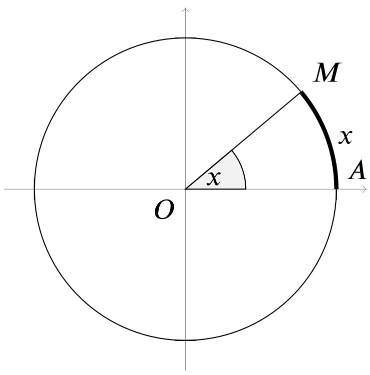
CHAPITRE 7

FONCTIONS CIRCULAIRES

7.1 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

§1 Le cercle trigonométrique

On utilisera souvent les fonctions **trigonométriques**, appelées fonctions **cosinus**, **sinus**, **tangente** et **cotangente**, abrégées par cos, sin, tan et cotan.



On peut définir géométriquement les fonctions trigonométriques à l'aide du «cercle trigonométrique». On note $\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan, C le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique** du repère $\mathfrak{R}$. On appelle A le point du cercle de coordonnées $(1, 0)$. Un point M se déplace le long du cercle. On repère M par le réel x, qui est la distance AM parcourue sur le cercle s'il s'est déplacé dans le sens direct, et qui est son opposé s'il s'est déplacé dans le sens contraire. Le cercle étant de circonférence égale à 2π, M se confond avec A si $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Par définition,

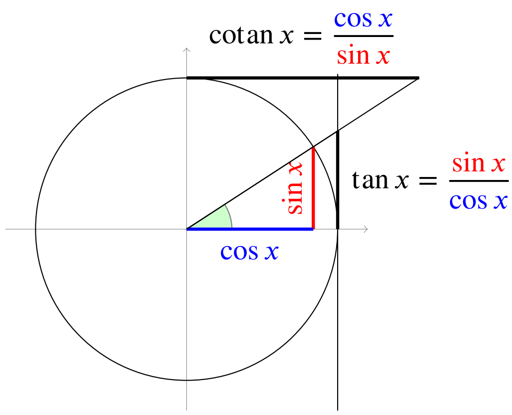
Définition 1 l'abscisse de M est $\cos x$ et son ordonnée est $\sin x$.

Lorsque M n'est pas sur l'axe (Oy), c'est-à-dire lorsque $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple de π, notons T l'intersection de la droite OM et de la droite Δ d'équation $x = 1$. Par définition,

Définition 2 l'ordonnée de T est $\tan x$.

Lorsque M n'est pas sur l'axe (Ox), c'est-à-dire lorsque x n'est pas multiple de π, notons T' l'intersection de la droite OM et de la droite Δ' d'équation $y = 1$. Par définition,

Définition 3 l'abscisse de T' est $\operatorname{cotan} x$.



Par le théorème de Pythagore

Proposition 4 *Pour tout réel x,*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Remarque Pour les fonctions trigonométrique, l'habitude est de noter

$$\sin^2(x) = (\sin x)^2 \qquad \cos^2(x) = (\cos x)^2 \qquad \tan^2(x) = (\tan x)^2\,.$$

On fait de même pour les autres puissances, même pour -1:

$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad \cos^{-1}(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad \tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan x},$$

et ceci n'a rien à voir avec une quelconque fonction réciproque (qui n'existe pas pour les fonctions sin, cos, tan).

Par le théorème de Thalès,

Proposition 5

1. *Si $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple de π, alors*
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$
2. *Si x n'est pas multiple de π, alors*
$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$
3. *Si x n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{2}$, alors*
$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

C'est pour cela que cotangente est peu utilisé.

4. *Si $x - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple de π, alors*

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Proposition 6 *Si on donne deux réels u et v vérifiant $u^2 + v^2 = 1$, alors le point de coordonnées (u, v) se trouve sur le cercle trigonométrique, et il existe un réel x, unique modulo 2π, tel que*

$$u = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

Proposition 7 *Si x et y sont deux réels*

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi \iff x \equiv y \pmod{2\pi}.$$

§2 Signe et valeurs remarquables

Tableau des signes

	Quadrants			
x	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{cotan} x$	$+$	$-$	$+$	$-$

Valeurs remarquables du premier quadrant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{cotan} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

7.2 Formulaire de Trigonométrie

Les fonctions trigonométriques vérifient des formules tout à fait remarquables *à retenir impérativement*.

