Chapitre 27

Relations de comparaisons sur les fonctions

27.1 Comparaison des fonctions

Dans toute cette section X désigne une partie de $\mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de X, le cas où $a = -\infty$ ou $a = +\infty$ n'étant pas exclu, bien au contraire.

§1 Définitions

Définition 1 Étant données deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relation

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ lorsque } x \to a$$

signifie qu'il existe un nombre $k \geq 0$ et un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V \cap X, |f(x)| \leq k|g(x)|.$$

On dit que f est **dominée** par g, ou que g **domine** f, au voisinage de a.

On lit «f est grand $\mathcal{O}$ de g» au lieu de «f égale grand $\mathcal{O}$ de g».

On utilise la notation de Landau : $\mathcal{O}(g)$ est utilisée pour désigner non seulement une fonction f précise, mais aussi n'*importe quelle* fonction dominée par g. On écrit également,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \qquad f = \mathcal{O}_a(g) \qquad \text{et même} \qquad f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g).$$

L'expérience montre que les ambiguïtés ainsi introduites n'ont aucune conséquence fâcheuse si l'on garde en mémoire cette convention. Par exemple, les relations $f_1 = \mathcal{O}(g)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g)$ n'impliquent pas $f_1 = f_2$ en dépit de ce que l'on pourrait croire à première vue. [1]

Enfin, on utilise également la notation $\mathcal{O}_a(g)$ pour désigner l'ensemble des applications dominées par l'application g. On écrit donc $f = \mathcal{O}_a(g)$ au lieu d'écrire $f \in \mathcal{O}_a(g)$.

Exemple 2

On a
$$10^{100}x^2 + 10^{100000}x = \mathcal{O}(x^2) \text{ quand } x \to +\infty$$
car pour $x \geq 1$ (d'où $x \leq x^2$), le premier membre est inférieur à kx^2 avec $k = 10^{100}+10^{100000}$; ce nombre peut paraître «très grand» aux chétifs membres de l'espèce humaine, mais il est indépendant de x et l'on en demande pas plus.

Exemple 3

$10x^3 = \mathcal{O}(x^3)$ quand $x \to +\infty$.

Exemple 4

$f = \mathcal{O}_a(1)$ signifie que l'application f est bornée au voisinage de a

Définition 5

Étant données deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relation
$$f(x) = o(g(x)) \text{ lorsque } x \to a$$
signifie qu'il existe un voisinage V de a et une application $\omega : X \to \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in X \cap V, f(x) = g(x)\omega(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$
On dit que f est **négligeable** devant g, ou que g est **prépondérante** sur f, au voisinage de a.

On lit « f est petit o de g». On écrit également,
$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \qquad f = o_a(g) \qquad \text{et même} \qquad f \underset{a}{=} o(g).$$

Définition 6

Étant données deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relation
$$f(x) \sim g(x) \text{ lorsque } x \to a$$
signifie qu'il existe un voisinage V de a et une application $\omega : X \to \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in X \cap V, f(x) = g(x)(1 + \omega(x)) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$
On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de a**.

On écrit également $f \underset{a}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Théorème 7

Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage du point a si, et seulement si
$$f(x) - g(x) = o(f(x)) \quad \textit{lorsque} \quad x \to a.$$

[1] Les notations mathématiques sont ce qu'elles sont : de pures conventions d'écriture.

Remarque On peut réécrire les définitions précédentes avec des quantificateurs. Par exemple, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à X.

- On a $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ lorsque $x \to a$ si, et seulement si
$$\exists \delta > 0, \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x)| \leq k|g(x)|.$$
- On a $f(x) = o(g(x))$ lorsque $x \to a$ si, et seulement si
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$
- On a $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ lorsque $x \to a$ si, et seulement si
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - g(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

On a des écritures analogues lorsque $a = \pm\infty$.

