

Chapter 14 Suites de nombres réels et complexes

Exercice 1 (14.1)

Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs

1. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.
4. La suite (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 (14.1)

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$, est décroissante.

Exercice 3 (14.2)

En revenant à la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$ a pour limite $1/2$.

Exercice 4 (14.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

Exercice 5 (14.2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3n}{2n^2-1}$.

Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$.

Puis trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n| \leq \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ donné.

Exercice 6 (14.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite (u_n) définie par $u_n = 3n - 17$ tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (14.2)

Démontrer, en utilisant la définition que la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - 9n + 7$ tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (14.2)

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. (u_n) converge vers ℓ .
2. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq 2022\epsilon$.
3. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \frac{1}{k}$.

Exercice 9 (14.2)

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Exercice 10 (14.3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \quad b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k}$$

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

2. En s'inspirant de la question précédente, établir que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$.

Exercice 11 (14.3)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

Exercice 12 (14.3)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 13 (14.3)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On désigne par $[x]$ la partie entière de x . Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}.$$

Exercice 14 (14.3)

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

Exercice 15 (14.3)

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier n , $u_{n+1} \geq ku_n$; k désignant un nombre donné, $k > 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 16 (14.3)

Soit (u_n) une suite possédant la propriété suivante: il existe un entier naturel α et une nombre k , $0 < k < 1$, tels que, pour tout entier $n \geq \alpha$, on ait $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 17 (14.3)

Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $-1 < \ell < 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 18 (14.3)

Soit u et v deux suites du segment $[0, 1]$ telles que

$$u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Montrer

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Exercice 19 (14.4)

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Exercice 20 (14.4)

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux.

$$1. u_n = \frac{\sin n}{n};$$

$$2. u_n = \frac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n;$$

$$3. u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1;$$

$$4. u_n = 3^n - n^2 2^n;$$

$$5. u_n = (-1)^n;$$

$$6. u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}.$$

Exercice 21 (14.4)

Soit (u_n) une suite géométrique telle que

$$u_0 = 90 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = 150.$$

Quelle est sa raison ?

Exercice 22 (14.4)

On considère la suite positive (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n,$$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Calculer la limite de la suite (v_n) , puis celle de (u_n) .

Problème 23 (14.4) Théorème de Cesàro, banque PT 2003

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on note $a_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ , alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ . Soit $\epsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

(d) Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ . On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.

On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement bornée.

On pourra considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(c) On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.

Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par ℓ . Conclure.

Exercice 24 (14.4)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$, avec $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

(a) Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ avec $\ell \in [0, +\infty]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{1/n} = \ell.$$

(b) Montrer par un exemple que la réciproque de (2.a) est fausse.

Exercice 25 (14.5)

Démontrer que la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)/n$ pour $n \geq 1$ est positive ou nulle et tend vers zéro, mais n'est pas décroissante.

Exercice 26 (14.5)

Soit $(u_n)_{n > 0}$ la suite réelle définie pour $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n > 0}$ est croissante.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. En déduire que $(u_n)_{n > 0}$ est convergente.

Exercice 27 (14.5)

Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel $L \leq \ell$.
3. Établir que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $\ell = L$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesàro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesàro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Exercice 28 (14.5)

Soit A une partie non vide, majorée de \mathbb{R} et M un *majorant* de A . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) M est la borne supérieure de A .
- (ii) Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M .
- (iii) Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M .

On a une propriété analogue pour les bornes inférieures.

Exercice 29 (14.5)

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 30 (14.5)

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 31 (14.5)

Montrer que les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \quad w_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont convergentes et ont même limite.

Exercice 32 (14.5)

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 33 (14.5)

Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, on note ℓ leur limite commune.
4. Calculer $u_n v_n$. En déduire ℓ en fonction de a et b .

Problème 34 (14.5) Suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie la propriété

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \left(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \implies |u_n - u_p| \leq \epsilon \right). \quad (1)$$

1. Montrer que la suite est bornée.
2. Montrer qu'elle est convergente.

Exercice 35 (14.6)

1. Montrer que pour tout x, y réels, on a

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites récurrentes définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et que $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

Remarque. Cette limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de a et b* , mais on ne sait pas la calculer en général.

Exercice 36 (14.6)

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \sin^2\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ diverge, et que la suite de terme général $v_n = \left(1 + \frac{1}{2} \sin(n)\right)^{1/n}$ converge.

Exercice 37 (14.6)

Montrer que la suite $(\tan(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 38 (14.6)

Soit $v = (v_n)$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que v diverge et qu'elle admet $+\infty$ pour limite.

Exercice 39 (14.6)

Soit (x_n) une suite réelle bornée divergente. Montrer que l'on peut trouver deux suites extraites de (x_n) convergeant vers des limites distinctes.