Chapter 35 Espace probabilisé fini

Exercice 1 (35.2)

Pour chacune des expériences qui suit, proposer un espace probabilisé (Ω, P) permettant de l'étudier.

1. On tire successivement et sans remise six boules dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 49.
2. On lance deux dés équilibrés.
3. Dix individus prennent place sur dix chaises réparties autour d'une table.
4. On lance une pièce équilibrée. Si celle-ci tombe du côté pile, on tire une boule dans une urne contenant une boule blanche et deux boules rouges. Sinon, on tire une boule dans une urne contant trois boules blanches et une boule rouge.

Solution 1 (35.2)

Exercice 2 (35.2)

Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$ telle que la probabilité de l'événement $\{ k \}$ soit proportionnelle à k.

Solution 2 (35.2)

Exercice 3 (35.2)

Déterminer une probabilité sur l'univers $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$ telle que la probabilité de l'événement $\{ 1, 2, \dots, k \}$ soit proportionnelle à k^2.

Solution 3 (35.2)

Exercice 4 (35.2)

Une urne contient une boule bleue, une boule blanche, une boule rouge et deux boules vertes. Quelles est la probabilité d'obtenir en tirant successivement trois boules de l'urne:

1. Les boules bleue, blanche et rouge dans cet ordre?
2. Les boules bleue, blanche et rouge dans un ordre quelconque?

Solution 4 (35.2)

Considérons ici comme univers Ω l'ensemble des arrangements des cinq boules 3 à 3; $\operatorname{card}\Omega = 5!/(5-3)! = 60$.

1. Il n'existe qu'un seul arrangement «bleue, blanche, rouge», d'où

$$\operatorname{card} A = 1 \qquad \text{et} \qquad P(A) = \frac{1}{60}.$$

2. Si B est l'ensemble des arrangements des trois boules bleue, blanche, rouge, 3 à 3, il vient

$$\operatorname{card} B = 3! = 6 \qquad \text{et} \qquad P(A) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Remarque. On a fait, bien sûr, l'hypothèse d'équiprobabilité de chaque boule pour un tirage, et donc de chaque arrangement de trois boules, pour un tirage de trois boules successivement.

Exercice 5 (35.2)

Dans un sac, on a placé trois pièces de 1 euro et quatre pièces de 2 euros. Une personne extrait de ce sac trois pièces simultanément. En admettant que chaque sous-ensemble de trois pièces à même probabilité d'être extrait, calculer les probabilités des événements suivants:

1. Les trois pièces sont des pièces de 2 euros.
2. Il y a au moins une pièce de 2 euros parmi les trois pièces extraites.

Solution 5 (35.2)

Ω est ici l'ensemble des 3-combinaisons des sept pièces que contient le sac, $\operatorname{card}\Omega = \binom{7}{3} = 35$.

1. L'événement A considéré est l'ensemble des 3-combinaisons des quatre pièces de 2 euros. D'où

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}.$$

2. Pour calculer le cardinal de B deux méthodes sont possibles

$$\operatorname{card} B = \binom{4}{1}\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}$$

(respectivement, exactement une pièce, deux pièces et trois pièces de 2 euros). Ou

$$\operatorname{card} \bar{B} = \binom{3}{3} = 1 \quad \text{(0 pièce de 2 euros).}$$

D'où

$$\operatorname{card} B = 34 \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{34}{35}.$$

Exercice 6 (35.2)

Soit le système d'équations numériques réelles, d'inconnue $(x; y)$, dans lequel a, b, c désignent trois paramètres réels.

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ ax - by &= c. \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c on lance, trois fois, un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6: le premier numéro sorti donne a, le second b et le troisième c.

1. Quelles sont les probabilités p_0, p_1 et p_2 pour que le système ainsi obtenu ait respectivement: une infinité de solutions; aucune solution; une solution unique $(x_0; y_0)$?

2. Quelle est la probabilité p_3 pour que le système admette la solution unique $(3; 0)$?

Solution 6 (35.2)

Prenons pour Ω l'ensemble $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}^3$.

1. Le système admet une infinité de solutions si, et seulement si,

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}.$$

Il n'admet aucune solution si, et seulement si, $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} \neq \frac{c}{3}$.

