Chapter 28 Dérivation

Exercice 1 (28.0)

En utilisant la définition, déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7$.
2. $f(x) = -5x$.
3. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$.
4. $f(x) = x^2 + x - 3$.
5. $f(x) = x^3 - 12x$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
7. $f(x) = \sqrt{x+4}$.
8. $g(x) = -3$.
9. $f(x) = 3x + 2$.
10. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x$.
11. $f(x) = 2 - x^2$.
12. $f(x) = x^3 + x^2$.
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
14. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Solution 1 (28.0)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0 \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$
L'application f est donc dérivable et au point a et $f'(a) = 0$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-5x + 5a}{x - a} = -5 \xrightarrow[x \to a]{} -5.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = -5$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $s \neq a$,
$$\frac{h(s) - f(a)}{s - a} = \frac{3 + \frac{2}{3}s - 3 - \frac{2}{3}a}{s - a} = \frac{\frac{2}{3}s - \frac{2}{3}a}{s - a} = \frac{2}{3} \xrightarrow[s \to a]{} \frac{2}{3}.$$
L'application h est donc dérivable au point a et $h'(a) = -\frac{2}{3}$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + x - 3 - a^2 - a + 3}{x - a} = \frac{x^2 - a^2 + x - a}{x - a} = x + a + 1 \xrightarrow[x \to a]{} 2a + 1.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = 2a + 1$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - 12x - a^3 + 12a}{x - a} = \frac{x^3 - a^3 - 12(x - a)}{x - a} = x^2 + ax + a^2 - 12 \xrightarrow[x \to a]{} 3a^2 - 12.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = 3a^2 - 12$.

6. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$. Pour $x \neq a$ au voisinage de a,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{a-1}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{(x-1)(a-1)}}{x - a} = -\frac{1}{(x - 1)(a - 1)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{-1}{(a - 1)^2}.$$
L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2}$.

7. L'application f et définie sur $[-4, +\infty[$. Soit $a \geq -4$. Pour $x \in [-4, +\infty[$ avec $x \neq a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{a+4}}{x - a} = \frac{x + 4 - a - 4}{(x - a)(\sqrt{x+4} + \sqrt{a+4}} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{a+4}}.$$

Or $\lim_{x\to a} \sqrt{x+4} + \sqrt{a+4} = 2\sqrt{a+4}$. On a donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a+4}} & : a > -4 \\ +\infty & : a = -4. \end{cases}$$

L'application f est donc dérivable en a si $a > -4$ et alors $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a+4}}$.

L'application f n'est pas dérivable en -4.

13. L'application f est définie sur $\mathbb{R}^\star$. Soit $a \in \mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq a$ au voisinage de a, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a} = \frac{a^2 - x^2}{(x - a)x^2a^2} = -\frac{a + x}{x^2a^2} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{2a}{a^4} = \frac{-2}{a^3}.$$

L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = \frac{-2}{a^3}$.

14. L'application f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Soit $a > 0$. Pour $x > 0$ avec $x \neq a$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{a}}}{x - a} = 4\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{(x - a)\sqrt{x}\sqrt{a}} &= 4\frac{a - x}{(x - a)\sqrt{x}\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{a}\sqrt{x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{-4}{\sqrt{a}\sqrt{a} \times 2\sqrt{a}} = \frac{-2}{a^{3/2}}. \end{aligned}$$

L'application f est donc dérivable au point a et $f'(a) = \frac{-2}{a^{3/2}}$.

Exercice 2 (28.0)

Soient V un voisinage de x_0 et f, g deux fonctions définies sur V et dérivables en x_0.
Montrer que si : $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ et $f(x_0) = g(x_0)$, alors $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Application : $f(x) = x \cos x$; calculer $f'(k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sans calculer $f'(x)$ d'une façon générale.

Solution 2 (28.0)
Si $x \in V$, $x > x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x0}.$$

Par compatibilité de la relation $\leq$ avec la limite, on obtient lorsque $x \underset{>}{\rightarrow} x_0$

$$f'_d(x_0) \leq g'_d(x_0).$$

Si $x \in V$, $x < x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x0}.$$

et lorsque $x \underset{<}{\rightarrow} x_0$

$$f'_g(x_0) \geq g'_g(x_0).$$

Les fonctions f et g étant dérivables en x_0, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ et $g'(x_0) = g'_g(x_0) = g'_d(x_0)$, d'où

$$f'(x_0) = g'(x_0).$$

Application : Si k est pair, on peut utiliser la fonction $g : x \mapsto x$. On a alors

$$f(k\pi) = k\pi = g(k\pi) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f(x) \leq g(x) & : x \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) & : x \leq 0 \end{cases}$$

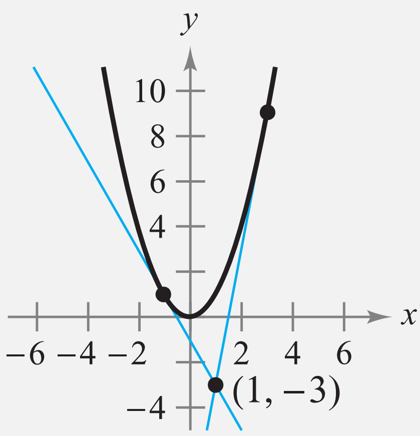
D'où $f'(k\pi) = g'(k\pi) = 1$ (inverser le rôle de f et g si $k < 0$).
Si k est impair, on peut utiliser la fonction $g : x \mapsto -x$.

