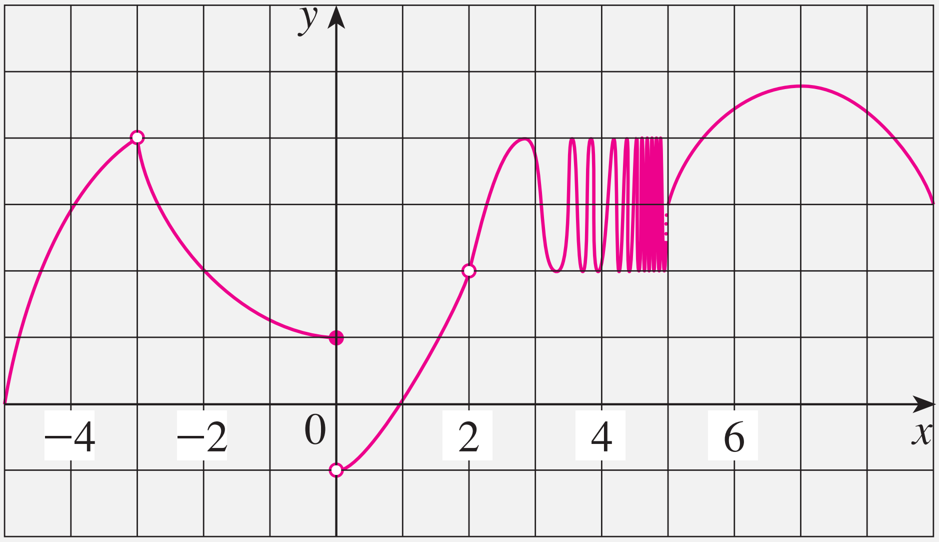
Chapter 26 Limites, continuité

Exercice 1 (26.2)

Pour la fonction h dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} h(x)$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} h(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$.
4. $h(-3)$.
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x)$.
6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x)$.
7. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.
8. $h(0)$.
9. $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.
10. $h(2)$.
11. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} h(x)$.
12. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} h(x)$.



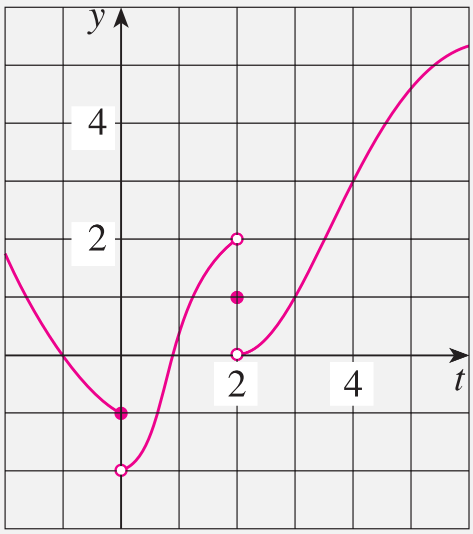
Solution 1 (26.2)

1. 4.
2. 4.
3. 4.
4. h n'est pas définie en -3.
5. 1.
6. -1.
7. h n'a pas de limite en 0.
8. 1.
9. 2.
10. h n'est pas définie en 2.
11. h n'a pas de limite en 5 par valeurs inférieures.
12. 3

Exercice 2 (26.2)

Pour la fonction g dont on donne une représentation graphique, donner la valeur de chaque quantité, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquer pourquoi.

1. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ <}} g(t)$.
2. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} g(t)$.
3. $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$.
4. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ <}} g(t)$.
5. $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ >}} g(t)$.
6. $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$.
7. $g(2)$.
8. $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$.



Solution 2 (26.2)

1. -1
2. -2
3. g n'a pas de limite en 0. Par exemple car la limite à droite et à gauche diffèrent.
4. 2
5. 0
6. g n'a pas de limite en 2.
7. 1
8. 3

Exercice 3 (26.2)

Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01.$$

Solution 3 (26.2)

x	−1.00000	−0.50000	−0.10000	−0.05000	−0.01000
y	0.36788	0.42612	0.48374	0.49177	0.49834
x	1.00000	0.50000	0.10000	0.05000	0.01000
y	0.71828	0.59489	0.51709	0.50844	0.50167

On peut deviner $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (26.2)

Deviner la valeur de la limite (si elle existe) en évaluant la fonction au points donnés (à 10^{-6} près).

