Chapter 27 Relations de comparaisons

Exercice 1 (27.0)

1. Déterminer une fonction simple équivalente à f en $+\infty$ et en 0.

(a) $f(x) = x^2 + x$.
(b) $f(x) = x + \sqrt{x}$.
(c) $f(x) = x + 1 + \ln x$.
(d) $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$.
(e) $f(x) = e^x + \sin x$.
(f) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

2. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to 0$.

(a) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$.
(b) $f(x) = \ln(\cos x)$.
(c) $f(x) = \dfrac{(\tan x)(\ln(1+x))}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

3. Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$.

(a) $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.
(b) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$.

Solution 1 (27.0)

1. (a) Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \sim x^2$, car $x = o(x^2)$.
Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim x$, car $x^2 = o(x)$.

(b) Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \sim x$, car $\sqrt{x} = o(x)$.
Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim \sqrt{x}$, car $x = o(\sqrt{x})$.

(c) Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \sim x$, car $1 = o(x)$ et $\ln x = o(x)$.
Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim \ln x$, car $1 + x = o(\ln x)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $1 + x$ est bornée au voisinage de 0.

(d) Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \sim (\ln x)^2$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $u \underset{u\to+\infty}{=} o(u^2)$.
Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim (\ln x)^2$, car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $u \underset{u\to-\infty}{=} o(u^2)$.

(e) Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \sim e^x$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et sin est bornée ($\sin x = O(1)$.
Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim 1$, car $\lim\limits_{x\to 0} e^x + \sin x = 1$.

(f) Lorsque $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Or $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$, c'est-à-dire $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right)$, d'où

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right) \sim 2\sqrt{x}.$$

Finalement, $f(x) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Lorsque $x \to 0$, $f(x) \sim 1$, car $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$.

Variante (avec une composée.) Lorsque $x \to +\infty$,

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) \sim \sqrt{x}\frac{1}{2x}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0$ et $\sqrt{1+u}-1 \underset{u\to 0}{\sim} u/2$.

2. (a) Lorsque $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc $f(x) \sim x^2$.

(b) Lorsque $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc

$$f(x) = \ln(1+\cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

(c) Lorsque $x \to 0$, $\sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{x^2}{2}$ car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\sqrt{1+u}-1 \underset{u\to 0}{\sim} u/2$. On a donc

$$f(x) \sim \frac{x \times x}{x^2/2} = 2.$$

3. (a) Lorsque $x \to +\infty$,

$$f(x) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 0$, donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\ln\left(x^2\right)\right)$. Finalement,

$$f(x) \sim \ln\left(x^2\right) = 2\ln(x).$$

Exercice 2 (27.0)

Déterminer des équivalents simples lorsque $x \to 0$ de

1. $\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$.
2. $\ln(\cos x)$.
3. $a^x - 1$ où $a \in]0,+\infty[$.
4. $x^x - 1$.
5. $(8+x)^{1/3} - 2$.

Solution 2 (27.0)

1. Lorsque $x \to 0$, $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ et $\ln(1+x) \sim x$; d'où le quotient $\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$ est équivalent au voisinage de 0 au quotient $\frac{\frac{x^2}{2}}{x}$, c'est-à-dire
$$\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

2. Puisque $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a, lorsque $x \to 0$,
$$\ln(\cos x) = \ln(1+\cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

3. On a $a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1$. Or $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $x \ln a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc
$$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ln a.$$

4. On a $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1$, or $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc
$$x^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ln x.$$

5. On a $(8+x)^{\frac{1}{3}} - 2 = 2\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - 2 = 2\left(\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$. Or $(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{3}u$ et $\frac{x}{8} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc
$$(8+x)^{\frac{1}{3}} - 2 \underset{x\to 0}{\sim} 2\frac{1}{3}\frac{x}{8} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{12}.$$

Exercice 3 (27.0)

En se servant éventuellement d'équivalents, déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.
4. $\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x}$.

Solution 3 (27.0)

1. Puisque $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\lim_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$, on a lorsque $x \to 0$,

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \sim \frac{\cos x - 1}{x^2} \sim \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

2. On a $\lim_{x\to 0} -x = 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc lorsque $x \to 0$,

$$\frac{1-e^{-x}}{\sin x} \sim \frac{-(-x)}{x} = 1,$$

d'où $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x} = 1$.

3. Lorsque $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \sim \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x} = \frac{3}{2},$$

d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{3}{2}$.

4. Pour x au voisinage de 0,

$$(1+\tan x)^{1/\sin x} = e^{\ln(1+\tan x)/\sin x}.$$

Or $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, d'où, lorsque $x \to 0$,

$$\frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \sim \frac{\tan x}{x} \sim \frac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Et puisque exp est continue au point 1 (on ne peut pas composer les équivalents par exp),

$$\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+\tan x)/\sin x} = \exp(1) = e.$$

Exercice 4 (27.0)

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin x}}$, $x \to 0^+$.
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$, $x \to +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$, $x \to \dfrac{\pi}{2}$.
4. $f(x) = \cos(\sin x)$, $x \to 0$.
5. $f(x) = x^x - 1$, $x \to 0^+$.
6. $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$, $x \to 1$.

Solution 4 (27.0)

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc

$$\ln(1+\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} \tan x.$$

Lorsque $x \to 0+$, $\sin x \sim x$ donc $\sqrt{\sin x} \sim \sqrt{x}$ et finalement

$$f(x) \sim \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}.$$

2. Lorsque $x \to +\infty$,

$$x^3 - 1 \sim x^3 \quad \text{donc} \quad \sqrt{x^3-1} \sim x^{3/2}$$

$$x^2 + 2 \sim x^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt[3]{x^2+2} \sim x^{2/3}$$

et finalement,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2+2}} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} \sim x^{5/6}.$$

3. Lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, alors $h = x - \frac{\pi}{2} \to 0$, et

$$\begin{aligned} f(x) = f(\pi/2+h) &= \frac{1}{\cos(\pi/2+h)} - \tan(\pi/2+h) \\ &= \frac{-1}{\sin h} - \frac{\cos h}{-\sin h} = \frac{\cos h - 1}{\sin h} \sim \frac{-h^2/2}{h} \sim \frac{-h}{2} = \frac{\pi/2 - x}{2}. \end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\sin x) = 1$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

5. Lorsque $x \to 0+$,

$$f(x) = e^{x\ln x} - 1.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc

$$f(x) \underset{x\to 0+}{\sim} x\ln x.$$

6. Lorsque $x \to 1$, $h = x - 1 \to 0$ et

$$f(x) = f(1+h) = \frac{\cos(\pi + \pi h) + 1}{\sqrt{h^2}} = \frac{1 - \cos(\pi h)}{|h|}.$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \pi h = 0$ et $1 - \cos u \underset{u \to 0}{\sim} u^2/2$, d'où

$$f(x) = f(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{(\pi h)^2}{|h|} = \pi^2 |h|,$$

ou de manière équivalente, lorsque $x \to 1$,

$$f(x) \sim \pi^2 |x - 1|.$$