Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Aperçu

1. Ensemble des solutions
2. Résolution d'une équation différentielle normalisée
3. Problème de Cauchy

D 1 Soit α, β et $\gamma : J \to \mathbb{K}$ trois applications continues sur un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 1** une équation qui s'écrit sous la forme

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

D 2 Soit $I \subset J$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f est **solution de (E) sur I** si

- l'application f est dérivable sur I,
- et $\forall t \in I, \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$.

Résoudre ou **intégrer** l'équation différentielle (E) sur I, c'est donner toutes les solutions définies sur I.
Une **courbe intégrale** de (E) est la courbe représentative d'une solution de (E).

N On note ici $\mathcal{S}(E, I)$ l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I.

R

- Souvent, l'équation (E) se note abusivement

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t).$$

- Une équation différentielle linéaire est une équation linéaire au sens de l'algèbre linéaire (cf. espaces vectoriels)...

E 3 L'équation $y'(t) = y(t)$ admet pour solutions

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2e^t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array}$$

D 4 Une solution $f : I \to \mathbb{R}$ d'une équation différentielle est une **solution maximale** si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle $I' \neq I$ contenant I.

T 5 Considérons l'équation différentielle homogène

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

Alors $\mathscr{S}(H, I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

P 6 **Principe de superposition des solutions**

On considère les équations différentielles

$$(E_1)\,:\,\alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma_1(t) \qquad (E_2)\,:\,\alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=\gamma_2(t)$$

Si f_1 *et* f_2 *sont solutions sur* I *respectivement de* (E_1) *et* (E_2)*, alors pour tout* $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$*, l'application* $f=\lambda f_1+\mu f_2$ *est solution sur* I *de l'équation différentielle*

$$(E)\,:\,\alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=\lambda\gamma_1(t)+\mu\gamma_2(t).$$

Démonstration. Soient f_1 et f_2 des solutions sur I respectivement de (E_1) et (E_2).
Soient également $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et l'application

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

Les applications f_1 et f_2 sont dérivables sur I en tant que solutions de E_1 et E_2.
L'application f est donc dérivable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I.
Soit $t \in I$.

$$f(t) = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \qquad \text{et} \qquad f'(t) = \lambda f_1'(t) + \mu f_2'(t),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) &= \alpha(t)\left(\lambda f_1'(t) + \mu f_2'(t)\right) + \beta(t)\left(\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)\right) \\
&= \lambda\left(\alpha(t)f_1'(t) + \beta f_1(t)\right) + \mu\left(\alpha(t)f_2'(t) + \beta(t)f_2(t)\right) \\
&= \lambda\gamma_1(t) + \mu\gamma_2(t)
\end{aligned}$$

car f_1, f_2 sont solutions de (E_1), (E_2). Autrement dit, f est solution de (E). ∎

T 7 *Soit α, β et $\gamma : I \to \mathbb{K}$ trois applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire*

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

On suppose qu'il existe une solution $f_0 \in \mathcal{S}(E, I)$, alors

$$\mathcal{S}(E, I) = f_0 + \mathcal{S}(H, I) = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}(H, I) \right\}$$

La «solution générale» s'écrit donc sous la forme «solution particulière» plus «solutions de l'équation homogène associée».

Démonstration. On note $F = \left\{ f_0 + h \;\middle|\; h \in \mathcal{S}(H, I) \right\}$.
Montrons que $\mathcal{S}(E, I) \subset F$. Si $f \in \mathcal{S}(E, I)$, alors $h = f - f_0 \in \mathcal{S}(H, I)$, d'où $f = f_0 + h \in F$.
Montrons que $F \subset \mathcal{S}(E, I)$. Si $f \in F$, alors il existe $h \in \mathcal{S}(H, I)$ tel que $f = f_0 + h$ et f est solution de (E) d'après le principe de superposition. ∎

P 8 *Soient*

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \qquad \beta : I \to \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \gamma : I \to \mathbb{C}.$$

L'application $f : I \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \tag{E}$$

si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ est $\mathfrak{Im}(f)$ sont solutions respectives de

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) \qquad \text{et} \qquad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

Ce résultat est faux si α et β ne sont pas à images réelles.