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln\left(x + x^2\right) \qquad \text{avec} \qquad x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001.$$

Solution 4 (26.2)

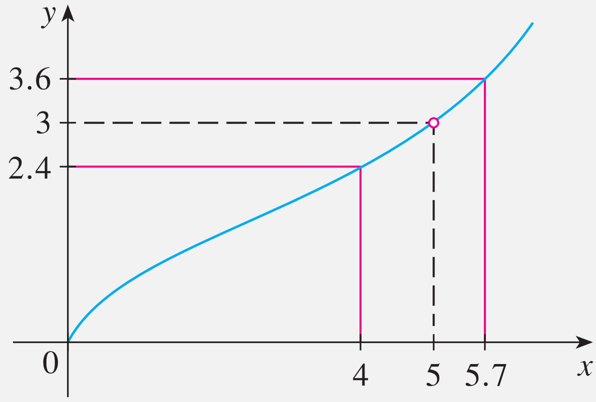
x	1.00000	0.50000	0.10000	0.05000	0.01000	0.00500	0.00100
y	0.69315	−0.14384	−0.22073	−0.14735	−0.04595	−0.02647	−0.00691

Cela manque un peu de précision, mais on peut deviner $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln\left(x + x^2\right) = 0-$.

Exercice 5 (26.2)

À l'aide de la courbe représentative de f, déterminer un réel $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } |x-5| \leq \delta \text{ alors } |f(x)-3| \leq 0.6.$$



Solution 5 (26.2)
Écrire $|f(x)-3| \leq 0.6$ est équivalent à

$$2.4 \leq f(x) \leq 3.6.$$

On peut choisir $\delta = 0.7$ (ou une valeur inférieure). En effet, Soit $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie $|x-5| \leq \delta$, on a

$$4.3 \leq x \leq 5.7$$

Sur le tracé, f semble croissante, $f(4) = 2.4$ et $f(5.7) = 3.6$, d'où

$$2.4 \leq f(4.3) \leq f(x) \leq 3.6.$$

Exercice 6 (26.2)

Illustrer la définition de la limite

$$\lim_{x \to 1} \left(4 + x - 3x^3\right) = 2$$

en déterminant une valeur de δ correspondante à $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 0.1$.

Solution 6 (26.2)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\left(4 + x - 3x^3\right) - 2\right| = \left|2 + x - 3x^3\right| = |x - 1|\left|3x^2 + 3x + 2\right|$$

Supposons de plus $|x - 1| \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq 2$, on a $\left|3x^2 + 3x + 2\right| \leq 20.$ On obtient alors la majoration

$$\left|\left(4 + x - 3x^3\right) - 2\right| \leq 20|x - 1|$$

Posons $\delta = \frac{1}{20}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x - 1| \leq \delta$, on a simultanément

$$|x - 1| \leq \frac{1}{20} \qquad \text{et} \qquad \left|3x^2 + 3x + 2\right| \leq 20$$

d'où

$$\left|\left(4 + x - 3x^3\right) - 2\right| \leq 20\delta = 20\frac{1}{20} = 1 = \epsilon.$$

Pour $\epsilon = 0.1$, on peut prendre $\delta = \frac{0.1}{20}$.

Exercice 7 (26.2)

Démontrer les affirmations suivantes en utilisant la définition (en ϵ, δ) de la limite.

1. $\lim\limits_{x\to 1} (2x+3) = 5$.
2. $\lim\limits_{x\to -3} (1-4x) = 13$.
3. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}x+3\right) = 2$.
4. $\lim\limits_{x\to 4} (7-3x) = -5$.

Solution 7 (26.2)

1. Soit $\epsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|(2x+3)-5| = |2x-2| = 2|x-1|$. Posons $\delta = \epsilon/2$. Si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x-1| \leq \delta$, alors
$$|(2x+3)-5| = 2|x-1| \leq 2\delta = \epsilon.$$
On a montré que $\lim\limits_{x\to 1} (2x+3) = 5$.
2. On peut choisir $\delta = \epsilon/4$.
3. On peut choisir $\delta = 2\epsilon$.
4. On peut choisir $\delta = \epsilon/3$.

