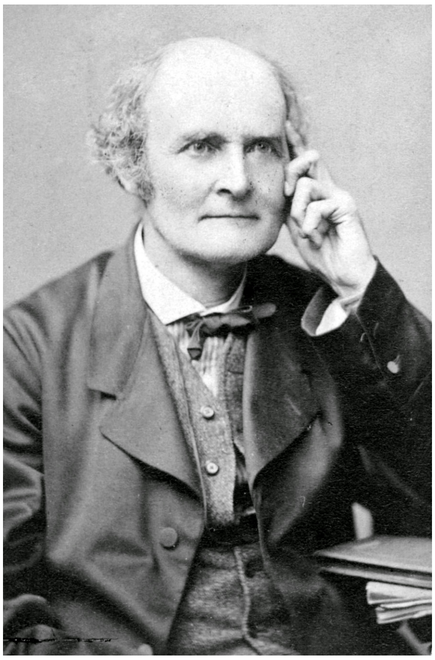
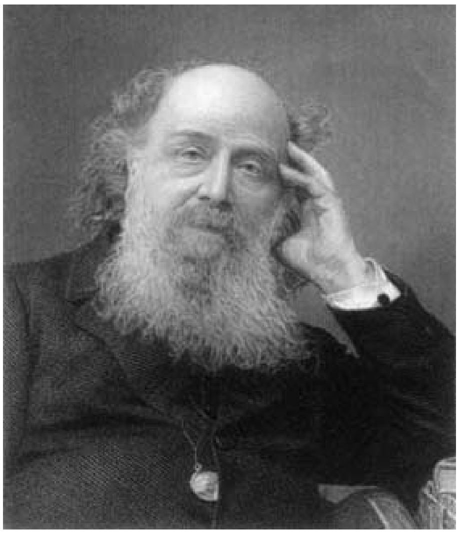
Chapitre 19

Calcul matriciel élémentaire



Arthur Cayley



James Joseph Sylvester

Tous deux ont fait leurs études à Cambridge, tous deux ont exercé assez longuement comme avocats tout en considérant cela comme un moyen accessoire de gagner leur vie, tous deux ont fini professeurs de mathématiques. Ils étaient amis, et se sont influencés l'un l'autre par leurs travaux respectifs, même s'il n'ont cosigné aucun article. Nous parlons de Arthur Cayley (1821–1895) et de James Joseph Sylvester (1814–1897). Voici ce que disait le second, vers la fin de sa carrière.

> Cayley, who, though younger than myself is my spiritual progenitor — who first opened my eyes and purged them of dross so that they could see and accept the higher mysteries of our common mathematical faith...

Sylvester est le premier qui a employé le mot «matrix» en 1850. L'année suivante, il explicite l'analogie qui l'a conduit à ce terme.

> I have in a previous paper defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent.

Au début, une matrice n'était donc qu'un tableau à partir duquel étaient engendrés des déterminants. C'est Cayley qui a le premier en 1858 traité les matrices comme de nouveaux objets mathématiques, susceptibles d'être ajoutés et multipliés. Lisez le début de «A memoir on the Theory of Matrices», et admirez l'élégance et la concision du style (les notations ont légèrement changé).

> The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matric; in this restricted sense, a set of quantities arrranged in the form of a square, e. g.
>
> $$\begin{pmatrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'', \end{pmatrix}$$
>
> is said to be a matrix.
>
> [...]
>
> It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, &c. : the law of addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraix quantities; as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible; it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrrive at the notion of a rational and intergal function, or generally of any algebraical function, of a matrix.

Le style de Sylvester était moins dépouillé que celui de Cayley. Ils se rejoignaient pourtant dans leurs opinions esthétiques.

Cayley :

> As for everything else, so for a mathematical theory: beauty can be perceived but not explained.

Sylvester :

> May not music be described as the mathematics of the sense, mathematics as music of the reason? The musician feels mathematics, the mathematician thinks music: music the dream, mathematics the working life.

