

33.1 SOMME DIRECTE DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

§1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . La **somme** de U et V , noté $U + V$, est l'ensemble

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U \text{ et } v \in V \}.$$



Pour $w \in E$,

$$w \in U + V \iff \exists (u, v) \in U \times V, u + v = w.$$

Test 2

Posons $U = \{ 0, 2, 3 \}$ et $V = \{ 4, 8, 1 \}$. Ce ne sont pas des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R} . Décrire néanmoins en extension l'ensemble

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U \text{ et } v \in V \}.$$

Théorème 3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $U + V$ est un sous-espace vectoriel de E .

Test 4

Montrer le!

Test 5

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u, v \in E$. Montrer

$$\text{Vect}\{u\} + \text{Vect}\{v\} = \text{Vect}\{u, v\}.$$

Remarque

Il faut bien différencier $U + V$ de $U \cup V$. L'ensemble $U \cup V$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E (voir l'exercice ??). Le sous-espace vectoriel $U + V$ contient $U \cup V$, mais il est en général beaucoup plus gros. En fait, $U + V$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant U et V , c'est-à-dire

$$U + V = \text{Vect}(U \cup V).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 6

Soit A et B sont deux parties d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , alors

$$\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A \cup B).$$

Exemple 7

Soient $E = \mathbb{R}^3$,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$$

Montrer que $U + V = \mathbb{R}^3$.

Test 8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer les énoncés suivants.

1. $U + V = V + U$.
2. $U + U = U$.
3. Si $U \subset V$, alors $U + V = V$.

§2 Sommes directes

Définition 9

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $U + V$ est dite **somme directe** si

$$\forall (u, v) \in U \times V, u + v = 0 \implies u = v = 0.$$

Notation

Lorsque la somme est directe, on utilise la notation spéciale $U \oplus V$ pour désigner $U + V$. Au niveau ensembliste, ce sont les mêmes ensembles. Le symbole \oplus rappelant seulement que la somme est directe.

Il existe une autre façon de caractériser les sommes directes, souvent très utile.

Théorème 10

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La somme $U + V$ est directe.
2. $U \cap V = \{0\}$.
3. Tout vecteur z de la somme $U + V$ peut s'écrire de manière unique $z = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$, c'est-à-dire

$$\forall (u, v) \in U \times V, \forall (u', v') \in U \times V, u + v = u' + v' \implies u = u' \text{ et } v = v'.$$

Exemple 11

Soit $u, v \in E$ deux vecteurs non colinéaires. Alors, la somme $\text{Vect}\{u\} + \text{Vect}\{v\}$ est directe. Autrement dit,

$$\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u\} \oplus \text{Vect}\{v\}.$$

§3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 12

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = U \oplus V$.
2. $E = U + V$ et $U \cap V = \{0\}$.
3. Tout vecteur $z \in E$ se décompose de manière unique dans $U + V$:

$$\forall z \in E, \exists!(u, v) \in U \times V, z = u + v.$$

Dans ce cas, on dit que U et V sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** dans E .



La notion de supplémentaire est souvent confondue avec la notion ensembliste de complémentaire qui est très différente. Les différences entre les deux notions sont nombreuses. Tout d'abord, il y a unicité du complémentaire, alors que pour un sous-espace donné, il existe généralement une infinité de supplémentaires différents. Ensuite l'intersection d'un sous-espace avec un supplémentaire n'est pas vide mais contient le vecteur nul (et uniquement celui-là). Par ailleurs, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel. Enfin, la réunion d'un sous-espace et d'un supplémentaire n'est pas égale à tout l'espace, plus subtilement, elle engendre cet espace. De façon intuitive, deux sous-espaces supplémentaires contiennent exactement l'information dont on a besoin pour reconstituer l'espace entier.

Exemple 13

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels formés respectivement des fonctions constantes, et des fonctions valant 0 en 0 sont supplémentaires.