Exercice 8 (26.2)

1. Montrer, en revenant à la définition de la limite, que
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}=1.$$
2. Montrer de même que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-2}=1.$$

Solution 8 (26.2)

1. Pour $x\geq -1$,
$$\sqrt{x+1}-1=\frac{x}{\sqrt{x}+1}.$$
d'où
$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|=\frac{|x|}{\sqrt{x+1}+1}\leq |x|.$$
Soit $\epsilon>0$, posons $\delta=\epsilon$, alors si $|x-0|\leq\delta$, on a
$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|\leq\epsilon.$$

Conclusion

On a bien montré
$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in[-1,+\infty[,|x|\leq\delta\implies\left|\sqrt{x+1}-1\right|\leq\epsilon.$$

2. Soit $\epsilon>0$. On cherche $A\in\mathbb{R}$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\},x\geq A\implies\left|\frac{x-1}{x-2}-1\right|\leq\epsilon.$$
Or, pour tout $x\neq 2$,
$$\left|\frac{x-1}{x-2}-1\right|=\frac{3}{|x-2|},$$
et donc
$$\left|\frac{x-1}{x-2}-1\right|\leq\epsilon\iff\frac{3}{|x-2|}\leq\epsilon\iff|x-2|\geq\frac{3}{\epsilon}.$$
Posons $A=2+\frac{3}{\epsilon}$. Si $x\geq A$, alors $x\geq 2$ et $|x-2|=x-2\geq\frac{3}{\epsilon}$, on a donc d'après l'équivalence précédente
$$\left|\frac{x-1}{x-2}-1\right|\leq\epsilon.$$

Conclusion

On a bien montré
$$\forall\epsilon>0,\exists A\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\},x\geq A\implies\left|\frac{x-1}{x-2}-1\right|\leq\epsilon.$$

Exercice 9 (26.2)

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer

1. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3.$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-x}{x+3} = -1.$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+x}{x^2+1} = 1.$

Solution 9 (26.2)

1. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[, |x-4| \leq \delta \implies \left|\sqrt{2x+1}+3\right| \leq \epsilon.$$

Pour $x \in \left[-1/2, +\infty\right[$,

$$\sqrt{2x+1} - 3 = \frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

avec $\sqrt{2x+1}+3 \geq 3$, d'où

$$\left|\sqrt{2x+1}-3\right| \leq \frac{2}{3}|x-4|.$$

Pour réaliser, $\left|\sqrt{2x+1}-3\right| \leq \epsilon$, il *suffit* de réaliser $\frac{2}{3}|x-4| \leq \epsilon$, c'est-à-dire $|x-4| \leq \frac{3}{2}\epsilon$. En choisissant par exemple $\delta = \frac{3}{2}\epsilon$, on obtient

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[, |x-4| \leq \delta \implies \left|\sqrt{2x+1}+3\right| \leq \frac{2}{3}|x-4| \leq \epsilon.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$.

2. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, x \geq \alpha \implies \left|\frac{1-x}{x+3}+1\right| \leq \epsilon.$$

Pour $x \in]-3, +\infty[$,

$$\frac{1-x}{x+3} + 1 = \frac{4}{x+3} \text{ et } \left|\frac{1-x}{x+3}+1\right| = \frac{4}{x+3}.$$

Or $\frac{4}{x+3} \leq \epsilon \iff x \geq \frac{4}{\epsilon} - 3$. Choisissons par exemple $\alpha = \frac{4}{\epsilon} - 3 \geq -3$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, x \geq \alpha \implies \left|\frac{1-x}{x+3}+1\right| \leq \epsilon.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x}{x+3} = -1$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} - 1 = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

De plus, si $x \leq -1$, on a $0 \leq 1 - x \leq -2x$ et $x^2 + 1 \geq x^2 \geq 0$, ainsi

$$\frac{1-x}{x^2+1} \leq \frac{-2x}{x^2} \leq -\frac{2}{x}.$$

Soit $\epsilon > 0$, on détermine α et que

$$\forall x \in \left]-\infty, -1\right[, x \leq \alpha \implies \left| \frac{x^2+x}{x^2+1} - 1 \right| \leq \epsilon.$$

Il suffit de choisir α tel que : $x \leq \alpha \implies -\frac{2}{x} \leq \epsilon$.

Or avec $x < 0$, $-\frac{2}{x} \leq \epsilon \iff x \leq -\frac{2}{\epsilon}$. Posons $\alpha = \min\left(-\frac{2}{\epsilon}, -1\right)$, on obtient

$$\forall x \in \left]-\infty, -1\right[, x \leq \alpha \implies \left| \frac{x^2+x}{x^2+1} - 1 \right| \leq -\frac{2}{x} \leq \epsilon.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1$.

Exercice 10 (26.2)

> Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant le point a, continue en a avec $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on ait $f(x) > 0$.

