

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2022

MERCREDI 27 AVRIL 2022

08h00 - 12h00

FILIÈRE PSI

PHYSIQUE (XSR)

*Durée : 4 heures*

- *L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

## Étude et mesure des séismes

Dans ce problème, nous nous intéressons à la propagation des ondes mécaniques dans un solide pour caractériser la propagation d'ondes sismiques, générées par un séisme. On présentera d'abord un modèle de propagation d'ondes élastiques dans un solide, puis un modèle de source sismique. On s'intéressera ensuite à la propagation de ces ondes et les moyens de cartographie du sous-sol qu'elles fournissent. La présentation de dispositifs simples de détection des ondes sismiques constituera la dernière partie. Les parties trois et quatre sont indépendantes des parties une et deux.

### Notations, formulaire et données numériques.

- ★ Valeurs numériques pour le granite : module de YOUNG du granite  $E_{\text{gr}} \simeq 70 \text{ GPa}$ , masse volumique du granite  $\rho_{\text{gr}} \simeq 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- ★ Dans tout le problème, on notera  $\underline{X}(t)$ , la grandeur complexe associée à la grandeur réelle  $x(t) = \Re(\underline{X}(t))$ , harmonique de pulsation  $\omega$ , notée :

$$\underline{X}(t) = \underline{X} \exp(j\omega t), \quad (j^2 = -1)$$

où  $\underline{X}$  pourra dépendre de la pulsation.

## I Ondes mécaniques dans les solides

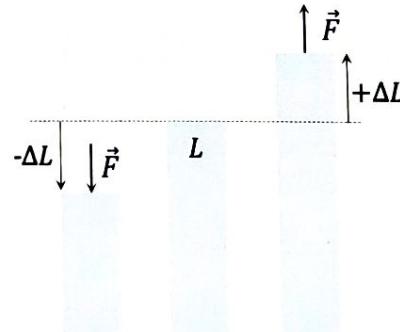


FIGURE 1 – Solide en compression ou en étirement.

On considère un échantillon parallélépipédique de section  $S$ , de longueur au repos  $L$  et de masse volumique  $\rho$ , considérée constante dans tout l'échantillon. Pour caractériser l'élasticité de l'échantillon on lui applique à ses extrémités une traction ou une compression. On notera  $\sigma$  la force par unité de surface que l'on applique, appelée contrainte dans la suite. La longueur initiale de l'échantillon passe de  $L$  à  $L + \Delta L$  quand ce dernier est soumis à une force  $\vec{F}$  (voir figure 1). Tant que le matériau est sollicité dans son domaine d'élasticité, ce que l'on considère dans la suite, la variation relative de longueur est proportionnelle à la force surfacique appliquée, selon l'expression suivante donnée par la loi de HOOK pour la déformation d'un solide,

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{\sigma}{E} , \quad (1)$$

avec  $E$  le module de YOUNG du matériau, caractérisant son élasticité.

- ✓ 1. Par analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du module de YOUNG.
- ✓ 2. Dans la limite d'un matériau idéal très rigide, proposer une valeur de  $E$ .

On s'intéresse maintenant à la propagation d'ondes mécaniques de compression-dilatation dans ce même échantillon solide. Le système étudié (figure 2) est une tranche de solide délimitée par les plans perpendiculaires à l'axe ( $Ox$ ), d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Cette tranche est supposée au repos en l'absence du passage d'une onde mécanique. On note  $\vec{u}(x, t) = u(x, t)\vec{e}_x$  le champ de déplacement dans le matériau, à l'abscisse  $x$  et à la date  $t$ , qui représente à l'instant  $t$  la déformation du matériau pour le point d'abscisse  $x$ , initialement au repos. Ce champ est unidirectionnel et la déformation est réalisée selon l'axe ( $Ox$ ). Au passage d'une onde, à l'instant  $t$ , la tranche de solide se déforme, de telle sorte que le plan situé à l'abscisse  $x$  au repos est déplacé à l'abscisse  $x + u(x, t)$  et celui situé en  $x + dx$  est déplacé en  $x + dx + u(x + dx, t)$ . Pour toutes ces déformations, on suppose que  $\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \ll 1, \forall x, \forall t$ . La force par unité de surface (contrainte) est positive dans la direction des  $x$  croissants.

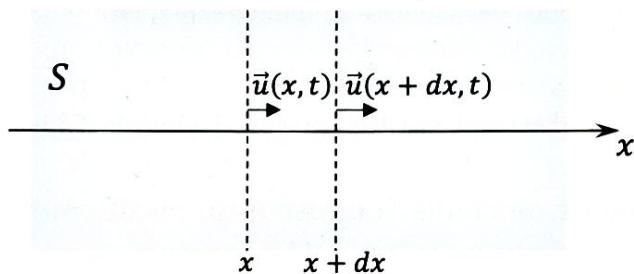


FIGURE 2 – Schéma du système d'étude subissant une déformation selon l'axe ( $Ox$ ). Le champ de déplacement  $\vec{u}$  est représenté aux abscisses  $x$  et  $x + dx$  et traduit le déplacement des deux plans perpendiculaires à l'axe ( $Ox$ ), à un instant  $t$ .

- ✓ 3. Exprimer la variation relative de longueur d'une tranche de solide située entre  $x$  et  $x + dx$  en fonction du champ de déplacement  $u(x, t)$ .
- ✓ 4. Montrer que  $\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .
- ✓ 5. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tranche  $[x, x + dx]$  de solide et établir l'expression de l'équation d'onde,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 0 , \quad (2)$$

où  $c_p$  est une célérité, dont on donnera l'expression en fonction de  $\rho$  et  $E$ . Donner le nom de cette équation.

- ✓ 6. Évaluer numériquement la célérité  $c_p$  pour le granite ( $\sqrt{7/25} \simeq 0,53$ ).

- ✓ 7. Rappeler la distinction entre une onde longitudinale et une onde transversale. En déduire si le champ de déplacement, dans la configuration précédente, décrit une onde longitudinale ou transversale.
- ✓ 8. Montrer que l'équation de propagation précédente (2) est compatible avec la conservation de l'énergie mécanique volumique, décrite par l'équation suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Pour établir cette équation, on pourra multiplier l'équation du mouvement (2) par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et utiliser l'expression  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)$ . Reconnaître les termes d'énergie volumique élastique, d'énergie volumique cinétique et le vecteur de POYNTING décrivant la propagation unidirectionnelle d'ondes de déformation, en justifiant brièvement.

## II Mécanisme de génération d'un séisme

Dans cette partie, nous étudions des modèles simplifiés expliquant la production d'ondes sismiques. La modélisation de la génération de séismes repose sur la prise en compte d'efforts de cisaillement à l'interface entre deux plaques tectoniques. Ce cisaillement va amener la rupture progressive des micro-contacts à l'interface entre ces deux couches solides et peut provoquer un séisme.

