Chapter 13 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (13.1)
Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont majorées, minorées. Puis déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $]0,1[$,
2. $[0,1[$,
3. $]1,+\infty[$,
4. $\mathbb{N}$,
5. $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^\star \right\}$,
6. $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$,
7. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \right\}$.

Exercice 2 (13.1)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $M = \sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 3 (13.1)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application croissante et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide majorée.

1. Montrer que $\sup(f(A)) \leq f(\sup A)$.
2. Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 4 (13.1)
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter : $x \in A + B \iff \cdots$.
2. Montrer que $A + B$ est non vide est majorée.
3. Déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 5 (13.2)
Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).
Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?