Chapitre 0

Notations

0.1 Votre premier exercice !

Vous allez le résoudre en quelques instants !... Il s'agit de déterminer les solutions de l'équation

$$(x^2 - 6)\ln x = x \ln x. \tag{E}$$

Il est important que vous ne poursuiviez pas la lecture de cette page sans avoir résolu l'équation (E). Cette résolution ne demande que quelques instants !... Faites-la par écrit.

C'est fait ?

- Si vous avez trouver $\boxed{-2 \text{ et } 3}$ pour solutions, c'est que vous calculer bien... Retournez à la case départ !!!
- À moins que vous n'ayiez trouvé trois solutions $\boxed{-2, 3 \text{ et } 1}$. C'est «mieux»... mais la punition est la même !!!
- Peut-être avez-vous trouvé la seule solution $\boxed{3}$. Vous pouvez recommencer !!!
- Enfin, si vous obtenez les deux solutions $\boxed{1 \text{ et } 3}$, votre résultat est exact. Mais avant d'alerter l'univers, demandez-vous si vous avez suivi votre intuition ou l'ordre logique de la résolution...

0.2 Un tout petit peu de logique

Nous referons le point sur la logique d'ici quelques semaines. En attendant, voici néanmoins quelques éléments de vocabulaire utile pour les premiers chapitres.

Le langage logique est utile pour écrire des énoncés mathématiques avec la plus grande précision possible.

Assertions

Une **assertion** est une affirmation, qui peut être vraie ou fausse. À toute assertion A, on associe sa **négation**, notée non A, qui est vraie si A est fausse, fausse si A est vraie. Par exemple «la suite (u_n) tend vers 0» est une assertion et «la suite (u_n) ne tend pas vers 0» est sa négation.

Une assertion vraie est un **énoncé**. Un **axiome** est un énoncé qu'on ne cherche pas à démontrer: les axiomes servent à fonder des théories mathématiques. Si un énoncé contient un mot nouveau, il sert de définition à ce mot. Les autres énoncés doivent être démontrés: ce sont les **théorèmes**.

Ensembles

Pour écrire la plupart des énoncés mathématiques, on a besoin d'introduire des **ensembles**. Nous ne chercherons pas à définir précisément ce qu'est un ensemble: on considère en général que c'est une notion «intuitive».

Un ensemble est une «collection» d'objets; ces objets sont appelés les **éléments** de E. L'assertion «x est un élément de E» est notée «$x \in E$», et peut être lue «x appartient à E». La négation de «$x \in E$» est notée «$x \notin E$». Lorsque E possède un nombre fini d'éléments a, b,…,s, on peut le décrire complètement en donnant la liste de ses éléments: il est alors noté $\{ a, b, \dots, s \}$; mais s'il est infini, on ne peut pas donner la liste complète de ses éléments:il en est ainsi pour les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,etc…

Prenons un ensemble F; lorsque tous les éléments d'un certain ensemble E sont aussi éléments de F, on dit que E est une partie de F, ou que E est **inclus** dans F; cette assertion est notée «$E \subset F$».

Deux ensembles E et F sont dits égaux ($E = F$) quand ils ont les mêmes éléments.

Prenons une assertion $A(x)$ où figure la **variable** x. Les éléments x de E tels que $A(x)$ est vraie forment une partie de E. Cette partie est notée

$$\{ x \in E \mid A(x) \} .$$

Par exemple, l'ensemble des nombres naturels paires est

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid \text{il existe un entier } k \text{ vérifiant } x = 2k \} .$$

Enfin, on définit l'ensemble vide, qui n'a pas d'éléments. Il est noté $\{ \ \}$, ou, plus souvent $\emptyset$.

Réunion, intersection

À partir de deux assertions A et B, on définit les assertions «A et B» et «A ou B». Démontrer l'énoncé «A et B» revient à démontrer les énoncés A et B. Démontrer l'énoncé «A ou B» revient à démontrer que l'un des deux au moins est vrai (mais les deux peuvent êtres vrais:on dit que le « ou » de la logique est inclusif).

Par exemple, prenons deux ensembles E et F. L'assertion «$E = F$» n'est autre que l'assertion «$(E \subset F)$ et $(F \subset E)$». D'ailleurs, pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on procède souvent ainsi: on montre que tous les éléments de E sont éléments de F, et que tous les éléments de F sont éléments de E. On dit qu'on a procédé par **double inclusion**.

Simultanément, si E et F sont des ensembles, on introduit deux nouveaux ensembles, **réunion** de E et F ($E \cup F$ qui se lit «E union F»), et **intersection** de E et F ($E \cap F$ qui se lit «E inter F»):

- $E \cup F$ est constitué des objets x vérifiant «$(x \in E)$ ou $(x \in F)$»,
- et $E \cap F$ est constitué des objets x vérifiant «$(x \in E)$ et $(x \in F)$»,

Quantificateurs

On introduit aussi les **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$, qui permettent de construire d'autres énoncés. L'énoncé «$\forall x \in E, A(x)$» veut dire que l'assertion $A(x)$ est vraie pour tous les éléments de E ($\forall$ se lit «quel que soit»). L'énoncé «$\exists x \in E, A(x)$» veut dire qu'il y a au moins un élément de E pour lequel $A(x)$ est vraie ($\exists$ se lit «il existe»).