Solution 10 (26.2)

On note $I =]\alpha, \beta[$. Dire que f est continue au point a signifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Un petit dessin au voisinage de a nous suggère d'appliquer la définition avec $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta], |f(x) - f(a)| \leq \frac{f(a)}{2}.$$

Donc, en particulier

$$\forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta], f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Reste à trouver $\eta > 0$ de manière à avoir $]a - \eta, a + \eta[\subset I \cap [a - \delta, a + \delta]$. On pose $\eta = \min \{ a - \alpha, \beta - a, \delta \}$, on a alors

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, x \in I \text{ et } f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Exercice 11 (26.3)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T > 0$.
On suppose que f a une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.

Solution 11 (26.3)

Plusieurs solutions peuvent être envisagées. La plus élégante semble être d'utiliser le caractère séquentiel de la limite.

On note ℓ la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $f(x) = f(x + nT)$, de plus

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} f(x + nT) = \ell.$$

Par unicité de la limite de la suite $(f(x + nT))_{n \in \mathbb{N}}$, on a $f(x) = \ell$.

La fonction f est donc constante.

Exercice 12 (26.4)

1. Démontrer à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. Calculer, si possible

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2x}$;

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2x}$;

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2x}$;

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2x}$.

Solution 12 (26.4)

1. On cherche une limite lorsque $x \to +\infty$. Le caractère local de la limite permet de travailler avec $x > 0$. On a alors

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leq x \quad \text{d'où} \quad \frac{x-1}{2x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} \leq \frac{1}{2}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - 1/x2 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $\frac{\lfloor x\rfloor}{2x}$ admet une limite lorsque $x \to +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. (a) On cherche une limite lorsque $x \underset{>}{\to} 0$. Le caractère local de la limite permet de travailler avec $x \in]0, 1/2[$. On a alors, pour $x \in]0, 1/2[$,

$$\frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = 0 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} 0.$$

(b) On cherche une limite lorsque $x \underset{<}{\to} 0$. Le caractère local de la limite permet de travailler avec $x \in]-5/7, 0[$. On a alors, pour $x \in]-5/7, 0[$,

$$\frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{-1}{2x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ <}]{} +\infty.$$

(c) On a

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \lfloor x\rfloor = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} 2x = 4,$$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{1}{2}$.

(d) On a

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \lfloor x\rfloor = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} 2x = 4,$$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\lfloor x\rfloor}{2x} = \frac{1}{4}$.

Exercice 13 (26.4)

On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2^k}.$$

1. Préciser la valeur $f(x)$ pour $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que f est croissante et majorée sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
4. En appliquant la définition, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Solution 13 (26.4)

Exercice 14 (26.4)

Montrer
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 14 (26.4)
Nous avons admis ce résultat dans un chapitre précédent. *C'est donc une question de cours!*

Soit $\epsilon > 0$. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \implies \left|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \epsilon.$$

La fonction arctan étant majorée par $\pi/2$, la dernière inégalité revient à écrire
$$\arctan(x) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon.$$

Exploitons maintenant la croissance de l'arctangente. Posons $b = \max\left\{ \frac{\pi}{2} - \epsilon, 0 \right\}$ et $a = \tan(b)$; ainsi $b \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et $\arctan(a) = b$. Finalement, pour $x \geq a$,
$$\frac{\pi}{2} - \epsilon \leq b = \arctan(a) \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

On a bien montré
$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \implies \left|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \epsilon.$$

Variante. Si l'on ne veut pas utiliser d'ϵ, on peut contourner le problème avec l'unicité de la limite et le théorème de la limite monotone (remarquer de nombreux points communs entre la solution précédente et la démonstration du dit théorème).

La fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par $\frac{\pi}{2}$; elle admet donc une limite $\ell \leq \frac{\pi}{2}$.
Or
$$\lim_{\substack{x\to\pi/2 \\ <}} \tan x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \ell;$$

par compositon de limite, on a
$$\lim_{\substack{x\to\pi/2 \\ <}} \arctan(\tan x) = \ell.$$

Or pour x au voisinage à gauche de $\pi/2$, disons $x \in]0, \pi/2[$, on a
$$\arctan(\tan x) = x \xrightarrow[\substack{x\to\pi/2 \\ <}]{} \frac{\pi}{2}.$$

Par unicité de cette limite, on a donc bien $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 15 (26.5)

Trouver

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

Solution 15 (26.5)

Notons

$$f(x) = \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

$x^x = e^{x\ln x}$ est défini pour $x > 0$, de même pour les autres puissances. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$f(x) = \frac{x^{2x}}{x^{(x^x)}} = x^{2x-x^x} = e^{(2x-x^x)\ln x}.$$

Or

$$2x - x^x = x(2 - x^{x-1}) = x\left(2 - e^{(x-1)\ln x}\right).$$

On a alors

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} (x-1)\ln x = +\infty$$

$$\text{or } \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{(x-1)\ln x} = +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} 2x - x^x = -\infty.$$

De plus $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{(2x-x^x)\ln x} = 0.$$

Dans les exercices suivants

Rechercher les asymptotes du graphe de chacune des fonctions f suivantes. Esquisser l'allure du graphe au voisinage des asymptotes.

