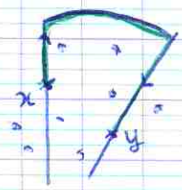
532. Centrale MP Analyse 2021.

$R_p = \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \mid rg(M) = p \}$.

a) $\boxed{C}$

b) Soit $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{C})$. Mq $\mathbb{C} \setminus F$ est cpa.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{C} \setminus F)^2$.



• les éléments de F

$\mathcal{D}_{x/y}$ l'ensemble des droites qui passent par x/y

On fixe $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{D}_x$ tel que $D_1 \cap F = \emptyset$.

On fixe $\mathcal{D}_2 \in \mathcal{D}_y$ tel que D_2 n'est pas // à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2 \cap F \neq \emptyset$.

c) Mq R_p est cpa.

Soit $(M, N) \in GL_n(\mathbb{C})^2$.

L'application

$$\delta : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \det(zM + (1-z)N) \end{array}$$

est polynomiale, non nulle ($\delta(0) \neq 0$)

$F = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0 \}$

D'après (b), F est cpa. Il existe $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus F$ continue tq $\begin{cases} \alpha(0) = 0 \\ \alpha(1) = 1 \end{cases}$

On pose

$$\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \to GL_n(\mathbb{C}) \\ t \mapsto \alpha(t) M + (1 - \alpha(t)) N \end{array}$$

γ est continue.

$$\varphi : \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{C})^2 \to M_n(\mathbb{C}) \\ (P, Q) \mapsto P J_q Q \end{array}$$

$\varphi(GL_n(\mathbb{C})^2) = R_p$ et φ est continue donc R_p est cpa.

d) Soit $s \in [\![0,p]\!]$. Soit $M \in R_s$.
On fixe $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ tq

$$M = P J_s Q$$

$$M = \lim_{k \to +\infty} P \underbrace{\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad}^{s} \overbrace{\quad\quad\quad}^{p-s} \overbrace{\quad\quad}^{n-p} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{k+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{k+1} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}}_{\in R_p} Q.$$

$$\overline{R_p} \supset \bigcup_{s=0}^{p} R_s$$

Si $p = n$, $\overline{R_n} \supset M_n(\mathbb{C})$

i.e. $\overline{GL_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$.

Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (R_p)^{\mathbb{N}}$ tq $M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} M$ $\quad (M \in M_n(\mathbb{C}))$

Soit $(I,J) \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])^2$ tq $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(J) = p+1$.
On note :
$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $A_{IJ} = (a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.

On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det(M_{k_{IJ}}) = 0$$

Par continuité du déterminant, $\det(M_{k_{IJ}}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \det(M_{IJ})$.

Unicité de la limite : $\det(M_{IJ}) = 0$.

donc $\operatorname{rg}(M) \leq p$.

$$\overline{R_p} = \bigcup_{s=1}^{p} R_s$$

Si $p = n$, $R_n = GL_n(\mathbb{C})$. $\quad \mathring{R_n} = R_n$.
Si $p < n$,

$$R_p \subset M_n(\mathbb{C}) \setminus GL_n(\mathbb{C})$$

donc $\mathring{R_p} \subset \left(M_n(\mathbb{C}) \setminus GL_n(\mathbb{C})\right)^{\circ}$

puis $\mathring{R_p} \subset M_n(\mathbb{C}) \setminus \overline{GL_n(\mathbb{C})}$. $\quad$ $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

$$\mathring{R_p} = \emptyset$$