Dans ce chapitre Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, .)$ désignera un corps.
Le programme se limite au cas où ce corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

19.1 Matrices

Définition 1

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une **matrice de type (m,n)** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$.
L'image de (i,j) est appelé **coefficient** de A indexé par (i,j).

- Le plus souvent, le coefficient d'indice (i,j) sera noté $a_{i,j}$ ou $A[i,j]$,[1] et s'il n'y a pas d'ambiguïté possible a_{ij}[2]
- On dispose souvent ces matrices sous la forme d'un tableau rectangulaire

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  en convenant que l'image du couple (i,j) est l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.
- On dit aussi que la matrice A est une matrice de type $m \times n$ ou encore que A est une matrice à m lignes et n colonnes.

Exemple 2

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de type $(3,4)$ dont les coefficients sont réels. Pour cette matrice, $a_{2,3} = A[2,3] = 5$.

Test 3

Dans l'exemple 2, que représentent $a_{3,2}$ et $A[3,4]$?
Que représente $a_{i,j}$? Et $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 4}}$? Et $\left(a_{1,3}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 4}}$?

Définition 4

- On appelle **matrice carrée** une matrice de type (n,n). On dit alors que c'est une matrice carrée d'**ordre n**.
- Les **termes diagonaux** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sont les coefficients $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

[1] C'est une notation classique un informatique, où l'on définit les matrices comme des tableaux à deux dimensions.

[2] Il n'y a aucune notation officielle dans le programme. On trouve parfois également $(A)_{i,j}$, mais ça ne me plaît pas vraiment.

- On dit que $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice **diagonale** si A est une matrice carrée dont les coefficients non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

On écrira alors $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Un matrice diagonale ressemble donc à

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Test 5

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont diagonales ?

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 ♥

Deux matrices sont égales si elle ont même type et mêmes coefficients. C'est-à-dire, si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont toutes deux *des matrices de type (m,n), alors*

$$A = B \iff \forall i \in [\![1,m]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = b_{i,j}.$$

19.2 Addition et multiplication par un scalaire

Notation

L'ensemble des matrices (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices carrées (n,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note plus simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

§1 Définition

Définition 7

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de type (m,n) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme** des matrices A et B et l'on note $A + B$, la matrice $C = (c_{ij})$ de type (m,n) définie par

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

La somme de deux matrices n'est donc définie que si elles ont même type.

- On appelle **produit** de la matrice A par le scalaire λ et l'on note λA la matrice $(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ de type (m,n) obtenue en multipliant **tous** les éléments de A par le scalaire λ.

Exemple 8

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$-2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 0 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque On peut donc écrire pour $i \in [\![1,m]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$,

$$(A+B)[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$
$$\text{et } (\lambda A)[i,j] = \lambda(A[i,j]) = \lambda A[i,j].$$

§2 Matrices élémentaires

Notation Le **symbole delta de Kronecker**, également appelé **symbole de Kronecker** ou delta de Kronecker est une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 9 Les **matrices élémentaires** de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont les matrices $E_{i,j}^{(m,n)}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ainsi définies : le coefficient d'indices (i,j) de $E_{i,j}^{(m,n)}$ est égal à 1, tous ses autres coefficients sont nuls. On a donc, pour $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq \ell \leq n$,

$$\left(E_{i,j}^{(m,n)}\right)[k,l] = \delta_{i,k}\delta_{j,l}.$$

Lorsque que le type des matrices est clair, on note simplement $E_{i,j}$.

Proposition 10 *Toute matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrice élémentaires.*

19.3 Multiplication matricielle

Peut-on multiplier deux matrices? La réponse est… «parfois», selon le type des matrices. Si A et B sont des matrices telles que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, alors on peut définir une matrice C que est le produit de A et B. Pour cela, il faut définir le type de la matrice C ainsi que chacun de ses coefficients.

Définition 11

Produit de Cayley de deux matrices
Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, A une matrice de type (m,n) et B une matrice de type (n,p).