Exercice 3 (28.0)

Déterminer les équations des deux tangentes à la courbe de

$$f : x \mapsto x^2$$

passant par le point $A(1, -3)$.



Solution 3 (28.0)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$. La tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a admet pour équation cartésienne

$$y = 2a(x - a) + a^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad T_a : y = 2ax - a^2.$$

Enfin

$$A \in T_a \iff -3 = 2a \times 1 - a^2 \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a = -1 \text{ ou } a = 3)$$

Conclusion

Il y a deux tangente à la courbe de f passant par le point $A(1, -3)$:

$$T_1 : y = -2x + 1 \qquad \text{et} \qquad T_3 : y = 6x - 9.$$

Exercice 4 (28.0) *Tangentes perpendiculaires en une infinité de points d'intersection*

1. Justifier que l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ équivaut à l'équation $\tan(x) = \frac{1}{x}$ sur un certain ensemble D à préciser.

2. Pressentir graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos(x) = x\sin(x)$ sur $[0, +\infty[$.

3. Prouver qu'en tout point M_0 d'intersection des deux courbes d'équation $y = \cos(x)$ et $y = x\sin(x)$, les tangentes en M_0 à ces deux courbes sont perpendiculaires.

Rappel. Les deux droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et $y = \alpha x + \beta$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\alpha a = -1$.

Solution 4 (28.0)

Exercice 5 (28.0)

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes en précisant le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
2. $g(x) = \sin\left(x^2\right) + x\ln\left(1+x^2\right)$.
3. $h(x) = \dfrac{\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solution 5 (28.0)

1. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x^2+1 \in]0,+\infty[\,.$$

La fonction $f = g \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(u(x))\,u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à images dans $\mathbb{R}$. La fonction $g_1 = \sin \circ u : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1'(x) = \sin'(u(x))\,u'(x) = \cos\left(x^2\right) \times 2x.$$

De plus, la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $v : x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à image dans $[1,+\infty] \subset]0,+\infty[$. La fonction $g_2 : x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_2'(x) = \ln'(v(x))\,v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction $g_3 : x \mapsto xg_2(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_3'(x) = \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Conclusion

La fonction $g = g_1 + g_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x\cos\left(x^2\right) + \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

3. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à images dans $\mathbb{R}$). La fonction $h_1 : x \mapsto \exp\left(x^2\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_1'(x) = 2x\exp\left(x^2\right).$$

La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1+x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à images dans $]0,+\infty[$. La fonction $h_2 : x \mapsto \ln\left(1+x^4\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_2'(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}.$$

Ainsi, la fonction $h_3 = h_1 h_2 : x \mapsto \exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_3'(x) = 2x\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right) + \exp\left(x^2\right)\frac{4x^3}{1+x^4} = \exp\left(x^2\right)\left(2x\ln\left(1+x^4\right) + \frac{4x^3}{1+x^4}\right).$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et l'application $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$. La fonction $h_4 : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_4'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Remarquons que h_4 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $h = h_3/h_4$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient défini de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= \frac{h_3'(x)h_4(x) - h_3(x)h_4'(x)}{h_4(x)^2}\\ &= \frac{\exp\left(x^2\right)\left(2x\ln\left(1+x^4\right) + \frac{4x^3}{1+x^4}\right)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x\left(\exp\left(x^2\right)\ln\left(1+x^4\right)\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Exercice 6 (28.0) *Calcul de dérivées*

Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que la fonction dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto xe^x \ln(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x\tan(x)}$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$.
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$.
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
6. $f_6 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.
7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.
9. $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(x/3)}{1-\cos(x/3)}$.
10. $f_{10} : x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.
11. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.
12. $f_{12} : x \mapsto |x|^3$.
13. $f_{13} : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$.
14. $f_{14} : x \mapsto x+\dfrac{\ln(|x|)}{|x|}$.
15. $f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$.
16. $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x)-\cos(5x)}$.
17. $f_{17} : x \mapsto \left|x^2-3x+2\right|$.
18. $f_{18} : x \mapsto \ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)$.
19. $f_{19} : x \mapsto \sin^2(x)\sin\left(x^2\right)$.
20. $f_{20} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{x-1}{|x-1|}\right|\right)$.
21. $f_{21} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.
22. $f_{22} : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\right)$.
23. $f_{23} : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.
24. $f_{24} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}+\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.
25. $f_{25} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.
26. $f_{26} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.
27. $f_{27} : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.
28. $f_{28} : x \mapsto \ln(e^x-e^{-x})$.
29. $f_{29} : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.
30. $f_{30} : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{\ln(x-1)}$.
31. $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

Solution 6 (28.0)

Les réponses sont données ci-après, j'espère sans coquille. Bien sûr, la dérivabilité doit être parfaitement justifiée.