Les formules contenant uniquement les fonctions sinus et cosinus sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Les formules contenant une tangente sont valables uniquement sur leur ensemble de définition.

§1 Angles associés

Ces égalités sont, de préférence, à mémoriser visuellement, sur le cercle trigonométrique ou sur les courbes des fonctions circulaires.

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x & \tan(-x) &= -\tan x\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \frac{1}{\tan x}\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\frac{1}{\tan x}\\
\sin(\pi-x) &= \sin x & \cos(\pi-x) &= -\cos x & \tan(\pi-x) &= -\tan x\\
\sin(\pi+x) &= -\sin x & \cos(\pi+x) &= -\cos x & \tan(\pi+x) &= \tan x
\end{aligned}$$

§2 Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y & \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y\\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y & \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y
\end{aligned}$$

Lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x+y \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

§3 Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x,\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.
\end{aligned}$$

Lorsque $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

§4 Formules de Carnot

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

§5 Formules de l'angle moitié

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, lorsque $x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

§6 Formules de Simpson inverses

$$\begin{aligned}
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right), \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right), \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).
\end{aligned}$$

§7 Formules de Simpson

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}, \\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.
\end{aligned}$$

7.3 Équations trigonométriques

§1 La notion de congruence

Un air de «déjà vu»...

Définition 8 Soit x, y, ϕ trois réels. L'écriture

$$x \equiv y \pmod{\phi}$$

signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\phi$. On dit que «x est **congru** à y **modulo** ϕ». Les réels x et y diffèrent donc d'un multiple entier de ϕ, ce que l'on peut écrire $x - y \in \phi\mathbb{Z}$.

Notation

Pour tous nombres réels a et b, on note $a + b\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + kb$, où $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit

$$a + b\mathbb{Z} = \{ a + kb \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Exemple 9

L'ensemble des multiples entiers de π sera donc noté $\pi\mathbb{Z}$, celui des multiples entiers de 2π est noté $2\pi\mathbb{Z}$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Proposition 10

Règles de calcul sur les congruences
Soient $x, x', y, y', \phi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Si $x \equiv y \pmod{\phi}$ et $x' \equiv y' \pmod{\phi}$ alors $x + x' \equiv y + y' \pmod{\phi}$.*
2. *$x \equiv y \pmod{\phi}$ si et seulement si $\lambda x \equiv \lambda y \pmod{\lambda\phi}$.*
3. *Si $x \equiv y \pmod{n\phi}$ alors $x \equiv y \pmod{\phi}$*

Démonstration. **1.** On suppose que $x \equiv y \pmod{\phi}$ et $x' \equiv y' \pmod{\phi}$. Alors, il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $x = y + k\phi$ et $x' = y' + l\phi$, ainsi

$$x + x' = y + y' + (k + l)\phi \text{ et } k + l \in \mathbb{Z},$$

et donc $x + x' \equiv y + y' \pmod{\phi}$.

2. $\Longrightarrow$ On suppose que $x \equiv y \pmod{\phi}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\phi$, ainsi

$$\lambda x = \lambda y + k(\lambda\phi) \text{ et } k \in \mathbb{Z},$$

et donc $\lambda x \equiv \lambda y \pmod{\lambda\phi}$.

$\Longleftarrow$ La réciproque découle de l'implication précédente appliquée à $1/\lambda$.

3. On suppose que $x \equiv y \pmod{n\phi}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + kn\phi$, ainsi

$$x = y + (kn)\phi \text{ et } kn \in \mathbb{Z}$$

et donc $x \equiv y \pmod{\phi}$.

∎

Test 11

Déterminer l'unique nombre réel α appartenant à $[0, 2\pi[$ et congru à $-\frac{7}{15}\pi$ modulo 2π.