Exercice 16 (26.5)

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}\ ;$$

Solution 16 (26.5)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0+ \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+\,.$$

La courbe de f admet donc une asympote horizontale $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses). De plus, $f(x) > 0$ pour x au voisinage de $\pm\infty$ (en fait, pour tout $x \neq 2$). La courbe de f est donc au dessus de $\mathcal{A}_1$ au voisinage de $\pm\infty$.

Également,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet donc une asympote verticale d'équation $x = 2$.

Exercice 17 (26.5)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3} \,;$$

Solution 17 (26.5)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 1, 3 \}$. On note C_f sa courbe représentative.

Pour x au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

Or $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1$, d'où

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0- \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0+ .$$

La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est donc asympte à C_f. De plus, *au voisinage* de $-\infty$, C_f est au dessous de $\mathcal{A}_1$; *au voisinage* de $+\infty$, C_f est au dessus de $\mathcal{A}_1$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 1, 3 \}$, on a

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x-1)}.$$

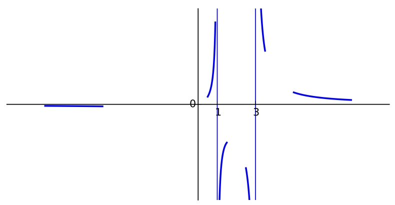
On en déduit les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet deux asymptôtes verticales

$$\mathcal{A}_2 : x = 1 \qquad \mathcal{A}_3 : x = 3.$$



Exercice 18 (26.5)

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9} \ ;$$

Solution 18 (26.5)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -3, 3 \}$. Notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Pour x au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2} \frac{2}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{2}{1 - \frac{9}{x^2}}.$$

D'où

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$$

La droite $\mathcal{A}_1$ d'équation $y = 2$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$. De plus, pour x au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(x) - 2 = \frac{18}{x^2 - 9} > 0.$$

La courbe de f est donc au dessus de $\mathcal{A}_1$ *au voisinage de* $\pm\infty$.

De plus, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ -3, 3 \}$,

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-3)(x+3)}$$

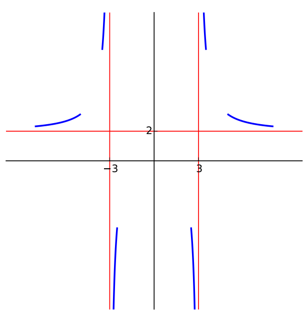
On en déduit les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet deux asymptôtes verticales

$$\mathcal{A}_2 \ : \ x = -3 \qquad \mathcal{A}_3 \ : \ x = 3.$$



Exercice 19 (26.5)

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+9}} \ ;$$

Solution 19 (26.5)

f est définie sur $\mathbb{R}$.

Deux asymptotes horizontales $y = -1$ et $y = 1$.

Exercice 20 (26.5)

> $f(x) = \tan x + x$;

Solution 20 (26.5)

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Une infinité d'asymptotes verticales : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 21 (26.5)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \ ;$$

Solution 21 (26.5)

f est définie sur $\mathbb{R}^{\star}$.

Une asymptote horizontale : $y = 0$.

f est prolongeable par continuité en 0, il n'y a donc pas d'asymptot verticale.

Exercice 22 (26.5)

$$f(x) = |x| \sin \frac{1}{x} ;$$

Solution 22 (26.5)

f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

Une asymptote horizontale : $y = 0$.

f est prolongeable par continuité en 0, il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

Exercice 23 (26.5)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x} \;;$$

Solution 23 (26.5)

f est définie sur $\mathbb{R}^{\star}$.

f est prolongeable par continuité en 0, il n'y a donc pas d'asymptot verticale.

Les limites en $-infty$ et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale.

Exercice 24 (26.5)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solution 24 (26.5)

f est définie sur $]-1, 1[$.

Deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 25 (26.5)

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x) \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Solution 25 (26.5)

Exercice 26 (26.5)

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - x}.$$

Solution 26 (26.5)

Ensemble de déf : $D = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0, 1 \}$.

Exercice 27 (26.5)

Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 1}}{3 + \cos(x)}.$$

Solution 27 (26.5)

Exercice 28 (26.5)

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

- la fonction f est croissante,
- la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/x$ est décroissante.

