Chapter 33 Sommes et projecteurs

* **Exercice 1 (33.0)**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux sous-espaces vectoriels de E, C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B.

Montrer $A + B = A \oplus C$.

** **Exercice 2 (33.0)**
Soient E un espace vectoriel et A, B, C trois sous-espace vectoriel tels que

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap C && (1) \\ A + B &= A + C && (2) \\ B &\subset C. && (3) \end{aligned}$$

Montrer que $B = C$.

Exercice 3 (33.0)
Soit $u, w \in \mathbb{R}^2$ les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la définition de somme directe, montrer que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}\{\, u \,\} \oplus \operatorname{Vect}\{\, w \,\}$.

Exercice 4 (33.0)
Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x - y + z = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \{\, (t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Exercice 5 (33.0)
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \{\, P \in E \mid P(0) = P(1) = 0 \,\} \qquad F_2 = \mathbb{R}_1[X]$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.

* **Exercice 6 (33.0)**
Soient $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $V = \{\, f \in E \mid f(2) = f(3) \,\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $W = \operatorname{Vect}\left\{ \operatorname{Id}_{\mathbb{R}} \right\}$ est un supplémentaire de V dans E.

** **Exercice 7 (33.0)**
Dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est réduite à la fonction nulle.
3. Montrer que toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. En déduire $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8 (33.0)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y - z + 2t = 0 \right\} \qquad G = \operatorname{Vect}(e) \text{ où } e = (1, 1, 1, 1).$$

- Montrer que F et G sont supplémentaires.
- Soit p la projection sur F parallèlement à G, déterminer $p(u)$ pour tout u de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 (33.0)
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \operatorname{Vect}\{ (1, 0, 0), (1, 1, 1) \} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \operatorname{Vect}\{ (1, 2, 0) \}.$$

Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

** **Exercice 10 (33.0)**
Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $u \in \mathbf{L}(E, F)$ et $v \in \mathbf{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$ et que $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.
2. Montrer que $v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \ker v$.
3. Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker u \iff \ker v \cap \operatorname{Im} u = \{ 0 \}$.
4. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v \iff \ker v + \operatorname{Im} u = F$.

** **Exercice 11 (33.0)**
Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E, P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

1. Montrer que $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
2. Montrer que si P divise Q, alors
$$\ker P(f) \subset \ker Q(f) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f).$$
3. Montrer que si D est le PGCD de P et Q, alors
$$\ker D(f) = \ker P(f) \cap \ker P(f) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} D(f) = \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f).$$

** **Exercice 12 (33.0)**
On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles,

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f = 0, f(0) = 0, f'(1) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}\left(e_0, e_1, e_2\right) \text{ avec } e_k : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

* **Exercice 13 (33.0)**
Soit

$$p : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right) \end{array}.$$

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de p.

3. Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p$ suivant la direction $\ker p$.

** **Exercice 14 (33.0)**
Soit dans $E = \mathbb{R}^3$ un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

Montrer que l'application ϕ qui à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur

$$x - (x_1 + x_2 + x_3)v$$

est un projecteur.

Préciser son image et son noyau.

** **Exercice 15 (33.0)**
Soit $n \geq 2$ et soit $s : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P''(0)X^2 - 2P(0) \end{array}$.

1. Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que s est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

* **Exercice 16 (33.0)**
Soit p un projecteur de E.
Montrer que si le scalaire λ est distinct de 0 et 1, alors $p - \lambda \operatorname{Id}_E$ est un automorphisme, et expliciter son inverse.

Exercice 17 (33.0)
Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Dans ce cas, montrer

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

** **Exercice 18 (33.0)**
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On pose $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = f\left(\ker f^2\right)$.

2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{ 0 \}$.

3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si et seulement si $\operatorname{Im} f + \ker f = E$.

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau et l'image de f soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 19 (33.0)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbf{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \subset \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$.
2. Montrer que $E = \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.
3. En déduire que $E = \ker\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$.

Exercice 20 (33.0)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathbf{L}(E)$. On suppose que

$$f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0 \qquad\qquad (\text{ici } f^2 = f \circ f).$$

Montrer

$$\ker\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right) = E.$$

*** **Exercice 21 (33.0)**
Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $u \in \mathbf{L}(E)$.

1. Montrer que $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\left(\mathrm{Im}\, u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subset \ker u^{k+1} \text{ et } \mathrm{Im}\, u^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, u^k.$$

2. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\ker u^d = \ker u^{d+1}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \ker u^{k+1} = \ker u^k.$$

3. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a

$$\ker u^p = \ker u^{p+1} \iff \ker u^p \cap \mathrm{Im}\, u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$

4. On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que $\mathrm{Im}\, u^d = \mathrm{Im}\, u^{d+1}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq d \implies \mathrm{Im}\, u^{k+1} = \mathrm{Im}\, u^k.$$

5. Démontrer que, p étant un entier strictement positif, on a

$$\mathrm{Im}\, u^p = \mathrm{Im}\, u^{p+1} \iff E = \ker u^p + \mathrm{Im}\, u^p = \left\{ 0_E \right\}.$$

6. On suppose les deux suites $\left(\ker u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\, u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ stationnaires. Soit p le plus petit entier strictement positif tel que $\ker u^p = \ker u^{p+1}$. Soit q le plus petit entier strictement positif tel que $\mathrm{Im}\, u^q = \mathrm{Im}\, u^{q+1}$.