D'après la définitions des quantificateurs $\exists$ et $\forall$, les énoncés «non $(\exists x \in E, A(x))$» et «$\forall x \in E,$ (non $A(x)$)» veulent dire la même chose, ainsi que les énoncés «non $(\forall x \in E, A(x))$» et «$\exists x \in E,$ (non $A(x)$)».

On utilise également le quantificateur $\exists!$ (qui se lit «il existe un et un seul»). «$\exists! x \in E, A(x)$» veut dire qu'il y a un, et un seul, élément de E pour lequel $A(x)$ est vraie.

Implication, équivalence

De même qu'à partir de A et B on peut définir les assertions «A et B» et «A ou B», on peut aussi définir les assertions «$A \implies B$» et «$A \iff B$».

- L'énoncé «$A \implies B$» (A **implique** B) veut dire que si l'assertion A est vraie, alors B est vraie aussi.

  En fait, «A implique B» est une autre façon d'écrire l'énoncé «(non A) ou B». Pour démontrer cet énoncé, on écarte donc le cas où A est faux, puis on traite le cas restant: on commence donc la preuve par «Supposons que A soit vraie», et il s'agit alors d'établir sous cette hypothèse l'énoncé B.

- L'énoncé «$A \iff B$» (A équivalente à B) veut dire que A et B sont vraies simultanément. Cet énoncé dit la même chose que «$(A \implies B)$ et $(B \implies A)$».

  Souvent, pour démontrer un tel énoncé, on démontre séparément les deux implication «$A \implies B$» et «$B \implies A$». En français, ce symbole est souvent traduit par si, et seulement si (et parfois abrégé en **ssi**).

0.3 Une princesse ou un tigre ?

Peut-être connaissez-vous déjà l'histoire de la princesse ou du tigre ? Un prisonnier doit choisir entre deux cellules dont l'une cache une princesse et l'autre un tigre. S'il choisit la princesse, il doit l'épouser, mais s'il tombe sur le tigre, il est dévoré.

En lisant cette histoire, le roi d'une contrée lointaine eut une idée. « C'est exactement ce qu'il me faut pour en finir avec les prisonniers», confia-t-il le lendemain à son premier ministre. «Mais je ne veux pas que leur choix soit uniquement dû au hasard, car ça ne serait pas drôle ; c'est pourquoi je vais afficher des inscriptions sur les portes des cellules. Ceux qui se montreront astucieux et qui auront l'esprit assez logique pour en tirer parti seront graciés et par dessus le marché je leur ferai cadeau de la princesse !»

«L'idée de sa majesté est excellente » approuva le premier ministre en s'inclinant.

Le premier jour le roi organisa trois épreuves. Comme il l'expliqua aux prisonniers, chacune des deux cellules contenait un tigre ou une princesse, et toutes les combinaisons étaient possibles ; il pouvait y avoir deux tigres, deux princesses, ou un tigre et une princesse.

§1 La première épreuve

«Qu'est-ce que je deviens s'il y a un tigre dans chaque cellule ? » demanda le prisonnier.

« Je préfère ne pas y penser », répondit le roi avec un soupir de compassion.

« Et s'il y a une princesse dans chaque cellule, qu'est-ce que vous me ferez ? » ajouta le prisonnier.

« Voilà qui serait surprenant, s'exclama le roi, mais si cela se produisait je vous devine assez grand pour trouver ce qu'il faut faire ! »

« S'il y a une princesse dans une cellule et un tigre dans l'autre, qu'est-ce qui m'arrivera ? » poursuivit le prisonnier.

« Tout dépend de la porte que vous aurez choisie » fit rapidement le roi qui commençait à s'impatienter.

« Mais comment choisir ? » insista le malheureux prisonnier.

Pour tout réponse le roi l'entraîna voir les deux cellules et lui montra les affiches qu'il avait lui-même collées sur les portes.

1. Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.

2. Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule.

«Dois-je faire confiance à ce qui est écrit ? » questionna encore le prisonnier.

«Une des affiche dit la vérité, promit le roi, et l'autre ment.»

À la place du prisonnier, quelle cellule auriez-vous choisie ? (En admettant bien sûr, que vos goûts vous font préférer la princesse à un tigre).

§2 La seconde épreuve

Le prisonnier fit le bon choix, il eut la vie sauve et partit filer le parfait amour avec la princesse. Le roi changea les affiches, fit vider les cellules, les fit remplir à nouveau, et demanda qu'on lui amène un nouveau prisonnier. On pouvait lire sur les portes :

1. Une au moins des deux cellules contient une princesse.

2. Il y a un tigre dans l'autre cellule.

« Dois-je croire ces affiches ? » murmura le prisonnier en tremblant.

« Elles sont sincères toutes les deux, ou bien elles sont fausses toutes les deux », affirma le roi.

Où devait aller le prisonnier ?

§3 La troisième épreuve

Pour cette épreuve, encore une fois les affiches disaient toutes les deux la vérité ou bien mentaient toutes les deux.

1. Il y a un tigre dans cette cellule ou il y a une princesse dans l'autre.

2. Il y a une princesse dans l'autre cellule.

Que contenait la première cellule ? Et la seconde ?