Montrer que f est continue.

Solution 28 (26.5)

Soit $a \in]0, +\infty[$. Montrons que f est continue au point a, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On sait que f est croissante et a est un point intérieur à $]0, +\infty[$, donc f admet des limites à gauche et à droite en a. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x). \tag{1}$$

De même, g est décroissante, donc elle admet des limites à gauche et à droite en a et on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} g(x) \geq g(a) \geq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} g(x). \tag{2}$$

Or f admet une limite à gauche en a et $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} x = a$, d'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} g(x) = \frac{1}{a} \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x).$$

De manière analogue,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} g(x) = \frac{1}{a} \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x).$$

Puisque $a > 0$ et $g(a) = \frac{f(a)}{a}$, la relation (2) implique

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x). \tag{3}$$

Finalement, d'après (3) et (1), on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x). \tag{4}$$

c'est-à-dire $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exercice 29 (26.6)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x > 0 \\ 1 & : x = 0 \\ \mathrm{e}^x & : x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
2. Dans sa copie, Bob affirme

   « La fonction $x \mapsto 1$ est continue en 0, donc f est continue en 0. »

   Expliquer l'erreur de raisonnement de Bob.

Solution 29 (26.6)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue au point a.

   - Premier cas : $a > 0$. Soit x au voisinage de a, par exemple $x \in \left]\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right[$. On peut donc supposer $x > 0$ et on a alors
   $$f(x) = x + 1 \xrightarrow[x \to a]{} a + 1 = f(a).$$
   Donc f est continue en a.
   - Deuxième cas : $a < 0$. Soit x au voisinage de a, par exemple $x \in]-\infty, 0[$. On peut donc supposer $x < 0$ et on a alors
   $$f(x) = e^x \xrightarrow[x \to a]{} e^a = f(a).$$
   Donc f est continue en a.
   - Troisième cas : $a = 0$. On a
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^x = 1 \tag{1}$$
   et
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x + 1 = 1 \tag{2}$$
   On a donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1 = f(0)$, c'est-à-dire
   $$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$
   L'application f est donc également continue en 0.

   Conclusion

   L'application f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. La fonction f coïncide avec la fonction $\widetilde{1} : x \mapsto 1$ au point 0. Mais f et $\widetilde{1}$ ne coïncide pas *au voisinage* de 0. La limite (ou la continuité) étant une notion *locale*, on ne peut affirmer avec l'argument de Bob que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \widetilde{1} = 1$.

Exercice 30 (26.6)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur continuité.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

2. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Solution 30 (26.6)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \lfloor x \rfloor$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$; étudions la continuité de f au point a.

Premier cas : $a \notin \mathbb{Z}$. Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sont continue en a. L'application $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est donc continue au point a en tant que somme de fonction continues en a. De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc continue en $a - \lfloor a \rfloor$. Par composition, f est continue en a

Deuxième cas : $a \in \mathbb{Z}$. On a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = a - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = a \qquad \text{et} \qquad f(a) = 0.$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \sqrt{a - a + 1} = 1 \neq f(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = \sqrt{a - a} = 0 = f(a).$$

L'application f est continue à droite en a mais n'est pas continue à gauche : elle n'est donc pas continue au point a.

Conclusion

L'application f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. L'application g est clairement définie sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$; étudions la continuité de g au point a.

Premier cas : $a \notin \mathbb{Z}$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ étant continue au point a, l'application

$$g : x \mapsto x^2 - \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor^2$$

est continue au point a en tant que combinaison linéaire et produit de fonctions continue au point a.

Deuxième cas : $a \in \mathbb{Z}$. On a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \lfloor x \rfloor = a - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor = a \qquad \text{et} \qquad g(a) = a.$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} g(x) = a - 1 + (a - a + 1)^2 = a = g(a) \qquad \text{et} \ \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \lfloor x \rfloor \qquad = a + (a - a)^2 = a = g(a).$$

On a donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$: l'application g est continue au point a.

Conclusion

L'application g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31 (26.6)

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & x > 4 \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Dans les exercices suivants

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en $x = -1$.

Exercice 32 (26.6)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Solution 32 (26.6)

Pour $x \neq -1$, on a

$$f(x) = x + 1 \xrightarrow[x \to -1]{} 0.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en posant $f(-1) = 0$.

Exercice 33 (26.6)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

Solution 33 (26.6)
Pour $x \neq -1$, on a

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1.