Il admet une solution unique si, et seulement si, $\frac{a}{1} \neq b2$. On a donc

$$\begin{aligned} A_0 &= \{ (1, 2, 3); (2, 4, 6) \} \\ A_1 &= \{ (1, 2, c \neq 3) \} \cup \{ (2, 4, c \neq 6) \} \cup \{ 3, 6, c \} \\ A_2 &= \overline{A_0 \cup A_1}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\operatorname{card} \Omega = 6^3 = 216; \qquad \operatorname{card} A_0 = 2; \qquad \operatorname{card} A_B = 16;$$

et

$$p_0 = \frac{1}{108} \qquad p_1 = \frac{8}{108} \qquad p_2 = 1 - (p_0 + p_1) = \frac{99}{108}.$$

2. Le sytème admet la solution unique $(3, 0)$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 2a \neq b & \text{(solution unique)} \\ c = 3a & \text{((3, 0) est solution).} \end{cases}$$

A_3 est donc l'ensemble des triplets $(a, b \neq 2a, 3a)$; on a donc $(1, b \neq 2, 3)$ ou $(2, b \neq 4, 6)$ d'où

$$\operatorname{card} A_3 = 10 \quad \text{et} \quad p_3 = \frac{5}{108}.$$

Exercice 7 (35.2)

Dans un supermarché se trouvent 150 packs de lait dont 50 avariés. Les acheteurs prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée.
Voulez-vous être le 1er, 2-ième,..., le 150-ième acheteur ?

Solution 7 (35.2)

Numérotons les packs de 1 à 150, les packs numérotés de 1 à 50 étant avariés.

Une distribution de 150 packs est décrite par une permutation de l'ensemble $E = [\![1, 150]\!]$ (à la k-ème place figure le numéro du pack emporté par le k-ème acheteur).

Soit A_k l'évenement:«le k-ème acheteur emporte un pack avarié».

Toute les permutations de E sont équiplobables donc

$$P(A_k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

et il y a 150! cas possibles.

Il y a 50 façons de choisir le numéro du pack avarié mis à la k-ème place puis, pour chacune d'elles, 149! façons de répartir les 149 autres packs, d'où

$$P(A_k) = \frac{50 \times 149!}{150!} = \frac{1}{3}$$

et cela pour tout $k \in [\![1, 150]\!]$. Le range de l'acheteur est donc indiffèrent!

Exercice 8 (35.2)

Un joueur de poker reçoit une «main» de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker).
Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. une seule paire ?

2. deux paires ?

3. un brelan ?

4. un carrée ?

5. un full ?

Solution 8 (35.2)

Une «main» est une combinaison de 5 cartes prises parmi 32.

Toute ces combinaisons sont équiprobables; donc pour tout événement $P(A)$ est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles et il y a $\binom{32}{5}$ cas possibles.

1. Soit A_1 l'événement «obtenir une seule paire». Il y a 8 façons de choisir la hauteur de la paire puis, pour chacune d'elles, $\binom{4}{2}$ façons de choisir une paire de cette hauteur puis $\binom{7}{3}$ façons de choisir une combinaison de 3 hauteurs parmi les 7 restantes puis 4^3 façons de choisir une carte de chacune de ces 3 hauteurs. Donc
$$P(A_1) = \frac{8 \times \binom{4}{2} \times \binom{7}{3} \times 4^3}{\binom{32}{5}} = \frac{480}{899} \approx 0.534.$$

2. Pour la suite, revoir le chapitre dénombrement... On trouve
$$P(A_2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{2}^2 24}{\binom{32}{5}} = \frac{108}{899} \approx 0.120.$$

3.
$$P(A_3) = \frac{8\binom{4}{3}\binom{7}{2}4^2}{\binom{32}{5}} = \frac{48}{899} \approx 0.53.$$

4.
$$P(A_4) = \frac{8 \times 28}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{899} \approx 0.001.$$

5.
$$P(A_5) = \frac{8\binom{4}{3}7\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{6}{899} \approx 0.007.$$

Exercice 9 (35.2)

Quatre hommes déposent leur chapeau au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 des 4 chapeaux.

1. Calculer la probabilités qu'aucun des 4 hommes ne prenne son propre chapeau.

2. Calculer la probabilités qu'exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau.

Solution 9 (35.2)

Exercice 10 (35.2)

Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point. Quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque un.
Pour qui parieriez-vous?

Solution 10 (35.2)

Exercice 11 (35.3)

La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0.05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0.96 ;
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0.98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?