1. $f_1 : x \mapsto xe^x\ln(x)$ est définie, dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_1'(x) = e^x\left(x\ln(x)+\ln(x)+1\right).$$

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x\tan(x)}$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_2'(x) = \frac{2x^2\cos(x) - (\cos(x) + x\sin(x))\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}.$$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ 0, 1 \}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_3'(x) = \frac{2x - x^2 - 2}{x(x-1)^2}e^{1/x}.$$

4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$ est définie, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_4'(x) = \frac{2x^2\ln(x) + 1 - x^2}{x\ln^2(x)}.$$

5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, on a

$$f_5'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6. $f_6 : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. est définie sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_6'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. est définie, dérivable sur $]1,1[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_7'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

8. $f_8 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. est définie, dérivable sur $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ et sur D, on a

$$f_8'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

9. $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(x/3)}{1-\cos(x/3)}$. est définie, dérivable sur $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]6k\pi, 6\pi + 6k\pi[$ et sur cet ensemble, on a

$$f_9'(x) = -\frac{1}{3(1-\cos(x/3))}.$$

10. $f_{10} : x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$. est définie, dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ -1, 1 \}$ et sur D, on a

$$f_{10}'(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}\left(\frac{2x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 2}{\left(x^2-1\right)^2}\right).$$

11. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$. est définie, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{11}(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)}.$$

12. $f_{12} : x \mapsto |x|^3$. est définie sur $\mathbb{R}$. Par les théorème calculatoires, f_{12} est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et on a

$$f'_{12}(x) = \begin{cases} -3x^2 & : x < 0 \\ 3x^2 & : x > 0 \end{cases}.$$

Si on étudie le taux d'accroissement de f entre x et 0, on remarque que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \pm\frac{x^3}{x} = \pm x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

ce qui signifie que f_{12} est aussi dérivable en 0 et que $f'_{12}(0) = 0$.

13. $f_{13} : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$. est définie sur $]0,+\infty[$, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0,1[, f'_{13}(x) = -x\frac{4\ln(x)+1}{2\sqrt{-\ln(x)}}$$
$$\forall x \in]1,+\infty[, f'_{13}(x) = x\frac{4\ln(x)+1}{2\sqrt{\ln(x)}}.$$

14. $f_{14} : x \mapsto x + \dfrac{\ln(|x|)}{|x|}$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{14}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1+\ln(-x)}{x^2} & : x < 0 \\ \dfrac{x^2+1-\ln(x)}{x^2} & : x > 0. \end{cases}$$

15. $f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^{\ln(x)}}{\cos(x)}$. est définie, dérivable sur $]0,+\infty[\setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{N} \}$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{15}(x) = \frac{\cos(x) + x\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

16. $f_{16} : x \mapsto \sqrt{\cos(3x)-\cos(5x)}$. est définie, dérivable sur l'union des intervalles du type

$$\left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[, \quad \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[, \quad \left]\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[.$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et sur chacun de ces intervalles, on a

$$f'_{16}(x) = \frac{5\sin(5x)-3\sin(3x)}{\sqrt{\cos(3x)-\cos(5x)}}.$$

17. $f_{17} : x \mapsto \left|x^2-3x+2\right|$. est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{ 1,2 \}$ et on a

$$\forall x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[, f'_{17}(x) = 2x-3$$
$$\forall x \in]1,2[, f'_{17}(x) = 3-2x.$$

18. $f_{18}\ :\ x \mapsto \ln\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)$. est définie, dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]\ln(2), +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{18}(x)=\frac{2e^{2x}-3e^{x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}.$$

19. $f_{19}\ :\ x \mapsto \sin^2(x)\sin\left(x^2\right)$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{19}(x)=\sin(2x)\sin\left(x^2\right)+2x\sin^2(x)\cos\left(x^2\right).$$

20. $f_{20}\ :\ x \mapsto \ln\left(\left|\frac{x}{|x|}+\frac{x-1}{|x-1|}\right|\right)$. est définie, dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et sur cet ensemble, sa dérivée est nulle.

21. $f_{21}\ :\ x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$. est définie sur $]0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et sur $]0,1[$, on a

$$f'_{21}(x)=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

22. $f_{22}\ :\ x \mapsto \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\,-1,0\,\}$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{22}(x)=\frac{1}{x\,(x+1)}.$$

23. $f_{23}\ :\ t \mapsto \ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$. est définie, dérivable sur $D=]-1,1[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{23}(x)=\frac{-4x}{1-x^4}.$$

24. $f_{24}\ :\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}+\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$. est définie, dérivable sur $D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{24}(x)=\frac{2}{\cos^3(x)}.$$

25. $f_{25}\ :\ x \mapsto \ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$. est définie, dérivable sur $D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{25}(x)=\frac{2}{\cos(2x)}.$$

26. $f_{26}\ :\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$. est définie, dérivable sur $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\,-\frac{\pi}{2}+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\,\right\}$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{26}(x)=\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}.$$

27. $f_{27}\ :\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{27}(x)=\frac{1}{(1+|x|)^2}.$$

28. $f_{28} : x \mapsto \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$. est définie, dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{28}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

29. $f_{29} : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$. est définie, dérivable sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{29}(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln(x)\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

30. $f_{30} : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)}$. est définie, dérivable sur $]1, 2[\cup]2, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{30}(x) = \frac{2x(x-1)\ln(x-1) - x^2 + 4}{(x-1)\ln^2(x-1)}.$$

31. $f_{31} : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$. est définie, dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur cet ensemble, on a

$$f'_{31}(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}.$$

Exercice 7 (28.0)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux manières différentes.

1. En dérivant de deux façons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^n$.
2. En utilisant la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ valable pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$.

Solution 7 (28.0)

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, et donc
$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$
et en évaluant en 1,
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = \boxed{n2^{n-1}}.$$
2. Le premier terme de la somme étant nul, on a
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}$$
Or,
$$(1+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} 1^{n-p}1^p = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}.$$
Finalement, $\boxed{A_n = n2^{n-1}}$.

Exercice 8 (28.0)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. *Vrai ou Faux ?*

1. Si f est périodique, alors f' est périodique.
2. Si f' est périodique, alors f est périodique.
3. Si f est paire, alors f' est impaire.
4. Si f est impaire, alors f' est paire.
5. Si f' est paire, alors f est impaire.