Exercice 34 (26.6)

$$f(x) = \frac{e^{2(x+1)} - 1}{e^{x+1} - 1}$$

Solution 34 (26.6)

Pour $x \neq -1$, on a

$$\lim_{x \to -1} e^{x+1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 2.$$

Donc par composition de limite

$$f(x) = \frac{\left(e^{x+1}\right)^2 - 1}{e^{x+1} - 1} = 2.$$

L'application f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 2$.

Exercice 35 (26.6)

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$$

Solution 35 (26.6)

Pour $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 7)}{x + 1} = x - 7 \underset{x \to -1}{\longrightarrow} -8.$$

L'application f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = -8$.

Exercice 36 (26.6)

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$$

Solution 36 (26.6)
On a

$$\lim_{x \to -1} x + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Par composition de limite

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1.$$

L'application f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 1$.

Exercice 37 (26.6)

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x+1}$$

Solution 37 (26.6)
Puisque ln est une fonction continue en 2, on a

$$\lim_{x\to-1} \ln(x^2+1) = \ln 2 \quad \text{de plus} \quad \lim_{x\to-1} x+1 = 0.$$

La fonction f n'a donc pas de limite finie au point -1 : elle n'est pas prolongeable par continuité en -1.

Exercice 38 (26.6)

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et en 1 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right),$$

alors f est constante.

Solution 38 (26.6)

On peut remarquer tout d'abord que f est paire,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f\left((-x)^2\right) = f\left(x^2\right) = f(x).$$

Pour montrer que f est constante (sur $\mathbb{R}$), il suffit de le montrer sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f\left(x^2\right) = f\left(x^4\right) = f\left(x^8\right) = \dots$. Une récurrence immédiate donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(x^{2^n}\right).$$

Soit $x \in]-1, 1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0,$$

et puisque f est continue en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x^{2n}\right) = f(0).$$

La première limite étant trivialement égale à $f(x)$, on obtient finalement

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = f(0).$$

Soit maintenant $x \geq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(x^{1/2^n}\right) = f\left(\left(x^{1/2^n}\right)^{2^n}\right) = f(x).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{1/2^n} = 1$ et f est continue en 1. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la reltaion précédente, on obtient

$$\forall x > 1, f(1) = f(x).$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(0) = f(0)$$

et puisque f est continue en 1, on obtient $f(0) = f(1)$.

Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+$ et paire ; elle est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39 (26.7)

Un randonneur parcourt 10 km en 2 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.
On pourra introduire la fonction $d : [1, 2] \to \mathbb{R}$ qui au temps t associe le nombre de kilomètres parcourus depuis 1 heure.

Exercice 40 (26.7)

Montrer qu'une fonction continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Solution 40 (26.7)
Remarquons que

$$f(c) = c \iff f(c) - c = 0.$$

Définissons la fonction auxiliaire $g : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$. Puisque f est à image dans $[0, 1]$, on a

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 \leq 0.$$

Donc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$ ($g(1) \leq 0 \leq g(0)$). De plus g est continue sur *l'intervalle* $[0, 1]$ en tant que différence de deux fonction continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c \in [0, 1], g(c) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\exists c \in [0, 1], f(c) = c.$$

Exercice 41 (26.7)

Soit f et g deux applications continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(a) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f(b) = g(a).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Solution 41 (26.7)
Remarquons

$$f(c) = g(c) \iff f(c) - g(c) = 0.$$

Définnissons alors la fonction auxiliaire

$$h : \begin{array}{rcl} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array}.$$

Alors h est continue en tant que combinaison linéaire de deux fonctions continue. De plus,

$$h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - f(a) = -h(a).$$

Donc $h(a)$ et $h(b)$ sont de signe opposés et h est continue sur l'*intervalle* $[a, b]$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f(c) = g(c).$$

Exercice 42 (26.7)

Soient f et g deux applications continues sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles. On suppose

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) + m.$$

Solution 42 (26.7)

Nous allons introduire une fonction auxiliaire. Pour $x \in [a, b]$, posons $h(x) = f(x) - g(x)$. La fonction h est continue $[a, b]$ en tant que combinaison linéaire de deux fonctions continues. L'image de segment $[a, b]$ par l'application continue h est donc un segment ; en particulier, h atteint son minimum sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$h(c) = \min_{[a,b]} h.$$

Or $f(c) > g(c)$ donc $h(c) > 0$. Posons $m = \frac{f(c)}{2}$, alors

$$\forall x \in [a, b], f(x) - g(x) = h(x) \geq \min_{[a,b]} h = h(c) > m$$

d'où

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) + m.$$

Exercice 43 (26.7)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que f est strictement monotone.