### II.A Étude d'une couche de solide soumise à un cisaillement

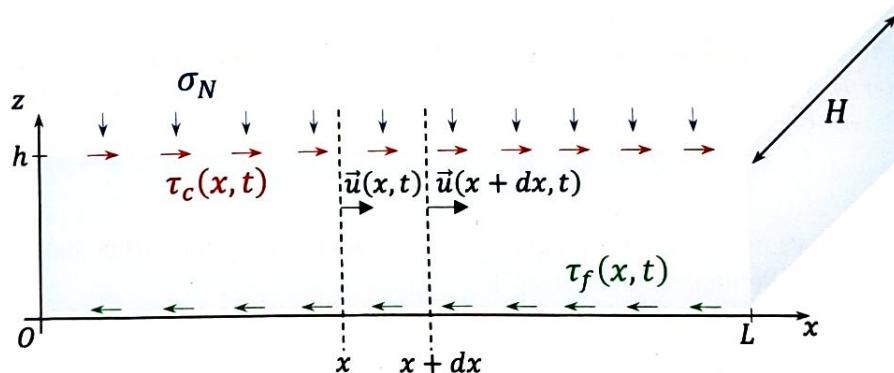


FIGURE 3 – Schéma d'une couche solide soumise à un cisaillement et en contact avec un substrat. On représente les notations uniquement dans le plan en coupe (Oxz).

On considère maintenant une couche de solide de hauteur  $h$ , de largeur  $H$  et de longueur  $L$ , telle que  $h \ll H, L$ . La figure 3 représente la couche de solide, en appui sur un substrat infiniment rigide. On applique une force normale ainsi qu'une force de cisaillement en haut de la couche de solide. On note la force de cisaillement par unité de surface  $\tau(x, z = h, t) = \tau_c(x, t)$ . Elle est homogène dans la direction ( $Oy$ ) et orientée dans la direction  $\vec{e}_x$ . La force normale par unité de surface est notée  $\sigma_N$ . Elle est homogène sur tout le solide et orientée selon  $-\vec{e}_z$ . Le solide peut glisser sur le substrat. On note  $\tau(x, z = 0, t) = \tau_f(x, t)$  la force de cisaillement par unité de surface résultant de ce glissement à l'interface. On la définit positive dans le sens des  $x$  négatifs, c'est-à-dire selon  $-\vec{e}_x$ . On notera  $\sigma_R$  la réaction normale surfacique exercée par le substrat sur la couche de solide. Tout mouvement du

solide dans la direction ( $Oz$ ) est négligé. Le champ de déplacement  $\vec{u}$  ne dépend que de  $x$  et de  $t$ . La déformation longitudinale de la couche induit, comme dans la partie précédente, l'apparition d'une force surfacique (contrainte) longitudinale dans la couche. Le lien entre cette contrainte et la déformation suit la même loi que dans la partie I.

- ✓9. Réaliser un bilan des forces exercées sur une tranche de solide située entre  $x$  et  $x + dx$ .  
 ✓10. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à cette même tranche et en déduire que la dynamique du champ de déplacement  $\vec{u}(x, t)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A (\tau_c(x,t) - \tau_f(x,t)) , \quad (4)$$

où  $A$  sera à déterminer.

- ✓ 11. Que devient l'équation de conservation de l'énergie mécanique volumique (3), déterminée dans la partie I ? Donner la signification physique des nouveaux termes apparaissant dans cette équation. Quel terme pourrait traduire un échauffement de l'interface ?

## II.B Premier modèle quasi-statique de fracture

On va maintenant considérer qu'une perturbation sous forme d'un glissement du système, décrite par le champ de déplacement  $\vec{u}(x, t)$ , évolue sur une distance caractéristique  $\ell$  et pendant une durée caractéristique  $T$  (figure 4). On notera  $u_0$  l'amplitude typique de la déformation caractérisant la perturbation et  $\tau_0$  le cisaillement typique auquel est soumis le système.

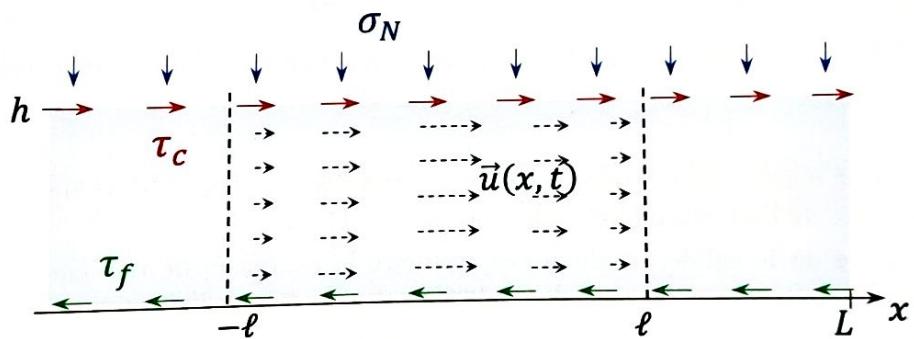


FIGURE 4 – Schéma du système d'étude soumis à différentes contraintes développant une perturbation de taille typique  $\ell$ .

On désigne par  $\tilde{g}$  la grandeur adimensionnée correspondant à une grandeur  $g$  quelconque.

12. Montrer que l'équation adimensionnée se met sous la forme

$$\frac{\ell^2}{T^2 c_s^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tau_0 \ell^2}{u_0 E h} (\tilde{\tau}_c(x, t) - \tilde{\tau}_f(x, t)) . \quad (5)$$

On suppose que  $\frac{\ell}{T} \ll c_p$ . Simplifier l'équation précédente (5) en faisant apparaître un rapport sans dimension construit à partir de  $\ell, h, u_0, \tau_0$  et  $E$ .

- ✓ 13. Interpréter ce rapport sans dimension comme le rapport de deux forces s'exerçant sur le système au passage de la perturbation. On précisera leur nature.

- Dans la suite de cette partie, on considère que le système étudié est gouverné par l'équation (7), issue de la limite quasi-statique de l'équation (4),

$$\tau_f(x, t) = E h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_c(x, t). \quad (7)$$

On va maintenant considérer le contact entre la couche de solide et le substrat pour modéliser le comportement de  $\tau_f(x, t)$ . Pour cela, on adopte un modèle de frottement de COULOMB. On considère deux solides en contact. On note  $\vec{v}_{1/2}$  la vitesse de glissement du solide 1 par rapport au solide 2 et  $f$  le coefficient de frottement caractérisant le contact entre les deux solides. La force de réaction du solide 2 sur le solide 1 est composée d'une réaction normale  $\vec{N}$  et d'une réaction tangentielle  $\vec{T}$  telles que, à la limite du glissement et en glissement, on a la relation pour le frottement de glissement :

$$\| \vec{T} \| = f \| \vec{N} \|, \quad (8)$$

où  $\vec{T}$  est dans la direction opposée au vecteur vitesse, comme représenté sur la figure 5.

