



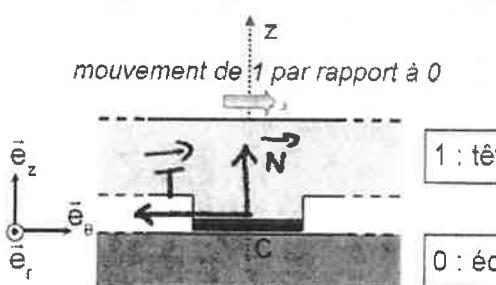
MP Physique Chimie PAQUES 2022

Réponses

E3a MP (extrait 2014) : machine de W et S	Méca du solide	1h30
CCP MP 2016 pb II : eau de javel	Chimie	2h
CCP MP 2019 : autour d'une raie spectrale	Ondes, optique, MQ	4h
CCP MP 2015 pb I Les Z machines	Elm	2h
CCP MP 2017 (la physique au pays des patients)	Thermostat, électromagnétisme	4h
CCP MP 2018 : atome de Bohr	Méca, MQ, optique	4h
Centrale MP 2019 Vie et mort d'un photon	MQ, ondes, optique	4h
Centrale MP 2017 : pesanteur Q bounce...	Mécanique, MQ	4h
Centrale MP 2016 : installation REP	Thermo meca opt, thstat	4h
Centrale MP 2020 : Proxima du Centaure	Meca, opt, chimie, optique, elm	4h
Centrale MP 2018 : géophysique de la Terre	Meca, elm	4h
Centrale MP 2018 : température dans la couronne solaire	Thstat, ondes , chimie	4h
Mines MP 2017 : memristors	Elec, Elm, MQ	3h
Mines MP 2020 : Cuivre	Thstat, thermique, elm, elec	3h
Mines MP 2020 : au temps des mayas	Thermo, optique , elec	3h
Mines MP 2018 : Pour un neutron de plus.	Ondes, MQ	3h
Mines MP 2018 : bioéthanol	chimie	1h30
Mines MP 2016 : le béton	Chimie	1h30
Mines MP 2017 : capacité thermique des gaz	Thstat, MQ meca	3h

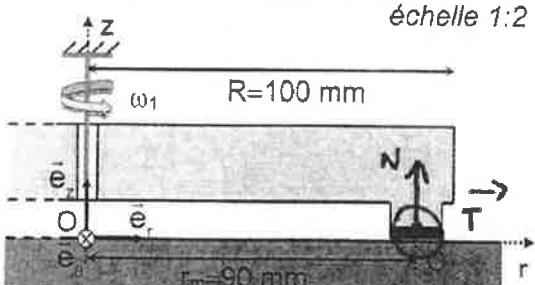
(é3a MP 2014) Machine de Wehrer et Schüller

Figure D : Tête de mesure du coefficient de frottement (un seul patin est représenté)



1 : tête de mesure de f

0 : échantillon de route



$$D2 \quad T = f N \text{ car il ya glissement} \quad \vec{T} = -T \vec{e}_\theta$$

$$D3 \quad \text{TMC projeté sur } \vec{e}_z : 3N - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{3}$$

et $T = \frac{fmg}{3}$

$$D4 \quad M_{T,0z} = -\frac{fmg}{3} \cdot r_m$$

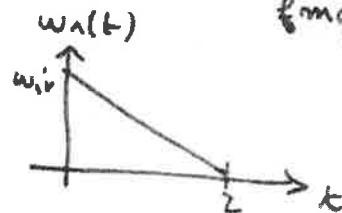
$$D5 \quad \omega_{1i} = v_{C,i}/r_m = \frac{100}{3.6 \times 9.10^2} = 303 \text{ rad/s.}$$

D6 Tant qu'il ya glissement, le TMC/à $0z$ sur la tête donne $\tau_{0z} = -fmg r_m$

$$D7 \quad \omega_1(t) = \omega_{1i} - \frac{fmg r_m t}{J} \Rightarrow \text{anci } t = \tau = \frac{J \omega_{1i}}{fmg r_m}$$

$$D.8 \text{ avec } J = \frac{1}{2} m R^2, \quad \tau = \frac{R^2 \omega_{1i}}{2 f g r_m}$$

ne dépend pas de la masse, ne dépend pas des patins



$$D9 \quad f = \frac{R^2 \omega_{1i}}{2 \tau g r_m} = 0,616 \quad \text{plutôt grand...}$$

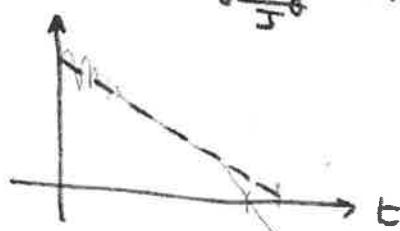
D.10 Pour maintenir la vitesse constante: $\dot{\omega} = 0$

$$\Rightarrow M_0 + M_{T,0z} = 0 \Rightarrow M_0 = -fmg r_m \quad (+actions réciproques)$$

- D.11 v petit: $f \downarrow$ vite qd $v \uparrow$
 v moyen f fait affine de v , varie peu.
 v grand f oscille.

D.12 Pour 60 km/h, on trouve $\approx 0,4$ ce qui correspond au modèle précédent -

si $f \uparrow$ $\dot{\omega} = -\frac{fmg r_m}{J}$: ω décroît plus vite ...



$$D13 \quad \theta_p = \frac{b}{r_m} = \frac{1}{3} \text{ rad} = 19^\circ$$

$$\text{la surface est } \frac{\theta_p}{2} \times (r_2^2 - r_1^2) = \theta_p \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1)$$

$$= \theta_p r_m \times a$$

$$\text{d'où } P = \frac{mg}{3\theta_p r_m a} = \frac{mg}{3ab} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$P = 2 \text{ bars}$

$$D14 \quad \text{un élément de surface sera } ds = r dr d\theta$$

$$\text{la composante de frottement sera } dT = fP \cdot r dr d\theta$$

$$\text{son moment élémentaire : } dm'_{T,0z} = -r dT = -fP r^2 dr d\theta$$

$$\text{d'où } m'_{T,0z} = - \int_{-\theta_p/2}^{\theta_p/2} dr \times \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \cdot fP$$

$$m'_{T,0z} = -\theta_p \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} Pf.$$

$$D15 \quad \frac{|m'_{T,0z}| - |m_{T,0z}|}{|m_{T,0z}|} = \frac{\theta_p \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} Pf}{\frac{8mg r_m}{3}} - 1 = \frac{\theta_p (r_2^3 - r_1^3)}{3ab r_m} - 1$$

$$= \frac{r_2^3 - r_1^3}{3ar_m^2} - 1$$

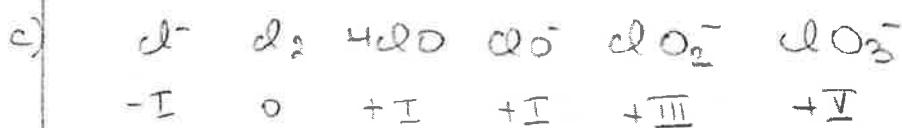
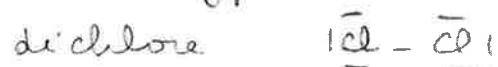
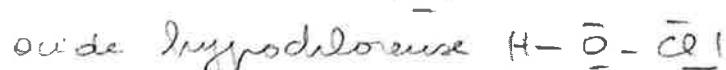
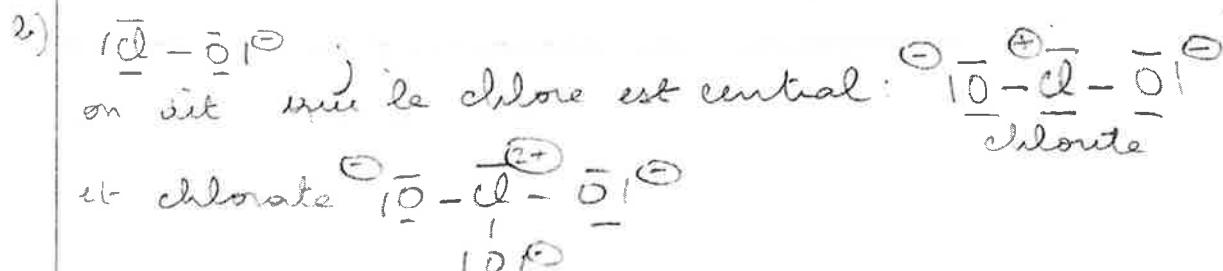
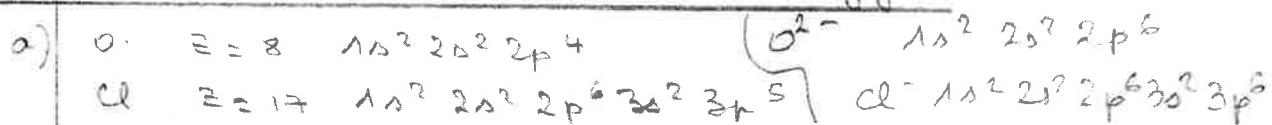
$$A.N = \frac{57^3 - 83^3}{3 \times 14 \times 90^2} - 1 = 2 \cdot 10^{-3}$$

le modèle en appliquant \vec{T}, \vec{N} en C est correct !