Test 12

Résoudre l'équation $5x + \pi/2 \equiv 0 \pmod{\pi}$.
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

§2 Résolution d'équations trigonométriques

Théorème 13

Si x et y sont deux réels, alors

$$\cos x = \cos y \iff \left(x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi}\right)$$

$$\sin x = \sin y \iff \left(x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi}\right)$$

Si x et y appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on a

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \pmod{\pi}$$

§3 Principe de superposition des sinusoïdes

Proposition 14

Superposition des sinusoïdes

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \phi).$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors ϕ est unique modulo 2π.

7.4 Étude des fonctions trigonométriques

§1 Étude des fonctions cosinus et sinus

Proposition 15

1. *Pour tout réel x,*

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

2. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques. Pour tout réel x et tout entier k,*

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

3. *La fonction* cos *est paire et la fonction* sin *est impaire. Pour tout réel x,*

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

Le lemme suivant, relativement clair sur le dessin, ne se démontre pas si facilement géométriquement.

Lemme 16 **Admis**
Pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) \leq |x|.$$

Lemme 17 **Continuité du sinus et du cosinus en 0**
Les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Démonstration. D'après le lemme 16, on a pour $x \in [0, \pi/2]$ l'inégalité

$$0 \leq \sin x \leq x,$$

on a donc, par encadrement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sin x = 0$. Puisque la fonction sinus est impaire, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} = 0 = \sin 0$; la fonction sinus est donc continue en 0.

Puisque la fonction cosinus prend ses valeurs entre 0 et 1 sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $\cos^2(x) \leq \cos(x) \leq 1$, c'est-à-dire

$$1 - \sin^2 x \leq \cos x \leq 1,$$

et puisque le sinus tend vers 0 en 0, on a par encadrement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \cos x = 1$. Puisque la fonction cos est paire, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. ∎

Des premier et second lemmes, nous déduisons la limite du rapport $\sin(x)/x$ lorsque x tend vers 0 ; cette quantité n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0. Ce résultat prouve donc la dérivabilité de la fonctions sinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du sinus en 0 : $\sin'(0) = 1$.

Le second résultat prouve la dérivabilité du cosinus en 0 et précise la valeur du nombre dérivé du cosinus en 0 : $\cos'(0) = 0$.

Lemme 18

1. *Le rapport* $\frac{\sin x}{x}$ *tend vers* 1 *lorsque* x *tend vers* 0.
2. *Le rapport* $\frac{\cos x - 1}{x}$ *tend vers* 0 *lorsque* x *tend vers* 0.

Démonstration. **1.** D'après le lemme 16, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, \pi/2[$, on a $\sin x \leq x \leq \tan x$, d'où $x \cos x \leq \sin x \leq x$, ou encore

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sin x}{x} = 1$. La fonction $x \mapsto \sin x/x$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ étant paire, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -2\frac{\sin^2(x/2)}{x} = -\frac{x}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2.$$

Puisque $x/2$ tend vers 0 avec x, on déduit du résultat précédent et du théorème de composition des limites que le rapport $\frac{\sin(x/2)}{x/2}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 ; d'après le théorème sur le produit des limites, il en est de même de son carré. Et, toujours par ce même théorème, le rapport $\frac{\cos x - 1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. ∎

Théorème 19

Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus
Les fonctions sin *et* cos *sont définies et dérivables (donc continues) sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

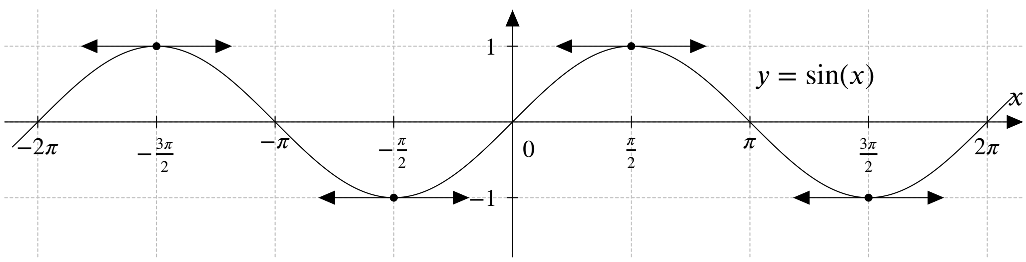
$$\cos' = -\sin \quad \textit{et} \quad \sin' = \cos.$$