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.$$

On appelle **produit de Cayley** (ou simplement **produit**) des matrices A et B la matrice $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq p}}$ définie par

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

La matrice AB est donc de type (m,p).

Remarque

- On peut également écrire la formule

$$(AB)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} A[i,k]B[k,j].$$

  La notation $(AB)[i,j]$ signifiant bien «le terme d'indice (i,j) de la matrice AB.
- La formule a bien un sens car le nombre de colonnes de la première matrice du produit est le même que le nombre de lignes de la seconde matrice. L'expression de $c_{i,j}$ se traduit en disant que l'on fait le produit « vecteur ligne par vecteur colonne ».
- Insistons sur le fait que si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit AB n'a aucun sens.
- Lorsque l'on peut multiplier A par B, ont dit que A et B sont **conformables**.

Exemple 12

Dans le produit suivant, le coefficient d'indice $(2,1)$ du produit (en gras) est obtenu comme indiqué ci-dessus, en utilisant les lignes et colonnes en gras.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 3 \\ 1 & 14 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Le coefficient est bien 5 car

$$(2)(3) + (0)(1) + (1)(-1) = 5.$$

Remarquez la cohérence pour le type des matrices. A est $(4,3)$, B est $(3,2)$, et le produit AB est $(4,2)$.

Remarques Nous ne pouvons inverser l'ordre des deux matrices dans le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

car le produit d'un matrice $(3,4)$ par une matrice $(2,3)$ n'est pas définit.

Maintenant, si l'on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors les deux produits AB et BA sont définis, mais on des tailles différentes, ainsi, elle ne peuvent être égales.

Test 13 Quelles sont les tailles des matrices AB et BA. Calculer ces deux produits.

Même lorsque les produits AB et BA sont définis et ont même dimension, on a généralement $AB \neq BA$.

Test 14 Étudier l'assertion précédente. Écrire deux matrices $(2,2)$, A et B, et calculer AB et BA.
Par exemple, vous pouvez utiliser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais choisissez plutôt au hasard.

Méthode

Disposition pratique du calcul

Une bonne astuce pour calculer un produit de matrices, en limitant les risques d'erreur, consiste à disposer le calcul comme suit :

$$c_{23} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{k3}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} \times b_{13} \qquad a_{22} \times b_{23} \qquad a_{23} \times b_{33} \qquad a_{2n} \times b_{n3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Cette disposition est de plus parfaitement adaptée à l'itération du produit.

19.4 Algèbre des matrices

Nous pouvons calculer avec les matrices, de nombreuses règles algébrique restant vérifiées. Par exemple, si l'on considère l'équation

$$3A + 2B = 2(B - A + C)$$

où l'inconnue est une matrice C, nous pouvons résoudre cette équation avec les règles algébrique usuelles. Il faut néanmoins se rappeler que les opérations doivent être bien définies. Dans notre exemple, il faut que les matrices A, B et C est même type (m, n).

Proposition 15

Soit trois matrices A, B, C et un scalaire λ. Sous réserve d'existence des expressions, on a

1. *L'addition est commutative :*

$$A + B = B + A.$$

2. *L'addition est associative :*

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

3. *La multiplication est associative :*

$$(AB)C = A(BC).$$

4. *Et enfin, on a une «associativité mixte» :*

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Test 16

Dans la proposition précédente quelles sont les types de chaque matrice ?

Esquisse. Vérifier que les matrices de chaque côté de l'égalité ont même type. Puis vérifier que le coefficient d'indice (i, j) de la matrice de chaque côté sont égaux. ∎

Proposition 17

Sous réserve d'existence des expressions, on a

1. *La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition :* [a]

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{et} \qquad (B + C)A = BA + CA.$$

2. *La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition :*

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

[a] Puisque la multiplication matricielle n'est pas commutative, nous devons écrire deux relations pour la distributivité (distributivité à gauche, et distributivité à droite).