§2 Caractérisation par le quotient

Théorème 8 *Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf peut-être simultanément en a. On a alors les équivalences suivantes*

1. *On a $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ si, et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage du point a.*
2. *On a $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ si, et seulement si*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
3. *On a $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x))$ si, et seulement si*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque On ne peut pas toujours utiliser le quotient $\frac{f}{g}$, par exemple

1. $\sin^2 x = \mathcal{O}(\sin x)$ quand $x \to +\infty$.
2. $x \cos \frac{1}{x^5} = \mathcal{O}(x)$, quand $x \to 0$.
3. $x^3 \cos \frac{1}{x^5} = o(x^2)$ au voisinage de 0.

§3 Comparaison des applications usuelles

Proposition 9

Comparaison des applications usuelles

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $a > 0$ *fixés.*

- *Pour x au voisinage de* $+\infty$*,*

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\iff x^\alpha = o\left(x^\beta\right), \\ a > 1 &\implies x^\alpha = o\left(a^x\right), && \textit{en particulier } x^\alpha = o\left(e^x\right). \\ 0 < a < 1 &\implies a^x = o\left(x^\alpha\right), && \textit{en particulier } e^{-x} = o\left(1/x^\alpha\right). \\ \alpha > 0 &\implies \ln x = o\left(x^\alpha\right). \end{aligned}$$

- *Pour x au voisinage de* $0+$*,*

$$\begin{aligned} \alpha > \beta &\iff x^\alpha = o\left(x^\beta\right), \\ \beta > 0 &\implies |\ln(x)|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right). \end{aligned}$$

§4 Notation de Landau

Définition 10

Soient f, g, ϕ des applications définies sur X.

- La notation $f = g + \mathcal{O}(\phi)$ signifie $f - g = \mathcal{O}(\phi)$.
- La notation $f = g + o(\phi)$ signifie $f - g = o(\phi)$.

Avec cette notation, il faut traiter les égalités avec $o(\phi)$ «comme des congruences», par exemple $0 \equiv -2\pi \pmod{\pi}$ et $0 \equiv 10\pi \pmod{\pi}$, mais on a pas $-2\pi = 10\pi$ mais seulement $-2\pi \equiv 10\pi \pmod{\pi}$.

- Lorsque $x \to +\infty$, on a indifféremment

$$x^8 + \frac{4}{x} + \ln(x) = x^8 + \ln(x) + o(x), \quad x^8 + \frac{4}{x} + \ln(x) = x^8 + \cos(x) + o(x).$$

  Ici chaque $o(x)$ désigne une application négligeable devant x, mais elles sont distinctes. On n'a pas $\ln(x) = \cos(x)$!

- Au voisinage de $x = 0$, on a bien $1 + x^2 = 1 - x^2 + o(x)$ et $1 + x^2 = 1 + 3x^2 + o(x)$. On peut écrire $1 - x^2 + o(x) = 1 + 3x^2 + o(x)$ et donc :

$$-4x^2 = 1 - x^2 - (1 + 3x^2) = o(x) - o(x) = o(x) \text{ et non } -4x^2 = \cdots = 0.$$

§5 Quelques équivalents classiques

Théorème 11

Si $f : X \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in X$, avec $f'(a) \neq 0$. Alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Proposition 12

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ fixé et pour x au voisinage de 0, on a

$$\begin{array}{ccc} (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x & e^x - 1 \sim x & \ln(1+x) \sim x \\ \sin(x) \sim x & \cos(x) - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2} & \tan(x) \sim x \\ \mathrm{sh}(x) \sim x & \mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2} & \tanh(x) \sim x \\ \mathrm{Arcsin}(x) \sim x & \mathrm{Arctan}(x) \sim x & \end{array}$$

Démonstration. On remarque $\cos x - 1 = -2\sin^2 \frac{x}{2}$ et $\mathrm{ch}\, x - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2 \frac{x}{2}$. ∎

Proposition 13

Pour x au voisinage de $+\infty$, on a

$$\mathrm{ch}\, x \sim \mathrm{sh}\, x \sim \frac{e^x}{2}.$$

Pour x au voisinage de $-\infty$, on a

$$\mathrm{ch}\, x \sim \frac{e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x \sim -\frac{e^{-x}}{2}.$$

27.2 Calcul avec les relations de comparaisons

§1 Propriétés des relations de comparaisons

Théorème 14

Soient $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h$ des applications définies sur X.