Test 14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $E = U \oplus V$ si, et seulement si

$$\begin{aligned} \phi : U \times V &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 15

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E .



En général, ce supplémentaire n'est pas unique.

Inutile de chercher un contre-exemple en dimension infinie. En effet, ce résultat reste vrai en supposant l'axiome du choix.

Définition 16

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E . On dit que H est un **hyperplan** de E si il existe une droite vectorielle $D = \text{Vect} \{ a \}$ telle que

$$E = H \oplus D.$$

§4 Somme directe et applications linéaires

Une application linéaire définie sur $U \oplus V$ est entièrement déterminée par ses restrictions à U et V . Autrement dit,

Théorème 17**Caractérisation universelle**

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E tels que la somme $U + V$ est directe.

Soit $g \in \mathbf{L}(U, F)$ et $h \in \mathbf{L}(V, F)$, alors, il existe une unique application linéaire $f \in \mathbf{L}(U \oplus V, F)$ telle que

$$\forall x \in U, f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in V, f(x) = h(x).$$

33.2 PROJECTEURS

§1 Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires

Définition 18

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E . Chaque vecteur $z \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application $p : E \rightarrow E$ qui à z associe u est le **projecteur vectoriel sur U parallèlement à V** . On dit également que V est la **direction** de ce projecteur.

L'application $q : E \rightarrow E$ qui à z associe v est donc le projecteur vectoriel sur V parallèlement à U .



Si p est le projecteur sur U parallèlement à V , et q le projecteur sur V parallèlement à U , alors

$$\forall z \in E, \quad z = p(z) + q(z) \text{ et } p(z) \in U \text{ et } q(z) \in V.$$

Test 19

Pourquoi demande-t-on que la somme $E = U \oplus V$ soit directe?

Proposition 20

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du \mathbb{K} -espace vectoriel E . On note p la projection sur U parallèlement à V . Alors,

1. p est un endomorphisme de E .
2. $U = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E) = \{ z \in E \mid p(z) = z \}$.
3. $V = \ker(p) = \{ z \in E \mid p(z) = 0 \}$.

Remarque

Vous aurez peut-être reconnu le contenu du théorème de Thalès : celui-ci veut dire au fond qu'une projection (vectorielle) sur une droite est une application linéaire.

§2 Exemples

Exemple 21

Avec $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus V$, où U est le sous-espace vectoriel formé des fonctions constantes, et V le sous-espace vectoriel des fonctions valant 0 en 0. Les projecteurs sur U parallèlement à V et sur V parallèlement à U sont

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow E & \text{et} & & q : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto (x \mapsto f(0)) & & & f &\mapsto (x \mapsto f(x) - f(0)) \end{aligned}$$

Exemple 22

Soit $U = \text{Vect} \{ (1, 2, -1)^T, (1, 0, 1)^T \}$ et $V = \text{Vect} \{ (1, -1, -1)^T \}$. Soit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation linéaire

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ 2\alpha - \gamma = y \\ -\alpha + \beta - \gamma = z \end{cases}$$

qui a pour unique solution

$$\alpha = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6}, \quad \beta = \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, \quad \gamma = \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}.$$

Cela prouve que tout vecteur $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de U et un vecteur de V . Le projecteur sur U parallèlement à V est

défini par

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}.$$

Test 23

Vérifier le calcul précédent.

§3 Les projecteurs sont les endomorphismes idempotents

Définition 24

Une application $p : E \rightarrow E$ est **idempotente** si

$$p \circ p = p.$$

Si p est linéaire, cela s'écrit également $p^2 = p$.

Définition 25

Une matrice carrée A est **idempotente** si $A^2 = A$.

Théorème 26

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du \mathbb{K} -espace vectoriel E . On note p le projecteur sur U parallèlement à V . Alors,

1. L'application p est idempotente : $p \circ p = p$.
2. $q = \text{Id}_E - p$ est la projection sur V parallèlement à U . On a $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.