Solution 8 (28.0)

1. Vrai. En notant T une période de f, on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Les fonctions $x \mapsto f(x+T)$ et $x \mapsto f(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont même dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+T) = f'(x).$$

2. Faux. Contre exemple $f : x \mapsto x$ ou $f : x \mapsto x + \sin x, \ldots$
3. Vrai. On a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

Les fonctions $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto f(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont même dérivée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x).$$

La fonction f' est donc impaire.

4. Vrai. Mutatis mutandis la relation $f(-x) = -f(x)$ donne $-f'(-x) = -f'(x)$.
5. Faux. Prendre $f : x \mapsto 5$ ou $f : x \mapsto \cos(x) + 23$. Par contre, si f' est paire et $f(0) = 0$, alors f est impaire.

Exercice 9 (28.0)

Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{x-a}{x}\right)^x.$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Solution 9 (28.0)
On écrit

$$f(x) = e^{x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right)},$$

cette écriture n'ayant de sens que si $x \neq 0$ et $\frac{x-a}{x} > 0$. Un tableau de signes permet d'obtenir l'ensemble de définition de f

$$D = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]a, +\infty\right[.$$

La fonction $u : x \mapsto \frac{x-a}{x}$ est dérivable sur D et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus, pour $x \in D, u(x) \in \mathbb{R}_+^\star$. La fonction $g : \ln \circ u : x \mapsto \ln\left(\frac{x-a}{x}\right)$ est donc dérivable sur D et

$$\forall x \in D, g'(x) = \ln'(u(x))\, u'(x) = \frac{x}{x-a}\frac{a}{x^2} = \frac{a}{x(x-a)}.$$

La fonction $x \mapsto x$ est également dérivable sur D, donc le produit $h : x \mapsto x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right)$ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, h'(x) = \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + xg'(x) = \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + \frac{a}{x-a}.$$

De plus, pour $x \in D$, $h(x) \in \mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = \exp(h(x))\, h'(x) = \left(\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + \frac{a}{x-a}\right)\exp\left(x\ln\frac{x-a}{x}\right).$$

Lorsque $x \to \pm\infty$, $\frac{-a}{x} \to 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc

$$\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\frac{a}{x}.$$

Ainsi,

$$x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -a \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) = -a;$$

et puisque la fonction exp est continue en $-a$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{-a}.$$

(Attention, on peut composer les limites, pas les équivalents…)

Exercice 10 (28.0)

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ la fonction suivante est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & : x \in]0, b[, \\ x^2 + 12 & : x \in [b, +\infty[\end{cases} \end{array}$$

Solution 10 (28.0)

La fonction f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, b[$ et sur $]b, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, b[, f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]b, +\infty[, f'(x) = 2x$$

(CN) Supposons f de classe $\mathscr{C}^1$, elle est nécessairement continue au point b. Or

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = a\sqrt{b} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to b \\ >}} f(x) = b^2 + 12 \qquad \text{et} \qquad f(b) = b^2 + 12.$$

Ainsi, la fonction f est continue en b si, et seulement si $a\sqrt{b} = b^2 + 12$.

De plus, Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a de plus $\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ >}} f'(x) = f'(b)$. Or

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{b}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to b \\ >}} f'(x) = 2b.$$

On a donc $\frac{a}{2\sqrt{b}} = 2b$, c'est-à-dire $a = 4b\sqrt{b}$. D'où

$$\begin{cases} a\sqrt{b} = b^2 + 12 \\ a = 4b\sqrt{b} \end{cases} \iff \begin{cases} 4b^2 = b^2 + 12 \\ a = 4b\sqrt{b} \end{cases} \overset{b>0}{\iff} \begin{cases} b = 2 \\ a = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

(CS) Réciproquement, si $a = 8\sqrt{2}$ et $b = 2$. Pour $x \in]0, 2[$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{8\sqrt{2x} - 16}{x - 2} = 16\frac{\sqrt{2x} - 2}{2x - 4} = \frac{16}{\sqrt{2x} + 2} \xrightarrow[\substack{x \to 2 \\ <}]{} 4;$$

et pour $x \in]2, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 12 - 16}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 \xrightarrow[\substack{x \to 2 \\ <}]{} 4.$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ \neq}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4,$$

la fonction f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

On a de manière imédiate

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} 2x = 4,$$

donc $\lim_{x \to 2} f'(x) = f'(2)$. La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ au point $b = 2$.

Variante pour la (CS). En utilisant le théorème de prolongement de la dérivée qui sera vu ultérieurement. En supposant $a = 8\sqrt{2}$ et $b = 2$. On a

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 16 = f(2).$$

Donc f est continue en 2. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f'(x) = 4$$

donc $\lim_{x \to 2} f'(x) = 4$ et f est continue. D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$. Puisque $\lim_{x \to 2} f'(x) = f'(2)$, f est de classe $\mathscr{C}1$.

Conclusion

La fonction f est de classe $\mathscr{C}1$ si, et seulement si $a = 8\sqrt{2}$ et $b = 2$.

Exercice 11 (28.0)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 11 (28.0)

1. Pour $x \neq 0$, $|\sin 1/x| \leq 1$, on a
$$|f(x)| \leq x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
Par domination, f tend vers $0 = f(0)$ quand $x \to 0$: la fonction f est continue en 0.
2. Le taux d'accroissement de f en 0 est
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
La limite étant obtenue par encadrement comme ci-dessus. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable (Justifiez) et $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin(1/x) = 0$ et $-\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (sinon, cos aurait une limite en $+\infty$). Ainsi, $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0, c'est-à-dire f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 12 (28.0)

Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = (3x^2 + x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. $g(x) = \mathrm{e}^{x}\cos x$.