2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Solution 11 (35.3)
Soit A l'événement «la pièce est acceptée par le contrôle» et B l'événement «la pièce est bonne». L'énoncé donne

$$P(\bar{B}) = 0.05, \quad P_B(A) = 0.96, \quad P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 0.98.$$

1. Soit E l'événement «il y a une erreur de contrôle».

$$P(E) = P\left((B \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap A)\right) = P(B \cap \bar{A}) + P(\bar{B} \cap A)$$

car les événements $(B \cap \bar{A})$ et $(\bar{B} \cap A)$ sont disjoints. Donc

$$P(E) = P(B)P_B(\bar{A}) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A).$$

Or $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A) = 0.04$ et $P_{\bar{B}}(A) = 1 - P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 0.02$ et $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0.95$. D'où

$$P(E) = 0.95 \times 0.04 + 0.05 \times 0.02 = 0.039.$$

2. On applique la formule de Bayes pour le système complet d'événements de probabilités non nulles $(B, \bar{B})$,

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)}{P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)} = \frac{0.05 \times 0.02}{0.95 \times 0.96 + 0.05 \times 0.02} = \frac{1}{913} \approx 0.039.$$

Exercice 12 (35.3)

Vl'a ti pâs qu'en pâssant par l'plant[a] du Pé Mathieu eun vôleu i a chapardeu trois pommes de saignette qu'i mit dans sa pouchette, é pi quatre coquerelles et côr sept ambrettes. En r'venant il a croiseu su son ch'min la fille de son vésin et i y'offrit trois pommes au hasard.

1. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu eune pomme de châque sorte.
2. Calculeu la probabiliteu pour qu'il i ait donneu trois pommes pareuilles.
3. Et au cas où les trois pommes é seraieunt de la même sorte, calculeu la probabiliteu pour qu'e seient des pommes de saignette.

[a] l'vergeu

Solution 12 (35.3)

L'ensemble Ω des éventualités est l'ensemble des combinaisons de 3 pommes prises parmi 14. Il y a donc $\binom{14}{3} = 364$ éventualités. Les pommes sont prises au hasard, il y a donc équiprobabilité.

1. Soit A l'événement «il donne une pomme de chaque sorte»,

$$\text{card}(A) = 3 \times 4 \times 7 = 84 \qquad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{13}.$$

2. Soit B l'événement «il donne 3 pommes de la même espèce»,

$$\text{card}(B) = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{7}{3} = 40 \qquad P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{91}.$$

3. Soit C l'événement «il donne 3 pommes de saignette»,

$$\text{card}(C) = \binom{3}{3} = 1 \qquad P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{364},$$

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(C)}{P(B)} = 0{,}025.$$

Exercice 13 (35.3)

Une urne contient cinq boules rouges et une boule noire. Déterminer la probabilité qu'il faille retirer successivement trois boules, sans remise dans l'urne, pour extraire la boule noire.

Solution 13 (35.3)
Appelons

- A l'événement: «La première boule tirée est rouge».
- B l'événement: «La deuxième boule tirée est rouge».
- C l'événement: «La troisième boule tirée est noire».

Alors

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P_A(B).P_{A\cap B}(C) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 14 (35.3)

Every afternoon at five o'clock, Charles is having tea at his mother's. In order to start the conversation, he keeps saying either "I think it's raining" or "I think it isn't raining". He is mistaken once out of three when it is raining, and once out of two when it is not raining. And it is raining nine times out of ten.
This afternoon, just after Big Ben rang five, he said: "I think it's raining."
Calculate the probability it is actually raining.

Solution 14 (35.3)

Notons A l'événement «il pleut» et B l'événement «il annonce qu'il pleut». L'événement A a pour probabilité $P(A) = \frac{9}{10}$.

Quand il pleut, il dit la vérité en annoçant qu'il pleut: $P_A(B) = 2/3$. Quand il ne pleut pas, il se trompe en annoçant qu'il pleut: $P_{\bar{A}}(B) = 1/2$.

Avec la formule des probabilités totales, nous obtenons

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = \frac{9}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{20}.$$

La probabilité pour qu'il pleuve effectivement sachant qu'il annoce «je crois qu'il pleut est

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{12}{13}.$$

Exercice 15 (35.3)

> Jack possède une commode Louis XV en noyer à trois tiroirs. Dans le premier tiroir, il y a 30 chaussettes roses et 20 chaussettes vertes. Les deux autres tiroirs contiennent, l'un quatre chaussettes roses (il ne sait pas lequel), l'autre quatre chaussettes vertes (il ignore évidemment de quel tiroir il s'agit). Dans l'obscurité, il prend, au hasard, une chaussette du premier tiroir, puis la place dans un des deux autres tiroirs. Il prend ensuite dans celui-ci une chaussette au hasard et allume la lumière. Elle est rose.
> Calculer la probabilité pour que le dernier tiroir ouvert contienne plusieurs chaussettes roses.