Théorème 27

Soit $p \in \mathbf{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. Alors

$$E = \text{Im } p \oplus \ker p$$

et p est la projection vectorielle sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\ker p$. On a donc

$$\text{Im } p = \ker (p - \text{Id}_E) \quad E = \ker(p - \text{Id}_E) \oplus \ker(p).$$

Les espaces $\ker(p - \text{Id}_E)$ et $\ker(p)$ sont appelés les **sous-espaces propres** de p .

33.3 SYMÉTRIES

§1 Symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires

Définition 28

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, U et V deux sous-espaces supplémentaires de E . Chaque vecteur $z \in E$ peut être écrit de manière unique sous la forme

$$z = u + v \quad u \in U \quad v \in V.$$

L'application $s : E \rightarrow E$ qui à z associe $u - v$ **symétrie par rapport à U parallèlement à V** .

Proposition 29

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du \mathbb{K} -espace vectoriel E . On note s la symétrie sur U parallèlement à V . Alors,

1. Si p désigne la projection sur U parallèlement à V et q la projection sur V parallèlement à U , alors

$$s = p - q = 2p - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2q;$$

$$\text{on a également } p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E).$$

2. s est un automorphisme de E et

$$s \circ s = \text{Id}_E \quad \text{d'où} \quad s^{-1} = s.$$

On a donc $\text{Im } s = E$ et $\ker s = \{0_E\}$.

$$3. \quad U = \ker(s - \text{Id}_E) = \{z \in E \mid s(z) = z\}.$$

$$4. \quad V = \ker(s + \text{Id}_E) = \{z \in E \mid s(z) = -z\}.$$

Les espaces $\ker(s - \text{Id}_E)$ et $\ker(s + \text{Id}_E)$ sont appelés les **sous-espaces propres** de s .

§2 Les symétries sont les endomorphismes involutifs

Définition 30

Une application $s : E \rightarrow E$ telle que $s \circ s = \text{Id}_E$ est appelée **involution**.

Ce qui s'écrit également lorsque s est linéaire, $s^2 = \text{Id}_E$.

Théorème 31

Caractérisation des symétries

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $s \in \mathbf{L}(E)$ tel que $s \circ s = \text{Id}_E$. Alors

$$E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$$

et s est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.

33.4 SOMMES ET DIMENSION

§1 Base adaptée à une décomposition en somme directe

Théorème 32

Soit $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ est une famille libre d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors les sous-espaces vectoriels $\text{Vect} \{ v_1, \dots, v_k \}$ et $\text{Vect} \{ v_{k+1}, \dots, v_n \}$ sont en somme directe. Autrement dit

$$\text{Vect} \{ v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \} = \text{Vect} \{ v_1, \dots, v_k \} \oplus \text{Vect} \{ v_{k+1}, \dots, v_n \}.$$

Théorème 33

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que la somme $U + V$ est directe.

Soit (v_1, \dots, v_k) est une base de U et (v_{k+1}, \dots, v_n) est une base de V . Alors $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ est une base de $U \oplus V$. En particulier

$$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V).$$

La base $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ obtenue par **juxtaposition** des bases de U et V est dite **adaptée** à la décomposition en somme directe $U \oplus V$.

§2 Formule de Grassmann

Théorème 34

Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $U + V$ est de dimension finie et

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

§3 Caractérisation dimensionnelle des sous-espaces supplémentsaires

Théorème 35

Caractérisation en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = U \oplus V$.
2. $E = U + V$ et $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$.
3. $U \cap V = \{ 0 \}$ et $\dim(U) + \dim(V) = \dim(E)$.

Exemple 36

Soit D et D' deux droites vectorielles distinctes du plan $E = \mathbb{R}^2$. Alors $E = D \oplus D'$.

Exemple 37

Dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$. Soient respectivement D une droite vectorielle et P un plan vectoriel ne contenant pas D . Alors $V = D \oplus P$.