Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Aperçu

1. Théorème de la borne supérieure
2. Les dix types d'intervalles de $\mathbb{R}$

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

D 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

T 2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

E 3

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0, 1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1, mais $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

C'est *la* propriété cruciale de $\mathbb{R}$.

D 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **la borne supérieure de A** et on la note $\sup A$.

On admet la propriété fondamentale suivante

T 2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

E 3

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2. La borne supérieure de $[0,1]$ est 1, c'est aussi son plus grand élément.
3. La borne supérieure de $[0,1[$ est 1, mais $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément.

R Il est faux que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ admet une «borne supérieure» dans $\mathbb{Q}$. Par exemple avec A=$\left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 < 2 \right\}$. L'ensemble des rationnels qui majore A est $[\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$: il n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{Q}$.

E 4 Soit

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Alors A n'a pas de plus grand élément et $\sup(A) = 0$.

T 5 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est majorée. Alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

D 6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **la borne inférieure de A** et on la note $\inf A$.

T 7 *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

T 8 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$ et que B est minorée. Alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$.

T 9 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{-x \mid x \in A\}$. Alors B est minorée et $\inf B = -\sup A$.

N On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ appelé droite numérique achevée.

D 10 Une partie I de $\mathbb{R}$ est **convexe** lorsque tout segment dont les extrémités sont deux éléments de I est inclus dans I, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in I^2, [x,y] \subset I.$$

ou encore

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

T 11 Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles ouverts**, de la forme*

$$\begin{aligned}
]a, +\infty[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \} \\
]-\infty, b[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \} \\
]a, b[&=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

T 11 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les **intervalles fermés**, de la forme*

$$\begin{aligned}
[a,+\infty[&= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\ \} \\
]-\infty, b] &= \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\ \} \\
[a,b] &=]-\infty, b] \cap [a,+\infty[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \} \\
]-\infty,+\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

*Les intervalles de la forme $[a,b]$ fermés et bornées sont aussi appelés **segments**.*

T 11 Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *Les intervalles de la forme*

$$]a, b] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\ \}$$
$$[a, b[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\ \}$$

Ces intervalles ne sont ni ouverts, ni fermés.

T 11 **Caractérisation des partie convexes de $\mathbb{R}$**

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les suivantes, les bornes a et b étant des nombres réels.

- *L'ensemble vide : $\emptyset$.*

R

- Noter que si $b < a$, alors $]a, b[= [a, b] = \emptyset$. Si $a = b$, on a $[a, a] = \{ a \}$.
- Par ailleurs, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles ouverts et fermés.

C 12 *Toute intersection d'intervalles est un intervalle.*