Chapter 30 Convexité

Exercice 1 (30.2)

Montrer que la somme de deux fonctions convexes est une fonction convexe.

Solution 1 (30.2)

Exercice 2 (30.2)

Montrer que si la fonction g est convexe et la fonction f est convexe croissante, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Solution 2 (30.2)

Exercice 3 (30.2)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que la fonction f est convexe. Montrer que pour tout réel y, l'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \}$ est un intervalle.

2. Que dire de la réciproque?

Solution 3 (30.2)

Exercice 4 (30.2)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Solution 4 (30.2)

Exercice 5 (30.2)

Démontrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution 5 (30.2)

Exercice 6 (30.2)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que a et $a + 2h$ sont élément de I. Montrer que

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) \geq 0.$$

Solution 6 (30.2)

Exercice 7 (30.2)

Montrer

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \geq \sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

Solution 7 (30.2)

Exercice 8 (30.2) *(X MP)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+^\star$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est convexe si, et seulement si $h : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

Solution 8 (30.2)

Exercice 9 (30.2) *Condition suffisante de convexité (X MP)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Solution 9 (30.2)

Exercice 10 (30.2)

Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et c un point qui n'est pas une extrémité de I.
Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point c et que

$$f'_g(c) \leq f'_d(c).$$

En déduire que f est continue en tout point qui n'est pas une extrémité de I.

Solution 10 (30.2)

Exercice 11 (30.3)

Montrer que $f\ :]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(\ln(x))$ est concave.
En déduire
$$\forall (x,y)\in]1,+\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Solution 11 (30.3)

Exercice 12 (30.3)

Soient $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Solution 12 (30.3)

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$. En appliquant la définition aux point a^p et b^q, on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

L'inégalité voulue en découle car la fonction ln est strictement croissante.

Exercice 13 (30.3)

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs. On note A_n, G_n et H_n leurs moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques :

$$A_n = \frac{1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n\right), G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \text{ et } H_n = \frac{n}{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}.$$

1. Montrer que $G_n \leq A_n$.

2. Montrer que $H_n \leq G_n$ en se ramenant au cas précédent.

Solution 13 (30.3)

1. Si l'un des x_i est nul, le résultat est assuré. Sinon, posez $x_i = e^{y_i}$, et untilisez la convexité de l'exponentielle :

$$e^{(y_1 + \cdots + y_n)/n} \leq \left(e^{y_1} + \cdots + e^{y_n}\right)/n.$$

2. Il suffit de changer x_i en $1/x_i$.

Exercice 14 (30.3)

Vous êtes ingénieur chez Candia. Le boss à l'intuition que la forme des briques de lait n'est pas optimale du point de vue de la quantité de carton utilisée pour conditionner le lait. Il vous demande s'il existe un parallélépipède rectangle qui pour une contenance donnée, minimise la quantité de carton. Qu'en pensez-vous ?
(Une absence de réponse serait mal vue...)

Solution 14 (30.3)
Considèrons une brique de hauteur h, de largeur l et de profondeur p, alors son volume vaut $V = plh$ et sa surface $S = 2(pl + ph + lh)$. Mais, jeune ingénieur, vous avez encore en mémoire ces magnifiques inégalités de convexité qui vous permettent d'écrire que

$$\sqrt[3]{pl.ph.lh} \leq \frac{pl + ph + lh}{3} \quad \text{i.e.} \quad \sqrt[3]{V^2} \leq S/6.$$

La brique minimisant la quantité de carton est donc la brique cubique, qui s'avère difficile à ranger dans la porte du réfrigerateur, malheureusement pour les sapins scandinaves.

Exercice 15 (30.3)

Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + x^2\right)$.

Solution 15 (30.3)

Exercice 16 (30.3)

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \ln(1 + e^t)$ est convexe.
2. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)^{1/n}.$$

Solution 16 (30.3)

Exercice 17 (30.3) *Inégalité de Hölder*

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres positifs et p et q deux nombres supérieurs à 1, liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Démontrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^q \right)^{1/q}.$$

Solution 17 (30.3)

Exercice 18 (30.3) *Inégalité de Minkowski*

Soit $p \in]1, +\infty[$ et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(1 + x^{1/p}\right)^p$.

1. Montrer que la fonction f est concave.

2. En déduire que pour $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs et $t_1, \dots, t_n$ positifs de somme 1,

$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)^{1/p}\right)^p \geq \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^{1/p} + (t_i x_i)^{1/p}\right)^p.$$

3. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs, démontrer l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^p\right)^{1/p}.$$

4. *Application.* Soient n un entier ≥ 1 et et p et q deux nombres supérieurs à 1, liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Prouver que l'application qui à tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe le nombre réel positif

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p\right)^{1/p}$$

est un *norme* sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p \geq 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \left(\|x\|_p = 0 \implies x = 0\right)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$,
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

(b) Prouver que pour tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_p = \sup_{\substack{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n \\ \|y\|_q \leq 1}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(c) Établir enfin que pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Solution 18 (30.3)

Exercice 19 (30.3)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^6 + x^5 + x^2 - x + 1$. Montrer que f n'a pas de zéro sur $\mathbb{R}$.