Solution 15 (35.3)

Pour que le dernier tiroir ouvert contienne plusieurs chaussettes roses, il faut que ce soit celui qui en contenait quatre. Considérons les événements suivants

- A «la première chaussette est rose»,
- R «le deuxième tiroir contenait les quatre chaussettes roses»,
- B «la deuxième chaussette est rose».

On utilise la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements ($R \cap A$, $\bar{R} \cap A$, $R \cap \bar{A}$, $\bar{R} \cap \bar{A}$) (de probabilités non nulles):

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P_A(R)P_{R\cap A}(B) + P(A)P_A(\bar{R})P_{\bar{R}\cap A}(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(R)P_{R\cap\bar{A}}(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(\bar{R})P_{\bar{R}\cap\bar{A}}(B) \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}0 = \frac{23}{50}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la probabilité conditionnelle

$$P_B(R) = \frac{P(B \cap R)}{P(B)} = \frac{23}{26}.$$

Exercice 16 (35.3)

On considère trois urnes :

- U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.
- U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.
- U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et les met dans U_3. On tire une boule de U_3, elle est noire.
Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Solution 16 (35.3)
Notons R_i (respectivement N_i) l'événement : «le tirage dans la i-ème urne donne une boule rouge » (resp. noire).

L'énoncé donne : $P(R_1) = \frac{3}{5}$, $P(R_2) = \frac{4}{5}$, $P(N_1) = \frac{2}{5}$, $P(N_2) = \frac{1}{5}$. On cherche

$$P\left(R_1|N_3\right) = \frac{P\left(R_1 \cap N_3\right)}{P\left(N_3\right)}.$$

(N_2, R_2) est un système complet d'évennement donc

$$R_1 \cap N_3 = \left(R_1 \cap N_2 \cap N_3\right) \cup \left(R_1 \cap R_2 \cap N_3\right)$$

et cette union est disjointe, d'où

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap N_3) &= P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= P(R_1)P(N_2|R_1)P(N_3|R_1 \cap N_2) + P(R_1)P(R_2|R_1))P(N_3|R_1 \cap R_2), \end{aligned}$$

car $P(R_1 \cap N_2) > 0$ et $P(R_1 \cap R_2) > 0$ (formule des probabilités composées). Or R_1 et N_2 sont indépendants, ainsi que R_1 et R_2, d'où

$$P(N_2|R_1) = P(N_2) = \frac{1}{5} \qquad\qquad P(R_2|R_1) = P(R_2) = \frac{4}{5}.$$

Finalement,

$$P(R_1 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{3 \times 4^2}{5^2 \times 9}.$$

Un calcul similaire donne

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_3) &= P(N_1)P(N_2|N_1)P(N_3|N_1 \cap N_2) + P(N_1)P(R_2|N_1))P(N_3|N_1 \cap R_2), \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{2 \times 21}{5^2 \times 9} \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\boxed{P\left(R_1|N_3\right) = \frac{3 \times 4^2}{3 \times 4^2 + 2 \times 21} = \frac{8}{15}.}$$

Exercice 17 (35.3)

Le sultan dit à Ali Baba: «Voici 2 urnes, 4 boules blanches et 4 boules noires. Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche.»

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 boules noires dans la deuxième?
2. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place dans chaque urne 2 boules blanches et 2 boules noires?
3. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 3 boules blanches dans la première urne et les autres boules dans la deuxième?
4. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances?

Solution 17 (35.3)

Exercice 18 (35.3) *La chaîne des menteurs*

On suppose qu'un message binaire (0 ou 1) est transmis depuis un émetteur M_0 à travers une chaîne M_1, M_2, M_3,... de messagers menteurs, qui transmettent correctement le message avec une probabilité p, mais qui changent sa valeur avec la probabilité $1 - p$.
Si l'on note a_n la probabilité que l'information transmise par M_n soit identique à celle envoyée par M_0 (avec comme convention que $a_0 = 1$), déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, puis une expression explicite de a_n en fonction de n, ainsi que la valeur limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.
Le résultat est-il conforme à ce à quoi l'on pouvait s'attendre ?