Démonstration. Soit $x, h \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h),$$

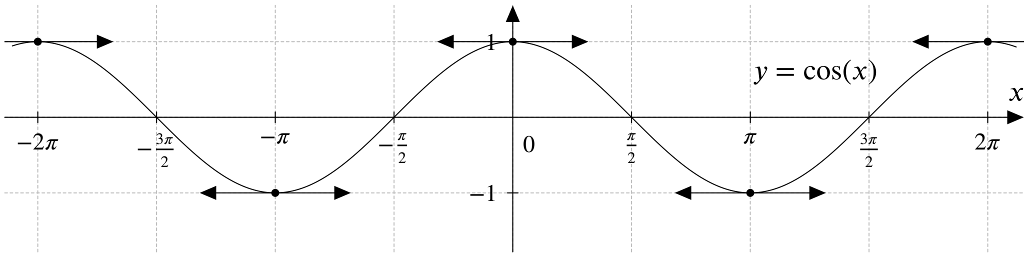
la fonction sinus est dérivable en x de dérivée $\sin(x) \times 0 + \cos(x) \times 1 = \cos(x)$.
On raisonne de la même façon pour la fonction cosinus. ∎

La fonction sinus est impaire et 2π-périodique ; il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.[1] La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$. Le sinus est donc croissant sur $[0, \pi/2]$ (de 0 à 1) puis décroissant sur $[\pi/2, \pi]$ (de 1 à 0). La courbe représentative du sinus admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $x \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$. La tangente à l'origine est d'équation $y = x$ (il s'agit de la première bissectrice du repère). On en déduit la courbe représentative de la fonction sinus.



[1]On pourrait encore réduire l'intervalle d'étude car pour $x \in [0, \pi]$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. La courbe de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$.

On peut faire une étude similaire pour le cosinus, mais la relation $\cos(x) = \sin(x+\pi/2)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, montre que la courbe de la fonction cosinus s'obtient en translatant celle du sinus du vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{e_1}$.



§2 Étude de la fonction tangente

Proposition 20

1. *La fonction* tan *est définie sur*

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

par la relation $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

2. *La fonction* tan *est* π*-périodique. Pour tout réel* x *tel que* $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ *et tout entier* k*,*

$$\tan(x + k\pi) = \tan x.$$

3. *La fonction* tan *est impaire. Pour tout réel* x *tel que* $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$*,*

$$\tan(-x) = -\tan(x).$$

Théorème 21

Dérivabilité de la fonction tangente

La fonction tan *est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition et on a*

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Démonstration. Puisque le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire là où le dénominateur ne s'annule pas, la fonction tangente est dérivable et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

∎

Proposition 22

On a les limites suivantes au bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -\pi/2 \\ >}} \tan(x) = -\infty.$$

Les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ *et* $x = \frac{\pi}{2}$ *sont donc asymptotes verticales à la courbe de la fonction* tan.

Démonstration. On rappelle que pour tout réel x appartenant à $[0, \pi/2[$, on a $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, or,

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \sin(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \cos(x) = 0+$$

d'où $\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \tan(x) = +\infty$.