Solution 19 (30.3)

Exercice 20 (30.3) *(X MP)*

Soit $a, b \geq 0$ tel que $a + b = 1$. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a

$$1 + x^a y^b \leq (1 + x)^a (1 + y)^b.$$

Solution 20 (30.3)

Exercice 21 (30.3) *(ENS)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *bistochastique*, c'est-à-dire telle que $a_{i,j} \geq 0$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de A soit égale à 1.
Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées positives. On pose $Y = AX$. Montrer

$$\prod_{i=1}^{n} y_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Solution 21 (30.3)

Exercice 22 (30.3) *Minimum d'une fonction convexe (ENS)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local, il s'agit d'un minimum global. Que peut-on dire de l'ensemble des points où ce minimum est atteint?
2. On suppose que f est dérivable et qu'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f admet en a un minimum global.
3. On suppose maintenant que f est deux fois dérivable et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'' \geq \alpha > 0$. Montrer que f possède un minimum unique.

   A-t-on encore ce résultat avec l'hypothèse $f'' > 0$?

Solution 22 (30.3)

Exercice 23 (30.3) *Étude asymptotique d'une fonction convexe (X MP)*

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\ell \leq 0$, alors f est décroissante.
3. Montrer que si ℓ est fini, alors $f(x) - \ell x$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution 23 (30.3)

Exercice 24 (30.3)

Soit $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$, continue et telle qu'existe en tout $x\in]a,b[$

$$Df(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Montrer

1. $Df\geq 0 \implies f$ convexe.

2. $Df=0 \implies f$ affine.

Solution 24 (30.3)

Désignons par E l'espace vectoriel des fonctions de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles qu'existe en tout point $x\in]a,b[$, $Df(x)$.

- Si $f,g\in E$, alors $D(f+g)=D(f)+D(g)$.
- Si f est $\mathscr{C}^2$, alors $f\in E$ et $Df=f''$.

  Lemme : Soit $k\in E$. On suppose $k(x)=k(y)=k(z)$ pour $x<y<z$. Alors il existe $\alpha\in]x,z[$ tel que $Dk(\alpha)\leq 0$.

  Démonstration : Il suffit de choisir $\alpha\in]x,z[$ avec $k(\alpha)=\sup_{x\leq t\leq z}k(t)$ (si le maximum est atteint en x, prendre $\alpha=y$).

  Soit maintenant $f\in E$ avec $Df\geq 0$. Soient $x<y<z$ dans $]a,b[$. Posons

$$P(u)=\frac{(u-x)(u-y)}{(z-x)(z-y)}f(z)+\frac{(u-x)(u-z)}{(y-x)(y-z)}f(y)+\frac{(u-y)(u-z)}{(x-y)(x-z)}f(x).$$

  $P\in E$, donc $k=f-P\in E$. On peut appliquer le lemme à k : il existe $\alpha\in]x,z[$ tel que

$$Dk(\alpha)=Df(\alpha)-P''(\alpha)\leq 0.$$

  En particulier, $P''(\alpha)\geq 0$, c'est-à-dire

$$\frac{2f(z)}{(z-x)(z-y)}+\frac{2f(y)}{(y-x)(y-z)}+\frac{2f(x)}{(x-y)(x-z)}\geq 0.$$

  D'où

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

  x,y,z étant arbitraires : f est convexe sur $]a,b[$.

  Si $Df=0$, f est à la fois convexe et concave, donc affine sur $]a,b[$.

Exercice 25 (30.3)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f dérivable et convexe sur I, à valeurs réelles. On suppose

$$\exists x_0 \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}\ell h^2 + o\left(h^2\right).$$

Montrer que f' est dérivable en x_0 (et $f''(x_0) = \ell$).

Solution 25 (30.3)

Quitte à remplacer $f(t)$ par $f(t) - f(x_0) - tf'(x_0)$, on peut supposer $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Soit $\theta \in]0,1[$ fixé. f étant convexe, on a pour $h > 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0+(1-\theta)h)}{\theta h} \leq f'(x_0+h) \leq \frac{f(x_0+(1+\theta)h) - f(x_0+h)}{\theta h}.$$

Divisant par h et faisant tendre h vers 0+, on obtient

$$\underbrace{\frac{\ell}{2}\frac{1-(1-\theta)^2}{\theta}}_{\ell\left(1-\frac{\theta}{2}\right)} \leq \liminf_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f'(x_0+h)}{h} \leq \limsup_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f'(x_0+h)}{h} \leq \underbrace{\frac{\ell}{2}\frac{(1+\theta)^2-1}{\theta}}_{\ell\left(1+\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Mais θ peut être pris arbitrairement petit, donc $\ell = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f'(x_0+h)}{h}$.

On raisonne de même pour $h \underset{<}{\to} 0$. Finalement, f' est dérivable en x_0.

L'hypothèse de convexité est indispensable, comme on le voit sur l'exemple $f(h) = h^2 \sin \frac{1}{h}$.