534. Centrale MP Analyse 2021.

a) CNS : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0$.

b) Soit $T \in T_n^+(\mathbb{K})$. Sq $C(T)$ est fermé.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/k^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

On a

$$(P_k^{-1} T P_k)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} (P_B)^{-1}_{i,m} T_{ml} \right) (P_k)_{lj}$$

$$\quad '' \quad = \sum_{l=1}^{n} k^{i-1} t_{il} (P_k)_{lj}.$$

$$\quad '' \quad = k^{i-1} t_{ij} k^{-(j-1)}$$

$$\quad '' \quad = t_{ij} k^{i-j}$$

$$P_k^{-1} T P_k = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} k^{-1} & \cdots & t_{1n} k^{1-n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} k^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{bmatrix}$$

donc

$$P_k^{-1} T P_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{nn} \end{pmatrix}}_{= D}$$

$D \in C(T)$ donc T est diagonalisable ($C(T)$ est un fermé).

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

$\Rightarrow$ On Sq $C(A)$ est un fermé. A est ~~diagonalisable~~ trigonalisable en une matrice T, avec T triangulaire supérieure.

$C(A) = C(T)$ donc $C(T)$ est ~~fermé~~ borné

puis A est diagonalisable

$\Leftarrow$ On sq A est diagonalisable.
Fixons D une matrice diagonale semblable à A. On a $C(A) = C(D)$.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $L \in M_n(\mathbb{K})$ tq $P_k^{-1} D P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} L$.

Soit μ un polynôme annulateur scindé simple de D.
On a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mu(P_k^{-1} D P_k) = P_k^{-1}\mu(P) P_k = 0.$$

On obtient $\mu(L) = 0$ donc L est diagonalisable.
On a $\forall k \in \mathbb{N},\ \chi_{P_k^{-1}DP_k} = \chi_D$ donc par unicité de la limite,
$\chi_D = \chi_L$ ($M \mapsto \chi_M$ C^0).

donc L est semblable à D puis $L \in C(A)$.

Pour $M_n(\mathbb{R})$? $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

⚠ La fonction "pol. min" n'est pas c^0 sur $M_n(\mathbb{C})$

Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$. On sq A et B sont semblables dans $\mathbb{C}$.
On mq elles sont semblables dans $\mathbb{R}$.

On fixe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = B$. $AP = PB$
On écrit $P = Q + iR$. Ainsi, $\begin{cases} AQ = QB \\ AR = RB \end{cases}$
$(Q,R) \in M_n(\mathbb{R})^2$.

$u(X) = \det(Q + XR)$. $u \in \mathbb{R}[X]$. $u(i) \neq 0$ donc
$\exists t \in \mathbb{R},\ u(t) \neq 0$.

On fixe t. Alors, $A(Q+tR) = \underbrace{(Q+tR)}_{\in GL_n(\mathbb{R})\ \text{ok}} B$

On a $\mu_A = \chi_A = X^2+1$.
$C_{\mathbb{R}}(A) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ \chi_M = \chi_A\}$.
$\subset$ semblable $\Rightarrow$ même χ
$\supset$ Soit $M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ \chi_M = \chi_A = X^2+1$. A et M sont diagonalisables dans $\mathbb{C}$ donc semblables dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, $C_{\mathbb{R}}(A) = \chi^{-1}(\{\chi_A\})$. Contre-exemple.