Test 18

Dans la proposition précédente quelles sont les types de chaque matrice ?

Définition 19 Pour $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC \qquad \text{et} \qquad (\lambda B + \mu C)D = \lambda BD + \mu CD.$$

On résume ces propriétés en disant que le produit matriciel est **bilinéaire**.

Définition 20 On appelle **matrice nulle** une matrice dont tous les coefficient sont nuls

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathbf{0}_{m,n}$ la matrice nulle de type (m, n), ou simplement $\mathbf{0}$.

Cette matrice est élément neutre pour l'addition.

Proposition 21 *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors*

1. $A + 0 = A$,
2. $A - A = 0$,
3. $0A = 0$ *et* $0A = 0$,

où le type des matrices nulles doivent être compatible avec le type de A.

Exemple 22 Résoudre l'équation

$$3A + 2B = 2(B - A + C)$$

d'inconnue C, en détaillant les propriétés utilisées.

Il existe également des matrices éléments neutres pour la multiplication

Définition 23

- La **matrice unité d'ordre n** (ou **matrice identité**) est la matrice $I_n = (\delta_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

- Les **matrices scalaires** sont les matrices diagonales dont tous les termes diagonaux sont égaux. Les matrices scalaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont donc les matrices proportionnelles à I_n.

Proposition 24 *Pour tout $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a*

$$AI_n = A \quad \textit{et} \quad I_m A = A.$$

Proposition 25 *Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. Alors AB est diagonale et les coefficients diagonaux de AB s'obtiennent en multipliant les coefficients diagonaux correspondants de A et B.*

On un résultat analogue pour l'addition, la démonstration étant triviale dans ce cas.

19.5 Matrices inversibles

Si $AB = AC$, a-t-on $B = C$? En général, non !

Exemple 26

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors, les matrices B et C sont distinctes et on a

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Test 27 Vérifier l'assertion précédente.

Remarquons que si $A + 5B = A + 5C$, alors on peut conclure $B = C$ car les opération d'addition et multiplications par un scalaire ont une «réciproque». En effet, étant donnée une matrice A, alors la matrice $-A = (-1)A$ est un inverse pour l'addition (on dit alors **opposé**) car $A + (-A) = 0$. Si on multiplie la matrice A par un scalaire *non nul* λ, alors en multipliant λA par le scalaire $1/\lambda$, on retrouve A.

Existe-t-il un inverse pour la multiplication matricielle ? La réponse est «parfois».

Contrairement au calcul dans un corps, le produit de deux matrices non nulles peut donner la matrice nulle. On appelle de telles matrices des **diviseurs de zéro.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§1 Inverse d'une matrice

Définition 28

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

  Si un tel B existe, il est unique et est noté A^{-1}. On l'appelle l'**inverse** de A.

- Le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles s'appelle **groupe linéaire d'ordre n** et on le note $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarquons que la matrice A doit être carrée, et que pour que les produits soient précédents soient bien définis, I_n et $B = A^{-1}$ sont aussi des matrices carrées (n, n).

Exemple 29 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible et son inverse est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Test 30 Montrer le !

Théorème 31 *Soit A un matrice $n \times n$ inversible, alors la matrice A^{-1} est unique.*

Esquisse. Supposer que A possède deux inverses, B et C et calculer CAB de deux manières différentes en jouant sur l'associativité du produit matriciel. ∎

Certaines matrices ne sont pas inversibles, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible. En effet, on ne peut pas trouver une matrice vérifiant

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car le coefficient d'indice $(1, 1)$ du produit est 0 et $0 \neq 1$.

De manière générale, une matrice dont une colonne (ou une ligne) est nulle n'est jamais inversible (mais il y en a d'autres).

Proposition 32 *Soit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, on a*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 33 *La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Test 34 Retrouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ à l'aide de ce résultat.

Test 35

Vérifier la formule de proposition précédente, c'est-à-dire que la matrice proposée est bien l'inverse de A.

