Chapitre 40

Séries numériques

40.1 Convergence d'une série

§1 Définitions

Définition 1

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, A_n est appelée **somme partielle d'indice n** de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$.
- La suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **suite des sommes partielles** de cette série.

L'expression $\sum_{n\geq 0} a_n$ se lit **série de terme général a_n** et n'a pour l'instant qu'un sens «formel» : nous ne parlons pas de la «valeur» de cette expression.

Définition 2

On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ **converge** ou **est convergente** si la suite (A_n) de ses sommes partielles converge, c'est-à-dire a une limite finie S.

- Si c'est le cas, S est appelée **somme** de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, et l'on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S.$$

- Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ **diverge** ou **est divergente**.

Ainsi, la **nature** (convergente ou divergente) d'une série est la même, par définition, que la nature de la suite de ses sommes partielles. Quant à la somme d'une série *convergente*, ce n'est pas une notion algébrique, comme pour des sommes finies. En effet, elle repose sur la notion de limite d'une suite, notion qui fait partie de l'analyse.

Remarque Soit (a_n) est définie pour $n \geq n_0$, où $n_0 \in \mathbb{Z}$ est fixé, on apporte les modifications suivantes: On pose $A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ pour tout $n \geq n_0$ et l'on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge si, et seulement si la suite $(A_n)_{n\geq n_0}$ converge. Dans ce cas, la somme de la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ est, par définition, la limite de la suite $(A_n)_{n\geq n_0}$ que l'on note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 3 La série $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle d'ordre n est

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Exemple 4 La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle d'ordre n est

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

Sa somme vaut donc 2 et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Exemple 5 Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. On a alors $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et par télescopage,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et sa somme vaut donc 1 et on note $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Définition 6 On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum_{n\geq 0} ar^n$, où a et r sont deux nombres complexes fixés ; a le premier terme de cette série, et r en est la **raison**.

Théorème 7 *Considérons une série géométrique $\sum_{n\geq 0} ar^n$, où a et r sont deux nombres complexes fixés et $a \neq 0$.*

1. *Si $|r| \geq 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} ar^n$ diverge.*

2. Si $|r| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} ar^n$ converge, et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de cette série est

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^{n} ar^n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} & (\text{si } r \neq 1) \\ S_n = (n+1)a & (\text{si } r = 1) \end{cases}$$

∎

Théorème 8

Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

§2 Reste

Proposition 9

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série et $p \in \mathbb{N}^\star$. On note S_n sa somme partielle d'ordre n, alors pour tout $n \geq p$, on a

$$S_n = S_{p-1} + \sum_{k=p}^{n} a_k.$$

Ainsi $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente si, et seulement si $\sum_{n\geq p} a_n$ est convergente. Dans ce cas, les sommes de ces deux séries sont reliées ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S_{p-1} + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n.$$

Définition 10

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série *convergente*, de somme S. Si $n \in \mathbb{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Le nombre R_n est appelé **reste d'indice *n*** de la série. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S_n + R_n.$$

Remarque

On a bien sûr $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Exemple 11

Si $|r| < 1$, le reste de rang n de la série $\sum_{n \geq 0} ar^n$ est

$$R_n = \frac{ar^{n+1}}{1-r}.$$

§3 Premiers résultats

Théorème 12

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les séries de termes généraux $a_n + b_n$ et λa_n sont convergentes et leur sommes sont données par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Théorème 13

La série $\sum a_n$ converge si, et seulement si les série $\sum \mathfrak{Re}(a_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(a_n)$ convergent.

Théorème 14

Condition nécessaire de convergence
Si une série $\sum a_n$ converge, alors a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La réciproque est fausse en général.

Exemple 15

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelé **série harmonique**. Cette série diverge bien que son terme général tende vers 0. De plus, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que lorsque $n \to +\infty$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Le réel γ est appelé la constante d'Euler.