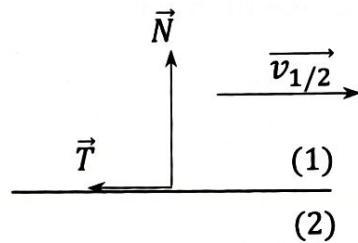


FIGURE 5 – Schéma représentant la force de réaction du solide 2 sur le solide 1.

- ✓ 14. En adaptant ce modèle de frottement solide à l'étude du système, établir l'expression de  $\tau_f(x, t)$  lorsqu'une zone de l'interface glisse. On notera  $\tau_r = f \sigma_N$ .
- ✓ 15. Dans une zone où le solide ne glisse pas, traduire la condition de non-glissement comme une condition aux limites sur le champ de déplacement  $u$  et donner l'expression de la contrainte  $\tau_f$ .

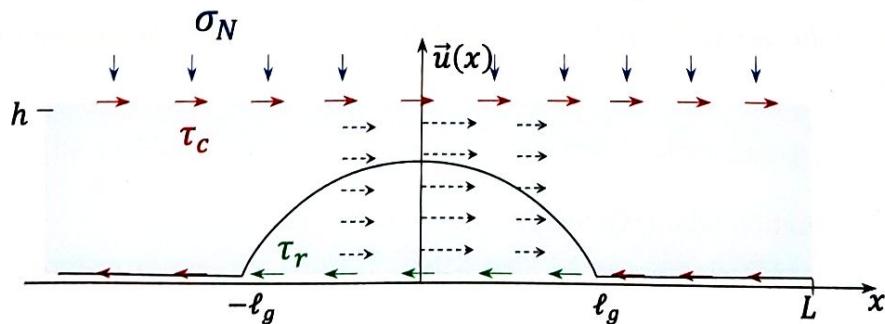


FIGURE 6 – Représentation schématique de la zone de glissement de la couche solide dans le modèle quasi-statique. Le profil du champ de déplacement  $u(x)$  est représenté en trait continu noir.

- On considère la situation, schématisée sur la figure 6, où la force surfacique de cisaillement sur le haut de la couche est constante au cours du temps et uniforme, telle que  $\tau_c(x, t) = \tau_c$ . Une zone de taille  $2\ell_g$  a déjà glissé. Dans cette zone, on a donc  $\tau_f(x, t) = \tau_r$ .

16. Déterminer l'expression du champ de déformation  $u(x)$ , en régime quasi-statique, le long de l'interface, c'est-à-dire à l'intérieur de la zone en glissement, et à l'extérieur de cette zone.
  17. En utilisant l'expression de l'énergie potentielle volumique élastique obtenue dans le bilan local d'énergie (3), établir l'expression de l'énergie potentielle élastique  $E_e$  de la couche de solide. En déduire si la présence de la zone de glissement induit une perte ou un gain d'énergie pour la couche de solide, par rapport à une situation de non-glissement.
  18. Exprimer le travail des forces de cisaillement  $W_{cis}$ , de part et d'autre de la couche de solide étudiée, intégré sur tout le volume de solide.
- Dans la suite de cette partie, on modélise la croissance de la zone glissante de l'intervalle  $[-\ell_g, \ell_g]$  à  $[-\ell_g - d\ell_g, \ell_g + d\ell_g]$ . La croissance de la zone glissante est schématisé sur la figure 7.

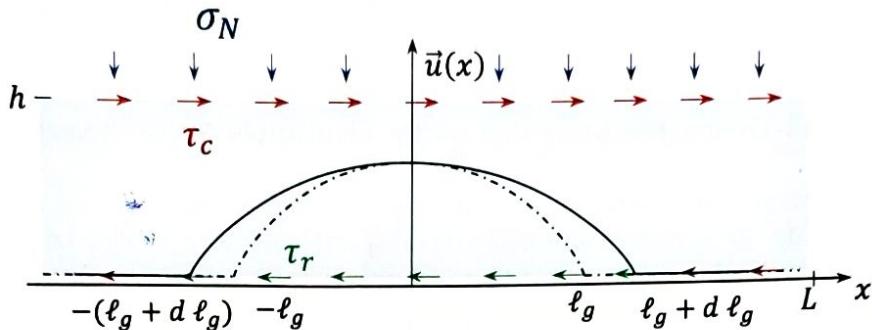


FIGURE 7 – Croissance de la zone de glissement de la couche solide. L'intervalle initial de la couche glissante  $[-\ell_g, \ell_g]$  s'accroît pour donner un intervalle  $[-\ell_g - d\ell_g, \ell_g + d\ell_g]$ .

19. Pour une avancée de taille  $2d\ell_g$  de la zone glissante selon la direction ( $Ox$ ), établir le taux d'accroissement du travail des forces de cisaillement  $\frac{dW_{cis}}{2d\ell_g}$ , et celui de l'énergie élastique  $\frac{dE_e}{2d\ell_g}$ . Comparer ces variations et en déduire la présence d'un surplus d'énergie.

20. On définit  $G$  comme le taux de restitution d'énergie surfacique, tel que  $G(2\ell_g) = \frac{1}{H} \frac{d(W_{cis} - E_e)}{d(2\ell_g)}$ . Exprimer  $G$  en fonction de  $\tau_c$ ,  $\tau_r$ ,  $\ell_g$ ,  $E$  et  $h$ .  $G$  représente une accumulation d'énergie, différente d'un stockage d'énergie sous forme élastique. Comment cette accumulation d'énergie pourrait être utilisée au niveau de l'interface ?

• Le coût énergétique par unité de surface glissante créée est notée  $G_c$ ; c'est une constante du matériau qui caractérise l'interface. On interprète physiquement  $G_c$  comme l'énergie surfacique de fracture des micro-contacts au niveau de l'interface. Les micro-contacts sont responsables de l'adhérence de la couche solide sur le substrat et du frottement existant entre la couche et le substrat.

21. En déduire une condition entre  $G(2\ell_g)$  et  $G_c$  permettant la progression de la zone glissante.
22. On étudie dans cette question les cas limites qui vont engendrer un séisme. Déterminer l'expression de :

- ★ la taille limite  $L_c$  d'une zone glissante stable, à contrainte de cisaillement  $\tau_c$  fixée, en-dessous de laquelle il n'y aura pas progression du glissement.
- ★ le seuil limite  $\tau_c^{\lim}$  de la contrainte de cisaillement, pour une taille de zone glissante  $2\ell_g$  fixée, au-delà duquel l'interface sera déstabilisée.

23. Calculer  $\frac{dG}{d(2\ell_g)}$  et commenter l'évolution de la zone glissante. Sera-t-elle stable ou instable ?
- Dans le cas où  $G(2\ell_g) > G_c$ , expliquer comment évoluera la zone glissante (fracturée). L'énergie cinétique volumique de la couche de solide augmente-t-elle ?

