Chapter 37 Couple de variables aléatoires réelles

Exercice 1 (37.0)
Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple (X, Y).

2. Déterminer la loi de Y.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $cov(X, Y)$. Conclusion ?

Exercice 2 (37.0)
Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les variables aléatoires X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéro obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. En déduire les lois marginales de X et de Y. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

4. On pose $Z = Y - X$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Déterminer ensuite la loi de Z.

Exercice 3 (37.0)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les réels $p_{i,j}$ par $p_{i,j} = a \cdot i \cdot j$.

1. Déterminer a pour que la loi du coupe (X, Y) soit donnée par la distribution de probabilité $\left(p_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes?

3. En déduire $E(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.

4. On pose $Z = X + Y$. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 4 (37.0)
On a n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Calculer $P(X = Y)$.

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 5 (37.0)
On lance un dé cubique honnête, soit X le résultat obtenu. Si X est divisible par 3, on extrait en une fois 3 boules d'une urne U_1 contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. Sinon, on extrait en une fois X boules d'une urne U_2 contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.

Soit Y le nombre aléatoire de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

** **Exercice 6 (37.0)**
On admet la convention $\binom{n}{j} = 0$ si $j \notin [\![0, n]\!]$.

1. Soit n et m deux entiers naturels, et f la fonction polynôme définie pour tout réel x par

$$f(x) = (1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}.$$

(a) Développer $f(x)$ deux deux façons différentes, en utilisant la formule du binôme.

(b) En déduire que, pour tous entiers naturels n et m, on a

$$\forall k \in [\![0, n+m]\!], \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Vandermonde*.

2. Démontrer le théorème de stabilité de la somme de deux lois binomiales indépendantes, c'est-à-dire que, si X et Y sont deux variables *indépendantes* suivant respectivement une loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m, p).$$

Exercice 7 (37.0)
On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geq 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n premiers lancers.

1. Déterminer les lois de X_2 et de X_3, puis calculer leurs espérances.

2. Soit $n \geq 2$. Justifier que X_n prend ses valeurs dans $\{ 0, \dots, n-1 \}$.
Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.

3. Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{ 0, \dots, n \}$, montrer

$$P\left(X_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2}P\left(X_n = k\right) + \frac{1}{2}P\left(X_n = k-1\right).$$

4. On note, pour tout $n \geq 2$, $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = k\right) s^k.$$

(a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

(b) Montrer, pour tout $n \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$,

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2}Q_n(s).$$

(c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

5. Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

*** **Exercice 8 (37.0)** *Nombre de sommets isolés dans un graphe aléatoire (X-ENS)*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, on se donne un réel $p_n \in]0, 1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1, \dots, n$, tel que, si pour tout (i, j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, $X_{i,j}$ est la variable indicatrice de l'événement «$\{ i, j \}$ est une arête de Γ_n», alors les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n.

On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

1. Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $P(X > 0) \geq \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

2. On suppose que $\frac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. On suppose que $p_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que $P(Y_n > 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.