Solution 12 (28.0)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $u(x) = 3x^2 + x - 5$ et $v(x) = e^{-x}$. Les fonction u et v sont clairement dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ et

$$u'(x) = 6x + 1 \qquad u''(x) = 6 \qquad u^{(k)}(x) = 0 \qquad (k \geq 3).$$

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$v^{(k)}(x) = \begin{cases} e^{-x} & : \text{k est pair} \\ -e^{-x} & : \text{k est impair} \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \quad v^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}.$$

La formule de Leibniz permet donc d'écrire

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) + \cancel{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0} v^{(n-k)}(x)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0}(3x^2 + x - 5)(-1)^n e^{-x} + \binom{n}{1}(6x+1)(-1)^{n-1} e^{-x} + \binom{n}{2} 6(-1)^{n-2} e^{-x} \\
&= (-1)^n e^{-x}\left(3x^2 + x - 5 - n(6x+1) + \frac{n(n-1)}{2} 6\right) \\
&= \boxed{(-1)^n e^{-x}\left(3x^2 + (1-6n)x + 3n^2 - 4n - 5\right)}.
\end{aligned}$$

Problème 13 (28.0)

Soit n un entier naturel non nul.

1. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z''(t) + n^2 z(t) = 0. \tag{E_1}$$

2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0. \tag{E}$$

On considère une fonction $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose

$$z : \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\cos(t)) \end{array}.$$

(a) Indiquer pourquoi la fonction z est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ puis exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y', y'' et de t.

(b) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par z sur $]0,\pi[$ lorsque y vérifie l'équation (E) sur $]-1,1[$?

(c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

Solution 13 (28.0)

1. Le polynôme caractéristique de (E_1) est $P = X^2 + n^2$ et admet pour racines $-in$ et in.

Les solutions de l'équation (E_1) sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt) \end{array} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. (a) y est deux fois dérivable sur $]-1,1[$, cos est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ et $\cos(]0,\pi[) \subset]-1,1[$ donc z est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\sin t y'(\cos t) \\ z''(t) &= -\cos t y'(\cos t) + \sin^2 t y''(\cos t) \\ &= (1-\cos^2 t)y''(\cos t) - \cos t y'(\cos t). \end{aligned}$$

(b) Lorsque y est solution de (E),

$$\forall x \in]-1,1[, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0.$$

Or, pour $t \in]0,\pi[$, $\cos t \in]-1,1[$, d'où

$$(1-\cos^2 t)y''(\cos t) - \cos t y'(\cos t) + n^2 y(\cos t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$z''(t) + n^2 z(t) = 0.$$

L'application z est alors solution de (E_1).

(c) Si y est solution de (E), alors $z : t \mapsto y(\cos t)$ est solution de (E_1), donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in]0, \pi[, \, z(t) = \lambda \cos(nt) + \mu \sin(nt).$$

Soit $x \in]-1, 1[$ et $t = \arccos x \in]0, \pi[$, alors

$$y(x) = z(\arccos x) = \lambda \cos(n \arccos x) + \mu \sin(\arccos x).$$

Réciproquement, si

$$y : \begin{array}{rcl}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cos(n \arccos x) + \mu \sin(n \arccos x) \end{array}$$

alors y est dérivable deux fois et (*faites le calcul*)

$$y'(x) = \dots\dots \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \dots\dots$$

d'où (*faites le calcul*)

$$(1 - x^2) y''(x) - x y'(x) + n^2 y(x) = \cdots \cdots = 0.$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cos(n \arccos x) + \mu \sin(n \arccos x) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 (28.1)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et $L(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I.

1. L'ensemble $L(I)$ est-il stable pour l'addition ? pour la multiplication ?
2. Vrai ou Faux ? Si f est un élément de $L(I)$ et si f ne s'annule pas, alors $1/f$ est également dans $L(I)$.

Exercice 15 (28.1)

Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue en tout $a \in I$.

Solution 15 (28.1)

Exercice 16 (28.1)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Solution 16 (28.1)

La fonction f est dérivable en 0, donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0).$$

Nous allons appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire h définie sur $[0,1]$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & : x \in]0,1] \\ f'(0) & : x = 0. \end{cases}$$

La remarque précédente montrer que h est continue en 0, de plus, f est continue sur $]0,1]$ en tant que quotient de fonction continue sur $]0,1]$.

La fonction f est donc continue sur $[0,1]$. De plus, f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que quotient définit de fonctions dérivables sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[, h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

Enfin, $h(0) = f'(0) = f(1) = \frac{f(1)}{1} = h(1)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c)c - f(c) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Exercice 17 (28.1)

> **1.** Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 3 a au plus 3 zéros réels.
>
> **2.** Montrer qu'une fonction polynomiale de degré n a au plus n zéros réels.

Solution 17 (28.1)

1. Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction polynomiale de degré 3. Supposons qu'elle admette 4 zéros réels distincts a_0, a_1, a_2, a_3. On peut supposer $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$. Alors f est continue sur $[a_0, a_1]$, dérivable sur $]a_0, a_1[$ et $f(a_0) = f(a_1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a_0, a_1[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

De manière analogue, $f(a_1) = f(a_2) = 0$ donc il existe $c_2 \in]a_1, a_2[$ tel que $f'(c_2) = 0$. Enfin, de $f(a_2) = f(a_3)$, on obtient un $c_3 \in]a_2, a_3[$ tel que $f'(c_3) = 0$.