### III Propagation d'ondes sismiques

Lorsqu'un séisme survient, des ondes élastiques sont produites et se propagent dans les différentes parties de la croûte terrestre, assimilées à des solides. Ces ondes mécaniques de déformation, appelées ondes sismiques, peuvent être de deux types :

- ★ des ondes de compression-dilatation ou ondes P ;
- ★ des ondes de cisaillement ou ondes S.

Les ondes P sont analogues à celles étudiées dans la partie I.

Dans cette partie, nous modélisons le parcours des ondes sismiques à travers les différentes couches de la croûte terrestre, et notamment au passage d'interfaces entre différentes couches. Le vocabulaire de l'optique géométrique et certaines analogies avec l'optique géométrique seront mobilisés dans cette partie.

#### III.A Loi de Snell-Descartes pour des ondes sismiques à une interface

On va considérer dans cette partie une interface plane séparant deux milieux caractérisés par des célérités d'ondes de compression différentes, respectivement  $c_{p1}$  et  $c_{p2}$ . Le plan de l'interface est le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et le plan orthogonal à l'interface représenté sur la figure 8 est donné par le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ . Une onde plane progressive harmonique de pulsation  $\omega$  se propage dans le milieu (1), situé dans le demi-espace  $z < 0$ , et rencontre l'interface avec un vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ , faisant un angle  $i_1$  avec la normale à l'interface. Elle donne naissance à une onde réfléchie de vecteur d'onde  $\vec{k}_r$ , faisant un angle  $r$  avec la normale à l'interface. Elle donne également naissance à une onde transmise, dans le milieu (2), situé dans le demi-espace  $z > 0$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_t$  faisant un angle  $i_2$  avec la normale. Les ondes incidente, réfléchie et transmise sont modélisées par le champ de déplacement associé aux ondes de compression-dilatation et sont notées respectivement :  $\vec{u}_i(M, t)$ ,  $\vec{u}_r(M, t)$  et  $\vec{u}_t(M, t)$ , où M est un point de l'espace repéré par ses coordonnées dans le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On note I le point matérialisant l'intersection des rayons sismiques, associés aux ondes incidente, réfléchie, et transmise au niveau de l'interface.

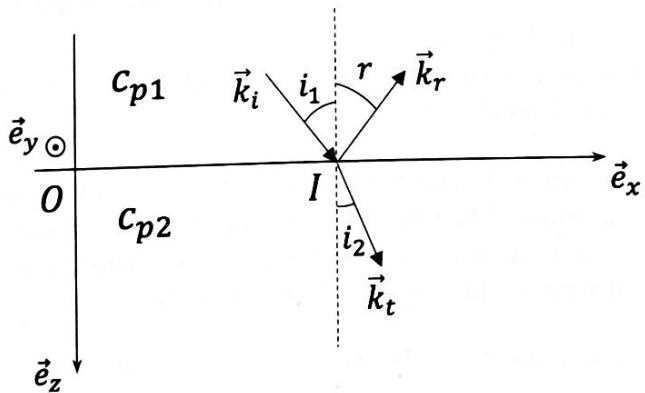


FIGURE 8 – Interface entre deux solides de célérités d'ondes de compression différentes, respectivement  $c_{p1}$  et  $c_{p2}$ . La propagation des ondes de déformation est représentée à travers les vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté.

Les expressions des champs de déplacement au point M à l'instant  $t$  en notation complexe sont les suivantes :

$$\vec{u}(M, t) = \begin{cases} \vec{u}_i(M, t) + \vec{u}_r(M, t) & \text{si } z < 0 \\ \vec{u}_t(M, t) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

- ★ onde incidente :  $\vec{u}_i = U_{i0} \exp[j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM})] \frac{\vec{k}_i}{\|\vec{k}_i\|}$  ;
- ★ onde réfléchie :  $\vec{u}_r = U_{r0} \exp[j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM})] \frac{\vec{k}_r}{\|\vec{k}_r\|}$  ;
- ★ onde transmise :  $\vec{u}_t = U_{t0} \exp[j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OM})] \frac{\vec{k}_t}{\|\vec{k}_t\|}$ .

✓ 24. Nous supposons que les composantes tangentielles à l'interface des vecteurs d'onde  $k_{ix}$ ,  $k_{rx}$  et  $k_{tx}$  sont égales. On notera  $k_x$  cette valeur. Définir le plan d'incidence et rappeler la première loi de DESCARTES. À partir de l'égalité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde, retrouver la seconde loi de DESCARTES pour les ondes élastiques au passage de l'interface. Donner l'expression de  $k_x$  en fonction de  $\omega$ ,  $\sin i_1$  et  $c_{p1}$ .

- On considère dans la suite de cette partie que  $c_{p1} < c_{p2}$ .

✓ 25. Montrer qu'il existe un angle d'incidence limite, noté  $i_\ell$ , et donner son expression en fonction des célerités des deux milieux.

✓ 26. Dans le cas où l'onde incidente arrive sur l'interface avec un angle  $i_1 > i_\ell$ , exprimer  $\vec{k}_r$  en fonction de  $\omega$ ,  $\sin i_1$ ,  $\cos i_1$ ,  $c_{p1}$ . Montrer que  $k_{tz}$  se met sous la forme  $-\frac{j}{\delta}$ , où on précisera la dimension et l'expression de  $\delta$  en fonction de  $\omega$ ,  $c_{p2}$ ,  $\sin i_1$  et  $\sin i_\ell$ . Justifier alors que l'onde transmise, polarisée suivant  $\vec{e}_x$ , peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{u}_t(M, t) = U_{t0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp[j(\omega t - k_x x)] \vec{e}_x. \quad (9)$$

On admettra que la direction de vibration est  $\vec{e}_x$ . Caractériser la structure de cette onde et donner l'expression de sa vitesse et de sa direction de propagation.

**À partir de maintenant, on interprète la propagation d'ondes sismiques en utilisant la marche de rayons sismiques, équivalents aux rayons lumineux pour les ondes lumineuses.**

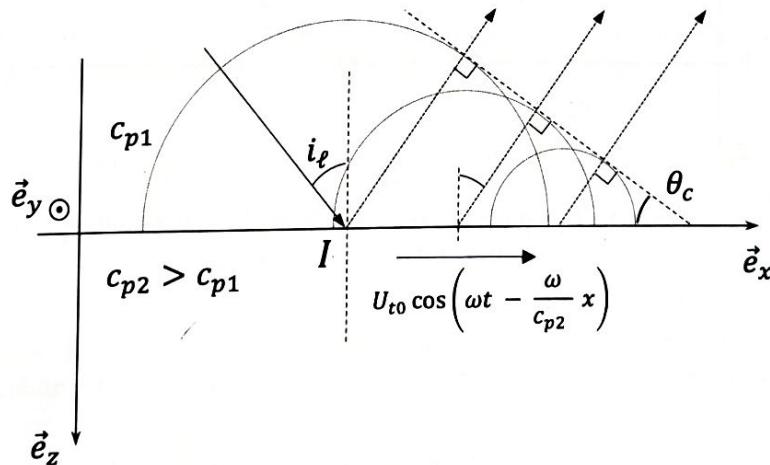


FIGURE 9 – Génération d'un cône de MACH.