Solution 43 (26.7)

On effectue la démonstration dans le cas où $f(0) < f(1)$. Le cas $f(0) > f(1)$ est analogue (il suffit de remplacer f par $-f$). Le cas $f(0) = f(1)$ est impossible par injectivité de f.

1. Supposons qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) > f(1)$. On a donc $f(0) < f(1) < f(x)$. Puisque f est continue sur $[0,x]$, le théorème des valeurs intermédiaire assure l'existence d'un $y \in [0,x]$ tel que $f(y) = f(1)$. L'injectivité de f impose alors $y = 1$ ce qui est contradictoire avec $0 < y \leq x < 1$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(1)$.

   De manière analogue, on prouve que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(0)$. Finalement,

   $$\forall x \in [0,1], f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

2. On sait que $f(0) < f(1)$. Soit $x, y \in [0,1]$ avec $x < y$. Supposons que $f(x) \geq f(y)$; on a donc $f(0) \leq f(y) \leq f(x) \leq f(1)$.

   Puisque f est continue sur $[0,x]$, il existe $c \in [0,x]$ tel que $f(c) = f(y)$. L'injectivité de f assure que $c = y > x$ ce qui est contradictoire avec $c \in [0,x]$.

   On a donc $f(x) < f(y)$.

Conclusion

L'application f est strictement croissante sur $[0,1]$.

Exercice 44 (26.7)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Solution 44 (26.7)

La fonction f est continue sur le segment $[0, T]$; elle y est donc bornée est atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in [0, T]$ tels que $f([0, T]) = [f(a), f(b)]$, en particulier

$$f(a) = \min_{[0,T]} f \qquad \text{et} \qquad f(b) = \max_{[0,T]} f.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - kT \in [0, T]$. En effet,

$$0 \leq x - kT \leq T \iff x - T \leq kT \leq x \iff \frac{x}{T} - 1 \leq k \leq \frac{x}{T};$$

on peut donc choisir $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$. On a alors

$$f(a) \leq f(x) = f(x - kT) \leq f(b).$$

Ce qui montre que f est majorée (sur $\mathbb{R}$) par $f(b)$, minorée (sur $\mathbb{R}$) par $f(a)$ et que ces bornes sont atteintes.

Exercice 45 (26.7)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée.

Solution 45 (26.7)
Exploitons la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, +\infty[, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

Avec $\epsilon = 1$, nous obtenons un réel A, que nous pouvons supposer positif, tel que

$$\forall x \geq A, \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1.$$

De plus, la fonction f est continue sur le segment $[0, A]$; elle est donc bornée sur $[0, A]$, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in [0, A], |f(x)| \leq \mu.$$

Posons $m = \min(-\mu, \ell - 1)$ et $M = max(\mu, \ell + 1)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in [0, A]$ ou $x \in [A, +\infty]$, et dans chaque cas

$$m \leq f(x) \leq M.$$

La fonction f est donc bornée sur $[0, +\infty[$.
Remarque. Rien ne prouve que f atteind ses bornes, pensez par exemple à la fonction $\arctan$.

Exercice 46 (26.7)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Solution 46 (26.7)

Étudions rapidement le cas $n = 2$. On a $f(x_1) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \leq f(x_2)$ et le théorème des valeurs intermédiaire permet de conclure.

Revenons au cas général. Notons $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et notons p et q les indices tels que

$$f(x_p) = \min \left\{ f(x_i) \mid i \in [\![1,n]\!] \right\} \quad \text{et} \quad f(x_q) = \max \left\{ f(x_i) \mid i \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Alors, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f(x_p) \leq f(x_k) \leq f(x_q)$.

$$f(x_p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_p) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_q) = f(x_q)$$

Ainsi λ est compris entre $f(x_p)$ et $f(x_q)$. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0,1]$ et $x_p, x_q \in [0,1]$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires:

$$\exists c \in [0,1], f(c) = \lambda.$$

Exercice 47 (26.7)

Quel est l'intervalle image par f de I avec $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = x \cos x$?

Solution 47 (26.7)

Nous allons montrer que $f(I) = \mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$f(2k\pi) = 2k\pi \quad \text{et} \quad f((2k+1)\pi) = -(2k+1)\pi$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$-2k\pi \leq y \leq 2k\pi.$$

On peut choisir par exemple $k = \lfloor |y|/2\pi \rfloor + 1$. Alors

$$f((2k+1)\pi) \leq y \leq f(2k\pi),$$

et puisque f est continue sur l'intervalle I, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Conclusion

On a montré

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y,$$

c'est-à-dire $f(I) = \mathbb{R}$.