Chimie CCP MP 2016. L'eau de Javel (PbII)

II - Généralités

1- Autour des éléments chlore et oxygène



2- Décomposition de $HClO$ en phase aqueuse



$$\Delta_f G^\circ = 266,1 + 188,7 - 2 \times 236,6 = -18,4 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$\Delta_f G_{f,0}^\circ = -RT \ln K_1(T) = -5,96 \text{ kJ mol}^{-1}$$

Le $\Delta_f S^\circ$ n'est pas prévisible (2 modifications → 2 modifications)

b) $\Delta_f H^\circ(T_0) = \Delta_f G^\circ(T_0) + T_0 \Delta_f S^\circ(T_0) = -11,4 \text{ kJ mol}^{-1}$

Principe de Hess $\Rightarrow \Delta_f H^\circ = \Delta_f H_{(H_2O)}^\circ + \Delta_f H_{(Cl_2)}^\circ - 2 \Delta_f H_{(Cl_2O)}^\circ$

$$\Rightarrow \Delta_f H^\circ(Cl_2O) = \frac{1}{2} [\Delta_f H_{(H_2O)}^\circ + \Delta_f H_{(Cl_2)}^\circ - \Delta_f H_{(Cl_2O)}^\circ]$$

$$= \frac{1}{2} (-241,3 \cdot 10^3 + 80,3 \cdot 10^3 + 11,4 \cdot 10^3)$$

$$(\Delta_f H^\circ(Cl_2O) = -74,8 \text{ kJ mol}^{-1})$$

c) on a initialement $P_{H_2O} = P_{Cl_2O} = 0 \Rightarrow \Pi = 0$

$$\Delta_f G_1 = \Delta_f G_2^\circ + RT \ln \Pi \rightarrow - \infty \quad \Delta_f G_1 < 0$$

la réaction se fait (\rightarrow)



$$\text{A l'équilibre } \Delta_r G^\circ = 0 \quad K_1 = \Pi = \frac{\left(\frac{x RT}{VP_0}\right)^2}{\left(\frac{(n-x)RT}{VP_0}\right)^2} \quad /2$$

$$\text{donc } K_1 = \frac{x^2}{(n-x)^2} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \quad \text{si } x = m d$$

$$\frac{x}{1-x} = \sqrt{1.1} = 3,33 \Rightarrow x = 0,43$$

$$P_{\text{total}} = 0,06 \text{ bar} = P_{\text{inert}} \text{ incluse}$$

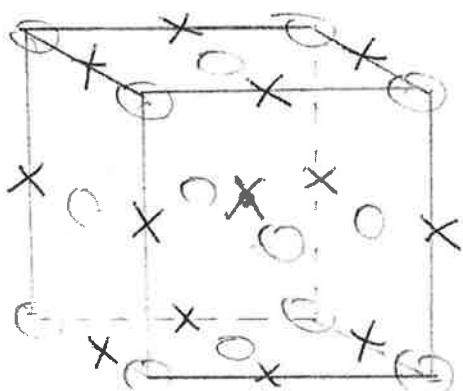
$$\Rightarrow P_{\text{H}_2\text{O}} = P_{\text{H}_2\text{O}} = \alpha P_{\text{tot}} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$$

$$\text{et } P_{\text{H}_2\text{O}} = (1-x) P_{\text{tot}} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$$

- a) le nombre de moles total est conservé : la pression n'a aucune influence.

3) Structure cristallographique de NaCl.

a)



b) coordination = nombre de plus proches voisins.
elle est de 6.

c) il y a 4 ions Na⁺ et 4 ions Cl⁻ par maille

$$\text{donc } \rho = \frac{4(N_{\text{Na}} + N_{\text{Cl}})}{N_A \times a^3} \Rightarrow a = \left(\frac{4(N_{\text{Na}} + N_{\text{Cl}})}{\rho N_A} \right)^{1/3}$$

$$a = 5,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_{\text{Na}^+} + r_{\text{Cl}^-} = 2,86 \text{ pm} \quad \text{on doit avoir } a = 2(r_{\text{Na}^+} + r_{\text{Cl}^-}) \\ = 5,72 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

les valeurs sont correctes

Partie II - propriétés chimiques des ClO^- dans l'eau de Javel 13

4) Fabrication de l'eau de Javel

a) avec les nombres d'oxydation très élevés



b) En pratique il y a démutation du Cl_2 en Cl^- et ClO^-



$$c) 100 \text{ g} = \text{Mol de solution} \Rightarrow V = \frac{M}{\rho} \quad m_{\text{Cl}_2} = \frac{\rho}{M} \times M$$

$$m_{\text{ClO}^-} \Leftrightarrow m_{\text{Cl}_2}$$

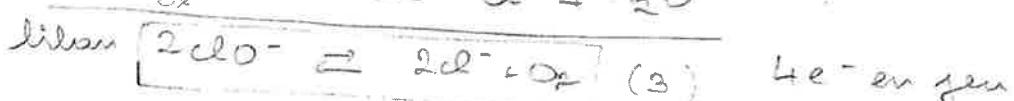
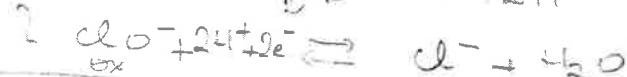
$$[\text{ClO}^-] = \frac{m_{\text{Cl}_2} \text{ produit}}{M_{\text{Cl}_2} V} = \frac{\rho \times M}{V M_{\text{Cl}_2}} = \frac{\rho \times x}{M_{\text{Cl}_2}}$$

$$[\text{ClO}^-] = \frac{1,03 \times 0,026}{2 \times 35,5} \times 1000 = 0,38 \text{ mol.L}^{-1} \text{ pour } (1)$$

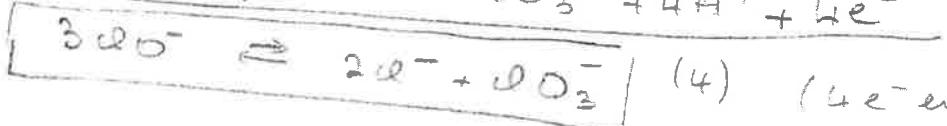
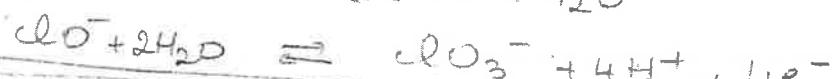
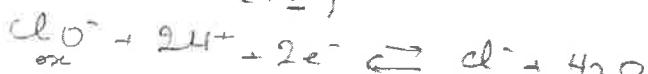
$$C_2 = 1,55 \text{ mol L}^{-1} \text{ pour } (2)$$

d) $\Delta_r H^\circ < 0$ la réaction est exothermique

e) Ainsi du diagramme ClO^- est attaqué par l'eau



On peut aussi envisager une démutation de ClO^- en Cl^- et ClO_3^-



$$\log K_3 = \frac{4}{0,06} (1,73 - 1,23) \Rightarrow K_3 = 10^{33,3} = 2,10^{33}$$

$$\log K_4 = \frac{4}{0,06} (1,73 - 1,29) = 16,1 \approx 27,3$$

Partie III : suivi de la décomposition du bleu brillant

5) suivi spectrophotométrique de la réaction

a) $A = \log \frac{I_0\lambda}{I_\lambda}$

b) Il faut choisir une longueur d'onde fortement absorbée donc ici 630 nm (rouge).

Le E133 paraît bleu parce que il absorbe dans le rouge...

- c) $\frac{1,183}{6,72} = 0,17 = \frac{10}{25} \Rightarrow$
- mesurer 10mL à la pipette
 - verser dans fiole jusqu'à 25mL
 - compléter avec de l'eau

d) $(A = \epsilon \times l \times c)$ concentration en E133 en mol/L
 mais longueur avec unité

on peut vérifier à la calculatrice qu'on a bien une droite

e) faire le blanc = mesurer l'absorbance sans le E133 (c'est avec de l'eau) \rightarrow permet de faire le "0" de l'appareil.

f) Adapté ici car les produits sont incolores

6) Etude cinétique

a) do^- est en excès \rightarrow donc \approx constant. Il y a dégénérescence de l'ordre

b) $v = k \underbrace{[\text{do}^-]^\beta}_{k_{app}} \times [\text{E133}]^\alpha$

7) si l'ordre est 1.

$$-\frac{d[\text{E133}]}{dt} = k_{app} [\text{E133}]$$

$$\Rightarrow -\frac{dA}{dt} = k_{app} A$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln \frac{A_0}{A} = k_{app} t}$$

8) droite de seuil 0...-n...m

8) a) cette fois $k_{app} = 0,133 \text{ min}^{-1}$

$$\frac{k_{app2}}{k_{app1}} = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^\beta = \left(\frac{1}{2} \right)^\beta$$

$$\frac{1}{2} \text{ donc } \boxed{\beta = 1}$$

$$b) k = \boxed{k_{app}^2 = [20,8 \text{ min}^{-1}]}$$

Considérations sur une raie spectrale

Mohamed Afekir (cpteafekir@gmail.com)
 École Royale de l'Air
 CPGE - Marrakech

Partie I - Préambule

Q1.

$$\mathcal{E}^* - \mathcal{E} = hV_0 = h\frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\mathcal{E}^* - \mathcal{E}}{h}$$

Partie II - Oscillations au sein de l'atome de Thomson

II.1- Force électrostatique ressentie par l'électron

Q2.

$$+e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \Rightarrow \rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

Q3. $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$

- $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de *symétrie* de la distribution.
- $\Pi(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ est plan de *symétrie* de la distribution.

$$\vec{E}(M) \in \Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \cap \Pi(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r) \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$$

- la distribution est *invariante* par rotation de φ autour de \vec{e}_z et par rotation de θ autour de \vec{e}_φ ;
- $E(M)$ est, alors, indépendant de θ et de φ : $E(M) = (r, \theta, \varphi) = E(r)$

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Q4. théorème de Gauss (Σ) sphère de rayon r , centrée en O):

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{intérieure à } \Sigma}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) \quad \text{et} \quad q_{\text{intérieure à } \Sigma} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

soit:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

- Q5. la force ressentie par l'électron:
 $\vec{F} = -e \vec{E}(M) = -e \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$
 c'est une force de rappel élastique.

II.2- Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

Q6. Relation fondamentale de la dynamique:

$$m_e \vec{a}_e = \vec{F} = -m_e \omega_0^2 \vec{OM} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}$$

Solution:

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 \cos(\omega_0 t) + \vec{C}_2 \sin(\omega_0 t)$$

Conditions initiales: $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(t=0) = -V_0 \vec{e}_z$

$$\vec{r}(t) = -\frac{V_0}{\omega_0} \vec{e}_z \sin(\omega_0 t)$$

Q7. Moment dipolaire: $\vec{p}(t) = -e \vec{r}$

$$\vec{p}(t) = \frac{e V_0}{\omega_0} \vec{e}_z \sin(\omega_0 t) = p_z(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad p_z(t) = \frac{e V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Q8. Longueur d'onde:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}{e^2}}$$

Application numérique: $\lambda_0 = 0,133 \mu m$; ce rayonnement se trouve dans le domaine de l'Ultra-Violet du spectre électromagnétique.

