RECURRENCES LINEAIRES D'ORDRE 2

MP 21-22

Soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On note $E = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \right\}.$

Remarque : L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u & \longrightarrow & (u_0, u_1) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et ainsi $\dim E = 2$.

Soit $u \in E$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Ainsi, si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A\,U_n$.

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n\,U_0$. Il s'agit de calculer les puissances successives de A qui est la transposée d'une matrice compagnon et $\chi_A = X^2 - a\,X - b$. Notons λ_1, λ_2 les racines de χ_A dans $\mathbb{C}$: ayant $b \neq 0$, on a $\lambda_1\,\lambda_2 \neq 0$.

1. Supposons A diagonalisable : cela signifie que λ_1 et λ_2 sont distinctes (au fait pourquoi ?). Il existe $P,\ P \in GL_2(\mathbb{C})$, telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ puis $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
   Par conséquent $E \subset \text{vect}\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$ et par un argument de dimension, on a en fait $E = \text{vect}\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$. Ainsi il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\,\lambda_1^n + \beta\,\lambda_2^n$.

2. Supposons A non diagonalisable, c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2$.
   La matrice A est trigonalisable et il existe $P,\ P \in GL_2(\mathbb{C})$, telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1}$ puis $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\,\lambda_1^{n-1} \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
   Par conséquent $E \subset \text{vect}\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$ et par un argument de dimension, on a en fait $E = \text{vect}\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$. Ainsi il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta\,n)\ \lambda_1^n$.

Méthode pratique :

On considère l'équation $x^2 - a\,x - b = 0$ dite caractéristique associée à E et on note λ_1, λ_2 ses racines dans $\mathbb{C}$.

Si ces racines sont distinctes : $\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\,\lambda_1^n + \beta\,\lambda_2^n$.

Si ces racines sont égales : $\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta\,n)\ \lambda_1^n$.

Si besoin, on peut déterminer (α,β) à partir de la donnée des conditions initiales (u_0, u_1).

Dans le cas de suites réelles et si λ_1, λ_2 sont complexes non réelles conjuguées, on a $\alpha = \overline{\beta}$.

Exercice : Déterminer le terme général des suites réelles vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,u_{n+1} + u_n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - 4u_n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,u_{n+1} - 2\,u_n$