Suites de nombres réels et complexes

Aperçu

D 1 Un ensemble E étant donné, on appelle **suite de E** toute application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans E.
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **suite réelle**, et si $E \subset \mathbb{C}$, de **suite complexe**; ces deux cas constituent les **suites numériques**.

La notion d'égalité des suites est un cas particulier de la notion d'égalité des applications.

D 2 Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **égales**, et on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

Revoir les suites arithmétiques, géométrique, arithmético-géométrique. Les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

D 4 Étant donné une suite numérique (a_n), on appelle **somme partielle** d'indice n associé à la suite (a_n) la somme des termes d'indices au plus n :

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Nous appellerons **série** de **terme général** a_n le couple des deux suites (a_n) et (A_n). L'étude de la série de terme général a_n sera, par définition, l'étude de la suite (A_n).

E 5 Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

(somme des termes d'une progression géométrique)

E 6 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Il existe «donc» un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

Par exemple, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Cette suite $\left(u_n\right)$ est un exemple de **suite définie de manière implicite**.

D 7 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

- **constante** si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda.$$
- **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang
$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies u_n = \lambda.$$

D 7 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

- **croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$
- **strictement croissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$
- **décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$
- **strictement décroissante** si
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n.$$
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

D 7 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que u est

- **périodique** s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n.$$

R On démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante si et seulement si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \implies u_p \leq u_q.$$

Ceci est cohérent avec la définition de fonction croissante. On a un résultat similaire pour les suites décroissante ou strictement croissante/décroissante.

E 8

1. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
2. Étudier la monotonie de la suite de terme général $v_n = \frac{n^n}{n!}$

D 10

- On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'il existe $\mu \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mu$.
- On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
  - **majorée** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
  - **minorée** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

P 11 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

R Une suite réelle bornée est évidemment minorée et majorée (par $\pm\mu$), et inversement une suite minorée et majorée est bornée (prendre $\mu = \max\{\,|m|, |M|\,\}$). Mais la notion suite bornée est utile aussi pour les suites à valeurs complexes, pour lesquelles la notion de minoré/majoré n'a pas de sens.

D 12 Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On appelle **somme des suites u et v** la suite $w = \left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $u + v$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n.$$
- On appelle **produit des suites u et v** la suite $p = \left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $u.v$ ou uv, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n.v_n.$$
- On appelle **produit externe de la suite u par le réel** λ la suite $q = \left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\lambda \cdot u$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \lambda u_n.$$

Résumons

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n) \qquad (u_n).(v_n) = (u_n v_n) \qquad \lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n).$$

D 15 Soit (u_n) un suite dans un ensemble E et, pour tout $x \in E$, $P(x)$ une assertion sur x.
On dit que (u_n) **vérifie la propriété** P si $P(u_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On dit que (u_n) vérifie la propriété P **à partir d'un certain rang** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies P(u_n).$$

E 16 La suite $\left(n^2 - 23580\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. En effet, si $n \geq 1000$, on a $n^2 - 23580 \geq 1000000 - 23580 \geq 0$.

R Si (u_n) est une suite qui satisfait une propriété P à partir d'un certain rang, alors chacune de ses suites tronquées la satisfait aussi à partir d'un certain rang.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

D 17 Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** ℓ, ou **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est **convergente**. Dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.

E 18 La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ admet pour limite 1.

E 19 La suite (v_n), définie par $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ est-elle convergente ?

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On cherche n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $|v_n| \leq \epsilon$, c'est-à-dire $\frac{1}{2^n} \leq \epsilon$ ou encore $2^n \geq \frac{1}{\epsilon}$.
Remarquons que pour tout entier naturel n, on a $2^n \geq n$ (démonstration par récurrence, ou utiliser que $[\![1, n]\!] \to \mathcal{P}([\![1, n]\!]), x \mapsto \{ x \}$ est injective).
Soit donc n_0 un entier naturel $\geq \frac{1}{\epsilon}$. Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

La suite (v_n) est donc convergente et admet 0 pour limite. ∎

T 20 **Unicité de la limite éventuelle**

La limite d'une suite convergente est unique.

Autrement dit, si (u_n) admet ℓ_1 et ℓ_2 comme limites, alors $\ell_1 = \ell_2$.

N Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\,; \quad \lim_{+\infty} u = \ell\,; \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\,;$$

ou même plus simplement

$$\lim u_n = \ell\,; \quad \lim u = \ell\,; \quad u_n \to \ell\,; \quad u \to \ell\,.$$

E 22 Nous avons vu que pour la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n}$, la somme partielle d'ordre n est $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. On a donc $|A_n - 2| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2$.

Nous dirons que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est **convergente** et a pour **somme** 2 et nous écrirons alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Ou encore, en mettant de côté le terme correspondant à $k = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \underbrace{+ \cdots}_{\text{ne pas oublier !}} = 1.$$

Ce résultat est apparu très mystérieux aux anciens qui appréhendaient peu les notions d'infini et de limite — voir Achille et sa tortue, Zenon et sa flèche.

E 23 Considérons la suite u définie par $u_n = (-1)^n$. Démontrer que cette suite n'est pas convergente.

Démonstration. En prenant la négation de la définition 17

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } |u_n - \ell| > \epsilon.$$

En effet, quel que soit le choix de ℓ, choisissons $\epsilon = \frac{1}{2}$; l'un au moins des deux nombres $|1 - \ell|$ et $|-1 - \ell|$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Comme pour tout entier n_0, il existe des nombres pairs et des nombres impairs supérieurs à n_0, il existe donc un entier $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| \geq \frac{1}{2}$; la conclusion en résulte. ∎

Nous retrouverons plus loin cet exemple et nous donnerons alors une démonstration plus élégante de sa divergence.

D 24 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) **tend** vers $+\infty$, ou **diverge vers** $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) **tend** vers $-\infty$, ou **diverge vers** $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

N On écrira

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{+\infty} u = +\infty, \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty, \quad \ldots$$

E 25 On considère la suite de terme général $u_n = 2^n$. Montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ assure l'existence d'un entier naturel $n_0 > A$. Pour $n \geq n_0$, on a $u_n = 2^n \geq n \geq n_0$ et donc $u_n \geq A$. La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

T 26 **Caractère asymptotique de la notion de limite**

Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites numériques égales à partir d'un certain rang. Alors les suites* (u_n) *et* (v_n) *ont même nature ; si celles-ci ont une limite, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

T 28 *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*
- *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

1-ier cas : $q > 1$.

On peut alors écrire $q = 1 + h$ avec $h > 0$. La formule du binôme de Newton montre alors que l'on a pour $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$.
Soit $A > 0$ et n_0 un entier tel que $n_0 > \frac{A-1}{h}$. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $1 + nh \geq 1 + n_0 h > A$ et donc *a fortiori* $q^n > A$. Ce qui montre que l'on a $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

∎

T 28 *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*
- *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

ième cas : $0 < |q| < 1$.

On peut alors écrire $|q| = \frac{1}{q'}$, avec $q' > 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $\frac{1}{\epsilon} > 0$ et l'étude faite au premier cas montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\left(q'\right)^n > \frac{1}{\epsilon}$, c'est-à-dire $|q^n| < \epsilon$. Ce qui montre que la suite converge vers 0.

∎

T 28 *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*
- *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

ième cas : $q < -1$.

La suite (q^n) ne peut pas avoir de limite finie car la suite $(|q^n|)$ tend vers $+\infty$ (2-ième cas).

De plus, (q^n) ne peut pas tendre vers $+\infty$, car pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq 1 \implies u_{n+1} < -1 \implies u_{n+1} < 1.$$

Ainsi, on ne peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $q^n \geq 1$.

De manière analogue, (q^n) ne peut pas tendre vers $-\infty$.

T 28 *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*
- *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la suite u de terme général $u_n = q^n$.

ième cas : les scories.

- $q = 1$: la suite est constante et égale à 1.
- $q = -1$: ce cas a déjà été vu et on sait que cette suite est bornée et n'est pas convergente, elle n'a donc pas de limite.
- $q = 0$: la suite est constante et égale à 0.

∎

T 29 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est fausse ! Il suffit de regarder par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, qui est une suite bornée mais ne converge pas.

C 30 *Si une suite n'est pas bornée, elle est divergente.*

C 31 *Une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang.*

R La même propriété vaut pour les suites réelles «minorées» ou «majorées».

