Mines-Ponts MP 2021.

314.

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + e^{-x} \qquad (E_n) : f(x) = n.$$

a) i) Mq pour n assez grand, (E_n) possède 2 solutions $a_n > 0 > b_n$.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f & +\infty & \searrow -\infty & \| +\infty & \searrow & 0 \end{array}$$

f décroissante sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

$n \geq 1$ convient

ii) Mq (a_n) CV et donner sa limite.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{a_n} + e^{-a_n} = n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{a_n} = n - e^{-a_n} \geq n-1$$

$$\text{donc} \quad a_n \leq \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Mq $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{b_n} + e^{-b_n} = n$$

$$e^{-b_n} \geq n \quad \text{donc} \quad -b_n \longrightarrow +\infty.$$

b) i) Trouver A et α tq $a_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

$$\frac{1}{a_n} + o\left(\frac{1}{a_n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} n. \quad \frac{1}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} n \quad \text{puis} \quad a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

ii) Équivalent de $a_n - \frac{A}{n^\alpha}$?

$$e^{-a_n} = 1 - a_n + o(a_n)$$
$$\quad\;\; = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{a_n} + 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = n.$$

$$\frac{1}{a_n} = n - 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n - 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

$$a_n = \frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$a_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$a_n - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

c) i) Équivalent de (b_n) noté β_n.

$$n \underset{+\infty}{\sim} e^{-b_n} . \quad b_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$$

ii) Équivalent de $b_n - \beta_n$.

$$b_n = \frac{1}{n - e^{-b_n}}.$$

$$b_n = -\ln(n)(1 + \alpha_n). \quad -\frac{1}{\ln(n)(1+\alpha_n)} + n^{1+\alpha_n} = n.$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\ln(n)(1+\alpha_n)}}_{\sim -\frac{1}{\ln(n)}} = n(1 - n^{\alpha_n})$$

donc nécessairement $n^{\alpha_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $\ln(n)\alpha_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $n\left(1 - e^{\ln(n)\alpha_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -n\ln(n)\alpha_n$

$$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{\ln(n)}$$

donc $\alpha_n \sim \dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$.

$$b_n = -\ln(n) - \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right).$$