1. *La relation $\mathcal{O}$ est réflexive : $f = \mathcal{O}(f)$.*
2. *La relation $\mathcal{O}$ est transitive : $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(h) \implies f = \mathcal{O}(h)$.*
3. *Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, $f = \mathcal{O}(\lambda g) \iff f = \mathcal{O}(g)$.*
4. *$f_1 = \mathcal{O}(g)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g) \implies f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g)$.*
5. *$f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g_2) \implies f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$.*
6. *Pour tout scalaire λ, $f = \mathcal{O}(g) \implies \lambda f = \mathcal{O}(g)$.*

Les $\mathcal{O}$ étant tous au voisinage du point a.

Théorème 15

Soient $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h$ des applications définies sur X.

1. *Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, $f = o(\lambda g) \iff f = o(g)$.*
2. *$f = o(g) \implies f = \mathcal{O}(g)$ (la réciproque est fausse).*
3. *$f = \mathcal{O}(g)$ et $g = o(h) \implies f = o(h)$.*
4. *$f = o(g)$ et $g = \mathcal{O}(h) \implies f = o(h)$.*
5. *$f = o(g)$ et $g = o(h) \implies f = o(h)$.*
6. *$f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g) \implies f_1 + f_2 = o(g)$.*
7. *$f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.*
8. *Pour tout scalaire λ, $f = o(g) \implies \lambda f = o(g)$.*

Les o et $\mathcal{O}$ étant tous au voisinage du point a.

On pourrait aussi écrire certaines de ces règles de la façon suivante, en gardant en mémoire le fait qu'un symbole tel que $\mathcal{O}(g)$ désigne n'importe quelle fonction f telle que $f = \mathcal{O}(g)$ (ou éventuellement un ensemble).

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h) &= \mathcal{O}(h), & o(h) + o(h) &= o(h), \\ \mathcal{O}\left(o(h)\right) &= o(h), & o\left(\mathcal{O}(h)\right) &= o(h), \\ \mathcal{O}(g)\mathcal{O}(h) &= \mathcal{O}(gh), & \mathcal{O}(g)o(h) &= o\left(gh\right). \end{aligned}$$

Attention aux généralisations douteuses : au voisinage de 0, $x^2 = o(x)$ et $x^3 = o(-x)$, mais $x^2 + x^3$ n'est pas négligeable devant 0.

Théorème 16

La relation $\underset{a}{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

$$f \underset{a}{\sim} f, \quad f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f, \quad f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h.$$

Exemple 17

Quand $x \to +\infty$, $-3x^4 + 2x = o\left(2x^6\right)$ car

$$x^4 = o\left(x^6\right) \quad \text{et} \quad x = o\left(x^6\right).$$

Ainsi, $2x^6 - 3x^4 + 2x \sim 2x^6$.

Exemple 18

Quand $x \to 0$, $2x^6 - 3x^4 = o\left(2x\right)$ car

$$x^6 = o\left(x\right) \quad \text{et} \quad x^4 = o\left(x\right).$$

Ainsi, $2x^6 - 3x^4 + 2x \sim 2x$.

Exemple 19

Multiplions membres à membres les relations

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^3), \qquad \sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$$

valable pour $x \to 0$.

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= (1 + x + x^2/2)(x - x^3/6) + (1 + x + x^2/2)\mathcal{O}(x^5) + (x - x^3/6)\mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^3)\mathcal{O}(x^5) \\ &= x + x^2 + x^3/3 - x^4/6 - x^5/12 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^5) + \cdots \mathcal{O}(x^8); \end{aligned}$$

dans ces calculs, on a utilisé le fait que $x^a\mathcal{O}(x^b) = \mathcal{O}(x^{a+b})$, cas particulier de 14, mais comme $x^n = \mathcal{O}(x^4)$ pour $n \geq 4$, il reste

$$e^x \sin x = x + x^2 + x^3/3 + \mathcal{O}(x^4);$$

on ne peut rien tirer de plus précis des relations initiales.

§2 Propriétés conservées par équivalence

Théorème 20

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$, *alors* f *et* g *ont même signe au voisinage de* a.