- Dans le cas où  $i_1 = i_\ell$ , l'onde transmise (9) perturbe l'interface entre les milieux (1) et (2). La conséquence de cette perturbation est une ré-émission d'ondes dans le milieu 1 par une source se déplaçant à l'interface plus vite que la célerité des ondes dans le milieu 1. Les ondes ré-émises, représentées par une série de cercles sur la figure 9, vont contribuer à créer un front d'onde, appelé cône de MACH, représenté par une ligne en pointillés tangente à ces cercles.

- ✓ 27. La normale au cône de MACH définit la direction de l'onde ré-émise. Déterminer l'angle  $\theta_c$  entre le front d'onde de MACH et l'interface. On exprimera  $\sin \theta_c$  en fonction des célérités  $c_{p1}$  et  $c_{p2}$ . Justifier, à partir du schéma représenté sur la figure 9, que l'angle entre l'onde ré-émise et la normale à l'interface est égale à l'angle d'incidence limite  $i_\ell$ .

### III.B Principe de réfraction sismique

Une des applications majeures de la sismologie est la détermination de la distribution des vitesses des ondes sismiques en sous-sol pour en déduire les propriétés élastiques des différentes enveloppes de la Terre. Pour les études sismologiques, les données principales sont les durées de trajet des ondes de la source au récepteur, déterminées à partir des temps d'arrivée mesurés au niveau du récepteur. On s'intéresse donc à la durée du trajet définie par l'expression suivante :

$$T(s, r) = \int_s^r \frac{1}{v(x)} dx , \quad (10)$$

où  $v(x)$  est la vitesse des ondes le long d'un rayon sismique. Le problème est de déterminer, à partir des temps de trajet,  $v(x)$  pour les différentes couches de la Terre.

En profondeur, la Terre n'est pas homogène, et on s'attend à sonder plusieurs interfaces entre milieux de vitesses d'ondes différentes. Ces interfaces vont produire des réflexions et des réfractions.

- Nous considérons la situation simplifiée d'une couche solide de hauteur  $h$  et de célérité des ondes P dans cette couche  $c_1$ . Cette couche est située au-dessus d'un demi-espace infini de célérité d'onde  $c_2$ , telle que  $c_2 > c_1$ . On place une source en  $(x_s, z_s) = (0, 0)$  et un récepteur en  $(x_r, z_r) = (x, 0)$ . Il y a trois trajets possibles pour aller du point  $s$  au point  $r$ , comme représenté sur la figure 10, et l'objectif est de calculer les durées respectives de trois parcours.

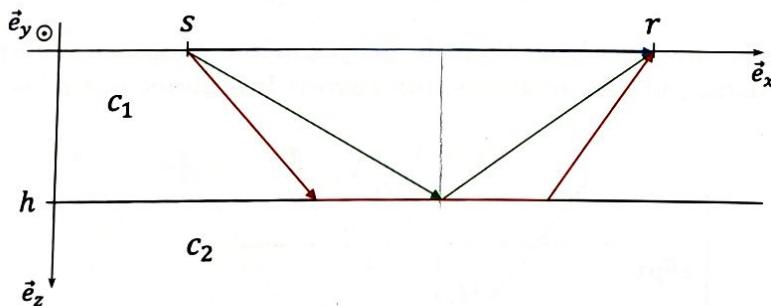


FIGURE 10 – Exemples de trajets des ondes D, R et H. Le milieu situé entre l'altitude  $z = 0$  et  $z = h$  possède une célérité  $c_1$ , celui situé de  $z = h$  à  $+\infty$  a une célérité  $c_2$ .

- ✓ 28. Supposons que l'onde se propage le long de la surface de la couche de hauteur  $h$  et atteigne le récepteur directement. Déterminer la durée du trajet  $T_D(x)$  de cette onde, appelée onde D ou onde directe.
29. Si l'onde est réfléchie à l'interface entre les deux milieux 1 et 2, déterminer la durée du trajet  $T_R(x)$  de cette onde, appelée onde R ou onde réfléchie. Déterminer les valeurs asymptotiques de cette durée quand  $x = 0$  et quand  $x \rightarrow \infty$ .
30. Quand un rayon sismique issu de la source arrive à l'interface entre les deux milieux avec un angle d'incidence égal à l'incidence limite  $i_\ell$ , expliquer le comportement du rayon sismique. Peut-il atteindre le récepteur ? Déterminer la durée de trajet  $T_H(x)$  pour ces ondes dites réfractées, ou ondes H,

$$T_H(x) = \frac{x}{c_2} + \tau_1 , \quad (11)$$

avec  $\tau_1$  à déterminer en fonction de  $h$ ,  $c_1$  et  $c_2$ . Établir une condition sur  $x$  pour que ces ondes existent et atteignent effectivement le récepteur.

- 31.** L'obtention des durées de trajets précédentes permettent de cartographier la géologie souterraine. Pour les trois ondes précédentes (D, R, H), tracer sur un même graphique les différents temps d'arrivée en fonction de l'abscisse  $x$  du récepteur. Déduire une distance  $x_d$  à partir de laquelle l'onde réfractée (onde H) est détectée en premier par le détecteur. Quelle est la forme de la courbe qui matérialise les premiers temps d'arrivée d'onde à chaque récepteur ? Quels types d'ondes participent à la forme de cette courbe ?

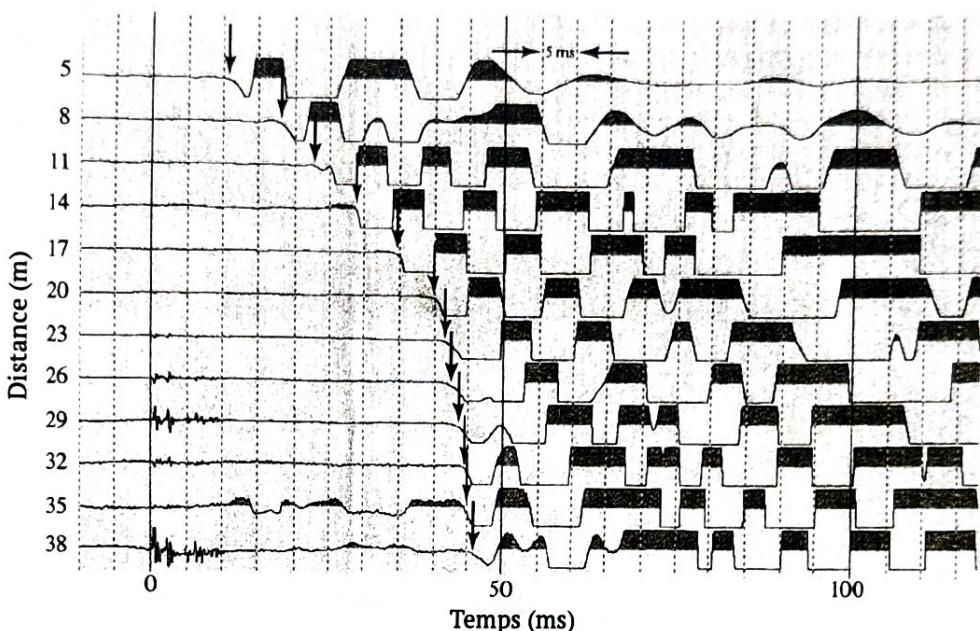


FIGURE 11 – Sismogramme du sous-sol de la vallée du Connecticut, tiré de "Introduction to applied geophysics", de H. Robert Burger, Anne F. Sheehan et Craig H. Jones.

