

Travail individuel de rédaction en temps libre
À rendre le mardi 13 décembre

Exercice 1

On considère les matrices suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A Calcul des puissances de M .

- A1.** Déterminer l'expression de D^n , pour tout entier naturel n non nul.
- A2.** Calculer PQ . En déduire que P est inversible, et exprimer P^{-1} sous la forme d'un tableau de nombres.
- A3.** Calculer le produit $P^{-1}MP$.
- A4.** Montrer par récurrence que
- $$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = PD^nP^{-1}.$$
- A5.** Écrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

Partie B Suites définie par une relation de récurrence

On considère les suite (u_n) , (v_n) et (w_n) définie par

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{2} \\ w_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on note

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

- B1.** Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n .
- B2.** En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
- B3.** À l'aide des résultats obtenus à la question **A5**, déterminer alors l'expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .
- B4.** Déterminer la limite des suites (u_n) , (v_n) (w_n) .