Chapter 39 Intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Exercice 1 (39.4)

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution 1 (39.4)
Soit, pour $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on sait que g est nulle. Sinon, g change de signe sur $[0,1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins une fois. Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Variante : Appliquer le théorème de Rolle pour la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) - t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (39.4)

Déterminer les fonctions f continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Solution 2 (39.4)

Si $\int_0^1 f(t)\ dt \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\ dt \iff \int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^1 |f(t)|\ dt \iff \int_0^1 (|f(t)| - f(t))\ dt = 0 \\ \iff |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ \iff f = |f| \iff f \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t)\ dt \leq 0$, alors $\int_0^1 -f(t)\ dt \geq 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f = |-f|$ ou encore $f \leq 0$.

En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0, 1]$.

Exercice 3 (39.4)

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^n}{1+x} \end{array}.$$

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

2. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

Solution 3 (39.4)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ et $1 + x > 0$, d'où

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x},$$

c'est-à-dire $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc positive et décroissante.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $1 + x > 1$, d'où

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}}_{I_n} \leq \int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a donc par encadrement

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Exercice 4 (39.4)

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x \, \mathrm{d}x.$$

Solution 4 (39.4)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \operatorname{Arcsin}^n x \leq (\frac{\pi}{2})^n$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (\frac{\pi}{2})^n dx = \frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (39.4)

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x.$$

Solution 5 (39.4)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. [1]

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{-x \sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_0^\pi \left|\frac{-x \sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_0^\pi \frac{\pi}{0+n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{n}.
\end{aligned}$$

Or, $\frac{\pi^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc, par domination, $\int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x$ tend vers $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$ quand n tend vers $+\infty$.

[1] Ici, on conjecture que la limite de l'intégrale est l'intégrale de la limite. Ce n'est pas vrai en général, mais il faut bien partir de quelque chose…

Exercice 6 (39.4)

Pour $p, n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_p(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Solution 6 (39.4)

La fonction $t \mapsto t^p$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$; on a donc pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\forall t \in [k-1, k], t^p \leq k^p \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [k, k+1], k^p \leq t^p.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_{k-1}^{k} t^p \,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} k^p \,\mathrm{d}t = k^p \qquad \text{et} \qquad k^p = \int_{k-1}^{k} k^p \,\mathrm{d}t \leq \int_{k}^{k+1} t^p \,\mathrm{d}t$$

En somment ces inégalité, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} t^p \,\mathrm{d}t = \int_{0}^{n} t^p \,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} k^p \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} t^p \,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n+1} t^p \,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} \leq S_p(n) \leq \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

On a donc

$$1 \leq \frac{S_p(n)}{n^{p+1}/(p+1)} \leq \frac{(n+1)^{p+1}}{n^{p+1}} - \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Or, lorsque $n \to +\infty$, $(n+1)^{p+1} \sim n^{p+1}$, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1}}{n^{p+1}} - \frac{1}{(p+1)n^{p+1}} = 1.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}/(p+1)} = 1$$

c'est-à-dire

$$S_p(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Exercice 7 (39.4)

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer

$$H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$$

Solution 7 (39.4)

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi, pour $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \qquad \text{ainsi} \qquad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}.$$

De manière similaire, pour $k \geq 1$,

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \qquad \text{ainsi} \qquad \frac{1}{k} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

D'où, en sommant les inégalités

$$1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1 + \ln(n) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = H_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n+1).$$

Or

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ et } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0.$$

On a donc

$$\underbrace{1 + \frac{1}{\ln n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \underbrace{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

Donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1 \text{ c'est-à-dire } H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 8 (39.4)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n (on pourra intégrer par parties).
4. En déduire une expression factorisée de I_n pour $n \in \mathbb{N}$. On écrira le résultat avec des factorielles.
5. Montrer que la suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)$ est constante.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
7. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

Solution 8 (39.4)

1. On utilise le changement de variable (de classe $\mathscr{C}^1$) $x = \pi/2 - t$. Alors

$$I_n = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n x(-\,\mathrm{d}x) = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

2. On utilise la formule du binôme de Newton.

$$I_{2p+1} = \int_0^{\pi/2} \sin t(1-\cos^2 t)^p \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^{2k} t \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

3. Par intégration par parties (sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^1$),

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t = \big[-\cos t \sin^{n+1} t\big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t \,\mathrm{d}t.$$

Or $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, d'où $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+1}$ et donc

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. Pour $n = 2p$,

$$I_{2p} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} I_0 = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k(2k-1)}{2k2k} I_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 2p+1$, nous obtenons de même

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!},$$

car $I_1 = 1$.

5. De $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, nous déduisons que

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n = \cdots = I_1 I_0 = \pi/2.$$

La suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante.

6. Sur $[0, \pi/2]$, nous savons que $0 \leq \sin x \leq 1$, d'où $0 \leq \sin^{n+2} x \leq \sin^{n+1} x$, donc $0 \leq I_{n+2} \leq I_{n+1}$, puis $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ et nous obtenons finalement $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, car $I_n > 0$ puisque $(n+1)I_n I_{n+1}$ est non nul.

7. Or $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, donc $\big(I_{n+2}/I_n\big)$ tend vers 1 et $\big(I_{n+1}/I_n\big)$ aussi d'après l'inégalité précédente. Ainsi $I_{n+1} \sim I_n$. Or $(n+1)I_{n+1}I_n = \pi/2$, donc $I_n^2 \sim \pi/2n$ et le résultat demandé en découle.