Théorème 21

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$, *et que* g *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *lorsque* $x \to a$, *alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}^\star$. En considérant ℓ comme une application constante $\neq 0$

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Ce résultat est bien sûr *totalement faux* avec $\ell = 0$.

On entend souvent des étudiants parler d'applications équivalentes à 0. Cela déclenche en général chez l'examinateur des réactions violentes ! En effet, dire qu'une application f est équivalente à 0 signifie que f est localement nulle ($f(x) = 0$ pour x au voisinage de a). En pratique, parler d'applications équivalentes à 0 est donc une bavure comme il en existe beaucoup en mathématiques. Mais celle-là est beaucoup plus grave que les autres, car la notion d'applications équivalentes est un outil qui sert principalement à la recherche de limites et qu'il est de l'intérêt de tout le monde de trouver la bonne limite ! Or il se trouve que la faute dont nous parlons ici n'est pas paralysante – on peut continuer à calculer – mais conduit en général à une limite totalement erronée. Aussi, de grâce, faites attention, afin de vous épargner les foudres du dit examinateur.

§3 Opérations sur les équivalents

Théorème 22 *Soient f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 des applications définies sur X.*

1. $f \sim g \implies f = \mathcal{O}(g)$.
2. $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2 \implies f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
3. $f \sim g \implies \forall n \in \mathbb{N}, f^n \sim g^n$.
4. *Si f_2 et g_2 ne s'annulent pas,*
$$f_1 \sim g_1 \text{ et } f_2 \sim g_2 \implies \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}.$$
5. *Si f et g sont à valeurs strictement positives et si $\alpha \in \mathbb{R}$,*
$$f \underset{a}{\sim} g \implies f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha.$$

Les $\mathcal{O}$ et $\sim$ étant tous au voisinage du point a.

Par contre, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, on a pas en général $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

Exemple 23 Considérons le rapport
$$\frac{x^2 - x + \ln x}{x^2 - (\ln x)^2}$$
lorsque x tend vers $+\infty$. Au numérateur x et $\ln x$ sont $o(x^2)$, de sorte qu'il est $\sim x^2$. Au dénominateur, $\ln x$ est $o(x)$, donc $(\ln x)^2$ est $o(x^2)$, de sorte que le dénominateur aussi est $\sim x^2$. La fraction considérée tend donc vers 1 lorsque $x \to +\infty$.

Comme on l'a déjà noté quelque part, un polynôme est, à l'infini, équivalent à son terme de plus haut degré ; une fraction rationnelle est donc équivalente, toujours en l'infini, au quotient des termes de plus haut degré de ses deux facteurs.

§4 Obtention d'un équivalent par encadrement

Théorème 24 *Soient f, g, h des application définies sur X. Si les fonctions réelles f, g, h vérifient*
$$f \leq g \leq h \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$$
alors $g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$.

§5 Changement de variable

Théorème 25

Composition à droite

Soit f et g des applications de X dans $\mathbb{R}$ et $u : A \to X$, telle que $\lim_{x\to a} u(x) = b$.

1. *si $f = \mathcal{O}_b(g)$ alors*
$$f(u(x)) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(u(x))).$$
2. *si $f = o_b(g)$ alors*
$$f(u(x)) \underset{x\to a}{=} o(g(u(x))).$$
3. *si $f \underset{b}{\sim} g$,*
$$f(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(u(x)).$$

Méthode

On peut toujours se ramener 0

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} g(a+h),$$
$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} g(x) \iff f(1/h) \underset{h\to 0+}{\sim} g(1/h).$$

Exemple 26

Lorsque $x \to 1^-$,
$$f(x) = \arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$$

Exemple 27

Lorsque $x \to +\infty$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} \sim \frac{1}{x^2}$$

Remarque

On n'a pas le droit de composer un équivalent (ou un $\mathcal{O}$ ou o) par la gauche !

- Au voisinage de $+\infty$, $x \sim x+1$ mais $e^x \nsim e^{x+1}$ car
$$\frac{e^x}{e^{x+1}} = e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
- Au voisinage de 0, $1+x^2 \sim 1+x$ mais $\ln(1+x) \nsim \ln(1+x^2)$. En effet
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \text{ et } \ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$