- 32.** La figure 11 représente un sismogramme issu d'une campagne de mesures dans la vallée du Connecticut (Massachusetts, USA), où les explosions générant les ondes sismiques sont contrôlées (à la différence de la survenue d'un séisme). La date  $t = 0$  correspond au démarrage de l'excitation. La détection des premières ondes sismiques est repérée par une flèche. On considère qu'il n'y a que deux couches souterraines qui sont sondées par les ondes émises. Commenter ce sismogramme et justifier que les résultats sont conformes aux prédictions de la question précédente. Déterminer la vitesse des ondes dans chaque couche souterraine ainsi que  $x_d$  et la hauteur  $h$  de la première couche. Expliquer ce qui peut limiter la portée de la méthode en profondeur.
- 33.** On va généraliser la méthode précédente à une situation où plusieurs couches, deux en tout, surplombent un demi-espace, telles que  $c_1 < c_2 < c_3$  et de hauteurs respectives  $h_1$  et  $h_2$ . Quels sont les différents trajets possibles des ondes ? Quel est l'angle d'incidence  $\theta_1$  avec lequel le rayon doit arriver sur l'interface 1/2 pour que l'angle d'incidence à l'interface 2/3 soit  $i_{\ell(2/3)}$  ? Déterminer l'expression du temps d'arrivée des ondes réfractées entre les couches 2 et 3. Tracer qualitativement sur le graphique représentant les temps d'arrivée : des rayons directs, des rayons réfractés à l'interface 1/2 et ceux réfractés à l'interface 2/3. Quelle information donne la courbe des premiers temps d'arrivée des rayons sismiques ?

34. Qualitativement, que se passe-t-il si la couche 2 est une zone de basse vitesse, c'est-à-dire si  $c_2 < c_1 < c_3$ ? Quels sont les rayons qui existent? En déduire alors la (ou les) limite(s) principale(s) de cette méthode.

Nous avons vu comment exploiter les temps d'arrivée des ondes réfractées pour obtenir une cartographie de la géologie du sous-sol. Cette technique de réfraction sismique a démontré sa robustesse mais a néanmoins quelques limitations. Vers les années 1930, la méthode de réflexion sismique exploitant les temps d'arrivée des ondes réfléchies a commencé à remplacer, ou à compléter selon les situations, la réfraction sismique. Cette dernière reste prédominante pour les études de faible profondeur.

## IV Détection des ondes sismiques : principe du géophone

Dans les parties précédentes, nous avons abordé la génération d'ondes sismiques lors d'un séisme au niveau de la frontière entre deux plaques tectoniques, puis le mécanisme de propagation d'ondes sismiques dans les différentes enveloppes terrestres. On va maintenant s'intéresser aux outils de détection.

### IV.A Sismomètre mécanique

Dans toute la suite, on considère que tous les mouvements sont unidirectionnels et selon l'axe vertical ( $Oz$ ).

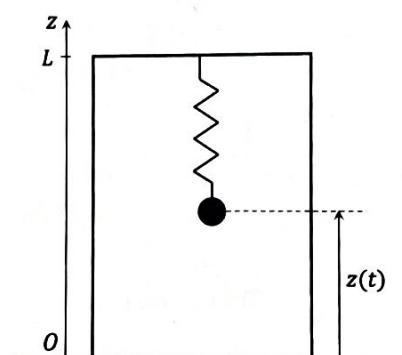


FIGURE 12 – Schéma de principe d'un sismomètre mécanique.

Un sismomètre (figure 12) est un système oscillant constitué d'un bâti, auquel est suspendu par un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  une masse  $m$ . La masse subit un amortissement visqueux modélisé par une force de frottement fluide de coefficient  $\alpha$  telle que  $\vec{f}_v = -\alpha \vec{v}_m(t) \vec{e}_z$ , où  $\vec{v}_m(t)$  désigne la vitesse de la masse  $m$  dans le bâti. On note  $z(t)$  le paramétrage du mouvement de la masse dans le bâti.

- ✓ 35. Déterminer la position  $z_{eq}$  d'équilibre de la masse au repos sans secousse du sol.

• Lorsqu'un séisme se produit, l'arrivée de l'onde sismique sur le sismomètre provoque un mouvement du bâti de l'appareil. On note  $\vec{x}(t)$ , le déplacement du bâti selon l'axe vertical ( $Oz$ ), dans le référentiel terrestre (voir figure 13). On note  $z_{eq} + z_m(t)$  le mouvement de la masse dans ce même référentiel,  $z_{eq} + z(t)$  le mouvement de la masse dans le référentiel lié au bâti.

- ✓ 36. Établir l'équation du mouvement à laquelle obéit  $z_m(t)$ , et en déduire celle pour  $z(t)$ .

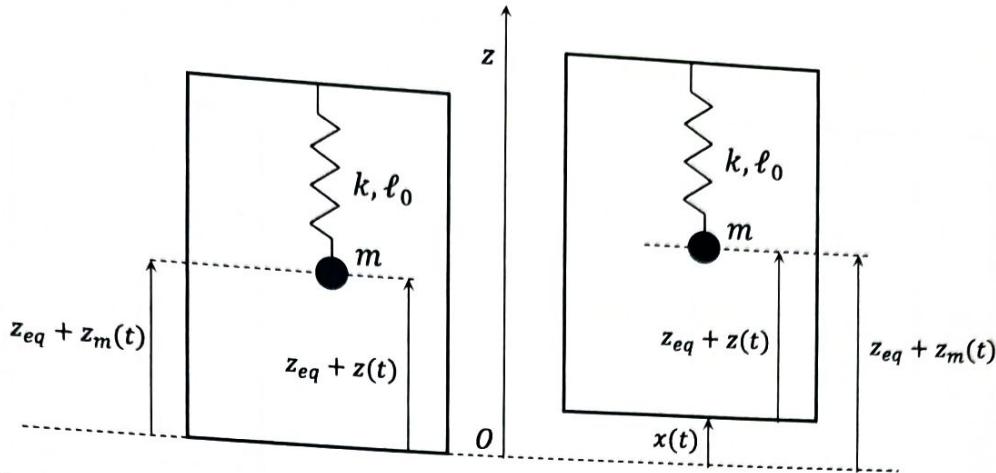


FIGURE 13 – Paramétrage du sismomètre mécanique au passage d'un séisme modélisé par une excitation du bâti.