On a un résultat analogue en $-\pi/2$ car tan est une fonction impaire. ∎

La fonction tangente est définie sur l'ensemble

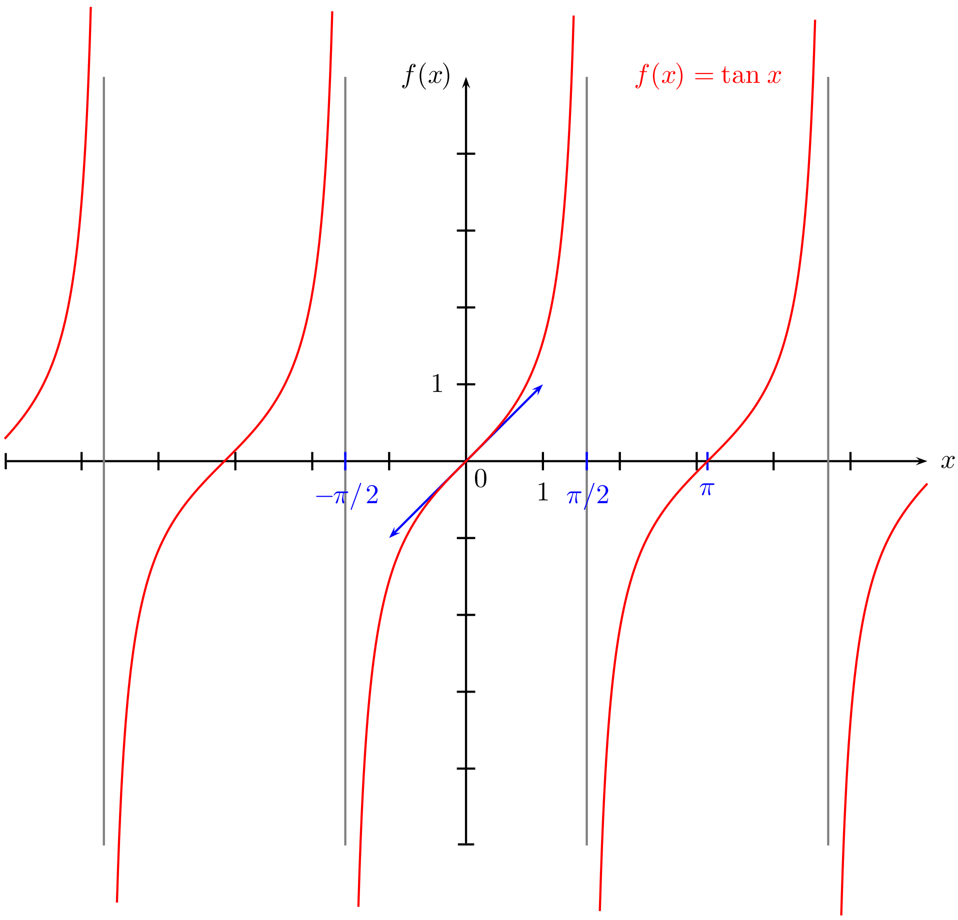
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

La tangente est une fonction impaire et π-périodique : il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/2[$ pour tracer sa courbe représentative sur $\mathcal{D}$. Enfin, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

La fonction tangente est donc strictement croissante sur $[0, \pi/2[$. De plus, $\tan'(0) = 1$; la droite d'équation $y = x$ est donc tangente à la courbe représentative de tan.

Remarquez que la fonction tangente réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$.



7.5 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

§1 La fonction arcsin

Pour tout x compris entre -1 et 1, l'équation d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sin \alpha = x$$

possède une infinité de solutions. La fonction arcsin en donne l'une d'elle.

Remarque La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. En effet ;

- Certain réels x n'ont pas d'antécédents par sin. Par exemple, il n'existe pas de réel α tel que $\sin \alpha = 2$.
- Il existe plusieurs réels α ayant la même image par sin. Par exemple, $0 = \sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = \dots$. Le réel 0 a donc plusieurs antécédents par sin.

Définition 23 La restriction $\widetilde{\sin} : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ de la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\sin}$ est appelée l'**arcsinus** et notée

$$\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \widetilde{\sin}^{-1}(x) \end{array}$$

La fonction arcsin est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arcsin x) \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

La fonction arcsinus *n'est pas* la réciproque de sin, mais celle d'une restriction bien choisie.

Exemple 24

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Test 25

Calculer.

1. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$.	**2.** $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.	**3.** $\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right)$.

Proposition 26

Propriétés de l'arcsinus

1. $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin(x)) = x$ *et* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \iff \arcsin(\sin x) = x$.

Démonstration. **1.** Soit $x \in [-1,1]$. D'après la définition de l'arcsinus, $\arcsin(x)$ est une mesure d'angle dont le sinus vaut x. Ainsi $\sin(\arcsin(x)) = x$. On a de plus $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. La fonction cosinus étant positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ auquel appartient $\arcsin(x)$, on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Soit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par définition de l'arcsinus, $\arcsin(\sin x)$ est l'unique $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin\alpha = \sin x$; puisque $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $x = \alpha = \arcsin(\sin x)$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arcsin(\sin x) = x$. Puisque l'arcsinus est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$, on a bien $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

∎

Proposition 27

Étude de l'arcsinus

1. *L'application* arcsin *est impaire et continue sur* $[-1,1]$.

2. *L'arcsinus est dérivable sur* $]-1,1[$ *avec*

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. *L'arcsinus n'est pas dérivable en* ± 1, *sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.*

Démonstration. **1.** La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée cos, qui est positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, ne s'annulant sur cet intervalle qu'en $\pm\pi/2$. La fonction sinus réalise donc une bijection strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1,1]$. De plus, ces deux ensembles étant des intervalles et $\widetilde{\sin}$ étant continue sa bijection réciproque $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue. De plus, l'arcsinus est une fonction impaire ; en effet, pour $x \in [-1,1]$,

$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin x) = -x \text{ et } -\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

c'est-à-dire $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$.[2]

[2] De manière générale, on peut montrer que la réciproque d'une bijection impaire est impaire.

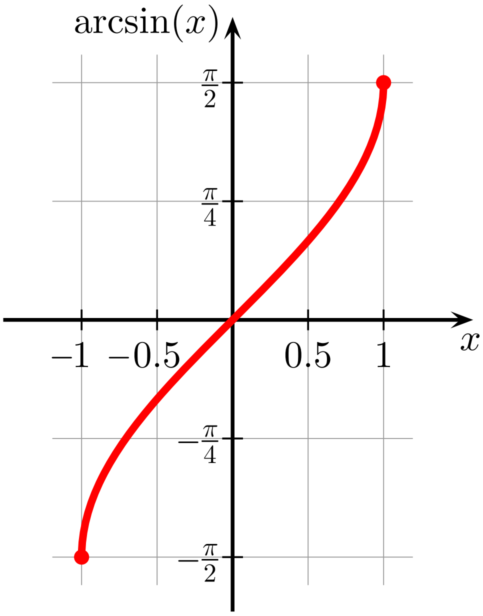
2. Soit $y \in [-1,1]$. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, la fonction arcsinus est dérivable en y si et seulement si

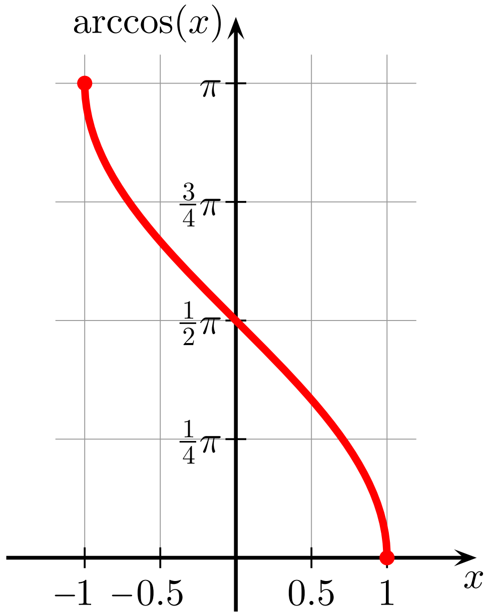
$$\sin'(\arcsin(y)) = \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2} \neq 0,$$

c'est-à-dire, si et seulement si $y \neq \pm 1$. La fonction arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$, avec sur cet intervalle $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

3. D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, le calcul de $\sin'(\arcsin y)$ montre que la courbe représentative de la fonction arcsin admet une tangente verticale aux points d'abscisses ± 1.