Démonstration. Reste à montrer l'équivalence! ∎

Notation

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Proposition 36

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$AB = AC \implies B = C$$

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$BA = CA \implies B = C$$

Si A est inversible et $AB = CA$, alors on ne peut pas conclure que $B = C$, mais uniquement

$$B = A^{-1}CA.$$

Il n'est pas possible de «diviser» par une matrice. Même lorsque celle-ci est inversible, on peut uniquement multiplier à droite ou à gauche par la matrice inverse.

§2 Propriété de l'inverse

Théorème 37

Soit A une matrice inversible.

1. *La matrice A^{-1} est inversible et*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

2. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible et*

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

Esquisse. Revenir à la définition de matrice inversible. ∎

Théorème 38

Soit A, B deux matrices (n, n) inversibles, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. À faire en exercice (numéro ......). ∎

19.6 Puissances d'une matrice

Définition 39

Si A est une matrice carrée (n, n), on pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ et

$$\forall r \in \mathbb{N}, A^{r+1} = A^r A.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $A^r \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$A^r = \underbrace{AA \dots A}_{r \text{ termes}}$$

Si de plus A est inversible, alors pour $r \in \mathbb{N}$, on a

$$(A^r)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^r$$

et l'on note donc $A^{-r} = \left(A^{-1}\right)^r$.

Lemme 40

Soit A une matrice carrée, $r, s \in \mathbb{N}$, alors

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Si A est inversible, ces résultats restent valables avec $r, s \in \mathbb{Z}$.

Test 41

Vérifier le lemme précédent.

Test 42

Les matrices A et B étant de type convenables (c'est-à-dire?), développer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= \\ (AB)^2 &= \\ (A-B)(A+B) &= \end{aligned}$$

Proposition 43

Soit A, B deux matrices carrées (n, n) telles que $AB = BA$, alors

$$\forall r, s \in \mathbb{N}, A^r B^s = B^s A^r, \qquad \forall r \in \mathbb{N}, (AB)^r = A^r B^r.$$

Lorsque A, B sont inversibles, ces résultats restent valables avec $r, s \in \mathbb{Z}$.

Proposition 44

Binome de Newton
Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA$ et $r \in \mathbb{N}$, alors

$$(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^{r-k} B^k.$$

Esquisse. Par récurrence sur r. On développe, on découpe en deux, on fait un changement d'indice pour retrouver des termes en $A^{r+1-k}B^k$, on regroupe en mettant de côté les morceaux qui dépassent, on utilise la formule de Pascal, on recolle tout.

Bien faire attention à l'utilité de l'hypothèse $AB = BA$. ∎

Proposition 45 *Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA$ et $r \in \mathbb{N}^\star$, alors*

$$A^r - B^r = (A - B) \sum_{k=0}^{r-1} A^{r-1-k} B^k.$$

Démonstration. En exercice. ∎

On exprime l'hypothèse $AB = BA$ en disant que A et B **commutent**. Cette hypothèse est fondamentale, comme le montrent les calculs

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= ABAB\\ (A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2\\ (A-B)(A+B) &= A^2 + AB - BA - B^2.\end{aligned}$$

19.7 Transposée

§1 Transposée d'une matrice

Définition 46 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice (m, n). La **transposée** de A est la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ de type (n, m), telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], b_{ij} = a_{ji}.$$

La transposée de A est notée A^T ou ${}^{\mathrm{t}}A = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$, on peut donc écrire

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \left(A^T\right)[i, j] = A[j, i].$$

Ainsi, les colonnes de A^T sont les lignes de A.

Exemple 47 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

alors

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1\\ 5\\ 3\end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Remarquons que les coefficient diagonaux d'une matrice carré sont invariants par transposition : $a_{i,i}$ reste $a_{i,i}$. Ainsi, si D est une matrice diagonale, $D^T = D$.

§2 Propriétés de la transposition

Proposition 48

Pour $A, B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

On dit que la transposée est *involutive* et *linéaire*.