Dans la suite, la force effective appliquée au système  $\vec{f}_{ie} = -m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_z$  est appelée force d'inertie d' entraînement et modélise l'influence du déplacement du bâti.

- On considère, dans les questions suivantes, un régime sinusoïdal forcé tel que l'excitation du sismomètre,  $x(t)$ , s'écrit  $x(t) = X_0 \cos(\omega t)$ . On utilisera la notation complexe pour les grandeurs sinusoïdales sous la forme  $x(t) = \Re(X \exp(j\omega t))$ , rappelée au début du problème. On notera  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  la pulsation propre du système et  $Q = m\omega_0/\alpha$  son facteur de qualité.

- ~ 37. Établir l'expression de la fonction de transfert du sismomètre en déplacement  $H_d^m = \frac{Z}{X}$  sous forme canonique en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_0}$  et  $Q$ . Tracer qualitativement le diagramme de BODE en amplitude de la fonction de transfert  $H_d^m$ , en supposant que le facteur de qualité vaut  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . On se limitera aux comportements asymptotiques de la fonction de transfert pour le tracé du diagramme.

Dans les différentes gammes de fréquences, à quelle grandeur physique (déplacement, vitesse ou accélération) le déplacement  $z$  est-il proportionnel ? Préciser ainsi la nature du capteur dans les différents régimes (capteur de déplacement, capteur de vitesse, accéléromètre).

- ~ 38. À très basses fréquences, donner l'expression approchée de l'équation du mouvement. En supposant que la résolution d'un appareil de mesure lié au sismomètre est  $\Delta z$ , en déduire quelle est l'accélération minimale que le sismomètre peut résoudre. Comment choisir les paramètres de la pulsation propre du système pour optimiser cette résolution ?

#### IV.B Fonctionnement du géophone

Une mesure analogique (ou numérique) du déplacement du système oscillant nécessite un transducteur. Le dispositif réel de détection est une masse  $m$  fixée à une bobine qui peut osciller dans l'entrefer d'un aimant. La bobine est alors soumise à l'action d'un champ magnétique orthoradial. Le principe de fonctionnement de ce dispositif, appelé géophone réel, est le même que celui d'un haut-parleur (le géophone réel est représenté sur la figure 14). Dans la suite, on adopte une modélisation simplifiée de ce dispositif, reposant sur un modèle équivalent de rail de LAPLACE, décrit sur la figure 15. Le déplacement  $x(t)$  désigne, comme dans la partie précédente, le mouvement du bâti résultant du passage de l'onde sismique,  $z_{eq} + z_m(t)$  le mouvement de la barre dans le référentiel terrestre et  $z_{eq} + z(t)$  le mouvement relatif de la barre dans le référentiel lié au bâti du rail de Laplace. Cette barre est liée

au bâti par un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Le rail est plongé dans un champ magnétique homogène et constant  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$ .

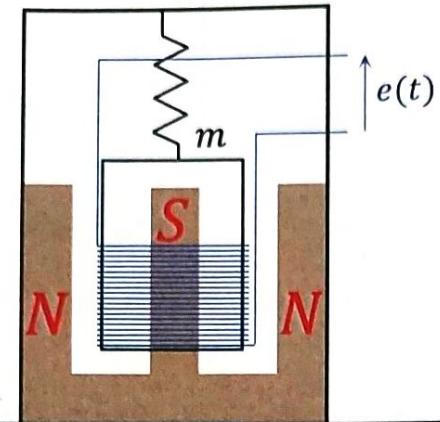


FIGURE 14 – Schéma d'un géophone réel.

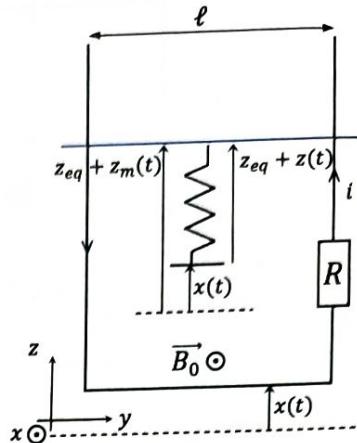


FIGURE 15 – Modèle équivalent du géophone.

- ✓ 39. Lorsque la tige est mise en mouvement au passage d'un séisme, expliquer pourquoi le circuit électrique, représenté sur la figure 15, est le siège d'un courant électrique. Rappeler le phénomène physique exploité par ce système.
- ✓ 40. Établir les équations mécanique et électrique décrivant le système. On note  $R$  la résistance équivalente du circuit,  $e(t)$  la f.e.m d'induction, on néglige son inductance propre et on pose  $\sigma = \ell B_0$ .
- 41. Déterminer l'expression du facteur de qualité  $\tilde{Q}$  du géophone. On pourra noter  $\alpha' = \alpha + \frac{\sigma^2}{R}$ . Proposer un protocole pour accorder le géophone tel que le système obéisse à un régime critique. Justifier le choix d'un tel régime.
- 42. Sachant qu'on mesure la tension aux bornes de la résistance et qu'on se place en régime sinusoïdal forcée, déterminer la nouvelle fonction de transfert liée au déplacement du bâti  $H_d^e = \frac{E}{X}$ . On exprimera le résultat en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $\tilde{Q}$  et  $\sigma$ . Donner la grandeur physique mesurée par ce capteur dans la gamme des hautes fréquences. Identifier ses limites d'utilisation.

#### IV.C Géophone asservi en force

Un sismomètre passif contient deux convertisseurs. La suspension transforme l'accélération du bâti en un déplacement de la masse puis le transducteur le transforme en tension. Pour que le sismomètre soit précis, la suspension doit avoir une faible constante de raideur ou une masse importante. Pour ces deux caractéristiques, les séismes de fortes amplitudes vont générer un important déplacement qui déformerait la géométrie du ressort et modifierait la linéarité entre force et déplacement. Par ailleurs, si la force de rappel est trop faible (afin d'optimiser la sensibilité), des phénomènes d'hystérésis et des effets visqueux peuvent apparaître et devenir prédominants, ce qui perturbe la mesure. Il est alors difficile de disposer d'un capteur à la fois précis et sensible.

Afin de pallier ce problème, on souhaite maintenir la barre mobile du rail de LAPLACE dans un régime oscillant de très faible amplitude. À cet effet, on complète le dispositif de la figure 15 par un dispositif assurant un asservissement en force. L'objectif est d'appliquer à la barre mobile une force qui compensera exactement la force d'inertie d'entrainement due à l'accélération du bâti. Pour cela, on considère un second système de rail de LAPLACE dans lequel est imposé un courant  $I$  (figure 16). La barre mobile de ce second système est rendue solidaire de la barre mobile du géophone à l'aide d'un système de fixation rigide.