II.3- Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

- Q9. \vec{F}_f est due au choc entre électrons. τ à la dimension d'un temps, en effet:
 $[\tau] = \frac{[m_e] \times [V]}{[F_f]} = \frac{M \times IT^{-1}}{MT^{-2}} = T$

- Q10. La relation fondamentale appliquée à l'électron, en présence de \vec{F}_f , s'écrit:
 $m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$
 $\vec{p}(t) = -e \vec{r}$; soit:
 $\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \omega_0^2 \vec{p}(t) = \vec{0}$

Solution: $\vec{p}(t) \propto e^{\lambda t}$; l'équation caractéristique:

$$X^2 + \frac{X}{\tau} + \omega_0^2 = 0 \quad ; \quad \Delta_X = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2 \quad \text{avec} \quad X_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0$$

Soit:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{\alpha t} \left(\vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Si on écrit la solution sous la forme:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad |\alpha| \ll \Omega$$

$$\begin{aligned} \vec{p}(t=0) &= -e^{\alpha t} \vec{r}(t=0) = \vec{0} & \Rightarrow & \vec{A} = \vec{0} & \text{et} & \varphi = 0 \\ \alpha &= -\frac{1}{2\tau} & \text{et} & \Omega = \omega_0 & & \\ \vec{p}(t=0) &= -e^{\alpha t} \vec{v}(t=0) = eV_0 \vec{e}_z & \Rightarrow & \vec{B} = \vec{p}_0 = \frac{eV_0}{\omega_0} \vec{e}_z = -e^{\alpha t} \vec{r}_o \end{aligned}$$

Q11. L'énergie potentielle: $\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\mathcal{E}_p(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r^2 + C \text{te}$$

À $t=0$, l'électron est en 0: $\mathcal{E}_p(t=0) = 0$ et $C \text{te} = 0$;

$$\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r^2(t) = \frac{m_e \omega_0^2}{2 \epsilon^2} p^2(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_o^2 e^{-t/\tau} \sin^2(\omega_0 t)$$

Q12. L'énergie cinétique:

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 = \frac{m_e}{2 \epsilon^2} \left(\frac{dp(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_e r_o^2 e^{-t/\tau} \left[-\frac{1}{\tau} \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t) \right]^2$$

Amortissement faible: $\Omega = \omega_0$ et $\tau \omega_0 \gg 1$

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_o^2 e^{-t/\tau} \cos^2(\omega_0 t)$$

Q13. L'énergie mécanique:

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_o^2 e^{-t/\tau} - \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 r_o^2 \frac{|p_m(t)|^2}{p_o^2} \quad \text{avec} \quad p_o^2 = e^2 r_o^2$$

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e \omega_0^2}{2 \epsilon^2} |p_m(t)|^2 = \frac{m_e \omega_0^2}{2 \epsilon^2} p_o^2 e^{-t/\tau} = \mathcal{E}_n e^{-t/\tau_m}$$

La durée caractéristique d'amortissement des oscillations, au terme de l'énergie mécanique est $\tau_m = \tau$.

II.- Modélisation du mouvement de l'électron par une méthode numérique

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\lambda \frac{r}{t} + \omega_0^2 r = 0 \quad (1)$$

Q14. On transforme, tout d'abord, l'équation différentielle (1) en une équation différentielle du *premier ordre* sous forme vectorielle (*forme matricielle*). Pour cela on procède comme suite:

- on pose $v = \frac{dr}{dt}$, on obtient le système de deux équations différentielles à une dimension:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \quad \text{avec} \quad v(t_0) = v_0 \quad \text{avec} \quad x(t_0) = 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -2\lambda v - \omega_0^2 r \end{aligned}$$

- les variables sont $r(t)$ et $v(t)$ tels que:

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \vec{p}_0 e^{\alpha t} \left(\vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t) \right) \\ \vec{p}(t=0) &= -e^{\alpha t} \vec{r}(t=0) = \vec{0} & \Rightarrow & \vec{A} = \vec{0} & \text{et} & \varphi = 0 \\ \alpha &= -\frac{1}{2\tau} & \text{et} & \Omega = \omega_0 & & \\ \vec{p}(t=0) &= -e^{\alpha t} \vec{v}(t=0) = eV_0 \vec{e}_z & \Rightarrow & \vec{B} = \vec{p}_0 = \frac{eV_0}{\omega_0} \vec{e}_z = -e^{\alpha t} \vec{r}_o \end{aligned}$$

- on pose $X(t) = \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$; soit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}}_{X(t)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\lambda v - \omega_0^2 r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} \quad (2) \\ \frac{dX}{dt} &= f(X, t) \end{aligned}$$

- on choisit l'intervalle du temps:

$$t \in [t_0 = 0, T] \quad \text{de pas} \quad \Delta t = h \quad \text{tel que} \quad T = N \times h$$

soit, alors, une liste de valeurs de t : $0, h, 2h, \dots, (N-1)h$; on peut écrire:

$$t_n = t_0 + n \times h \quad \text{avec} \quad t_0 = 0 \quad \text{et} \quad n = 0 \dots N-1$$

- il ne reste qu'à définir les valeurs de $X(t)$ sous forme de tableau de valeurs.

t	$X(t)$
$t_0 = 0$	$X(t_0) = X_0$
t_1	$X(t_1) = X_1$
t_2	$X(t_2) = X_2$
\vdots	\vdots

pour ce faire, on prend comme point de départ X_0 :

$$\frac{dX}{dt}(t_c) = f(X_0, t_0) = f(X_0, 0)$$

- on fait l'approximation suivante: la fonction $X(t)$ est approxième par sa tangente au au voisinage de $X(t_0) = X_0$:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0) \dot{X}(t_0) = X(t_0) + h \times f(X_0, t_0) \\ X(t_1) &= X(t_0) + \frac{1}{2}(t_1 - t_0) \dot{X}(t_0) = X(t_0) + h \times f(X_0, t_0) \\ &\vdots = \end{aligned}$$

- en faisant la même approximation au voisinage de X_1, X_2, \dots ; on peut écrire:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + h \times f(X_n, t_n) = X_n + h \times f(X_n, t_n)$$

soit, en utilisant la relation (2):

$$\begin{pmatrix} r(t_{n+1}) \\ v(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t_n) \\ v(t_n) \end{pmatrix} + h \times \begin{pmatrix} v(t_n) \\ -2\lambda v(t_n) - \omega_o^2 r(t_n) \end{pmatrix}$$

ou:

$$\begin{aligned} r(t_{n+1}) &= r(t_n) + h \times v(t_n) \\ v(t_{n+1}) &= v(t_n) + h \times [-2\lambda v(t_n) - \omega_o^2 r(t_n)] \end{aligned} \quad (3)$$

- Les relations (3) et (4) sont celles qui figurent dans la ligne 17 du programme; avec l'approximation suivante faite sur (4):

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + h \times [-2\lambda v(t_n) - \omega_o^2 r(t_n)] \quad (4)$$

en effet:

```

11   for i in range(N):
12       (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lambda*v-omega*omega*x)
13       tab_1[i] = x
14       tab_2[i] = v
15   return tab_1
16

```

- Q15.** L'instruction `euler(3,0,1)` retourne la liste de valeurs de $r(t_n) = x(t_n)$ pour $n = 0, 1, 2$ (tableau `tab`). Sachant que $h = \frac{150}{3} = 50$;

$$\text{tab}_1 = [50, -50, -300]$$

en effet:

$$\begin{aligned} \text{Pour } N &= 3 \quad ; \quad h = 50; \quad \lambda = 0.03; \quad \omega = 1.4 \\ x_0 &= 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 1 \\ x_1 &= x_0 + 50 \times v_0 = \boxed{50} \quad \text{et} \quad v_1 = v_0 + (-2 \times 0.03 \times 50 - 1.4^2 \times x_0) \times h = -2 \\ x_2 &= x_1 + 50 \times v_1 = 50 - 2 \times 50 = \boxed{-50} \quad \text{et} \quad v_2 = v_1 + h \times (-2 \times \lambda v_0 - 1.4^2 \times x_0) = -5 \\ x_3 &= x_2 + 50 \times v_2 = -50 - 5 \times 50 = \boxed{-300} \end{aligned}$$

- Q16.** while au lieu de for: on change les lignes de commande 16 à 20 par:

```

11   i=0
12   while i < N:
13       (x,v,a)=(x+v*h, v+a*h,-2*lambda*v-omega*omega*x)
14       tab_1[i] = x
15       tab_2[i] = v
16       i=i+1
17   return tab_1
18

```

- Q17.** On détermine la pseudo-pulsation $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ à partir du graphe $r(n)$. Sur l'intervalle du temps égale à 80 (par exemple), on compte 38 pseudo-périodes; soit:

$$\Delta t = 80 = 38 \times \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega \sim 2,98$$

- en faisant pareil pour la première courbe donnée par la méthode d'Euler, on trouve:

$$\Delta t = 100 = 22 \times \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega \sim 1,38$$

alors que la valeur choisie dans le programme python est de 1,4 (ligne 6);

```

11   omega = 1.4
12

```

On pourra dire que la méthode d'Euler est, alors, satisfaisante.

Partie III - Rayonnement de l'atome de Thomson excité et largeurs spectrale de la raie d'émission

III.1- Puissance rayonnée par un atome excité

Q19.

- approximation dipolaire: $r \gg a$;
- approximation non relativiste: $\lambda \gg a$;

- zone de rayonnement ou rayonnement à grandes distances: $r \gg \lambda$

- Q20.** le moment dipolaire \vec{p} et \vec{e}_z ; le plan $\Pi_s(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est, alors, un plan de symétrie de la distribution:

- le champ électrique \vec{E} appartient à ce plan: $\vec{E} \parallel \Pi_s$ et $\vec{E} \perp \vec{e}_{\varphi}$ -;
- le champ magnétique \vec{B} est orthogonal à ce plan: $\vec{B} \perp \Pi_s$ et $\vec{B} \parallel \vec{e}_\varphi$ -.