Solution 18 (35.3)

En notant A_n l'événement « l'information transmise par M_n est identique à celle envoyée par M_0, la formule des probabilités totales donne

$$a_{n+1} = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(A_n^c)P(A_{n+1}|A_n^c) = a_n p + (1 - a_n)(1 - p) = (2p - 1)a_n + (1 - p).$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique de point fixe $\ell = \frac{1}{2}$: pour tout entier n, on a donc $(a_{n+1} - \ell) = (2p - 1)(a_n - \ell)$. d'où

$$a_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

Bien entendu, $\lim a_n = \frac{1}{2}$: après un grand nombre de transmissions hasardeuses, on a perdu toute information !

Exercice 19 (35.4)

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements

- A : «on obtient le tirage 2, 4, ou 6»,
- B : «on obtient le tirage 3 ou 6».

Solution 19 (35.4)

Exercice 20 (35.4)

Soit A et B deux événements indépendants pour une probabilité P.

1. Vérifier que les événements A et B^c, puis A^c et B, enfin A^c et B^c sont indépendants.
2. Donner une exemple où A et B sont indépendants pour une probabilité P et ne le sont pas pour une probabilité Q.

Solution 20 (35.4)

1. On a le système complet d'événement $(B, \bar{B})$ donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, d'où

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A).P(\bar{B}).$$

   Les autres assertions se démontrent de façon analogue.

2. Dans un ensemble $\Omega = \{ a, b \}$ de cardinal 2, prenons $A = \{ a \}$ et $B = \{ b \}$. Les deux applications P et Q telles que $Q(A) = Q(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A) = 1, P(B) = 0$ permettent de définir deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On vérifie immédiatement que les deux événements A et B sont indépendants pour P et ne le sont pas pour Q.

Exercice 21 (35.4)

> Les jours de grève, la météo nationale assure un service minimum avec deux grenouilles aux comportements indépendants, quel que soit le temps. En mai, il pleut en moyenne deux jours sur cinq. Quand il va pleuvoir, chaque grenouille annonce la pluie huit fois sur dix et elles annoncent simultanément le beau temps une fois sur vingt-cinq. Quand il va faire beau, chacune annonce le beau temps neuf fois sur dix. Le 13 mai, jour de grève, elle annoncent toutes les deux qu'il va faire beau.
> Calculer la probabilité pour qu'il pleuve.

Solution 21 (35.4)

Notons A l'événement «il va pleuvoir», B_1 l'événement «la première grenouille annoce qu'il va faire beau» et B_2 l'événement «la deuxième grenouille annoce qu'il va faire beau».

L'événement A a pour probabilité $P(A) = \frac{2}{5}$.

Quand il va pleuvoir, les grenouilles annoncent le beau temps quand elles se trompent:

$$P_A(B_1) = P_A(B_2) = \frac{2}{10} \quad \text{et} \quad P_A(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{25}.$$

Quand il va faire beau, elle annoncent le beau temps neuf fois sur dix

$$P_{\bar{A}}(B_1) = P_{\bar{A}}(B_2) = \frac{9}{10}.$$

La formule des probabilité totale nous donne

$$P(B_1) = P(A)P_A(B_1) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{31}{50}.$$

Le même calcul donne $P(B_2) = \frac{31}{50}$.

Nous devons calculer $P_{B_1 \cap B_2}(A) = \frac{P(A \cap (B_1 \cap B_2))}{P(B_1 \cap B_2)}$.

$$P\left(A \cap (B_1 \cap B_2)\right) = P(A)P_A(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{25} = \frac{2}{125}.$$

Comme les comportements des grenouilles sont indépendants, les événements B_1 et B_2 sont indépendants:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{961}{2500}.$$

Nous avons ainsi

$$P_{B_1 \cap B_2}(A) = \frac{P(A \cap (B_1 \cap B_2))}{P(B_1 \cap B_2)} = \frac{40}{961}.$$

Exercice 22 (35.4)

Em ersten Tag des Oktoberfestes hat der Franzl - wie es sich schickt - seine Lederhose an. Diese wird vorsichtshalber durch Gürtel und Hosenträger befestigt. Bei jedem Band des Hosenträgers stehen die Chancen, daß es zerreißen könnte, eins zu fünf, beim Gürtel eins zu fünfzehn.

1. Berechnen Sie die Whscheinlichkeit, daß an diesem Tage seine Lederhose hinunterfällt.
2. Man geht davon aus, daß er seine Hose anbehalten hat. Berechnen Sie also die Wahrscheinlichkeit, daß der Gürtel hätte platzen können.

