Chapter 31 Familles de vecteurs

* **Exercice 1 (31.1)**
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$V = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

* **Exercice 2 (31.1)**
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$V = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\12\end{pmatrix}\right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

* **Exercice 3 (31.1)**
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$$V = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}\right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

* **Exercice 4 (31.1)**
On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$V = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Déterminer une équation cartésienne (ou système d'équations cartésiennes) de V.

* **Exercice 5 (31.1)**
Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, trouver une famille génératrice de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

** **Exercice 6 (31.1)**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les familles

$$(x \mapsto \cos(kx))_{0\leq k\leq n} \quad \text{et} \quad \left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{0\leq k\leq n}$$

engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

* **Exercice 7 (31.2)**
Montrer que les vecteur x_1, x_2, x_3 ci-dessous sont linéairement indépendant:

$$x_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix},$$

Exprimer le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire de x_1, x_2, x_3.

* **Exercice 8 (31.2)**

Soit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que la famille (x_1, x_2, v) soit liée.

Exhiber un vecteur x_3 tel que la famille (x_1, x_2, x_3) soit libre.

* **Exercice 9 (31.2)**

Montrer que les vecteurs ci dessous forment une famille liée en déterminant un relation de dépendance linéaire non triviale.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

** **Exercice 10 (31.2)**

Montrer que si $n > m$, alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est liée.

* **Exercice 11 (31.2)**

Soit $\sigma = \left(X^2 + 1, 2X^2 - X + 1, -X^2 + X\right)$.

1. La famille σ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?
2. La famille σ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

* **Exercice 12 (31.2)**

Montrer de deux manières que les trois fonctions

$$f : x \mapsto e^x \qquad g : x \mapsto x^2 \qquad h : x \mapsto \ln(x)$$

forment une famille libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

1. une fois, en donnant des valeurs particulières à la variable x;
2. une autre fois, en utilisant les croissances comparées des trois fonctions en $+\infty$.

** **Exercice 13 (31.2)**

Soit

$$f_1 : x \mapsto x; \qquad f_2 : x \mapsto \ln x; \qquad f_3 : x \mapsto \exp(x).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right)$.

*

Exercice 14 (31.2)

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_1(x) = e^{x+1}, \qquad f_2(x) = e^{x+2}, \qquad f_3(x) = e^{x+3}.$$

La famille $\left(f_1, f_2, f_3\right)$ est-elle libre dans E ?

**

Exercice 15 (31.2)

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_1(x) = |x-1|, \qquad g_2(x) = |x-2|, \qquad g_3(x) = |x-3|.$$

La famille $\left(g_1, g_2, g_3\right)$ est-elle libre dans E?

**

Exercice 16 (31.2)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ où

$$f_k : x \mapsto e^{a_k x}$$

est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**

Exercice 17 (31.2)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ où

$$f_k : x \mapsto \sin(kx)$$

est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

*

Exercice 18 (31.2)

On considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

*

Exercice 19 (31.2)

En utilisant la définition de famille libre. Montrer que tout sous famille (non vide) d'une famille libre est une famille libre.

**

Exercice 20 (31.2)

Soit A un matrice quelconque. On suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls, v_1 et v_2, tels que $Av_1 = 2v_1$ et $Av_2 = 5v_2$.

Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.

Pouvez-vous généraliser ce résultat ?

**

Exercice 21 (31.2)

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?

3. Les vecteurs $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4, \dots, v_1+v_2+\cdots+v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

* **Exercice 22 (31.3)**

Donner une base du plan $(0xz)$ de $\mathbb{R}^3$.

* **Exercice 23 (31.3)**

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$V = \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-y+z-t=0 \right\}$$
$$\text{et } W = \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-y-z=y+t=0 \right\}.$$

1. Préciser une base et la dimension de V.
   Déterminer les coordonnées dans cette base de $a = (3,1,2,4)^T$.

2. Préciser une base et la dimension de W.
   Déterminer les coordonnées dans cette base de $b = (4,1,3,-1)^T$.

3. Préciser une base et la dimension de $V \cap W$.

Exercice 24 (31.3)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad d = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad e = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de (a,b,c,d,e), préciser des relations de dépendance linéaire entre a, b, c, d, e et donner une base de $\operatorname{Vect}(a,b,c,d,e)$.

* **Exercice 25 (31.3)**

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base.