∎





§2 La fonction arccos

Définition 28 La restriction $\widetilde{\cos} : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ de la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\cos}$ est appelée l'**arccosinus** et notée

$$\arccos : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \mapsto & \widetilde{\cos}^{-1}(x) \end{array}$$

La fonction arccos est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arccos x) \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}.$$

Exemple 29

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-1) = \pi \qquad \arccos(1) = 0$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} \qquad \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Test 30

Calculer

1. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$.
2. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right)$.

Proposition 31

Propriétés de l'arccosinus

1. $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$ *et* $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \pi \iff \arccos(\cos x) = x$.

Test 32

Démontrer la proposition précédente.

Proposition 33

Étude de l'arccosinus

1. *L'application* arccos *est n'est ni paire ni impaire. Elle est continue sur* $[-1, 1]$.
2. *L'arccosinus est dérivable sur* $]-1, 1[$ *avec*

$$\forall x \in]-1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. *L'arccos n'est pas dérivable en* ± 1*, sa courbe représentative admettant en ces points une tangente verticale.*

Démonstration. ∎

Remarque

Soit $x \in [-1, 1]$. On a $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$. La courbe représentative de la fonction arccos est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

§3 La fonction arctan

Définition 34

La restriction $\widetilde{\tan}$: $\begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$ de la fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque de la fonction $\widetilde{\tan}$ est appelée l'**arctangente** et notée

$$\operatorname{arctan} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \widetilde{\tan}^{-1}(x) \end{array}$$

La fonction arctan est donc caractérisée par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \arctan x) \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple 35

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Test 36

Calculer

1. $\arctan\left(\tan\left(\frac{33\pi}{7}\right)\right)$. **2.** $\arctan\left(\tan\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right)$. **3.** $\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{7}\right)\right)$.

Proposition 37

Propriétés de l'arctangente

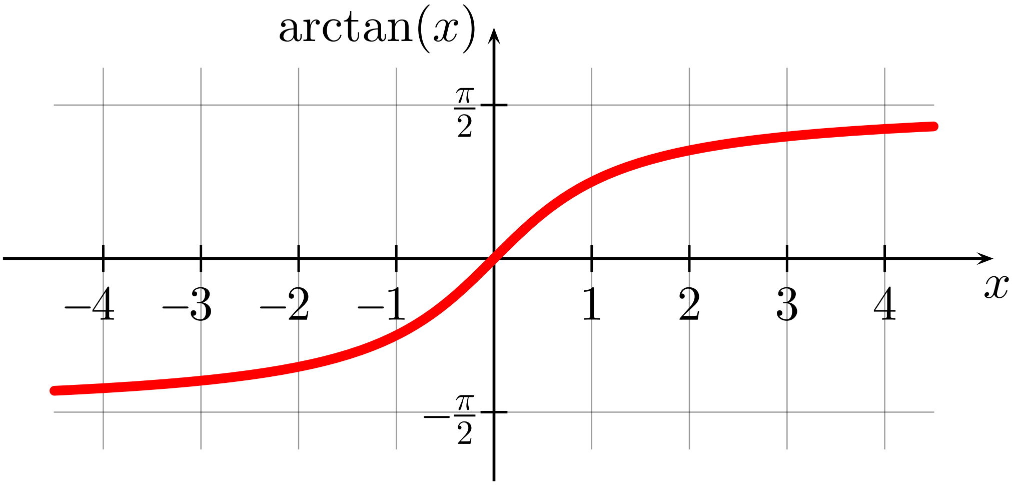
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \iff \arctan(\tan x) = x$.

Proposition 38

Étude de l'arctan

1. *L'application* arctan *est impaire et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *L'arctangente est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Les limites en $\pm\infty$ sont admises en début d'année. ∎



Test 39 Montrer que $2\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{4}{3}$.