Démonstration. On utilise l'inégalité

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

valable pour $x > 0$ (à montrer avec l'égalité des accroissements finis). Ce qui donne

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

Ce qui prouve déjà que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$. De plus,

$$0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq H_n - \ln(n).$$

Ainsi, si l'on pose $v_n = H_n - \ln(n)$, la suite (v_n) est minorée et de plus

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0,$$

Donc (v_n) décroissante et positive converge: on note $\gamma = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n)$. ∎

Définition 16 On dit que $\sum a_n$ **diverge grossièrement** si la suite (a_n) ne tend pas vers 0.

Le théorème suivant permet de ramener l'étude d'une suite à l'étude d'une série.

Théorème 17 **Série telescopique**
Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si la série $\sum_{n\geq 0}\left(a_{n+1} - a_n\right)$ est convergente. Lorsque c'est le le cas, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{n+1} - a_n\right).$$

40.2 Séries à termes positifs

Les séries à terme général réels positifs sont plus simples à étudier que les autres, à cause des deux résultats suivants.

Proposition 18 *Soit $\sum a_n$ une série à termes réels positifs. La suite $\left(S_n\right)$ des somme partielles de cette série est croissante.*

Théorème 19 *Pour qu'une série $\sum a_n$ à termes réels positif converge, il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée, c'est-à-dire*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \leq M.$$

Si cette condition est vérifiée, alors la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup\left\{ S_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Théorème 20 **Comparaison**
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

1. *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ aussi, et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

2. *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge aussi.*

Exemple 21

Soit $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ une suite dans laquelle $\alpha_k \in [\![0,9]\!]$. Alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{10^n}$ converge. En effet, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\alpha_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{9}{10^n} \text{ est convergente.}$$

D'ailleurs, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$ est le réel dont l'écriture décimale est $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots$.

Théorème 22

Équivalence

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs. On suppose que

$$a_n \sim b_n \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même nature.

Exemple 23

La série $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ est convergente.

Proposition 24

À savoir refaire

Soient f une fonction continue et décroissante sur un intervalle I et $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$. Si p et $q+1$ appartiennent à I, on a

$$f(p+1) + f(p+2) + \cdots + f(q+1) \leq \int_p^{q+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q).$$

Théorème 25

Séries de Riemann

Soit a un nombre réel fixé. Considérons la série suivante, appelée ***série de Riemann****:*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} = \sum_{n\geq 1} n^{-a}.$$

Cette série converge si $a > 1$ et diverge si $a \leq 1$.

Démonstration. Si $a = 1$, c'est la série harmonique, qui diverge.

Si $a < 1$, on a pour tout n, $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$. Par comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ diverge.

Supposons $a > 1$. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^a}$, qui est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Soit $n \geq 2$. D'après la proposition précédente,

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \frac{1}{a-1}\left(1 - n^{a+1}\right) \leq \frac{1}{a-1}.$$

Il en résulte que la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ est majorée par $1 + \frac{1}{a-1}$, donc cette série converge. ∎

40.3 Séries absolument convergentes

Définition 26

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On dit que cette série est **absolument convergente** si la série des modules $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge.

La série $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ est donc à termes réels positifs.

Notation

Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ est une série absolument convergente, on peut noter

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty.$$

Théorème 27

Tout série absolument convergente est convergente.

Corollaire 28

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente, alors

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Remarque

Certaines séries sont convergentes mais ne sont pas absolument convergentes. Par exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ (appelée série harmonique alternée) est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Théorème 29

Soit (u_n) une suite complexe et (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. On suppose que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(a_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge.}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, et a fortiori convergente.

40.4 Séries alternées

On appelle **série alternée** toute série à termes *réels* dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une telle série peut donc s'écrire $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$, où (a_n) est une suite de réels positifs.

Exemple 30

Voici des exemples de séries alternées:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n}}{2n+1}.$$

Théorème 31

Critère spécial des séries alternées

Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0. La série alternée ci-dessous est alors convergente:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n.$$

De plus, si on note S sa somme, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ la somme partielle d'ordre n et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ le reste d'ordre n, alors pour tout entier n, on a

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{et} \quad |R_n| \leq a_{n+1} \quad \text{et} \quad (-1)^{n+1} R_n \geq 0$$

autrement dit, R_n est du signe de $(-1)^{n+1} a_{n+1}$, le «premier terme négligé».