• au terme d'homogénéité:

- soient:

$$\vec{E} = \frac{\mu_o}{4\pi r} \sin(\theta) \left[\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

Q21. Vecteur de poynting:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} = \left(\frac{\mu_o}{4\pi r} \sin(\theta) \left[\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right)^2 \frac{\vec{e}_r}{\mu_o c} \\ &= \left(\frac{\mu_o \omega_o^2 p_m}{4\pi r} \sin(\theta) \right)^2 \sin^2 \left(\omega_o t - \frac{\omega_o r}{c} \right) \frac{\vec{e}_r}{\mu_o c} \\ < \vec{s} >_t &= \frac{1}{2\mu_o c} \left(\frac{\mu_o \omega_o^2 p_m}{4\pi r} \sin(\theta) \right)^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

Q22. La puissance moyenne rayonnée:

$$\Phi_{ray} = \iint_{(S)} \vec{r} < \vec{\mathcal{R}(r=R)} > \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \omega_0^3 p_m^2}{32\pi c^2} 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{4/3}$$

soit:

$$\Phi_{ray} = \frac{\mu_0 \omega_0^4 p_m^2}{12\pi c} = \frac{\omega_0^4 p_m^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad ; \quad (\epsilon_0 t_o c^2 = 1)$$

Q23. la puissance moyenne Φ_{ray} rayonnée et énergie \mathcal{E}_m de l'oscillateur:

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e \omega_0^2}{2 \epsilon_0^2} p_o^2 e^{-2t/\tau} \quad \text{et} \quad \Phi_{ray} = \frac{\omega_0^4 p_o^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} e^{-2t/\tau}$$

on a, alors:

$$\Phi_{ray} = \frac{\omega_0^2 \epsilon^2}{6\pi \epsilon_0^3 m_e} \mathcal{E}_m(t) = \gamma \mathcal{E}_m(t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\omega_0^2 \epsilon^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m_e}$$

III.2- Amortissement des oscillations

Q24. Estimation qualitative grossière

$$\mathcal{E}_{ray} = \frac{hc}{\lambda_0} = h\nu_0 \quad \text{et} \quad \Delta t \sim \frac{\mathcal{E}_{ray}}{\Phi_{ray}} = \frac{12\pi h \epsilon_0 c^4}{\lambda_0 \omega_0^4 c^2 \alpha^2} \approx 10^{-10} \text{ s}$$

Q25.

$$\delta \mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t + \delta t) - \mathcal{E}_m(t) = -\Phi_{ray} \delta t$$

Q26.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \Phi_{ray} &= \frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \gamma \mathcal{E}_m(t) = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\tau_e} &= 0 \quad \text{avec} \quad \tau_e = \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

En plus, en utilisant la question Q13.:

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{E}_m(t) \quad \Rightarrow \quad \tau_e = \tau = \frac{1}{\gamma}$$

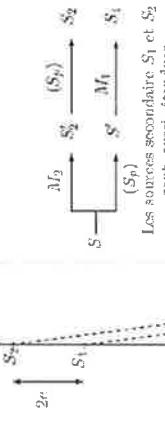
Q27. durée d'un train d'onde:

$$\Delta T_{train} \sim 5\tau \approx 1,7 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Partie IV - Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

IV.1- Description de l'interféromètre de Michelson

Q28. Marche des rayons:



Les sources secondaire S_1 et S_2 sont, aussi, étudiées

Figure 1: Modèle complet de l'interféromètre de Michelson en lame d'air

Q29. Différence de marche:

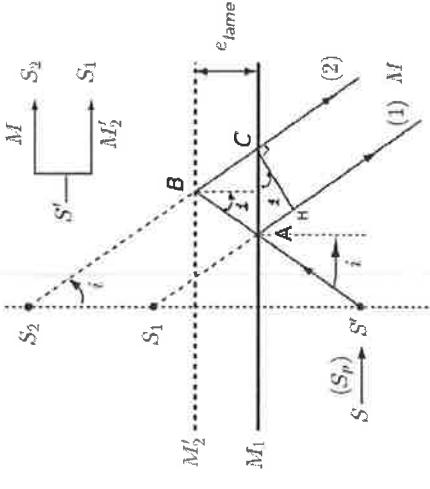


Figure 2: Modèle simplifié de l'interféromètre de Michelson en lame d'air

$$\begin{aligned} \delta = (2) - (1) &= (ABC) - (\lambda H) = 2AB - AH \\ \text{avec } AB &= \frac{e_{lame}}{\cos(i)} \quad ; \quad AH = AC \sin(i) \quad \text{et} \quad AC = 2e_{lame} \tan(i) \\ \delta &= \frac{2e_{lame}}{\cos(i)} - \frac{2e_{lame} \sin^2(i)}{\cos(i)} = 2e_{lame} \cos(i) \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse:

$$I(M) = 2I_o \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right)$$

les franges d'interférence sont des anneaux concentriques localisés à l'infini.

IV2- Largeur spectrale d'une raie d'émission

Q30.

- La raie spectrale n'est pas strictement monochromatique. La raie spectrale n'est pas strictement monochromatique, elle est composée de plusieurs bandes spectrales monochromatiques de fréquences comprises entre $\nu_1 = \nu_o - \frac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_2 = \nu_o + \frac{\Delta\nu}{2}$.

Ces raies étant incohérentes; on a, donc, possibilité du brouillage.

- la variation de l'ordre d'interférence

$$\Delta p = p \left(\nu_o + \frac{\Delta\nu}{2} \right) - p(\nu_o) = \frac{\delta\Delta\nu}{c/2}$$

Q31.

- anneaux contrastés: $\delta = m\lambda = m\frac{c}{\nu}$, avec m entier

$$\text{perte de contraste: } \delta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{\nu}$$

- à la frontière:

$$\delta_{lim} = m \frac{c}{\nu_o} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{\nu_o + \frac{\Delta\nu}{2}} \Rightarrow m = \frac{\nu_o}{\Delta\nu} = \frac{\nu_o}{c} \delta_{lim} \Rightarrow \delta_{lim} = \frac{c}{\Delta\nu}$$

soit;

$$2e_{lim} = \frac{c}{\Delta\nu} \Rightarrow e_{lim} = \frac{c}{2\Delta\nu}$$

Calcul de l'intensité observée en F'

Q32. L'intensité donnée par une petite bande spectrale:

$$dI(F') = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu}{c} \delta(F') \right) \right] d\nu = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} [1 + \cos(2\pi\nu\tau(F'))] d\nu$$

$\tau(F')$ désigne le temps de cohérence.

Ordre d'interférence:

$$p(F', \nu) = \frac{\delta(F')}{\lambda} = \frac{\delta(F')}{c} \nu = \tau(F') \nu$$

$T_o = t_{e2} - \underbrace{t_{el}}_{=0}$ avec t_{el} : l'instant d'émission du $l^{ème}$ maximum

$I = \int_{[\Delta\nu]} dI(F') = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} [1 + \cos(2\pi\nu\tau(F'))] d\nu = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} \left(\Delta\nu + \left[\frac{\sin(2\pi\nu\tau(F'))}{2\pi\nu\tau(F')} \right]_{\nu_1}^{\nu_2} \right)$

$= I_{vm} \left(1 + \frac{\sin(\pi\tau(F')\Delta\nu)}{\pi\tau(F')\Delta\nu} \cos(2\pi\nu_o\tau(F')) \right)$

$= I_{vm} [1 + \Gamma(F') \cos(2\pi\nu_o\tau(F'))]$ où $\Gamma(F') = \frac{\sin(\pi\tau(F')\Delta\nu)}{\pi\tau(F')\Delta\nu}$

Q36. Le récepteur reçoit le premier maximum à l'instant:

$$t_1 = \frac{d}{c}$$

Q37.

• Le deuxième maximum est émis à l'instant:

$$t_2 = \frac{x}{V_x} = T_0$$

• La distance $d_{O'R}$ entre l'émetteur O' et le récepteur R à cet instant:

$$d_{O'R} = d - x = d - V_x T_0$$

• La date t_2 du réception du deuxième maximum:

$$t_2 = T_0 + \frac{d_{O'R}}{c} = T_0 + \frac{d - V_x T_0}{c}$$

Q42.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n1} &= k_B T_{gaz} & \Rightarrow & n_1 = \sqrt{\frac{2k_B T_{gaz} m^* l^2}{\pi \hbar^2}} \approx 10^{12} \\ \text{la variation } \frac{\mathcal{E}_{n1+1} - \mathcal{E}_{n1}}{\mathcal{E}_{n1}} &\sim 10^{-12}; \text{l'approximation continue est alors valable.} \end{aligned}$$

Q43.

$$n(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1}}$$

Q44. Le nombre d'états quantiques et densité:

$$dn = n(\mathcal{E} + d\mathcal{E}) - n(\mathcal{E}) = \frac{dn}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{dn}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}} = \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 - \frac{V_x T_0}{c} = T_0 - \frac{V_x T_0}{c} = T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right) \\ v_o &\approx v \left(1 - \frac{V_x}{c}\right) \quad \text{ou} \quad v \approx v_o \left(1 + \frac{V_x}{c}\right) \end{aligned}$$

V2- Distribution des vitesses dans un gaz parfait unidimensionnel

$$\begin{aligned} T_{gaz} &= 1000K & \text{et} & L = 10cm \\ \text{Fonction d'onde d'un atome dans un état statonnaire} & & & \end{aligned}$$

Q39. Le spectre énergétique d'un atome est discret. La masse m^* d'un atome de Hg :

$$1 = n_{Ig}^* \mathcal{N}_A = \frac{m^*}{M_{Ig}} \quad \Rightarrow \quad m^* = \frac{M_{Ig}}{\mathcal{N}_A} \approx 10^{-21} g$$

Conditions aux limites:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= \mathcal{E}\psi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) & \text{avec} & k^2 = \frac{2m^*\mathcal{E}}{\hbar^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x=0) &= 0 & \text{et} & \psi(x=L) = 0 \end{aligned}$$

Q41. Solution:

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

- $\psi(x=0) = 0$ donne $A = 0$
- $\psi(x=L) = 0$ donne $B \sin(kL) = 0$

soit,

$$\begin{aligned} k_n L &= n\pi \quad \text{avec} \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{2m^*\mathcal{E}_n}{\hbar^2} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* L^2} \\ \mathcal{E}_n &= n^2 \times \mathcal{E}_1 \quad \text{ou} \quad = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* L^2} \end{aligned}$$

• *Théorème d'équipartition de l'énergie:*
Pour un système en contact avec un thermostat à la température T , la valeur moyenne de toute contribution quadratique dans l'expression de l'énergie est égale à $1/2k_B T$.

Q45. Probabilité:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{E}) &= Ae^{-\beta\mathcal{E}} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{k_B T_{gaz}} \\ d\mathcal{P}(\mathcal{E}) &= Ae^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E} = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \\ f(\mathcal{E}) &= Ae^{-\gamma\mathcal{E}} \rho(\mathcal{E}) = \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} \end{aligned}$$

Q47. $\int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 1$ est la condition de normalisation.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) &= 1 = \int_0^{+\infty} \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} = \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} \Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{k_B T_{gaz} \pi}} \\ f(\mathcal{E}) &= \frac{1}{\sqrt{k_B T_{gaz} \pi}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \times \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} \end{aligned}$$

Q48.

