

# Chapter 19 Calcul matriciel élémentaire

## Exercice 1 (19.3)

Effectuer les produits des matrices.

$$\begin{array}{l|l} 1. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & 3. \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}. \\ 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & \end{array}$$

## Exercice 2 (19.3)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont définies ? Calculer les.

$$\begin{array}{l|l|l} 1. Ad & 4. C^T C & 7. Cd \\ 2. AB + C & 5. BC & 8. d^T d \\ 3. A + C^T & 6. d^T B & 9. dd^T. \end{array}$$

## Exercice 3 (19.3)

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Vérifier sur cet exemple l'associativité du produit matriciel  $ABC$ .

## Exercice 4 (19.3)

Déterminer, si possible, une matrice  $A$  et un scalaire  $x$  tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 15 & 0 \\ 24 & x \end{pmatrix}$$

## Exercice 5 (19.3)

Soit  $a = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)$ . Calculer  $aa^T$  et  $a^T a$ .

## Exercice 6 (19.4)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice  $(2, 2)$  telle que,

$$\forall B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K}), AB = BA.$$

Montrer que  $a = d$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ . En déduire que les seules matrices vérifiant cette propriété sont les multiples scalaires de la matrice unité  $I_2$ .

Pouvez-vous généraliser ce résultat aux matrices  $(3, 3)$  ? Aux matrices  $(n, n)$  ?

### Exercice 7 (19.4)

Pour toute matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on définit la trace de  $A$  par

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Calculer  $\text{Tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Montrer

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A).$$

On dit que la trace est linéaire.

3. Montrer que pour toutes matrices  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , on a

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

4. Existe-t-il deux matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB - BA = I_n$  ?

5. Trouver trois matrices  $A, B, C$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $\text{Tr}(ABC) \neq \text{Tr}(BAC)$ .

### Exercice 8 (19.4)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on considère les matrices  $A = (a_{i,j})$  et  $J$  la matrice dont tous les termes sont égaux à 1.

Calculer le produit  $JAJ$ .

### Exercice 9 (19.4)

Résoudre

$$A(X + B) - (C + D)X = A(A - X) - C(B + X)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 10 (19.5)

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices  $(n, n)$  inversibles. En utilisant la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que  $AB$  est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

### Exercice 11 (19.5)

Soit deux matrices  $A$  et  $B$  telles que  $A$  et  $AB$  soient inversibles. On suppose

$$(AB)^{-1} = 2A^{-1}. \quad (1)$$

Déterminer  $B$ .

**Exercice 12 (19.5)**

Soit  $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

On pose  $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ .

1. Résoudre le système de quatre équations donné par l'équation matricielle  $BC = I_2$ ,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier alors que  $B$  est inversible en utilisant la définition de matrice inverse.

3. Vérifier à nouveau votre solution en calculant  $B^{-1}$  à l'aide du déterminant.

**Exercice 13 (19.5)**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 = A + 2I_3$ , où  $I_3$  est la matrice unité  $3 \times 3$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 14 (19.5)**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 15 (19.5)**

$A$  étant une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , montrer qu'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{K}$  tels que

$$A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0.$$

Quel est l'inverse de  $A$  si  $A$  est inversible ?

**Exercice 16 (19.6)**

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $M^2, M^3, M^4, M^5$ . En déduire  $M^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 17 (19.6)**

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant  $A = I_3 + B$ , calculer les puissances de  $A$ .

**Exercice 18 (19.6)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . On suppose qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $A^2 = aA + bI_p$ .

1. Démontrer qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = a_n A + b_n I_p$ .

2. En notant  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ , vérifier que  $X_{n+1} = BX_n$  pour une certaine matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

On suppose que l'équation  $r^2 - ar - b = 0$  possède deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{pmatrix}$ .