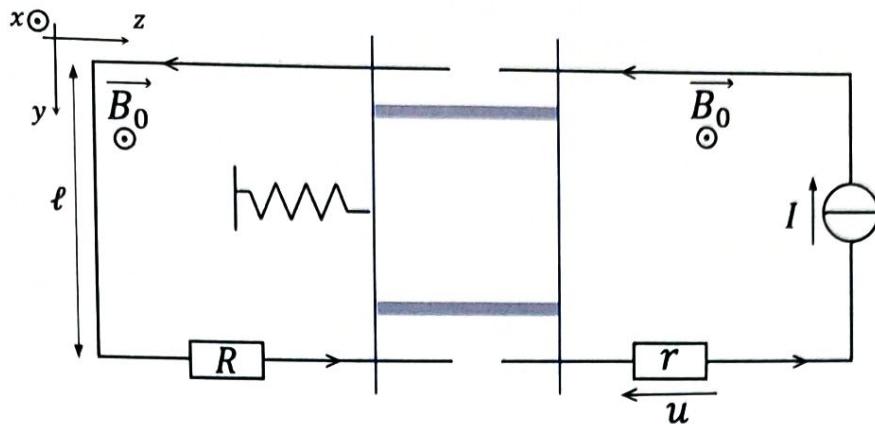


FIGURE 16 – Asservissement du géophone.

43. Déterminer l'équation du mouvement de la barre mobile du géophone asservi en force.

En régime sinusoïdal forcé, on considère que le courant  $I$  est relié à la f.e.m d'induction du géophone par la relation

$$\underline{I} = -\underline{H}(j\omega) \underline{E}. \quad (12)$$

44. Compléter en utilisant  $\sigma$ ,  $\underline{H}(j\omega)$  et  $j\omega$  le système bouclé ci-dessous (figure 17). [Les candidats reproduiront le schéma ci-dessous sur leurs copies.]

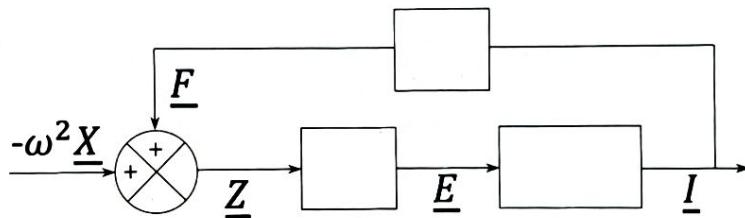


FIGURE 17 – Schéma-bloc de l'asservissement en force du géophone.

45. Établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}_d = \frac{\underline{Z}}{\underline{X}}$ , reliant  $\underline{X}$  et  $\underline{Z}$ .

46. Dans le cas où  $\underline{H}(j\omega)$  est un gain pur, noté  $\underline{H}(j\omega) = g_1$ , avec  $g_1$  positif, en déduire quelle(s) est(sont) la(les) modification(s) éventuelle(s) sur le comportement du système.

47. On utilise l'expression suivante,  $\underline{H}(j\omega) = \frac{g_2}{j\omega}$ , avec  $g_2$  positif. Quel avantage au niveau de la fréquence propre du système ce correcteur apporte-t-il ? Exprimer la nouvelle fonction de transfert  $\underline{H}_d$ , où on notera  $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{g_2 \sigma^2}{m}}$ . L'objectif de cette correction est une rétroaction en force. En utilisant le schéma-bloc de la figure 17, déterminer l'expression de la force supplémentaire appliquée par le second rail  $F$  en fonction de  $\sigma$ ,  $g_2$ ,  $\underline{H}_d$  et  $\underline{X}$ . Quelle est la limite basse fréquence de l'expression de cette force en régime dépendant du temps ? Comparer à la force d'inertie d'entraînement. Conclure sur l'utilité de la correction apportée. Si on mesure la tension  $u$  (notation complexe  $\underline{U}$ ) aux bornes de la résistance  $r$ , quel capteur obtiendrait-on ?

48. Au regard des questions précédentes, donner l'expression de  $\underline{H}(j\omega)$  permettant d'avoir un contrôle à la fois sur la pulsation propre et sur le facteur de qualité du système. Comment choisir  $g_1$  et  $g_2$  de manière à compenser la force d'inertie d'entraînement et se situer en même temps en régime critique ?

Si on mesure le courant  $I$  dans le second rail de LAPLACE via la tension  $u$  aux bornes de la résistance  $r$ , on obtient la même fonction de transfert que celle obtenue à partir de la position de la masse mais cette fois avec un ajustement possible de la fréquence propre et de la bande passante. On obtient des comportements passe-bas pour l'accélération et passe-haut pour le déplacement. Ce capteur, qui est un des plus répandus, est généralement utilisé dans la gamme basse fréquence.

Néanmoins, pour un capteur large bande, un signal de sortie proportionnel à l'accélération n'est pas une bonne solution. À haute fréquence, le capteur est facilement saturé par la moindre perturbation : trafic routier, bruits divers. À basse fréquence, le système générera un signal de sortie dès que la masse n'est pas tout à fait équilibrée, le système étant sensible à fréquence nulle. Il sera donc très facilement saturé. On souhaite un signal de sortie qui aurait un comportement passe-bande pour l'accélération, comme le premier modèle de géophone mais avec une fréquence propre la plus basse possible, pour ne couper que les très basses fréquences tout en ayant une bande passante plus large.

Afin d'améliorer le fonctionnement du capteur, on ajoute un élément supplémentaire qui sera l'équivalent d'un correcteur proportionnel intégral dérivé (PID). On choisit pour cela :  $\underline{H}(j\omega) = g_1 + \frac{g_2}{j\omega} + \frac{g_3}{(j\omega)^2}$ , avec  $g_1, g_2, g_3$  positifs.

49. Exprimer la nouvelle fonction de transfert en vitesse  $\underline{H}_v$  sous la forme

$$\underline{H}_v = \frac{\underline{Z}}{j\omega \underline{X}} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{02}^3}}{1 + j\frac{\omega}{Q' \omega_{01}} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} - j\frac{\omega^3}{\omega_{02}^3}}. \quad (13)$$

Donner les expressions de  $\omega_{02}$  en fonction de  $\sigma, m$  et  $g_3$ ; de  $\frac{1}{\omega_{01}^2}$  en fonction de  $Q, \omega_0, \omega_{02}, g_1$

et  $g_3$ , et enfin de  $\frac{1}{Q' \omega_{01}}$  en fonction de  $g_2, g_3, \omega_0$  et  $\omega_{02}$ . En supposant que  $\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \gg 1$ , tracer qualitativement le diagramme de BODE en amplitude asymptotique. Quelle est la nature de ce capteur pour  $\omega_{01} < \omega < \omega_{02}$  ?

Le capteur obtenu est un sismomètre large bande. Le réseau français GEOSCOPE utilise de tels appareils : les Wielandt-Streckeisen STS-1 et STS-2. Ce réseau enregistre en continu les mouvements du sol. Ces mesures arrivent en temps réel au centre de données de l'IPGP (Institut de Physique du Globe de Paris) pour être stockées et analysées par les sismologues.

★ ★  
★