P 32 *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels qui converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $\ell > 0$, *alors il existe* $c > 0$ *tel que à partir d'un certain rang,* $u_n > c$.
2. *Si* $\ell < 0$, *alors il existe* $c < 0$ *tel que à partir d'un certain rang,* $u_n < c$.
3. *Si* $\ell \neq 0$, *alors à partir d'un certain rang,* $u_n \neq 0$.

P 33 *Soit* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels.*

1. *Si* $\lim\limits_{+\infty}(u_n) = +\infty$ *alors* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée et n'est pas majorée.*
2. *Si* $\lim\limits_{+\infty}(u_n) = -\infty$ *alors* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée et n'est pas minorée.*

P 34 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.*

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration.
Suivant l'hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit l'entier naturel $n \geq k$, $u_n \leq v_n$. Notons a la limite de u et b celle de v. Montrons par l'absurde que $a \leq b$. Supposons donc que $a > b$.
Posons $\epsilon = \frac{a-b}{3}$. On a alors,

$$b - \epsilon < b < b + \epsilon < a - \epsilon < a < a + \epsilon.$$

Puisque la suite (u_n) converge vers a, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$a - \epsilon \leq u_n \leq a + \epsilon.$$

Puisque la suite (v_n) converge vers b, il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier

P 34 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang.*

$$u_n \leq v_n.$$

Alors si (u_n) et (v_n) admettent une limite, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Soit n le plus grand des entiers k, n_1 et n_2, alors on a à la fois

$$a - \epsilon \leq u_n \qquad u_n \leq v_n \qquad v_n \leq b + \epsilon.$$

Ainsi $a - \epsilon \leq b + \epsilon$, d'où la contradiction.

C 35 *Supposons* $m \leq u_n \leq M$ *à partir d'un certain rang et que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une limite (finie ou infinie). Alors*

$$m \leq \lim_{n\to\infty}(u_n) \leq M$$

T 36 **Existence de limite par domination**

Soient (u_n) *une suite numérique,* $\ell \in \mathbb{K}$ *et* (α_n) *une suite réelle.*
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ *et qu'à partir d'un certain rang*

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors la suite (u_n) *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$*.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Puisque (α_n) converge vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|\alpha_n| \leq \epsilon$. Donc pour $n \geq n_0$, on a également

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \epsilon.$$

Ce qui prouve que $\lim_{+\infty} u = \ell$. ∎

C 37 *On suppose* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq \big|u_n - \ell\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où le résultat par domination. ∎

T 38 **Existence de limite par encadrement**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Si (u_n) est une suite satisfaisant

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Rappelons que l'on a l'équivalence

$$|u_n - \ell| \leq \epsilon \iff \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon;$$

et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq k$, on a $a_n \leq u_n \leq b_n$.
Puisque (a_n) a pour limite ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$ on ait $|a_n - \ell| \leq \epsilon$. De même, puisque (b_n) a pour limite ℓ, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$ on ait $|b_n - \ell| \leq \epsilon$.
Posons $n_0 = \max(k, n_1, n_2)$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a à la fois

$$\ell - \epsilon \leq a_n \leq u_n \qquad \text{et} \qquad u_n \leq b_n \leq \ell + \epsilon;$$

donc $\ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leq \epsilon$. ∎

P 39 *Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n v_n| \leq \epsilon.$$

Puisque la suite (v_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$$

De plus, la suite (u_n) tend vers 0, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc

$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon;$$

d'où le résultat. ∎

E 40 La suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ converge vers 0.

En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et la suite $(\sin(n\theta))$ est bornée:

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n\theta) \leq 1.$$

T 41 **Théorèmes de divergence par minoration ou majoration**

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites telles que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang.*

1. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$; *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$; *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

T 42 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques convergentes, et* $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.

1. *Alors les suites* $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\lambda u_n+\mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, et de plus*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}(u_n)+\lim_{n\to+\infty}(v_n)$$
$$\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\lim_{n\to+\infty}(u_n)\lim_{n\to+\infty}(v_n)$$
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\lim_{n\to+\infty}(u_n)+\mu\lim_{n\to+\infty}(v_n).$$

2. *Si* $\lim_{n\to+\infty}(v_n)\neq 0$, *alors les suites* $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ *et* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *sont définies à partir d'un certain rang et sont convergentes et on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}(v_n)};\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}(u_n)}{\lim_{n\to+\infty}(v_n)}.$$

P 43 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n, on note x_n la partie réelle de u_n et y_n sa partie imaginaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *(u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{C}$.*

(ii) *(x_n) tend vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et (y_n) tend vers $\mathfrak{Im}(\ell)$.*

L 44 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.*

1. *Si (u_n) est minorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.*
2. *Si (u_n) est majorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.*

On en déduit

T 45 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\ell, m \in \mathbb{R}$.*

Si u_n tend vers	*et si v_n tend vers*	*alors $u_n + v_n$ tend vers*
ℓ	m	$\ell + m$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	*«F.I.»*
$+\infty$	$-\infty$	*«F.I.»*

T 46 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels et* $\ell, m \in \mathbb{R}$.