• La valeur moyenne $\langle \mathcal{E} \rangle$ de l'énergie:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{E} e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E}}_{\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \times \beta^{3/2}} = \frac{k_B T_{gaz}}{2}$$

- Vitesse quadratique moyenne:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} m^* \langle V_x^2 \rangle = \frac{k_B T_{gas}}{2} = \frac{1}{2} m^* u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{k_B T_{gas}}{m^*}}$$

- Ordre de grandeur de u :

$$u \approx 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

V.3- Élargissement spectral par effet Doppler

Q49.

$$\nu_+ = \nu_o \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \frac{c}{\lambda_o} \left(1 + \frac{u}{c}\right) \quad \text{et} \quad \nu_- = \frac{c}{\lambda_o} \left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

$$\Delta_{DOP} = \nu_+ - \nu_- = \frac{2u}{\lambda_o} = 10^8 \text{ Hz}$$

même ordre de grandeur que $\Delta\nu_{exp}$ mesuré en Q35.

CCP MP 2015 - Physique - problème 1

Une autre voie vers la fusion thermonucléaire ;
les 2 machines ...

Première partie : inductance.

Théorème : le plan $(M, \vec{B}_0, \vec{u}_y)$ est plan de symétrie $\Rightarrow (\vec{B} \parallel \vec{u}_y)$

invariance sous rotation autour de $0 \otimes 1$ et par translation selon $0 \otimes z$: $(\vec{B} = B(\varphi) \vec{u}_z)$

a) On utilise le théorème d'Ampe sur une surface d'area $D\sigma$ et de rayon R : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$ avec $I_{encl} = \rho dV \mu_i$

b) si $\alpha < \omega$: $\vec{B} = \mu_0 I$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I D\sigma$

$$\text{Théorème : } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I D\sigma = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^R B(l) dl = \frac{\mu_0 I^2 \ln \frac{R}{a}}{2\pi}$$

b) On définit L par $\Phi = L I$ donc $L = \frac{\mu_0 I^2 \ln \frac{R}{a}}{2\pi}$

$$c) L = \frac{\mu_0 \pi R^2}{2\pi} \times \ln 3 = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

$$d) L = 2 \times 6,6 \cdot 10^{-3} \ln 40 = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ H}$$

Deuxième partie : contexte des grandes puissances pulvérulentes

Théorème : $E = \frac{1}{2} C V^2$, on parle de "l'effet de Laplace" et "l'effet inductif" des machines sont "auto-comprimées" les forces sont suffisantes pour déformer la matière.

b) une fois que le plasma est formé et se maintient autour de l'axe $0 \otimes 1$ la force de Laplace est telle qu'il existe un équilibre des perturbations et les forces d'agitation thermique très grande, avec des éléments très proches (plasma dense) \rightarrow favorable à la fusion.

Théorème : tout d'abord minimiser de l'énergie Capacité, ou dans le cas de la machine capacité de la bobine; puis il faut faire correspondre la puissance dissipée.

$$\text{Théorème : } P = \frac{E}{t} = \frac{10,6}{10^{-7}} = 1043 \text{ Watt}$$

Dans une centrale nucléaire, une réaction de fusion est grande, plus $\frac{T_{max}}{T}$ est grand.

Troisième partie : amplification en courant

Cas d'un circuit indéformable.

$$\text{Théorème : } \frac{di}{dt} + \frac{L di}{dt} = 0$$

$$a) i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (\text{continuité de } i \text{ à } t=0)$$

$$b) \dot{i} = -\frac{R}{L} i \rightarrow 0$$

$$c) \dot{i} \rightarrow 0$$

$$d) \dot{i} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$\text{on aura } i \approx I_0$$

$$e) \text{Cas d'un circuit déformable.}$$

$$\text{Théorème : } \dot{i} = \dot{n} \quad (\text{Cas d'Ohm}) ; n \rightarrow 0 \rightarrow \dot{i} \rightarrow 0$$

$$\text{donc } (\dot{i} = -\frac{d \Phi}{dt}) \Rightarrow \Phi = L(t) \cdot i(t) = \text{constante}$$

$$f) \text{on sait que } i \propto t, L \text{ droit} \Rightarrow \Phi \propto \frac{L}{2} \cdot i^2 ; \frac{d\Phi}{dt} \propto \text{est bien une "compréssion" du circuit...}$$

Quatrième partie : dispositif de compression.

Inductance totale et force de réaction

$$a) \text{Cas d'un rectangle}$$

$$L_{tot} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot L \ln \frac{R}{a}$$

$$L_{tot} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R}{a} \right) \quad L_{tot} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot L \ln \frac{R}{a}$$

$$b) \text{Cas d'une bobine } \Phi = L_{tot} \cdot I_0$$

$$c) \text{on peut se ramener au flux à travers 2 rectangles}$$

$$L_{tot} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot L \ln \frac{R}{a}$$

$$D) \text{Donc } \frac{E_{max}}{I_0} = A + \frac{1}{L} \ln \left(\frac{R}{a} \right)$$

$$e) \text{plus le rapport } \frac{R}{L} \text{ est grand, plus } \frac{T_{max}}{T} \text{ est grand.}$$

c) on a intérêt à prendre la $\frac{I_0}{n_b}$ le plus petit

donc $n \rightarrow n_b$
et $\frac{R_D}{n_b}$ le plus grand possible.

d) $\frac{I_{max}}{I_0} = 1 + \frac{\alpha_s}{2} \times \frac{\ln \frac{S}{I_0}}{\ln \frac{2}{4}} = 1 + 7,5 \times \frac{2}{0,13} = 111$

 $I_{max} = 111 \times 1,8 \cdot 10^6 = 1,9 \cdot 10^8 \text{ A}$

Coût énergétique de la compression du flux

g) a) $E = \frac{1}{2} L d^2$

b) $E_0 = \frac{1}{2} L_{eq} I_0^2$

 $L_f = \frac{1}{2} L_{eq} I_{max}^2 = E_0 \times \left(\frac{I_{max}}{I_0} \right)^2$

c) $\Delta E = E_0 \left(\frac{I_{max}}{I_0} - 1 \right) = \Delta E$ avec $d = \frac{I_{max}}{I_0} - 1$

$d = \frac{L_{eq} - 1}{L_{eq} - 1}$

Optimisation du courant injecté

10.a) $\Delta E \leq \Delta E_{desig} \Rightarrow$ pour d fixé
(géométrique)

 $E_0 < \frac{\Delta E_{desig}}{\alpha}$
dans le meilleur des cas.

$T_{opr} = \left(\frac{2 \Delta E_{desig}}{L_{eq} \left(\frac{L_{eq} - 1}{L_{eq} - 1} \right)^{1/2}} \right)^{1/2}$

c) avec $\Delta E = E_0 \left(\frac{I_{max}}{I_0} - 1 \right)$; on donne, on veut $\frac{I_{max}}{I_0}$ grand
on a donc l'intérêt à prendre un I_0 petit et L_{eq} grand.

d) $I_{opr} = \left[\frac{2 \times 2 \cdot 10^6}{\frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \times [0,15 \ln \frac{2}{0,7} + 0,02 \ln \frac{8}{7}] \times (110)}{1/2}} \right]^{1/2}$

 $= \left[\frac{2 \cdot 10^{13}}{[0,15 \times 2 + 0,02 \times 0,13] \times 110} \right]^{1/2}$
 $= \frac{2 \cdot 10^{13}}{3,13 \cdot 10^{-2}} =$
 $\approx 9,6 \cdot 10^{12} = 60 \cdot 10^{10}$
 $\approx 8 \cdot 10^5 \text{ A}$

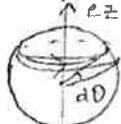
CCP-MP-2017 - La physique au pays des patients

I. Comportement d'une assemblée de dipôles dans un champ magnétique

1)

$$Q_1 \quad \vec{M} = I \pi R^2 \vec{e}_z$$

Q2 On peut la décomposer en spine et moment des $d\vec{M}$



$$\vec{dM} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow d\vec{M} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow \vec{M} \parallel O_z \text{ (axe de rotation)}$$

Q3 moment magnétique du proton μ_p en $J.T^{-1}$

cohérent car $E_p = -\frac{\mu}{2} \vec{B} \cdot \vec{B}$

Q4

$$\vec{E}_p = -\mu B \cos \theta \text{ extrémum pour } \cos \theta = \pm 1$$

$$\vec{F} = \vec{M} \times \vec{B}_0 \Rightarrow \| \vec{F} \| = \mu B_0 |\sin \theta| \text{ mais pour } \sin \theta = 0 \\ \text{soit } \theta = 0 \quad \text{soit } \theta = \pi$$

$$E_p = -\mu B \quad E_p = +\mu B \\ (\text{stable}) \quad (\text{instable})$$

Q.5. $\Delta E_p = 2\mu B_0 \approx 2 \times 1.4 \times 10^{-26} \times 1 = 2.8 \times 10^{-26} J \text{ ou } 1.45 \times 10^{-7} eV$

Q.6 $E_c = \frac{1}{2} k_B T = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 310 = 6.4 \times 10^{-21} J \text{ ou } 4.0 \times 10^{-7} eV$

ΔE_p est donc très faible

Q7. Energie mise en jeu très faible: trop de risque de rupture de liaison

Q.8 $E_p = A e^{-\frac{E}{kT}}$ (k = constante de monnaie)

Q.9 $\frac{N_+}{N_-} = e^{-\frac{2\mu B_0}{kT}} \approx 1 - \frac{2\mu B_0}{kT} \approx 1 - 6.2 \times 10^{-6} \quad N_+ < N_-$

Q.10 il y a un peu plus de dipôles dans le niveau plus élevé (donc de plus petite énergie) ($E_- = -\mu B$)

Q.11 $m = \frac{N_- - N_+}{N_- + N_+} = \frac{1 - \frac{N_+}{N_-}}{1 + \frac{N_+}{N_-}} = \frac{\mu B_0}{2k_B T} \quad (\text{à l'ordre } 1)$

Q.12 $m = 3.7 \times 10^{-6} \ll 1 \dots \text{le désordre régne}$

13)

Q.13. L'électron fait un tour en une durée $\frac{2\pi R_B}{v}$

l'intensité équivalente est donc $-\frac{e v}{2\pi R_B}$

$$\text{où } \vec{I}_e = -\frac{e v}{2\pi R_B} \times \pi R_B^2 \vec{e}_z = -\frac{e v R_B}{2} \vec{e}_z$$

Q.14 $\vec{B}_0 = m_e \vec{O} \vec{M} \times \vec{v} = m_e R_B v \vec{e}_z \quad B_e = m_e R_B v$

Q15 $\gamma_e = \frac{\mu_e}{\sigma_e} = -\frac{e}{2m_e} = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C.kg}^{-1}$

Q16 $\mu_B = \sigma_p \cdot \gamma_p$ avec $\sigma_p = \frac{\hbar}{2}$ $\Rightarrow \mu_B = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2} \times 2,67 \cdot 10^8 = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$
c'est bien conforme.