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Donc f' est une fonction polynomiale de degré 2 qui admet 3 zéros distincts : c_1, c_2, c_3, ce qui est impossible.

2. On effectue une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $R(n)$: «une fonction polynômiale de degré n admet au plus n zéros réels».

Remarque. $R(1)$, $R(2)$ sont des résultats classiques, $R(3)$ est la première question.

$R(1)$ est immédiat, une fonction polynômial de degré 1 est de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$. Elle admet un unique zéro qui est $-b/a$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $R(n)$. Considérons f, une fonction polynômiale de degré $n+1$. Nous allons montrer par l'absurde que f admet au plus $n + 1$ zéros réels. Supposons donc que f admettent $n + 2$ zéros réels distincts $a_0, \dots, a_{n+1}$ de sorte que $a_0 < \cdots < a_{n+1}$.

Soit $i \in [\![1, n + 1]\!]$. Alors f est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}, a_i[$ et

$$f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]a_{i-1}, a_i[$ tel que $f'(c_i) = 0$. Les c_i sont distincts, en effet

$$a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < c_n < a_n < c_{n+1} < a_{n+1}.$$

Or f' est une fonction polynômiale de degré n qui possède donc $n + 1$ zéros. Ceci est en contradiction avec $R(n)$. L'application f ne peut donc avoir $n + 2$ zéros distincts. On en déduit donc $R(n + 1)$ et le résultat général par récurrence.

Exercice 18 (28.1)

Déterminer les extrémums globaux pour chacune des fonctions sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = 3 - x$ sur $[-1, 2]$.
2. $g(x) = x^2 - 2x$ sur $[0, 4]$.
3. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3}$ sur $[-1, 1]$.

Solution 18 (28.1)

1. La fonction f est dérivable sur $]-1, 2[$ et $f'(x) = -1$. La fonction f n'a donc aucun point critique ; Les extrémums sont donc à rechercher au bornes de l'intervalle. On a

x	-1	2
$f(x)$	4	1

Donc $\min f = 1$ et ce minimum est atteint en 2 et $\max f = 4$ et ce maximum est atteint en -1.

2. La fonction g est dérivable sur $]0, 4[$ et $g'(x) = 2x - 2$. La fonction g a donc un seul point critique en 1. Les extrémums de g sont à rechercher au points $0, 1, 4$.

x	0	1	4
$g(x)$	0	-1	8

La fonction g a donc un minimum global en 1 et $\min g = -1 = g(1)$. La fonction g a donc un maximum global en 4 et $\max g = 8 = g(4)$.

Remarque. g admet un maximum local en 0.

3. La fonction g est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$g'(t) = \frac{2t(t^2+3) - t^2(2t)}{(t^2+3)^2} = \frac{6t}{(t^2+3)^2}$$
$$\text{et } g'(t) = 0 \iff t = 0.$$

Les extrémums de g sont à rechercher au points $-1, 0, 1$.

t	-1	0	1
$g(t)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

La fonction g a donc un minimum global en 0 et $\min g = 0 = g(1)$.

De plus, $\max g = \frac{1}{4}$; ce maximum est atteint en -1 et en 1.

Exercice 19 (28.1)

Montrer

$$\forall x \in \,]1, +\infty[\,, \ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x \ln x}.$$

Solution 19 (28.1)

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x}.$$

Soit $x \in]1, +\infty[$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, l'égalité des accroissements finis assure l'existence de $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x)) = (x+1-x)f'(c) = \frac{1}{c \ln c}.$$

Or $1 < x < c$ donc $c \ln c > x \ln x > 0$ et $\frac{1}{c \ln c} < \frac{1}{x \ln x}$ d'où

$$\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln x) \leq \frac{1}{x \ln x}.$$

Exercice 20 (28.1)

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right).$$

Solution 20 (28.1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Soit $x > 0$, appliquons l'égalité des accroissements finis à f sur $[x, x+1]$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$; il existe donc $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = (x+1-x)f'(c_x) = -\frac{1}{c_x^2} e^{1/c_x}.$$

On en déduit

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = -\frac{x^2}{c_x^2} e^{1/c_x}.$$

Or $x < c_x < x+1$ donc

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} < \frac{x}{c_x} < 1;$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{c_x} = 1$ par encadrement. De plus, $c_x > x$ on a donc $\lim_{x \to +\infty} c_x = +\infty$ puis

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{c_x} = 0 \qquad \text{or } \lim_{y \to 0} e^y = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{1/c_x} = 1.$$

Finalement

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to +\infty} -\left(\frac{x}{c_x} \right)^2 e^{1/c_x} = -1^2 \times 1 = -1.$$

Exercice 21 (28.1)

Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Solution 21 (28.1)

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[10000, 10001]$, dérivable sur $]10000, 10001[$; nous pouvons donc appliquer l'égalité des accroissements finis à f sur $[10000, 10001]$: il existe $c \in]10000, 10001[$ tel que

$$\sqrt{10001} - 100 = f(10001) - f(10000) = f'(c)(10001 - 10000) = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Or $10000 < c < 10001$, d'où

$$0 < \sqrt{10001} - 100 < \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}.$$

L'érreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100 est majorée par $\frac{1}{200} = 0.005$.