Si u_n *tend vers*	*et si* v_n *tend vers*	*alors* $u_n \cdot v_n$ *tend vers*
ℓ	m	ℓm
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	*«F.I.»*

T 47 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels et* $\lambda, \ell \in \mathbb{R}$.

Si	*et si* u_n *tend vers*	*alors* λu_n *tend vers*
$\lambda \in \mathbb{R}$	ℓ	$\lambda\ell$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$+\infty$

Si $\lambda = 0$, *alors* (λu_n) *est la suite nulle et converge vers* 0.

D 48 Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs supérieures** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n > \ell$ à partir d'un certain rang. Dans ce cas, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell + .$$

- On dit que (u_n) **tend vers ℓ par valeurs inférieures** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $u_n < \ell$ à partir d'un certain rang, on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell - .$$

L 49 *Soit (u_n) est une suite de réels strictement positifs, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0+ \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0+$$

Pour une suite (u_n) quelconque, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'est peut-être même pas définie, même à partir d'un certain rang.

T 50 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang et $\ell \in \mathbb{R}$.*

Si u_n tend vers	*alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers*
$\ell \neq 0$	$\frac{1}{\ell}$
$0-$	$-\infty$
$0+$	$+\infty$
$+\infty$	$0+$
$-\infty$	$0-$
0	*«F.I.»*

P 51 *Si la suite* (v_n) *tend vers* $\pm\infty$ *et si la suite* (u_n) *est bornée, alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

T 52 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels et* $\ell, m \in \mathbb{R}$. *Dans chacun des cas suivants, la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est définie à partir d'un certain rang et*

Si u_n *tend vers*	*et si* v_n *tend vers*	*alors* $\frac{u_n}{v_n}$ *tend vers*
ℓ	$m \neq 0$	$\frac{\ell}{m}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$-\infty$	$m < 0$	$+\infty$
$-\infty$	$m > 0$	$-\infty$
$+\infty$	$m < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$m > 0$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*«F.I.»*
$\pm\infty$ *ou* ℓ	0	*«F.I.»*

T 53 *Soient* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels et* $\ell \in \mathbb{R}$. *On suppose que, à partir d'un certain rang,* $v_n \neq 0$ *; de sorte que la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *soit définie à partir de ce rang. Alors*

Si u_n *tend vers*	*et si* v_n *tend vers*	*alors* $\frac{u_n}{v_n}$ *tend vers*
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$0-$	$+\infty$
$-\infty$ *ou* $\ell < 0$	$0+$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$0-$	$-\infty$
$+\infty$ *ou* $\ell > 0$	$0+$	$+\infty$
$0\pm$	$0\pm$	«*F.I.*»

Les «formes indéterminées» sont les mêmes que pour les opérations algébriques dans $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$.

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \pm \infty \times 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \frac{0}{0} \quad \text{et plus généralement } \frac{\ell}{0} \text{ pour } \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Néanmoins, pour $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, $\ell \neq 0$, on peut lever les indéterminations $\dfrac{\ell}{0^+}$ et $\dfrac{\ell}{0^-}$ en utilisant la « règle des signes ».

T 54 *Soit $u = (u_n)$ une suite croissante.*

1. *Si la suite $\left(u_n\right)$ est majorée, alors $\left(u_n\right)$ converge vers*

$$\sup \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. *Si la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas majorée, alors $\left(u_n\right)$ diverge vers $+\infty$.*

T 55 *Soit $u = (u_n)$ une suite décroissante.*

1. *Si la suite $\left(u_n\right)$ est minorée, alors $\left(u_n\right)$ converge vers*

$$\inf \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. *Si la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas minorée, alors $\left(u_n\right)$ diverge vers $-\infty$.*

C 56 *Toute suite monotone admet une limite.*

E 57 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

Montrer que (u_n) converge.