Démonstration. Supposons que $f : I \to \mathbb{C}$ soit solution de l'équation différentielle (E). On note alors $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$.
L'application f est dérivable sur I, ce qui équivaut à dire que f_1 et f_2 sont dérivables sur I. Soit $t \in I$, on a

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \qquad \text{et} \qquad f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t).$$

Or f est solution de (E), donc $\alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$, ce qui s'écrit également

$$\alpha(t)\left(f_1'(t) + if_1(t)\right) + \beta(t)\left(f_1(t) + if_2(t)\right) = \gamma(t),$$

ou encore,

$$\left(\alpha(t)f_1'(t) + \beta(t)f_1(t)\right) + i\left(\alpha(t)f_2'(t) + \beta(t)f_2(t)\right) = \gamma(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) + i\,\mathfrak{Im}(\gamma)(t). \quad (1)$$

Or $\alpha(t)f_1'(t) + \beta(t)f_1(t) \in \mathbb{R}$, et $\alpha(t)f_2'(t) + \beta(t)f_2(t) \in \mathbb{R}$, donc par identification des parties réelles et imaginaires dans la relation (1), nous obtenons

$$\forall t \in I, \quad \alpha(t)f_1'(t) + \beta(t)f_1(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) \qquad \text{et} \qquad \alpha(t)f_2'(t) + \beta(t)f_2(t) = \mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

Autrement dit, $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ est $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$ sont solutions respectives de

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Re}(\gamma)(t) \qquad \text{et} \qquad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \mathfrak{Im}(\gamma)(t).$$

La réciproque est une application immédiate du principe de superposition des solutions (prendre $\gamma_1 = \mathfrak{Re}(\gamma)$, $\gamma_2 = \mathfrak{Im}(\gamma)$, $\lambda = 1$, $\mu = i$). ∎

D 9 Si pour tout $t \in J, \alpha(t) \neq 0$, alors (E) est équivalente à une équation de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Une telle équation est dite sous forme **réduite** ou **normalisée**.

T 10 *Soit $a : I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle. On suppose que la fonction a admet une primitive $A : I \to \mathbb{K}$ sur I. Alors, les solutions maximales de l'équation homogène*

$$y'(t) = a(t)y(t) \tag{H}$$

sont les applications

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Démonstration. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une application et A une primitive de a sur I. Posons $z = ye^{-A} : t \mapsto y(t)e^{-A(t)}$. On a donc

$$\forall t \in I, y(t) = z(t)e^{A(t)}.$$

Donc *la fonction z est dérivable si et seulement si y est dérivable*. Sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, y'(t) - a(t)y(t) &= z'(t)e^{A(t)} + z(t)A'(t)e^{A(t)} - a(t)z(t)e^{A(t)} \\
&= z'(t)e^{A(t)} + z(t)a(t)e^{A(t)} - a(t)z(t)e^{A(t)} \\
&= z'(t)e^{A(t)}.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{A(t)}$ n'est jamais nul,

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{S}(H, I) &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \qquad \text{car } I \text{ est un intervalle.} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)}
\end{aligned}$$

∎

C 11 *Soit h une solution non nulle de (H), par exemple $h : t \mapsto e^{A(t)}$, alors*

$$\mathscr{S}(H, I) = \{ \lambda h \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

On dit que $\mathscr{S}(H, I)$ est une **droite vectorielle** de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et que h en est un **générateur**.

R L'équation différentielle $y' = ay$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'application $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $A(t) = at$ est une primitive de l'application constante $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & a \end{array}$.

Les solution de l'équation différentielle homogène $y' = ay$ sont les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{at} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

E 12 Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) - ty(t) = 0. \tag{H}$$

Démonstration. L'équation (H) est équivalente à l'équation $y'(t) = ty(t)$. L'application $a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{array}$ admet pour primitive l'application

$$A : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^2}{2} \end{array}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ étant un intervalle, les solutions réelles maximales de (H) sont les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{t^2/2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

∎

M Nous supposons que la fonction α ne s'annule pas sur I. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et h est une solution *qui ne s'annule pas* [1] de l'équation homogène associée à (E),

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que h est un **facteur intégrant**.
Considérons une application $y : I \to \mathbb{K}$. On sait que h ne s'annule pas donc $z = \frac{y}{h}$ est dérivable sur I si et seulement si $y = zh$ est dérivable sur I. Sous cette hypothèse, on a

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) &= \alpha(t)\left(z'(t)h(t) + z(t)h'(t)\right) + \beta(t)z(t)h(t)\\ &= \alpha(t)z'(t)h(t) + z(t)\cancel{\left(\alpha(t)h'(t) + \beta(t)h(t)\right)}\\ &= \alpha(t)z'(t)h(t) && \text{car } h \text{ est solution de } (H\end{aligned}$$

[1] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^{A}$ comme ci-dessus.

M Nous supposons que la fonction α ne s'annule pas sur I. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et h est une solution *qui ne s'annule pas* [1] de l'équation homogène associée à (E),

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que h est un **facteur intégrant**.
De plus, on sait que α et h ne s'annulent pas, d'où

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{S}(E, I) &\iff \forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \\
&\iff \forall t \in I, \alpha(t)z'(t)h(t) = \gamma(t) \\
&\iff \forall t \in I, z'(t) = \frac{b(t)}{h(t)} \qquad \text{où } b(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.
\end{aligned}$$

Supposons alors qu'il existe B une primitive de $\frac{b}{h}$ sur l'*intervalle* I. Nous sommes assurés de son existence lorsque α et γ sont continues. Alors la fonction $f_0 : t \mapsto B(t)h(t)$ est solutions de (E) sur I.