Q17 le photon doit avoir la bonne énergie: $\hbar\nu = \frac{e}{2} \mu_B B_0$
 $= 2 \frac{\hbar}{2} \gamma_p B_0$
 $\Rightarrow \nu = \frac{\gamma_p B_0}{2\pi}$

Q18 F.N $\nu = 4,25 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ $\lambda = \frac{c}{\nu} = 4,7 \text{ nm}$ (ondes radio)

Q19 T.M.C $\frac{d\vec{E}_0}{dt} = \vec{P} \wedge \vec{B}_0$ avec $\vec{P} = \gamma \vec{v}$

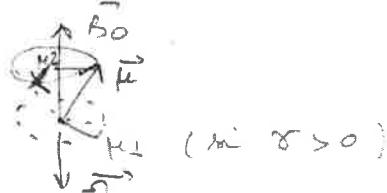
on obtient $\frac{d\vec{E}_0}{dt} = \gamma \vec{P} \wedge \vec{B}_0 = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{P}$ avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$

Q20 $\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ donc $\|\vec{u}\|$ ne conserve

$\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{e}_z) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{e}_z = 0$ donc $\vec{u} \cdot \vec{e}_z$ ne conserve

Q21 pour $\vec{u}_\perp \cdot \frac{d\vec{u}_\perp}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{u}_\perp$ on reconnaît une rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$

Q22 \vec{u} tourne autour de \vec{B}_0



Q23 \vec{M}_0 est $\parallel \vec{e}_z$ et dans le même sens.

Q24 $\vec{M}_0 = \frac{1}{2} \vec{u}_\perp = N_+ (-\mu_p \vec{e}_z) + N_- (\mu_p \vec{e}_z)$

et $N = N_+ + N_-$

donc $\vec{M}_0 = \mu_p \eta N \vec{e}_z$

Q25 $M_0 = \frac{\mu_B^2 B_0 N}{k_B T} = \frac{\gamma_p^2 \hbar^2}{4 k_B T} B_0 N$

Q26 $N = 2 \times \text{conc vol des molécules d'eau} = 2 \times \frac{eN_A}{m} = 6,2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$

Q27 sur l'axe $B_{ave} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi r^3} \times M_0 = 2 \cdot 10^{-2} M_0 = 6,1 \cdot 10^{-9} \text{ T.m}^{-3}$

Q28 Pour que \vec{B}_0 se rapproche rapidement à \vec{E}_0 , il faut un champ complémentaire et \vec{P}_0 sera aligné sur \vec{B}_0

Q29 on a une sorte de "couple de freinement" avec des temps de relaxation T_1 et T_2 différents.

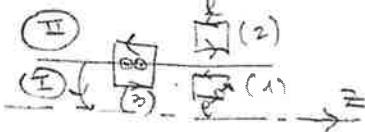
II les champs magnétiques

1. Crédation d'un champ \vec{B}_1 tournant

Q31 $\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
en quasi statique, dans le vide $\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

Q32 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$

Q33 symétrie : plan $M \bar{u}_z, \bar{u}_0$ = plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \parallel \bar{u}_z$
invariances : translation // $0z$, rotation $0z \Rightarrow \boxed{\vec{B} = B(z) \bar{u}_z}$



$$\text{Amperes law (1) ou (2)} \Rightarrow \\ l(B(r_1) - B(r_2))l = 0 \\ \Rightarrow \text{uniforme dans (1), et dans (2)}$$

Q34 sur le circuit (3) : $B_I l - B_{II} l = \mu_0 n \cdot I l$

$$\Rightarrow B_I = \mu_0 n I \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \bar{u}_z}$$

Q35 Dans la zone commune :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 n I_0 \left(\cos(\omega t) \bar{u}_x + \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \bar{u}_y \right) \\ &= \mu_0 n I \left(\cos(\omega t) \bar{u}_x - \sin(\omega t) \bar{u}_y \right) \\ \vec{B}_1 &= \mu_0 n I \bar{u}' \text{ avec } \bar{u}' = \cos(\omega t) \bar{u}_x - \sin(\omega t) \bar{u}_y \end{aligned}$$

vitesse de rotation de \bar{u}' : $\bar{\omega} = -\omega \bar{u}_z$

Q36 $\bar{u}' = \cos(\omega t) \bar{u}_x - \sin(\omega t) \bar{u}_y \Rightarrow \vec{B}_{1-} + \vec{B}_{1+} = 2 B_1 \cos \omega t \bar{e}_x$
 $\bar{u}' = \cos(\omega t) \bar{u}_x + \sin(\omega t) \bar{u}_y \Rightarrow \vec{B}_{2-} + \vec{B}_{2+} = 2 B_2 \cos \omega t \bar{e}_x$

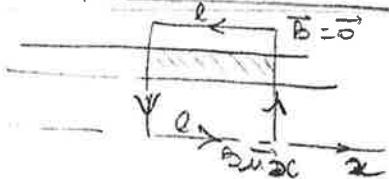
\vec{B}_1 est bien la somme de 2 champs B_1 tournant dans des sens opposés

2. Crédation d'un champ permanent intense \vec{B}

Q37 I_0 est le flux de \vec{B} à travers une section a^2

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{I_0}{a^2} \bar{u}_0}$$

Q38



théorème d'Amperé :

$$(B - 0) \times l = \mu_0 I (R_2 - R_1) \times l$$

$$\boxed{B = \mu_0 I \frac{(R_2 - R_1)}{a^2}}$$

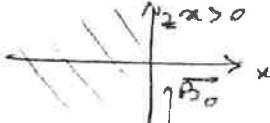
Q39

$$I = \frac{B a^2}{\mu_0 (R_2 - R_1)} = \frac{1 \times 10^6}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 0.05} = 16. A$$

Q40 $\text{rot} \vec{z} = -\lambda \vec{B}$ avec $B = \mu_0 n I$
 \downarrow
 $A \cdot m^{-2}$
 donc λ en $\frac{A \cdot m^{-3}}{H \cdot m^{-2} \cdot A}$ λ est en $H^{-1} \cdot m^{-1}$

Q41 $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{z} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{rot}(\vec{z})$
 $\Rightarrow \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \times (-\lambda \vec{B})$
 d'ici l'équation:
 $\Delta \vec{B} = \mu_0 \lambda \vec{B}$

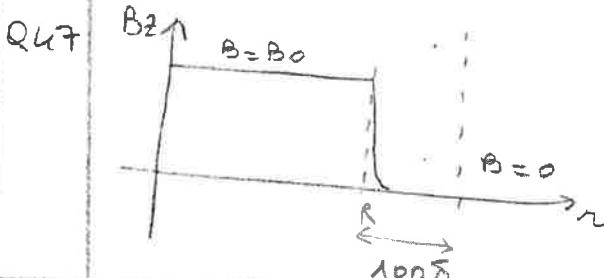
Q42 $\Delta \vec{B}$ en $T \cdot m^{-2} \Rightarrow \mu_0 \lambda$ est en m^{-2} [$H^{-1} \cdot m^{-1} \times H \cdot m^{-1}$]
 On note donc $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \lambda}}$ et $\Delta \vec{B} = \frac{1}{\delta^2} \vec{B}$

Q43  invariance par translation en y ou z
 $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(x)$

Q44 Solutions en $\vec{B} = \vec{\alpha} e^{x/\delta} + \vec{\beta} e^{-x/\delta}$
 • pour $x \rightarrow -\infty$ $e^{-x/\delta}$ diverge \Rightarrow on ne prend que la 1^{re} solution.
 • on doit assurer la continuité de \vec{B} en $x=0$
 $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 e^{x/\delta}} = B_0 e^{x/\delta} \vec{u}_z$

Q45 $\vec{z} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{u}_y = -\frac{1}{\mu_0 \delta} B_0 e^{x/\delta} \vec{u}_y$

Q46 δ est très faible. le champ magnétique ne "pénètre" pas dans le semi-conducteur



III la RMN pulsée

1. Etude dans le référentiel tournant lié à \vec{B}_1

Q48 Dans le référentiel du laboratoire ; et en reprenant les résultats de la partie A.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma_p \vec{M} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_0) =$$

Q49 avec $\vec{D} = \vec{B}_1 - \frac{d\vec{B}_1}{dt} R_0 = \vec{\sigma} + \vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{B}_1$

$$\begin{pmatrix} -\omega_{B_1, \sin \omega t} \\ +\omega_{B_1, \cos \omega t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{R_1/R_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1, \cos \omega t \\ +B_1, \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\omega = -\Omega)$$

on voit donc que $\vec{\omega}_{R_1/R_0} = +\omega \vec{e}_2 = -\Omega \vec{e}_2$

Q50 dans le référentiel R_1

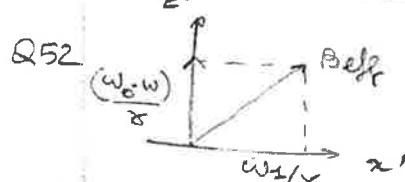
$$\frac{d\vec{M}}{dt}|_{R_1} = \frac{d\vec{M}}{dt}|_{R_0} + \vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{M}$$

$$= \gamma_p \vec{M} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_0) + \vec{\omega}_{e_1/R_0} \wedge \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt}|_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_0 - \frac{\vec{\omega}_{e_1/R_0}}{\gamma_p} \right)$$

Q51 $= \gamma_p \vec{M} \wedge \vec{B}_{eff}$ avec $\vec{B}_{eff} = \underbrace{(\vec{B}_1 + \vec{B}_0)}_{\text{selon } x} - \underbrace{\frac{\vec{\omega}_{e_1/R_0}}{\gamma_p}}_{\text{selon } z}$

le champ \vec{B}_{eff} est statique dans R_1



Q53 L'équation est celle d'un mot de précession de \vec{M} autour de \vec{B}_{eff}

Q54 A l'équilibre thermique $\vec{M} \parallel \vec{B}_0$. Lorsqu'on applique \vec{B}_1 , \vec{M} tourne autour de $\vec{B}_{eff} \approx \vec{B}_0$, la direction de \vec{M} est très peu perturbée.

Q55 Si $(\omega - \omega_0)$ diminue devant ω , \vec{B}_{eff} se rapproche de l'axe Ox .

Q57 A la "résonance" \vec{B}_{eff} sera égal à \vec{B}_1 : \vec{M} peut s'inverser.