   Montrer que dans ces condition l'on a $p = q$ et

$$E = \ker u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p.$$

***

Exercice 22 (33.0) *X MP*
Soit E un espace vectoriel.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$: $E = S \oplus \operatorname{Im} u$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in S^2$ tel que $x = y + u(z)$. On pose $z = v(x)$ et $y = w(x)$.
   (b) Montrer que v est linéaire et calculer $u \circ v + v \circ u$.
   (c) Montrer que w est linéaire et calculer $u \circ w + w \circ u$.
2. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe v dans $\mathbf{L}(E)$ tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$. A-t-on nécessairement $\ker u = \operatorname{Im} u$?
3. Soit $u \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. On suppose qu'il existe $w \in \mathbf{L}(E)$ tel que $u \circ w + w \circ u = u$. A-t-on nécessairement $\ker u = \operatorname{Im} u$?

**

Exercice 23 (33.0)
Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{ f \in E \mid f(1) = f(2) = 0 \}.$$

1. Soit
$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & f & \mapsto & (f(1), f(2)) \end{array}.$$
Montrer que $\phi \in \mathbf{L}(E, \mathbb{R}^2)$. Comment interpréter F ? ϕ est-elle surjective ?
2. Trouver un sous-espace vectoriel G de E sur lequel ϕ induit un isomorphisme entre G et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24 (33.0)
Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et F, G deux sous-espace vectoriel de E. On note

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathbf{L}(E) \mid \ker f = F \text{ et } \operatorname{Im} f = G \};$$

et on suppose $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{H}$ induit sur G un automorphisme.
2. Montrer que $(\mathcal{H}, \circ)$ est un groupe.

Sommes en dimension finie

Exercice 25 (33.0)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(w_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On décompose chaque vecteur w_i suivant la somme précédente ; cela donne pour tout i,

$$w_i = u_i + v_i,$$

égalité dans laquelle u_i appartient à F et v_i appartient à G.

On suppose la famille $(u_i)_{i\in I}$ libre. Prouver qu'il en est de même de la famille $(w_i)_{i\in I}$.

Exercice 26 (33.0)
Soit

$$X = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad Y = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}.$$

La somme $X + Y$ est-elle directe ? Déterminer une base de $X + Y$.

Exercice 27 (33.0)
Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \operatorname{Vect}(u, v, w)$ et $G = \operatorname{Vect}(x, y)$ avec

$$u = (0,1,-1,0) \qquad v = (1,0,1,0) \qquad w = (1,1,1,1) \qquad x = (0,0,1,0) \qquad \text{et} \qquad y = (1,1,0,-1).$$

Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$?

* **Exercice 28 (33.0)**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{ 0 \}$.

** **Exercice 29 (33.0)** *Centrale PSI*
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E.

1. Soient F et F' dans $\mathcal{S} \setminus \{ E \}$. Montrer que $F \cup F' \neq E$.
2. Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{S}$ tel que $H \oplus D = H' \oplus D = E$.
3. Soit $d : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$d(E) = n \qquad \text{et} \qquad \forall F, F' \in \mathcal{S}, F \cap F' = \{ 0 \} \implies d\left(F + F'\right) = d(F) + d\left(F'\right).$$

   Montrer que $\forall F \in \mathcal{S}, d(F) = \dim(F)$.

* **Exercice 30 (33.0)**
Soient

$$r = (1,0,0,1), \qquad s = (-1,1,0,0), \qquad t = (0,0,1,1), \qquad u = (2,0,1,0), \qquad \text{et } v = (2,-1,2,3).$$

On pose $F = \operatorname{Vect}(r, s)$, $G = \operatorname{Vect}(t, u)$ et $H = \operatorname{Vect}(t, v)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
2. Donner une base de $F + H$ et de $F \cap H$.

** **Exercice 31 (33.0)**
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note

$$F = \left\{ P \in E \;\middle|\; P(-1) = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\} \text{ et } G = \operatorname{Vect}\left\{ 1 - X - X^2, 1 + X + X^3 \right\}.$$

On ne demande pas de vérifier que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Déterminer une base de F et une base de G. En déduire les dimensions de F et G.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

3. Donner l'expression de la projection π sur F parallèlement à G.

Exercice 32 (33.0)
Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(1, 2, 0)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

2. Donner l'expression de la projection p sur $\mathcal{P}$ parallèlement $\mathcal{D}$.

** **Exercice 33 (33.0)**
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On considère $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \right\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

2. Soit $G = \operatorname{Vect}\left(X, X^2\right)$. Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit π la projection sur F parallèlement à G, déterminer $\pi(P)$ pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$.