Centrale MP 2021 Analyse

528. $E = B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

$$\forall u \in E, \left| \begin{array}{l} N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \\ N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \end{array} \right.$$

a)

N_∞ et N sont des normes sur E ok.

RPA et $\underline{\text{sq}}$

$$\exists k,\ k \in \mathbb{R}_+^*,\ N_\infty \leq k N.$$

Fixons k.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$U_N : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } n \neq N \\ 1 \text{ si } n = N \end{array} \right. \end{array}$$

On a $\forall N \in \mathbb{N},\ N_\infty(U_N) = 1$

$N(U_N) = 1/2^N$.

$$\forall N \in \mathbb{N},\ 1 \leq k/2^N.$$

b) $\underline{\text{Mq}}$ $\overset{\circ}{\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}} =: B$ $= \emptyset$.

Soit $u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On pose $v = u + \frac{1}{r2}$.

Soit $r > 0$.

$v \in B_0(u, 1/r)$

$B = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

$\underline{\text{Mq}}$ $\bar{B} = \underbrace{\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \to 0 \}}_{=: A_0}$.

c) Soit $u \in \bar{B}$. $\exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N}},\ N_\infty(u - v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ |(u - v_k)_m| < \varepsilon$.

$(\|u - v_k\|_\infty < \varepsilon)$.

On fixe k_0.

528. (Suite).

Puis

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, V_{K_0 n} = 0$. On fixe n_0.

$\forall n \geq n_0, |u_n| < \varepsilon$.

Donc $\bar{B} \subset A_0$.

⊃ Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $|u| \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| < \varepsilon$. On pose :

$$v : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} u_n & \text{si } n < n_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

et l'on a

$N_\infty(u - v) < \varepsilon$. donc $A_0 \subset \bar{B}$ et $A_0 = \bar{B}$.

c) $C = (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}} \cap E$. Mq $\mathring{C} = \{u \in E \mid \exists R > 0, u \geq R\}$.

⊂ Soit $u \in E$ tq $\exists R > 0, u \geq R$. On fixe R.

Alors, $u \in C$ et en prenant $\varepsilon = R/2$ on a :

$B(u, R/2) \subset C$.

donc $u \in \mathring{C}$.

⊃ Soit $u \in \mathring{C}$. Fixons $\varepsilon > 0$ tq $B_f(u, \varepsilon) \subset C$.

Alors,

$\tilde{v} = u - \varepsilon \in C$.

et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \varepsilon \geq 0$ donc $u \in \{w \in E \mid \exists R > 0, u \geq R\}$

Mq $\bar{C} = \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \cap E$.

⊂ Soit $u \in \bar{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut fixer

$(v^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ tq $v^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u$

i.e. $\|v^{(k)} - u\|_\infty \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u_n$.

Alors, $u_n \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$ par passage à la limite.

③. Soit $u \geqslant 0$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)} = u_n + \frac{1}{k+1}.$$

Alors,

$$\left(v^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}} \text{ et } v^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u.$$

i.e. $u \in \overline{C}$.