Q56 résonance car $\omega = \omega_0$ correspond à une fréquence propre du système où le comportement change beaucoup

Q59

Le terme qui correspond à $-\omega$ donne un $\vec{B}_{eff} = (\omega + \omega_0) \vec{u}_z + \omega_0 \vec{u}_x$.
 Comme B_1 est faible : $\omega_0 \ll (\omega + \omega_0)$ et ce \vec{B}_{eff} reste \perp selon \vec{u}_z et n'a donc pas d'effet sur \vec{M} .
 (il faut annuler à "annuler" \vec{B}_0 pour que l'effet de B_1 se fasse sentir)

Q60

Il faut couvrir les "fluctuations" de B_0 donc de ω_0 ,
 et donc ω doit varier autour de ω_0 et non monochromatique.

Q61

 \vec{M} est toujours \perp à \vec{B}_{eff} le champ dont norme le vecteur est donc \vec{B}_0 .

$$S_1 = \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$t_{p1} = S_1 + \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Q62 retournement de \vec{M} pour $\theta_2 = 1/2$ période [à 1 secondes]

$$t_{p2} = t_2 = 9 \times \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_1} = 2S_1$$

Q63 Apres la pulse, $\vec{B}_{eff} \parallel \vec{u}_z \Rightarrow$ précession autour de Oz

Q64 Si on ne prend pas en compte la précession, \vec{M} continuerait à tourner (+)? La projection sur xOy serait constante

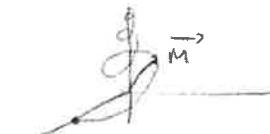
Q65 Avec une pulse à 90° , les conditions "initiales"

après θ_2 sont $M_x = 0$ $M_y = M_0$,

en suivant $M_{xy}(t)$ on remonte à T_2 par la fente à l'origine de la courbe

2. Echo de spin

Q66 $M_y(\theta_1) = M_0 \quad M_x = M_z = 0$



Q67 $M_z = M_0 (1 - e^{-\frac{t-\theta_1}{T_1}})$ augmente

$$M_z = M_0 e^{-\frac{t-\theta_1}{T_2}} \cos(\omega_0(t-\theta_1)) \text{ à cause de (+) ...}$$

Q68 Pour $t > T_2 + 2\theta_1$ on abandonne le mystérieux avec $\vec{M} \perp Oz$ - M_z passe de $-M_0$ à M_0 avec la constante T_1

3. Bobines de détection

Q70 le champ magnétique est variable (Neumann)

Q71 ② (flux à travers $S \parallel \vec{u}_y$), ⑥ S en R^2

④ variations de B .

⑨ cf Q67

⑦ M_0 prop à B_0 .

I - Modèle historique de Bohr

$$Q1 \quad \vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

$$q=e$$

$$Q2 \quad \vec{F} = m\vec{a} = -m\frac{v^2}{r}\hat{u}_r \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}\right)^{1/2}$$

$$Q3 \quad E_p = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \frac{1}{2} \quad \text{on a bien } E_C = -\frac{E_p}{2}$$

$$Q4 \quad L = m \cdot r \cdot v = \left(\frac{e^2 m r}{4\pi\epsilon_0}\right)^{1/2}$$

$$Q5 \quad L = n\hbar \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} mr = n^2 \hbar^2 \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2} = a_B n^2$$

$$\text{avec } a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

$$Q6 \quad E_n = E_C + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} \frac{1}{n^2} \quad R_y = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B}$$

Q7 a_B représente le rayon de l'orbite $n=1$

$$a_B = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{et} \quad R_y = 2,179 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$$

$$Q8 \quad E_{cm} = -E_{pn} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{R_y}{n^2} \quad v_m = \sqrt{\frac{2R_y}{m}} \frac{1}{n^2}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2R_y}{m}} = 2,198 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1} \quad \text{non relativiste.}$$

II - Résolution simplifiée de l'éq de Schrödinger

$$Q9 \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = -\frac{e^2}{\hbar^2} \Psi \quad \text{donc} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta K(r) + E_p(r) K(r) = E K(r) \quad (1)$$

$$Q10 \quad E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$Q11 \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta K = (E - E_p) K(R) = -\frac{E_p}{2} K(R) = +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1}{2} \times K(r)$$

$$\text{avec de plus} \quad \Delta K(\theta) = \frac{1}{R^2} \frac{d^2 K}{d\theta^2}$$

On obtient donc

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2 K}{d\theta^2} = +\frac{e^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 R} K(\theta) = -E K(\theta) \quad (E < 0)$$

$$\text{En introduisant } \eta = \left(\frac{mRe^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}\right)^{1/2}: \quad \frac{d^2 K}{d\theta^2} = \eta^2 K(\theta)$$

$$\text{les solutions sont en } K(\theta) = \alpha e^{i\eta\theta} + \beta e^{-i\eta\theta}$$

$$Q12 \quad \text{La fonction } K(\theta) \text{ doit être } 2\pi \text{ périodique, donc} \\ \eta \text{ doit être un entier. } \eta = n \quad$$

$$\Rightarrow R = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \times n^2 \quad \text{cohérent avec Q5.}$$

Partie III - Spectre de raies de l'atome H

Q13 $\hbar\nu = E_{\text{up}} - E_{\text{inf}} = E_m - E_{m'}$

ici, $\hbar\nu = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\nu = \frac{c}{\lambda}$

donc $\frac{1}{\lambda_{\text{nm}}} = \frac{R_H}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

Q14

nom raie	H _α	H _β	H _γ	H _δ
λ_{Ritz}	656,1 nm	486,00	433,33	410,06
λ_{exp}	$656,3 \pm 0,3$	$486,1 \pm 0,2$	$434,0 \pm 0,2$	$410,2 \pm 0,2$

les valeurs de Ritz sont bien dans la fourchette.

Partie IV - Correction de Sommerfeld

Q15 - $R_H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{1}{a_B} = \frac{\alpha^2 hc}{2 a_B} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 R_H}{m} = \frac{2 hc}{m a_B} = \frac{\alpha^2 hc e^2}{4\pi\epsilon_0 h^2 c} \cdot \frac{c}{c}$

puis $v_1^2 = \alpha^2 c^2 \Rightarrow \alpha = \frac{v_1}{c}$; α est sans unité

Q16 $\alpha = 7,237 \cdot 10^{-3}$ $\alpha = \frac{1}{137,0}$

Q17 le terme en α^2 est $\ll 1$: Sommerfeld est "compatible" avec Bohr.

pour $n=2$: $l=0 \text{ ou } 1 \Rightarrow$ il y aura 2 sous-niveaux

pour $n=3$ $l=0, 1, 2 \Rightarrow$ 3 sous-niveaux
conforme à la figure.

Q18 $l \nearrow \Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{n} \right) \right) \downarrow$ donc $E \uparrow$: l'énergie la plus basse est pour le l le plus petit



avec $n=2$ $\Delta E_f = - \frac{R_H \alpha^2}{n^4} \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{1} \right) = \frac{R_H \alpha^2}{2 n^3}$



$\Delta E_f = \frac{R_H \cdot \alpha^2}{16}$

A.N. $\Delta E_f = 4,528 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$

(faible devant 13,6...)

$$Q19 \quad h c G_a = E_{3,1} - E_{2,0} \quad h c G_B = E_{3,1} - E_{2,1}$$

$$h c (G_a - G_B) = E_{2,1} - E_{2,0} = \Delta E_f \Rightarrow G_a - G_B = \frac{\Delta E_f}{h c}$$

$$\text{A.N } G_a - G_B = 0,3652 \text{ cm}^{-1}$$

$$Q20 \quad G_m = 15237,4 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \lambda = 6,563 \cdot 10^{-7} \text{ m : rouge}$$

$$\frac{\Delta G_{\text{hyp}}}{G} = 2,363 \cdot 10^{-5}$$

Pour le doublet du sodium: $\lambda = \frac{1}{G} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{dG}{G}$
 $\Rightarrow \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 1,018 \cdot 10^{-3} \gg 2,3 \cdot 10^{-5}$

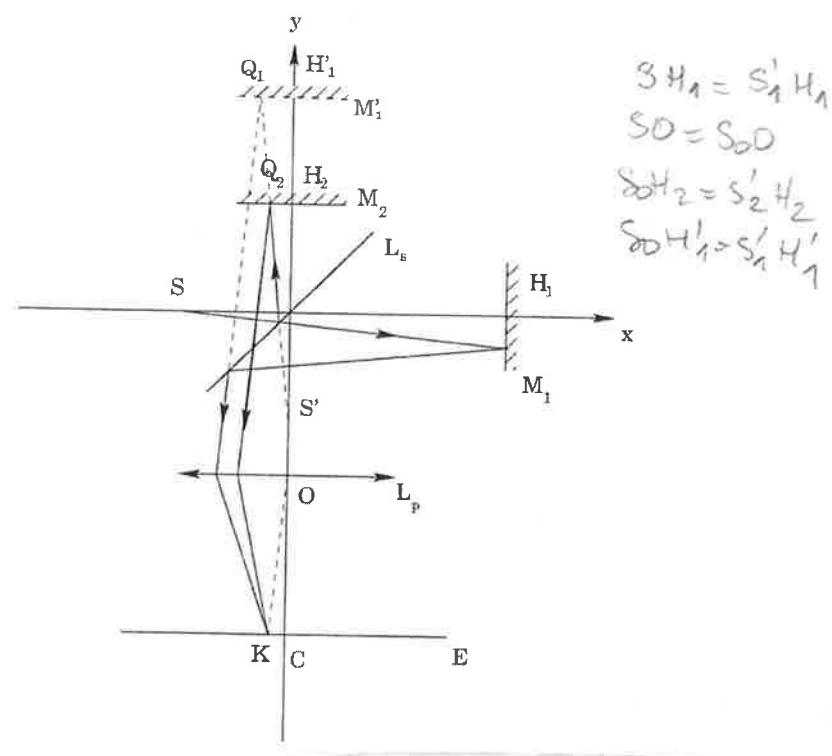
C'est bien une "structure fine" !

Partie V - Résolution interférométrique d'un doublet

Q21 On trouve une répartrice, qui est semi réfléchissante sur une de ses faces; et la compensatrice qui permet "d'égaliser" les chemins optiques 1 et 2 au niveau de L_s .

Q22

Q23



On construit les rayons en utilisant les points "symétriques" et en "dépliant les rayons".

Q23: les rayons issus de M_1 et M_2 sont parallèles entre eux
on trace la parallèle passant par le centre optique de L_p pour obtenir le pt d'intersection I.