Exercice 9 (39.4)

f est définie par $f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \, \mathrm{d}t$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition. Calculer $f'(x)$ de deux façons.

Solution 9 (39.4)

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $[1, 1+x^2] \subset]0, +\infty[$ et $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $[1, 1+x^2]$. Ainsi, l'intégrale $\int_1^{1+x^2} \ln t \, \mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$: l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$ et admet donc une primitive H sur cet intervalle. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = H(1+x^2) - H(1).$$
Or, la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à images dans $]0, +\infty[$, la fonctino H est dérivable sur $]0, +\infty[$, ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonction dérivables et
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xF'(1+x^2) = 2x \ln(1+x^2).$$

Autre méthode. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonction $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, 1+x^2]$. Ainsi, par intégration par parties, on a
$$\begin{aligned} f(x) = \int_1^{1+x^2} 1 \times \ln t \, \mathrm{d}t &= [t \ln t]_1^{1+x^2} - \int_1^{1+x^2} \frac{t}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= (1+x^2)\ln(1+x^2) - \ln 1 - (1+x^2-1) = (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2. \end{aligned}$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (justifiez) et
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x\ln(1+x^2) + (1+x^2)\frac{2x}{1+x^2} - 2x = 2x\ln(1+x^2).$$

Exercice 10 (39.4)

On considère l'application f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations de f.
5. À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

Solution 10 (39.4)

1. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout segment de la forme $[x, 2x]$ avec $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $u : t \mapsto -t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $[x, 2x]$ et $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, d'où

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}} = \int_x^{2x} \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+1}} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive H sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = H(2x) - H(x).$$

Les fonction $x \mapsto 2x$ et H étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f l'est également et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \geq 0 \iff 2\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{16x^4+1}$$
$$\iff 4(x^4+1) \geq 16x^4+1 \iff 12x^4 \leq 3 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, -1/\sqrt{2}]$, croissante sur $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, décroissante sur $[1/\sqrt{2}, +\infty[$.

Remarquons que cela est cohérent avec le fait que f soit impaire.

5. Soit $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$, alors

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Puisque $x < 2x$, on a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}.$$

Or $\lim_{x \to +\infty} 1/2x = 0$, on a donc par encadrement,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

De plus, f est une fonction impaire, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Exercice 11 (39.4) *Une intégrale à paramètre*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{1 + xt} \, dt.$$

1. Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Étudier les variations de f.
5. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Solution 11 (39.4)

Exercice 12 (39.4)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants

1. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4}$.
2. $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^2}{(n+2k)^3}$.
4. $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=2n}^{3n} e^{\frac{k}{n}}$.
5. $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}$.
6. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n} k \cos \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 13 (39.4)

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

Exercice 14 (39.4)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1. Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$\left|u_n(x) - \cos(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. En déduire que pour tout réel x,

$$\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 15 (39.4)

On cherche à calculer $I = \int_1^2 \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \frac{25}{x\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5} + \frac{dx+e}{\left(x^2+2x+5\right)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 16 (39.4)

1. Trouver les coefficients a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\,1, 2\,\},\ \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

et en déduire

$$\int_3^4 \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x.$$

2. Trouver les coefficients a, b, c, d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\,-2\,\},\ \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

et en déduire

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2x-2}{(x+2)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

3. Trouver les coefficients a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\,1\,\},\ \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

et en déduire

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Calcul intégral

Exercice 17 (39.4)

Vérifier les relations suivantes

1. $\displaystyle\int -\frac{6}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x^3} + C.$
2. $\displaystyle\int 8x^3 + \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C.$
3. $\displaystyle\int (x-4)(x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}} = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C.$

Exercice 18 (39.4)

Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int x\left(x^3+1\right)\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 19 (39.4)

Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les courbes d'équations

1. $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{x}, x = 0, x = 8, y = 0.$
4. $y = (3-x)\sqrt{x}, y = 0.$
5. $y = -x^2 + 4x, y = 0.$
6. $y = 1 - x^4, y = 0.$
7. $y = \dfrac{4}{x}, x = 1, x = e, y = 0.$
8. $y = e^x, x = 0, x = 2, y = 0.$

Exercice 20 (39.4)

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21 (39.4)

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22 (39.4)

Donner les primitives des fonctions f données ci-dessous sur l'intervalle I indiqué

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2 + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
6. $f(x) = -\frac{3}{x^5}$ sur $I =]-\infty, 0[$.
7. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0, +\infty[$.
8. $f(x) = x(x^2+1)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = (1-x^2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ sur $I =]-\infty, 3[$.
17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$ sur $I =]0, +\infty[$.
18. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 23 (39.4)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\ln t)^3 t}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

Indications :

1. $u = t^3$
2. $u = \sqrt{t}$
3. $u = 1 + t^2$
4. $u = \ln t$
5. $u = \ln t$
6. $u = \sqrt{t}$
7. $u = \cos t$
8. $u = \sin t$

Exercice 24 (39.4)

Utiliser une intégration par parties pour déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int (4x+7)e^x \,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int x \sin 3x \,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int x \cos 4x \,\mathrm{d}x.$

Exercice 25 (39.4)

Déterminer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2} \,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-2x} \,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cos 2x \,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin 2x \,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x \,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_0^1 x \arcsin x^2 \,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin x \,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x} \ln x \,\mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(4+x^2\right) \,\mathrm{d}x.$

Exercice 26 (39.4)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 27 (39.4)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

2. Déduire I_n en fonction de n.