Centrale MP 2021.

543. $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) Mq si ff' admet une limite (éventuellement infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$.

Sq ff' a une limite non nulle en $+\infty$. On note ℓ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

* $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) f'(x) \geq \min(1, \frac{\ell}{2}) := \ell_0$.

On fixe x_0.

$$\forall x \geq x_0, \int_{x_0}^{x} f(t) f'(t) dt \geq \int_{x_0}^{x} \ell_0 \, dt$$

Puis

$$\forall x \geq x_0, \frac{1}{2} f^2(x) \geq \frac{1}{2} f^2(x_0) + \ell_0 (x - x_0)$$

Par comparaison, $f^2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

* $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$

$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) f'(x) \leq \max(-1, \frac{\ell}{2}) := \ell_0$.

On fixe x_0.

$$\forall x \geq x_0, \int_{x_0}^{x} f(t) f'(t) dt \leq \int_{x_0}^{x} \ell_0 \, dt$$

$$\forall x \geq x_0, \frac{1}{2} f^2(x) \leq \ell_0 (x - x_0) + \frac{f^2(x_0)}{2}.$$

$\ell_0 (x - x_0) + \frac{f^2(x_0)}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f^2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ absurde.

b) On Sq f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Mq f'^2 l'est aussi et

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. — f' et f sont C^1.

$$\int_0^x f'^2(t) dt \overset{IPP}{=} [f'(t) f(t)]_0^x - \int_0^x f''(t) f(t) dt$$

$$" = f'(x) f(x) - f'(0) f(0) - \int_0^x f''(t) f(t) dt.$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f''(x) f(x)| \leq \frac{1}{2} (f''(x)^2 + f(x)^2)$

donc $f''f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

On suppose par l'absurde que f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors, $\int_0^x f'(t)^2 dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f'(x) f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $f^2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (lemme) donc $f \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ absurde.

Centrale MP 2021.

543. Suite.

Donc $\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt$ CV

puis $f'^2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

de plus, $f(x)f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par raisonnement symétrique,

$$\int_{-\infty}^{0} f'^2(t)\,dt \text{ CV et } f(x)f'(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis, par passage à la limite,

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff''$$

Or, $(f, f'') \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})^2$. Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f'f''\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)^{1/2}.$$

donc $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$

$\boxed{\text{B}}$

Mq f est uniformément continue. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y \geq x$.

$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right|$$

$$\leq \sqrt{\int_x^y f'(t)^2\,dt}\,\sqrt{\int_x^y 1\,dt}.$$

(* Suite verso).

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\int_0^x f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0)$.

ff' est intégrable donc f^2 a une limite finie en $\pm\infty$

Or f^2 est intégrable donc a pour limite 0 en $\pm\infty$.

$$|f(y)-f(x)| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f'^2}\ |y-x|^{1/2}$$

On pose $K = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f'^2}$.

Ainsi,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y|^{1/2}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{K+1}\right)^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $|y-x| \leq \delta$.

Alors, $K|y-x|^{1/2} \leq \varepsilon$

donc $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ et f est uniformément continue.

~~Mq f(x)~~

542.

Montrer la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$ et déterminer son signe.

On pose

$$f : \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-t}\ln(t) \end{array}$$

. f est continue

en 0 : $|f(t)| \underset{0}{\sim} -\ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

en $+\infty$: $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc I existe.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(t) \leq t-1$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-1)\,dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-t}t\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt.$$

$$\leq \underbrace{\left[-e^{-t}t\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \cancel{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt} - \cancel{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt}$$

$I \leq 0$.