Test 49

Si A est une matrice (m,n) et B est une matrice (n,p), quels sont les types des matrices $(AB)^T$, A^T, B^T ? Montrer que seul le produit $B^T A^T$ est toujours défini. Montrer également qu'il a même type que $(AB)^T$.

Proposition 50

Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Esquisse. D'après le test 49, nous savons que $(AB)^T$ et $B^T A^T$ ont même type. Pour montrer que $(AB)^T = B^T A^T$, on doit montrer que leurs coefficients d'indice (i,j) sont égaux. Un calcul avec la notation $\left((AB)^T\right)[i,j]$ et $\left(B^T A^T\right)[i,j]$ est conseillé. ∎

Proposition 51

Soit A une matrice carrée inversible, alors A^T est inversible et

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Esquisse. Revenir à la définition d'inverse. ∎

§3 Matrices symétriques

Définition 52

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** si $A^T = A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques (n,n).

Test 53

Déterminer A sachant qu'elle est symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \\ & 2 & \\ 5 & & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & -7 \\ & & \end{pmatrix}$$

Remarque

Les matrices diagonales sont des matrices symétriques.

§4 Matrices antisymétriques

Définition 54 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **antisymétrique** si $A^T = -A$.

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques (n, n).

Test 55 Montrer que les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

19.8 VECTEURS DE $\mathbb{K}^n$

§1 Vecteurs

Définition 56

- Les matrices de type $(n, 1)$ sont appelés **matrices colonnes** ou **vecteurs colonnes**.
- Les matrices de type $(1, p)$ sont appelés **matrices lignes** ou **vecteurs lignes**

Dans la suite,

- Le terme **vecteur** désignera un vecteur colonne.
- Pour distinguer les vecteurs des scalaires on utilisera dans la mesure du possible des lettres grecques pour les scalaires, des lettres latines pour les vecteurs.
- Nous écrirons souvent les vecteurs colonnes comme la transposée d'un vecteur ligne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T,$$

  Nous écrirons même généralement $x = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)^T$, avec des virgules séparant les coefficients. Il n'y a pas virgules dans la notation matricielle, mais celles-ci améliorent la lisibilité.

- Comme les deux sont des n-uplets, il est fréquent d'identifier l'espace $\mathbb{K}^n$ à $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ ou encore à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que nous écrivons les n-uplets de $\mathbb{K}^n$ en ligne ou en colonne, selon nos besoins.

Remarque Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^p$.

- La **somme** des vecteurs u et v est le vecteur

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

  Sous forme de matrices colonnes, cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire, le **produit du vecteur** u **par le scalaire** λ est le vecteur

  $$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),$$

  ou encore, en colonnes,

  $$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Définition 57

Soit $v_1, v_2, \dots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit qu'un vecteur v est **combinaison linéaire** de $v_1, v_2, \dots, v_k$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Définition 58

Un vecteur dont tous les coefficients sont nuls est appelé **vecteur nul**. On le note 0 ou **0** ou $\vec{0}$.

Il y a un vecteur nul dans chaque espace $\mathbb{K}^n$.

§2 Vecteurs et matrices

Soit A une matrice (m, n), alors les colonnes de A sont des vecteurs (colonnes). En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, les colonnes de A sont les vecteurs $c_1, c_2, \dots, c_n$ avec

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Si $x \in \mathscr{M}_{n1}$ est un vecteur colonne, alors le produit Ax est une matrice $(m, 1)$, c'est donc également un vecteur colonne.

Théorème 59

Soit A un matrice (m, n). On note $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de A. Alors si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$,

$$Ax = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n.$$

Le théorème affirme que le produit Ax, qui est un vecteur de $\mathbb{K}^n$, est un combinaison linéaire des colonnes de A.

Test 60

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer Ax de deux manières différentes.

Notation

Pour indiquer que A est formée des colonnes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ou des lignes $l_1, \ldots, l_m$, on pourra écrire

$$A = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$