Chapter 3 Arithmétique des entiers

Exercice 1 (3.0)

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que: $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

3. On considère le système (S): $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice 2 (3.1)
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{6n} - 6^{2n}$.

Exercice 3 (3.1)
Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.

2. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.

3. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.

4. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.

5. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 4 (3.1)
Déterminer l'ensemble E des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^2 + 7 \,\Big|\, n^3 + 5$.

Exercice 5 (3.1)
Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 6 (3.2)
Résoudre l'équation $xy + 6x - 3y = 40$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 7 (3.3)
Calculer $\text{pgcd}(424, 68)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 8 (3.3)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en discutant éventuellement suivant les valeurs de n, le pgcd des entiers suivants.

$$A = 9n^2 + 10n + 1 \qquad \text{et} \qquad B = 9n^2 + 8n - 1.$$

Exercice 9 (3.3)
On considère l'équation $(E)\,:\,26x + 15y = 1$ dans laquelle les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide pour les nombres 26 et 15.

2. En déduire une solution particulière de (E) puis l'ensemble des solutions de (E).

3. Utiliser ce qui précède pour résoudre l'équation $26x + 15y = 4$.

Exercice 10 (3.3)
Les nombres a, b étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.

2. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

3. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.

4. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.

5. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.

Exercice 11 (3.3)
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

1. $1260x + 294y = 3814$.

2. $1260x + 294y = 2814$.

Exercice 12 (3.4)
Combien 15! admet-il de diviseurs positifs ?

Exercice 13 (3.5)
Calculer 2000^{2000} modulo 7 et 2^{500} modulo 3.

Exercice 14 (3.5)
Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2022} par 11.

Exercice 15 (3.5)
15 pirates chinois se partagent un butin constitué de pièces d'or. Mais une fois le partage (équitable) effectué, il reste 3 pièces. Que va-t-on en faire ? La discussion s'anime. Bilan : 8 morts. Les 7 survivants recommencent le partage, et il reste cette fois ci 2 pièce ! Nouvelle bagarre à l'issue de laquelle il ne reste que 4 pirates. Heureusement, ils peuvent cette fois ci se partager les pièces sans qu'il n'en reste aucune.

Sachant que 32 Tsing-Tao (bière chinoise) coûtent une pièce d'or, combien (au minimum) de Tsing-Tao pourra boire chaque survivant ?

Exercice 16 (3.5)
Déterminer les nombres entiers x tels que $x^2 - 2x + 2$ soit divisible par 17.

Exercice 17 (3.5)
Soient $a \in \mathbb{N}^\star$ et N le nombre de diviseurs positifs de a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant uniquement sur N pour que a soit un carré parfait.