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X]$.
2. $F_2 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(1)=0 \right\}$.
3. $F_3 = \left\{ P' \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $F_4 = \left\{ a(X^3-1)+b(X^2-2)+c(X+4) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
5. $F_5 = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \;\middle|\; P(1)=P(2)=0 \right\}$.
6. $F_6 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; P'=0 \right\}$.
7. $F_7 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P''=0 \right\}$.
8. $F_8 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

* **Exercice 26 (31.3)**
Soient a et b deux nombres complexes distincts. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 admettant a et b comme racines est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$. Trouver une base de cet espace.

Problème 27 (31.3) *Polynômes interpolateurs de Lagrange*
Soit n un entier naturel non nul et $(a_1, \dots, a_n)$ n nombres réels deux à deux distincts. On leur associe les polynômes $L_1, \dots, L_n$ définis, pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, par

$$L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}. \tag{1}$$

Par exemple, *si* $n = 3$, on a

$$L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \qquad L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \qquad L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}. \tag{2}$$

Dans la suite, *n est quelconque*.

1. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, déterminer le degré de L_j.

2. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, déterminer les racines de L_j.

3. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, calculer $L_j(a_j)$.

4. Montrer que $\left(L_1, \dots, L_n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose

$$Q = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j. \tag{3}$$

(a) Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, calculer $Q(a_k)$.
(b) Montrer alors que $P = Q$.

6. En déduire que $\left(L_1, \dots, L_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On l'appelle base de Lagrange. Que représente donc $P(a_j)$ pour le polynôme P dans la base de Lagrange ?

7. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^q par $Q = (X - a_1) \dots (X - a_n)$ est

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^q L_j.$$

8. Soient a et b deux réels distincts tels que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k \in [a, b]$. Soit aussi une fonction $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. Déduire de la question **5.** qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad P_n(a_k) = f(a_k).$$

Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur $[a, b]$ relativement aux points $\{a_1, \dots, a_n\}$: c'est donc l'unique polynôme de degré $\leq n - 1$ prenant les mêmes valeurs que f aux points $(a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 28 (31.3)

*

Soient F et G les sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{et } G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

Exercice 29 (31.3)

**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $A \in E$ fixé et

$$F = \{ \ M \in E \mid AM = MA \ \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F.

Exercice 30 (31.3)

**

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}$ la suite de réels dont le terme d'indice n est $u_n^{(k)} = n^k$. Démontrer que la famille $\left(u^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 31 (31.3)

*

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de V. Montrer que pour tous vecteurs $u, w \in V$, on a

$$\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w) = \alpha \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(w).$$

où $\operatorname{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$ désigne la matrice des coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 32 (31.3)

**

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet $\left(e_1, e_2\right)$ comme base.

À chaque fois, on donnera les relations entre coordonnées d'un même vecteur dans les deux bases en question.

1. λ et μ étant des scalaires différents de 0, montrer que $(\lambda e_1, \mu e_2)$ est encore une base de E.
2. Montrer que $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ est encore une base de E.
3. En déduire que si λ et μ sont deux scalaires différents de 0, $\left(\lambda(e_1 + e_2), \mu(e_1 - e_2)\right)$ est une base de E.

Exercice 33 (31.3)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathfrak{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs. Nous pouvons lui associer les familles suivantes :

- $\mathfrak{F}' = (v_1', \dots, v_p')$ obtenue en multipliant un des vecteurs de $\mathfrak{F}$ par un scalaire différent de 0, c'est-à-dire

$$\begin{cases} v_k' = v_k & \text{si } k \neq j \\ v_j' = \lambda v_j. \end{cases}$$

  On code cette opération $v_j \leftarrow \lambda v_j$.

- $\mathfrak{F}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ obtenue en ajoutant à un vecteur de $\mathfrak{F}$ un multiple d'un des autres vecteurs de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} v'_k = v_k & \text{si } k \neq j \\ v'_j = v_j + \lambda v_i & \text{où } i \neq j. \end{cases}$$
On code cette opération $v_j \leftarrow v_j + \lambda v_i$.
- $\mathfrak{F}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ obtenue en échangeant les vecteurs v_i et v_j. On code cette opération $v_i \leftrightarrow v_j$.

Ces opération sont appelée **opérations élémentaires** sur une famille de vecteurs. On suppose que l'on passe de la famille $\mathfrak{F}$ à la famille $\mathfrak{F}'$ par un enchainement d'opération élémentaires.

1. Montrer que la famille $\mathfrak{F}'$ est libre si, et seulement si $\mathfrak{F}$ est libre.

2. Montrer que la famille $\mathfrak{F}'$ est liée si, et seulement si $\mathfrak{F}$ est liée.

3. Montrer que $\mathrm{Vect}(v'_1, \dots, v'_p) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

4. Montrer que la famille $\mathfrak{F}'$ est une base de E si, et seulement si $\mathfrak{F}$ est une base de E.