D 59 Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

- la suite (a_n) est croissante,
- la suite (b_n) est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

E 60 $a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D 59 Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

- la suite (a_n) est croissante,
- la suite (b_n) est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

E 60 $a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

T 61 **Théorème des suites adjacentes**

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont une limite commune ℓ. Ce réel ℓ est l'unique réel qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n.$$

D 62 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
On appelle **suite extraite** de (u_n) selon ϕ, ou **sous-suite** de (u_n), la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite extraite est donc une suite obtenue en ne gardant qu'un certain nombre de termes de la suite initiale. Mais les termes conservés ont toujours un indice croissant (dans la suite de départ).

E 63

1. Le décalage de k indices remplace (u_n) par $(v_n) = (u_{n+k})$. Ici $\phi(n) = n + k$.
2. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite de (u_n) constituée par ses termes d'indices pairs.
3. $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+11})_{n\in\mathbb{N}}$, sont des suites extraites de (u_n).
4. $(u_{n^2-n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de (u_n) car le terme u_0 est répété pour $n = 0$ et $n = 1$.

T 64 *Si une suite (u_n) possède une limite (finie ou infinie) ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) tend vers ℓ.*

Démonstration. Soit u une suite de nombres réels qui admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ et v une suite extraite de u : il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$.
Soit $\epsilon > 0$. Puisque u tend vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \epsilon$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$. Dès lors, si $n \geq n_0$, $\phi(n) \geq n \geq n_0$, donc

$$|v_n - \ell| = |u_{\phi(n)} - \ell| < \epsilon.$$

Le cas $\ell = \pm\infty$ est analogue. ∎

E 65 Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b,$$

où $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$.
Si $\left(u_n\right)$ converge vers une limite ℓ, alors la suite extraite $\left(u_{n+1}\right)$ également. D'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell \qquad \lim_{n \to +\infty} au_n + b = a\ell + b.$$

On a donc nécessairement $\ell = a\ell + b$, c'est-à-dire $(1-a)\ell = b$. La seule limite *éventuelle* de la suite (u_n) est donc $\frac{b}{1-a}$.

T 66 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ. Alors u tend vers ℓ.*

Démonstration. Il convient de distinguer trois cas : $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$. On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $\epsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.
Puisque (u_{2n}) a pour limite ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$ on ait $|u_{2n} - \ell| < \epsilon$.
Puisque (u_{2n+1}) a pour limite ℓ, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_2$ on ait $|u_{2n+1} - \ell| < \epsilon$.
Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Soit un entier $n \geq n_0$. Si n est pair, on écrit $n = 2p$ où $p \geq \frac{n_0}{2} \geq n_1$, donc $|u_{2p} - \ell| < \epsilon$. Si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$ où $p \geq \frac{n_0 - 1}{2} \geq n_2$, donc $|u_{2p+1} - \ell| < \epsilon$. Dans tous les cas on a

$$|u_n - \ell| < \epsilon.$$

∎

M Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, il peut être commode d'exhiber deux suites extraites admettant des limites différentes ou une suite extraite n'admettant pas de limite.

E 67

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car $(u_{2n}) = (1)$ et $(u_{2n+1}) = (-1)$ ont pour limites respectives 1 et -1.
  Ceci montre que la réciproque de la propriété est inexacte, c'est-à-dire qu'il existe des suites n'ayant pas de limite dont on peut extraire des suites ayant une limite.
- La suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ n'a pas de limite. En effet, $u_{6n+3} = (-1)^n$: la suite extraite $\left(u_{6n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite donc la suite (u_n) aussi.

T 68 **Caractérisation séquentielle de la borne supérieure**

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A.
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *M est la borne supérieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.*
3. *Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.*

Démonstration. Voir exercices. ∎

On a un résultat analogue pour la borne inférieure.

T 69 **Caractérisation séquentielle de la borne inférieure**

Soit A une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$ et m un minorant de A.
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *m est la borne inférieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers m.*
3. *Il existe une suite décroissante d'éléments de A convergente vers m.*

P 70 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. Alors*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^{\alpha}}{n^{\beta}} = 0+.$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\beta}}{a^{n}} = 0+.$ *En particulier* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{\beta}}{e^{\alpha n}} = 0.$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^{n}}{n!} = 0+.$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{n^{n}} = 0+.$