---

[1] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^A$ comme ci-dessus.

M Nous supposons que la fonction α ne s'annule pas sur I. Nous allons chercher les solutions de l'équation différentielle

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{E}$$

sous la forme $y = zh$ où $z : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable et h est une solution *qui ne s'annule pas* [1] de l'équation homogène associée à (E),

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = 0. \tag{H}$$

On dit que h est un **facteur intégrant**.
L'équation (E) étant linéaire, ses solutions définies sur I sont donc les applications

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & (B(t)+\lambda)\,h(t) \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

[1] En pratique, on normalise l'équation homogène associée et on prend $h = e^A$ comme ci-dessus.

E 13 Déterminer les solutions définies sur $]0,+\infty[$ et à images réelles, de l'équation différentielle

$$ty'(t) - y(t) = t^2 \,\mathrm{e}^t \,. \tag{E}$$

Démonstration.
L'équation homogène associée à (E) est $ty'(t) - y(t) = 0$ qui est équivalente sur $]0,+\infty[$ à l'équation réduite

$$y'(t) = \frac{1}{t} y(t).$$

L'application $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array}$ admet pour primitive $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln t \end{array}$.
Les solutions de l'équation $ty'(t) - y(t) = 0$ sur l'*intervalle* $]0,+\infty[$ sont

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\ln t} = \lambda t \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

E 13 Déterminer les solutions définies sur $]0,+\infty[$ et à images réelles, de l'équation différentielle
$$t y'(t) - y(t) = t^2 \mathrm{e}^t \,. \tag{E}$$

Cherchons une solution de (E) sous la forme $f : t \mapsto z(t)\,\mathrm{e}^{\ln t} = tz(t)$ où z est une application dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour $t \in]0,+\infty[$, on a

$$tf'(t) - f(t) = t\left(tz'(t) + \cancel{z(t)}\right) - \cancel{tz(t)} = t^2 z'(t),$$

et on en déduit

$$tf'(t) - f(t) = t^2 e^t \iff t^2 z'(t) = t^2 e^t \iff z'(t) = e^t \quad \text{car} \quad t^2 \neq 0.$$

On peut choisir $z(t) = e^t$, c'est-à-dire $f(t) = te^t$. La fonction f est donc *une solution* de (E) sur $]0,+\infty[$.
L'équation (E) étant linéaire, l'ensemble de ses solutions réelles définies sur $]0,+\infty[$ est donc
$$\mathcal{S}\,(E,]0,+\infty[) = \left\{ \begin{array}{rcl} f_\lambda : \quad]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\,\mathrm{e}^t + \lambda t \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

C 14 *Soient I un intervalle, a et $b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues. Soit $t_0 \in I$. Les solutions maximales de l'équation différentielle*

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

sont les applications

$$\begin{array}{rccl} f : & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \left(\lambda + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}\,\mathrm{d}u\right) e^{A(t)} \end{array}$$

avec

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \lambda = f(t_0) \in \mathbb{R} \text{ un réel quelconque.}$$

C 15 *Une solution particulière de (E) est donnée par*

$$\begin{array}{rrcl} f_0 : & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \left(\int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} \, \mathrm{d}u \right) e^{A(t)} \end{array} .$$

R L'application f_0 est une solution de (E), c'est une « solution particulière » de (E). En notant $\lambda h : t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ les solutions de l'équation homogène associée à (E), on a [2]

$$\mathcal{S}(E, I) = \left\{ f_0 + \lambda h \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

On dit que $\mathcal{S}(E, I)$ est une **droite affine** de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

2

$$\overbrace{f_0}^{\text{«point»}} + \underbrace{\mathbb{K} \overbrace{h}^{\text{«vect.directeur»}}}_{\text{«direction»}}$$

D 16 Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle du premier ordre (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les solutions f de (E) qui vérifient de plus $f(t_0) = y_0$.

T 17 **Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz**

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. \qquad \text{(E)}$$

admet une solution unique.

Par conséquent, (dans le cas réel) il existe une unique courbe intégrale de (E) passant par le point $M_0(t_0, y_0)$.

Considérons l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{E}$$

R Ici, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

- Toutes les solutions, et il y en a une infinité, vérifient $y(0) = 0$.
- On peut vérifier que toutes les applications de la forme

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda t^2 + t^3 \end{array}$$

sont solution de (E). Il y en a encore d'autres.