(Die Haltbarkeit jedes Bandes und die Haltbrkeit des Gürtels sind nicht verbunden.)

Solution 22 (35.4)

Soit A l'événement «la ceinture cède», B_1 et B_2 les événements respectifs «la bretelle droite lâche» et «la bretelle gauche lâche» et C l'événement «la culotte tombe». Les bretelles et la ceinture ayant des résistances indépendantes, A, B_1 et B_2 sont indépendants, ainsi que A, B_1^c et B_2^c.

1. On a

$$P(A) = \frac{1}{15} \qquad P(B_1) = \frac{1}{5} \qquad P(B_2) = \frac{1}{5} \qquad P(C) = P(A \cap B_1 \cap B_2).$$

Les événements A, B_1 et B_2 étant indépendants,

$$P(C) = P(A)P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{375}.$$

2. On a

$$P_{C^c}(A) = \frac{P(A \cap C^c)}{P(C^c)} \qquad P(C^c) = 1 - P(C) = \frac{374}{375}.$$

$A \cap C^c$ est égal à

$$A \cap (B_1^c \cup B_2^c) = (A \cap B_1^c) \cup (A \cap B_2^c)$$

Les événement A, B_1^c et B_2^c sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} P\left((A \cap B_1^c) \cup (A \cap B_2^c)\right) &= P(A \cap B_1^c) + P(A \cap B_2^c) - P(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\ &= P(A)P(B_1^c) + P(A)P(B_2^c) - P(A)P(B_1^c)P(B_2^c) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{15} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{15} = \frac{8}{125}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$P_{C^c}(A) = \frac{P(A \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{12}{187}.$$

Exercice 23 (35.4) *Tirages dans des urnes de façon aléatoire*

On considère deux urnes A et B dont chacune contient des boules noires et des boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne A et a (avec $0 < a < 1$) et la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne B et b (avec $0 < b < 1$).
On effectue N tirage successifs, avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient, et ceci de la façon suivante.

- Pour le premier tirage, on choisit l'une des deux urnes au hasard et on tire une boule de cette urne.
- Si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne; et si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- On continue suivant la même règle jusqu'au N-ième tirage.

Pour tout entier n de $[\![1, n]\!]$, on définit

- A_n : «le n-ième tirage est effectué dans l'urne A» et $q_n = P(A_n)$.
- B_n : «la n-ième boule tirée est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer q_1, p_1, q_2, p_2.

2. Pour tout n de $[\![2, N]\!]$, déterminer une relation entre q_n et q_{n-1}. En déduire une expression de q_n en fonction de a, b et n.

3. Pour tout n de $[\![1, N]\!]$, déterminer une relation entre p_n et q_n. En déduire une expression de p_n en fonction de a, b et n.

Solution 23 (35.4)

Exercice 24 (35.4)

Chou le chaton a trois passions dans la vie : manger, dormir et jouer. On peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5 minutes.

- Après 5 minutes de repas, il continue de manger les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sinon il se met à jouer.
- Après 5 minutes de sieste, il continue de dormir les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{3}{4}$ et sinon il a faim au réveil et va manger.
- Après 5 minutes de jeu, soit il est en appétit et mange les 5 minutes suivantes avec probabilité $\frac{1}{4}$, soit il est fatigué et s'endort.

Un matin, Chou se lève et passe ses 5 premières minutes à petit-déjeuner. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note m_n la probabilité qu'il mange entre les minutes $5n$ et $5n+5$, d_n la probabilité qu'il dorme et j_n la probabilité qu'il joue. Enfin, on pose $C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle $C_{n+1} = MC_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $4M^3 - 5M^2$, puis en déduire un polynôme annulateur P de M.
3. En déduire les puissance de M.
4. En déduire les limites de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que dire de la journée de Chou?

Solution 24 (35.4)

Exercice 25 (35.4) *Trois face d'affilée*

On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur pile est p et la probabilité qu'elle tombe sur face est $q = 1 - p$. On considère une succession de lancers de cette pièce. Pour tout entier $n \geq 1$, on nomme B_n l'événement «aucune séquence de face de longueur 3 n'apparaît dans la suite des n premiers lancers» et on note b_n la probabilité de B_n.
Calculer b_1, b_2, b_3. Montrer

$$\forall n \geq 4, b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3}.$$

Solution 25 (35.4)