3. Démontrer que  $P$  est inversible et que  $P^{-1}BP$  est diagonale ; les coefficients de cette dernière seront exprimés uniquement en fonction de  $r_1$  et  $r_2$ .
4. En déduire une expression simple de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

**Exercice 19 (19.6)**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $U = (A - I_3)(2A + I_3)$ ,  $V = (2A + I_3)^2$ ,  $AU$  et  $AV$ .
2. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tels que  $A = aU + bV + cI_3$ .
3. En déduire, pour tout entier  $k \geq 1$ , une expression de  $A^k$  comme combinaison linéaire de  $U$ ,  $V$  et  $A^{k-1}$ .
4. En déduire que, pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $B^k - B^{k-1} = \frac{2}{3}U + \frac{(-2)^k}{6}V$ , où  $B = -2A$ .
5. En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $B^n$ , puis de  $A^n$ , comme combinaison linéaire de  $U$ ,  $V$  et  $I_3$ .

**Exercice 20 (19.6)**

Sur le plan d'une ville, on a  $n$  carrefours  $C_1, \dots, C_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On définit une matrice  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en posant  $V[i, j] = 1$  si une rue mène directement du carrefour  $C_i$  au carrefour  $C_j$  en automobile, sans passer par un autre carrefour ;  $V[i, j] = 0$  sinon. On convient  $V[i, i] = 0$ .

1. Que dire de  $V$  si toutes les rues sont à double sens ?
2. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $V^k[i, j]$  – le coefficient de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de  $V^k$  – est le nombre d'itinéraires de  $C_i$  à  $C_j$  empruntant  $k$  rues, distinctes ou non. On appelle  $k$ -chemins ces itinéraires.
3. On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $V^N = 0$ . Montrer que, pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le nombre total  $\gamma_{i,j}$  de chemins de  $C_i$  à  $C_j$  est fini. On pose  $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer  $(I_n + \Gamma) = (I_n - V)^{-1}$ .

**Exercice 21 (19.7)**

Résoudre l'équation d'inconnue  $A$

$$\left( 5A^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right)^T = 3A + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1)$$

**Exercice 22 (19.7)**

Déterminer la matrice  $A$  si

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 23 (19.7)**

Soit  $A$  une matrice  $(m, n)$  et  $B$  une matrice  $(n, n)$ . Simplifier l'expression

$$(A^T A)^{-1} A^T (B^{-1} A^T)^T B^T B^2 B^{-1}$$

en supposant que les matrices inverses apparaissant dans l'expression sont bien définies.

**Exercice 24 (19.7)**

Soit  $A$  une matrice carrée  $(n, n)$ .

1. Montrer que la matrice  $A + A^T$  est symétrique et que la matrice  $A - A^T$  est antisymétrique.
2. Montrer que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

**Exercice 25 (19.7)**

1. Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice  $(m, n)$  sur le corps  $\mathbb{R}$ . Calculer  $\text{Tr}(AA^T)$ . En déduire

$$AA^T = 0 \implies A = 0 \text{ et } A^T = 0.$$

2. Les matrices  $A$ ,  $B$ , et  $C$  étant de dimensions convenables, prouver

$$BAA^T = CAA^T \implies BA = CA.$$

On se ramènera à la propriété précédente.

**Exercice 26 (19.7)**

Soit  $B$  une matrice  $(m, k)$ . Montrer que la matrice  $B^T B$  est une matrice symétrique  $(k, k)$ .

**Exercice 27 (19.8)**

L'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd  $\delta > 0$  de deux entiers  $u \geq v > 0$ , peut être décrit ainsi. On définit, par récurrence à deux pas, une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  en posant  $x_0 = u$  et  $x_1 = v$  et, tant que  $x_i > 0$ ,  $x_{i+1} = x_{i-1} \bmod x_i$  (le reste de la division euclidienne de  $x_{i-1}$  par  $x_i$ ) :

$$x_{i-1} = q_i x_i + x_{i+1}.$$

Il existe alors un entier  $k$  tel que  $x_k \neq 0$  et  $x_{k+1} = 0$  ; le pgcd de  $u$  et  $v$  est alors  $\delta = x_k$ . Démontrer que, pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{bmatrix}.$$

En déduire que  $x_i = a_i u + b_i v$ , où

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{bmatrix}.$$

Que valent les  $*$  de la deuxième ligne ? Donner une définition par récurrence mutuelle des suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$ , puis une méthode de calcul des coefficients de Bézout  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + bv = \delta$ .