Exercice 22 (28.1)

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En déduire le comportement de la suite définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Solution 22 (28.1)

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction ln est continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Puis que $k < c < k+1$, on a donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k).$$

D'où, par telescopage,

$$S_n \geq \ln(n+1)$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on a donc par comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 23 (28.1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) \geq 1$.
2. Établir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Solution 23 (28.1)

1. Nous savons que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in R, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \implies f'(x) \geq M.$$

Exploitons la définition avec $M = 1$: il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \geq A, f'(x) \geq 1.$$

Quitte a remplacer A par $\max(A, 222)$, on peut supposer $A > 0$.

2. Soit $x > A$. La fonction f est continue sur $[A, x]$, dérivable sur $]A, x[$; l'égalité des accroissements finis assure l'existence de $c \in]A, x[$ tel que

$$f(x) - f(A) = f'(c)(x - A).$$

Or $c > A$, donc $f'(c) \geq 1$, de plus $x - A > 0$, on a donc

$$f(x) = f(A) + f'(c)(x - A) \geq f(A) + x - A.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} f(A) + x - A = +\infty$, et par comparaison

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

.

Exercice 24 (28.1)

Soit $f : [0, +\infty[$ dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution 24 (28.1)

Idée: On reprend l'idée de la démonstration du théorème de Rolle en cherchant un extremum local.

Si la fonction f est constante, le résultat est trivial. Supposons maintenant que f n'est pas constante. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose donc l'existence d'un $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) > 0$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies |f(x)| \leq f(a)/2.$$

Or f est continue sur le segment $[0, A]$, ainsi l'image de $[0, A]$ par f est un segment:

$$f([0, A]) = [m, M], \quad m \leq f(0) = 0 \leq M.$$

Il existe donc $c \in [0, A]$ tel que $f(c) = M$. Remarquons que l'inégalité $f(a) > f(a)/2$ assure que $a \in]0, A[$ et donc $f(c) \geq f(a) > f(A)$. Ainsi f admet un maximum local au point c et $c \in]0, A[$; puisque f est dérivable sur $]0, A[$, on a $f'(c) = 0$.

Variante. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaire sur $[a, A]$, on obtient $c > a$ tel que $f(c) = f(a)/2$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaire sur $[0, a]$, on obtient $d < a$ tel que $f(d) = f(a)/2$. On applique alors le théorème de Rolle sur $[c, d]$...

Remarque. Ce résultat reste vrai en supposant uniquement f continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Il suffit de remplacer f par $f - f(0)$ pour se ramener au cas de l'exercice.

Exercice 25 (28.1) *Le théorème de Darboux*

Le but de cette exercice est de démontrer le théorème de Darboux :

> Une fonction dérivée sur un intervalle, bien que non nécessairement continue, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit I un intevalle véritable de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Considèrons $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$ et λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On cherche donc à montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.
On considère les applications ϕ et ψ définie par

$$\phi : \begin{array}{ccc}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{array}$$

1. Montrer que ϕ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore ϕ ce prolongement.
2. Montrer que ψ se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On note encore ψ ce prolongement.
3. Soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\phi(c) = \lambda \text{ ou } \psi(c) = \lambda.$$

4. En déduire qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

Solution 25 (28.1)

1. La fonction ϕ est continue sur $]a, b]$ en tant que quotient défini de fonction continue sur $]a, b]$.

   De plus, f étant dérivable au point a,

$$\lim_{x \to a} \phi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

   L'application ϕ se prolonge donc par continuité en a en posant $\phi(a) = f'(a)$. Ce prolongement est continue en a et a fortiori sur $[a, b]$.

2. Même chose en prolongeant avec $\psi(b) = f'(b)$.

3. On remarque que $\phi(b) = \psi(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   Ainsi λ est nécessairement compris entre $\phi(a) = f'(a)$ et $\phi(b)$ ou est compris entre $\psi(a)$ et $\psi(b) = f'(b)$.

   Si λ compris entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$. Puisque ϕ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\phi(c) = \lambda$.

   Sinon, λ est compris entre $\psi(a)$ et $\psi(b) = f'(b)$. Puisque ψ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\psi(c) = \lambda$.

   Conclusion

   Il existe $c \in [a, b]$ tel que $\phi(c) = \lambda$ ou $\psi(c) = \lambda$.

4. *Premier cas.* Si $\lambda = f'(a)$ ou $\lambda = f'(b)$, on peut choisir $\alpha = a$ ou $\alpha = b$. Sinon, on a nécessairement $c \in]a, b[$.

Deuxième cas. Si $c \in]a, b[$ et $\phi(c) = \lambda$, c'est-à-dire

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \lambda$$

La fonction f est continue sur $[a, c]$ et dérivable sur $]a, c[$. D'après l'égalité des accroissement fini, il existe $\alpha \in]a, c[$ tel que

$$f(c) - f(a) = (c - a)f'(\alpha) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(\alpha) = \phi(c) = \lambda.$$

Troisième cas. Sinon, on a $c \in]a, b[$ et $\psi(c) = \lambda$. De manière analogue au cas précédent, la fonction f est continue sur $[c, b]$, dérivable sur $]c, b[$, donc il existe $\alpha \in]c, b[$ tel que

$$f(c) - f(b) = (c - b)f'(\alpha) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(\alpha) = \psi(c) = \lambda.$$

Conclusion

Il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(\alpha) = \lambda$.

Exercice 26 (28.1) *La règle de l'Hospital*

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Ce résultat porte parfois le nom de théorème de Cauchy ou formule des accroissements finis généralisée.

2. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

(a) Montrer que si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

(b) Vérifier que la réciproque est fausse en considérant

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x.$$

3. Applications : Calculer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad b)\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}, \quad \text{et} \quad c)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

La règle de l'Hospital est hors programme. Il est d'ailleurs amusant et surprenant de constater qu'il existe une espèce d'aura maléfique autour de cette règle, pourtant fort simple et performante, si bien que son utilisateur est souvent considéré comme ayant commis un sacrilège.

Solution 26 (28.1)

Remarquons que lorsque $g : x \mapsto x$, on retrouve l'égalité des acroissements finis pour le première question, et le théorème de prolongement des dérivée pour la seconde. Les solutions proposées ici s'inspire directement des démonstration de cours de ces théorèmes.

1. On définit une fonction auxiliaire h par

$$\forall x \in [a, b], h(x) = (f(x) - f(a))\, A - (g(x) - g(a))\, B,$$

où les constantes A et B sont choisies de manière à avoir $h(a) = h(b) = 0$. Or, on a toujours $h(a) = 0$ et

$$h(b) = (f(b) - f(a))\, A - (g(b) - g(a))\, B.$$

On choisit par exemple $A = g(b) - g(a)$ et $B = f(b) - f(a)$ de sorte à avoir $h(b) = 0$.

La fonction h est une combinaison linéaire des fonctions f, g et $\tilde{1}$, elle est donc continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $h(a) = h(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$Af'(c) - Bg'(c) = 0$$

ou encore

$$(g(b) - g(a))\, f'(c) - (f(b) - f(a))\, g'(c) = 0.$$

2. (a) Soit $x \in]a, b[$. Le résultat de la question 1 reste valable sur $[a, x]$. Ainsi, f et g sont deux fonctions continues sur $[a, x]$, dérivables sur $]a, x[$, donc il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$(f(x) - f(a))\, g'(c_x) = (g(x) - g(a))\, f'(c_x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'\left(c_x\right)}{g'\left(c_x\right)}.$$

Or $a < c_x < x$, on a donc

$$\lim_{x \to a} c_x = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

et par composition de limites

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$

Exercice 27 (28.1)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \sup_{t \in [x, x+1]} f(t).$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 27 (28.1)

Exercice 28 (28.1)

On considère l'application f et la suite (u_n) définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{x+2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que l'intervalle $]0, 1[$ est stable par f.
2. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $]0, 1[$.
4. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n.$$
5. Conclure.
6. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution 28 (28.1)

Exercice 29 (28.2)

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\sqrt{x} \end{array}.$$

1. En revenant à la définition.
2. En utilisant le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Solution 29 (28.2)

Soit $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \frac{-2\left(\sin\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2.$$

Or

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \text{ et } \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

ainsi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 1.$$

Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}\times 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 30 (28.2)

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = e^{|t|}. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.
3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Solution 30 (28.2)

1. Pour $t \in I_1$,

$$\text{(E)} \iff y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, de polynôme caractéristique $X + 1$ et second membre de la forme «polynôme-exponentielle».

Les solution de $y' + y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}$.

Une solution particulière (à chercher sous la forme $t \mapsto ate^{-t}$ car -1 est racine de $X + 1$) est $t \mapsto te^{-t}$

Les solution de l'équation (E) sur I_1 sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t+\lambda)e^{-t} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $t \in I_2$,

$$\text{(E)} \iff y'(t) + y(t) = e^{t}.$$

Les solution de $y' + y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}$.

Une solution particulière (à chercher sous la forme $t \mapsto ae^{t}$ car 1 n'est pas racine de $X + 1$) est $t \mapsto \frac{1}{2}e^{t}$.

Les solution de l'équation (E) sur I_2 sont donc les fonctions

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}e^{t} + \mu e^{-t} \end{array}, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Supposons f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors f est solution sur I_1 et I_2. Il existe donc des réels λ, μ, α tels que

$$f : x \mapsto \begin{cases} (t+\lambda)e^{-t} & t < 0 \\ \alpha & t = 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} + \mu e^{-t} & t > 0. \end{cases}$$

Or f est continue en 0 si et seulement si [1]

$$\lambda = \alpha = \frac{1}{2} + \mu.$$

Ceci étant vérifié, f est dérivable en 0 si et seulement si [2]

$$1 - \lambda = \frac{1}{2} - \mu.$$

[1] $\lim_{0-} f = f(0) = \lim_{0+} f = f(0) = \lambda = \alpha = \frac{1}{2} + \mu$.

[2] $f'_g(0) = f'_d(0) = 1 - \lambda = \frac{1}{2} - \mu$.

On obtient donc la condition $\lambda = \alpha = \frac{1}{2} + \mu$. Dans ce cas, $f'(0) = 1 - \lambda$.
Réciproquement, soit

$$f : t \mapsto \begin{cases} (t+\lambda)e^{-t} & t < 0 \\ \lambda & t = 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} + (\lambda - \frac{1}{2})e^{-t} & t > 0. \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'après les questions précédentes, une telle fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{\star}$. De plus, elle est dérivable d'après les calculs précédent et $f'(0) = 1 - \lambda$ et on a alors

$$f'(0) + f(0) = 1 - \lambda + \lambda = 1 = e^{|0|}.$$

Donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31 (28.2)

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\exp(1/x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f est continue sur D.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Vérifier que f, ainsi prolongée, est dérivable à gauche et à droite en 0. Est-elle dérivable en 0?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0.
5. Préciser un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de l'infini.
6. Cela vous permet-il d'obtenir une asymptote oblique de f?

Solution 31 (28.2)