k \in [\![0,7]\!], z = \frac{1}{2^{1/16}}e^{\frac{5i\pi}{96}}e^{\frac{2ik\pi}{8}} \iff \exists k \in [\![0,7]\!], z = \frac{1}{2^{1/16}}e^{\frac{(24k+5)i\pi}{96}}.$$

Les racines 8-ème de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ sont donc

$$\frac{1}{2^{1/16}}e^{5i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{29i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{53i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{77i\pi/96}$$
$$\frac{1}{2^{1/16}}e^{101i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{125i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{149i\pi/96}, \quad \frac{1}{2^{1/16}}e^{173i\pi/96}.$$

Problème 26 (8.5)

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés. Soit l'équation

$$z^5 - 1 = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre (1) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (1) sous forme trigonométrique.
2. On va maintenant résoudre (1) par radicaux carrés. Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^5 - 1 = (z-1)\,Q(z). \tag{2}$$
3. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,
$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c. \tag{3}$$
4. Résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,
$$aZ^2 + bZ + c = 0. \tag{4}$$
5. Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
6. Des questions précédentes, déduire des expressions « avec racines carrés » de
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5}.$$
7. De la question précédente, déduire une expression « avec racines carrées » de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Solution 26 (8.5)

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, (1) $\iff$ $z^5 = 1$. Les solutions de (1) sont donc les cinq racines 5-ième de l'unité. L'ensemble des solutions de (1) est
$$\boxed{\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\}.}$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^5 - 1 = (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right)$. On peut choisir
$$\boxed{Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.}$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\begin{aligned}\frac{Q(z)}{z^2} &= z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\\ &= z^2 + \frac{1}{z^2} + 1 + z + \frac{1}{z}\\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + 1 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\boxed{a = 1,\ b = 1 \text{ et } c = -1}$.

4. Le discriminant de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$ est 5 ; ses solutions sont donc

$$\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } \boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

5. Commençons par remarquer que $Q(0) = 1$, donc 0 n'est pas solution de l'équation $Q(z) = 0$. De plus, pour $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$\begin{aligned}Q(z) = 0 &\iff \frac{Q(z)}{z^2} = 0\\ &\iff \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 && \because \text{d'après (3)}\\ &\iff z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ &\iff z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 && \because z \neq 0.\end{aligned}$$

L'équation $z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ a pour discriminant $\frac{-5+\sqrt{5}}{2} < 0$ et a pour solutions

$$\boxed{z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \text{ et } \boxed{z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

L'équation $z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$ a pour discriminant $\frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$ et a pour solutions

$$\boxed{z_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \text{ et } \boxed{z_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de $Q(z) = 0$ est

$$\boxed{\{\, z_1, z_2, z_3, z_4 \,\}}.$$

6. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^5 - 1 = 0 \iff (z-1)Q(z) = 0.$$

Donc l'équation (1) a pour ensemble de solutions

$$\mathbb{U}_5 = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\} = \{ 1, z_1, z_2, z_3, z_4 \}.$$

On remarque

$$\mathfrak{Re}\left(e^{2i\pi/5}\right) = \cos(2\pi/5) > 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\left(e^{2i\pi/5}\right) = \sin(2\pi/5) > 0.$$

Or $\mathfrak{Re}(z_1) < 0$, $\mathfrak{Re}(z_2) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z_3) < 0$. On a nécessairement $e^{2i\pi/5} = z_4$ d'où

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

De même,

$$\mathfrak{Re}\left(e^{4i\pi/5}\right) = \cos(4\pi/5) < 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\left(e^{4i\pi/5}\right) = \sin(4\pi/5) > 0.$$

Or $\mathfrak{Re}(z_3) > 0$, $\mathfrak{Re}(z_4) > 0$ et $\mathfrak{Im}(z_1) < 0$. On a nécessairement $e^{4i\pi/5} = z_2$ d'où

$$\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(4\pi/5) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

7. On a $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5}$, d'où

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

[1]

[1] On peut également remarquer que $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et utiliser la formule de Carnot

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Exercice 27 (8.5)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$
2. $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8 = 1.$
3. $(z+i)^n - (z-i)^n = 0.$

Solution 27 (8.5)

Exercice 28 (8.6)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$$

Solution 28 (8.6)

On a $\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Donc, pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i \iff e^{2x-1}e^{2iy} = 2\sqrt{3}e^{-\pi/3} &\iff \begin{cases} e^{2x-1} = 2\sqrt{3} \\ 2y \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 1 = \ln\left(2\sqrt{3}\right) \\ y \equiv -\pi/6 \pmod{\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = (1 + \ln\left(2\sqrt{3}\right))/2 \\ y \equiv -\pi/6 \pmod{\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $e^{2z-1} = \sqrt{3} - 3i$ sont donc les nombres complexes de la forme

$$z = \frac{1 + \ln 2\sqrt{3}}{2} + i\left(k - \frac{1}{6}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$