Q24. on obtient des franges d'égale inclinaison,
qui sont des anneaux

Q25 au centre $\delta = 2e$

Q26: $\delta = p_1 \lambda_1 = p_2 \lambda_2$ donc $p_1 = G_1 \delta$ $p_2 = G_2 \delta$

Q27- Il ya brouillage lorsque $p_1 - p_2$ est $1/2$ entier.
les brouillages sont appelés des "anticorérences"

$$p_1 - p_2 = \delta(G_1 - G_2) = k + \frac{1}{2} \text{ R entier}$$

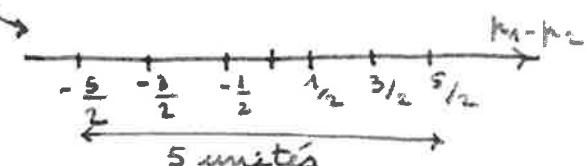
$$\left. \begin{array}{l} \delta_1(G_1 - G_2) = k + \frac{1}{2} \\ \delta_2(G_1 - G_2) = (k+1) + \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow D\delta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{G_1 - G_2} = \frac{1}{\Delta G}$$

$$\text{A.N: } D\epsilon = \frac{D\delta}{2} = \frac{1}{2 \cdot \Delta G} = 1,33 \text{ cm}$$

$$\text{Q28 L'équivalent de } D\epsilon = \frac{1}{5} \times \frac{1}{160} L_0 = \frac{1}{2 \Delta G}$$

$$\text{d'où } L_0 = \frac{5 \cdot 160}{2} \times \frac{1}{\Delta G} = \frac{400}{\Delta G}$$

$$L_0 = 11,1 \text{ m.}$$



Q29 La diagonale du rectangle est $\sqrt{1,1^2 + 1,1^2} = 1,55 \text{ m}$
on peut compter environ 7,5 diagonales: 11,66 m.
(ce qui est correct vu les approximations...)

Partie VI - Calcul par interaction spin-orbite

$$\vec{L} = m_p v \vec{r} \times \vec{\hat{p}} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \cdot \vec{p} \text{ ou}$$

Q30 le proton en met équivalent à une spire
circulaire de rayon r parcourue par un courant

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{ev}{2\pi r}$$

$$\text{d'où } \vec{B} = \mu_0 e v / (2\pi r) \vec{B} = \mu_0 e v \rightarrow \text{ ou } \rightarrow$$

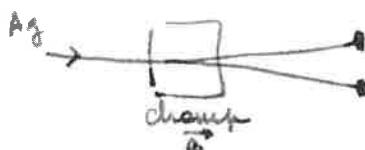
Q32

$$E_{so} = -g_e \gamma_e \vec{S} \cdot \frac{e \mu_0}{4\pi r^3 m} \vec{L} = \frac{e}{2m} g_e \frac{e \mu_0}{4\pi r^3 m} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\text{on donne } \left(\frac{e}{2m}\right)^2 \frac{\mu_0}{4\pi} = g_B^2 \frac{e^2 Ry}{\hbar^2}$$

$$\text{on obtient } E_{so} = g_e \cdot \frac{g_B^2 e^2 Ry}{\hbar^2} \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{r^3} \quad \text{CQFD}$$

Q33 - Expérience de Stern et Gerlach - On fait passer un faisceau d'atomes d'Ag dans un champ magnétique. Le faisceau se coupe en deux.



$$\vec{F} = -\nabla(-\vec{H} \cdot \vec{B})$$

Q34 $\left(\frac{a_0}{r}\right)^3$ est le même que dans Q32 ...

$$A = \iiint |\Psi_{nl}(r)|^2 \left(\frac{a_0}{r}\right)^3 dr = \text{valeur moyenne de } \left(\frac{a_0}{r}\right)^3$$

$$|\Psi_{nl}|^2 = \frac{1}{4^3 a_B^3} \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{a_B}\right)^2 \sin^2 \theta e^{-\frac{r}{a_B}}$$

$$A = \frac{1}{4^3} \frac{1}{a_B^3} \frac{1}{\pi} \times 2\pi \underbrace{x}_{\int_0^{2\pi} d\phi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} \times \int_0^{\infty} \frac{a_B}{r} \times r^2 dr e^{-\frac{r}{a_B}}$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^{\infty} x e^{-x} dx}_{+ \text{ intégration par parties}}$$

$$A = \frac{1}{24}$$

$$Q35 \quad n=2 - l=0 \quad f=\frac{1}{2} \rightarrow E_{so}=0$$

$$\backslash l=1 \quad f=\frac{1}{2} \rightarrow E_{so}=g_e \alpha^2 Ry \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} [-2] = -\frac{1}{24} g_e \alpha^2 Ry$$

$$f=\frac{3}{2} \rightarrow E_{so}=g_e \alpha^2 Ry \times \frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \left[\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4}\right] = g_e \alpha^2 Ry \times \frac{1}{48}$$

$$\Delta E_{so, n=2} = g_e \alpha^2 Ry \left[\frac{1}{48} + \frac{1}{24}\right] = \frac{1}{16} g_e \alpha^2 Ry$$

$$\text{Avec Thomas } \Delta E_{so, n=2} = \frac{1}{32} g_e \alpha^2 Ry \text{ avec } g_e = 2$$

en Q18: $\frac{\alpha^2 Ry}{16}$: c'est cohérent !

Partie VII : structure hyperfine

Q36 $\lambda = 21,1 \text{ cm} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = 1422 \text{ MHz}$ c'est cohérent

$$\Delta E_{\text{hyperf}} = h\nu = 5,88 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Q37 M est en $\text{A} \cdot \text{m}^2$

$$\mu_B = 2,2848 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad \mu_N = 1,4107 \cdot 10^{-26} \text{ Am}^2 \quad (\text{doc 2})$$

Q38 On peut reprendre les idées précédentes avec

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \vec{F}_N}{2\pi a_0^3} \quad (\text{doc 1})$$

$$\text{et } E = - \vec{F}_B \cdot \vec{B}$$

selon que $\vec{\mu}_0$ et $\vec{\mu}_N$ sont colinéaires de même sens ou non ...

$$\Rightarrow \Delta E_H = \frac{2 \mu_0 \mu_N \mu_B}{2\pi a_0^3} = \frac{\mu_0 \mu_N \mu_B}{2\pi a_0^3}$$

Q39 $\Delta E_H = \frac{16}{3} \times \frac{\mu_0 \mu_N \mu_B}{2\pi a_0^3} = 5,88 \cdot 10^{-6} \text{ eV ouj !}$

Q40 les niveaux hyperfins du Cs seront à définir la révolte,

Centrale MP 2019 - 4.1 : Vie et mort d'un photon

I. Etude des atomes de Rydberg circulaires.

A. Préliminaires

Q1 $Z = 37 \quad 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} \quad 4p^6 5s^1$

Rb est de la famille des alcalins

Q2 $V(r) < 0$ correspond à une force attractive entre charges opposées

Q3 $Z(r)$ est un terme d'écranage. Si $r \rightarrow \infty$ l' e^- voit la charge Z du noyau. Si $r \rightarrow 0$ les $(Z-1)e^-$ écranent Ze^- . L'électron "voit" une charge $+e$

Q4 $a_0 = \frac{\hbar^2}{q^2 m_e} \alpha$

q est en $N \cdot m^2$; m est en kg. \hbar est en J.s.
 $\Rightarrow \text{J.m}$

$$\text{J.s}^2 \text{m}^{-2}$$

$\hbar^2 q^2 m_e \alpha$ est en $J^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot (-2\gamma+\beta) \cdot (2\gamma+\alpha)$

Il faut donc que $\begin{cases} -2\gamma+\beta = 1 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \gamma+2\alpha = 0 \end{cases}$

ce qui donne $\gamma = -1 \quad \beta = -1 \quad \alpha = 2$

d'où $a_0 = \frac{\hbar^2}{q^2 m_e}$

A.N.: $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

B. Atomes de Rydberg

1) Etude classique

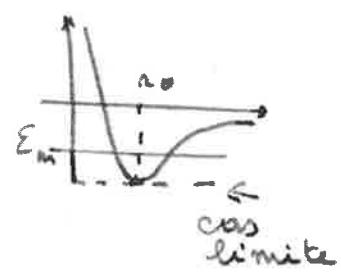
Q5 plus l'énergie est élevée, plus l'électron est loin du noyau: $2 \rightarrow 1 \quad U = -\frac{q}{r}$

Q6 L'électron est soumis à la force centrale $-\frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
 $\frac{d\vec{p}_0}{dt} = \vec{F}, \vec{F} = \vec{0}$ donc le mouvement est dans
le plan $\perp \vec{u}_0$: $\theta = \pi$ et $\vec{v} = \vec{u}_r + r\dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$
 $\vec{L}_0 = m \vec{u}_r \wedge \vec{v} = m r^2 \dot{\varphi} \vec{u}_z \quad \vec{L}_0 = m r^2 \dot{\varphi}$

Q7 E_m est conservée $= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{q}{r}$

$$E_m = \frac{1}{2} m r^2 + \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m r^2} - \frac{q}{r} \right)}_{\text{S...}}$$

Q8 On peut tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$



$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq E_m \Rightarrow E_m > E_{\text{eff}}(r)$
la trajectoire circulaire $r=0$
r-iste ne peut que correspondre au cas en ---

$$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{\omega^2}{mr^3} + \frac{q}{r^2} \Rightarrow r_c = \frac{\omega^2}{mq}$$

$$\frac{1}{mr} = \frac{r_0}{\hbar^2} \text{ donc } r_c = \frac{\omega^2}{\hbar^2} r_0$$

B2) Etude quantique

Q9 L'équation de Schrödinger devient

$$i\hbar x'(t)\phi(M) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi - \frac{q}{r} \phi \right] x(t)$$

soit $i\hbar \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{\phi(M)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi - \frac{q}{r} \phi \right]$
 Fonction de t Fonction de x' \Rightarrow constante E

Ainsi $x'(t) = \frac{E}{i\hbar} x(t)$

$$x(t) = A e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Q.10 L'électron doit être dans un état lié, dans un potentiel en $-\frac{q}{r}$: donc $E < 0$

Q11 $l \in [0, n-1]$

Q12 On peut identifier les différents termes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} \leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \leftrightarrow \frac{\omega^2}{2m r^2}$$

on peut donc prendre $\omega^2 = \hbar^2 l(l+1)$
 $l_{\text{max}} = n-1 \quad \omega_{\text{max}} = \hbar^2 \sqrt{(n-1)n}$

Q13 On en déduit $r_c = n(n-1)r_0$

Q14 On passe sur variables réduites $\rho = r/r_0$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\rho} = \frac{d}{dr} \cdot \frac{dr}{d\rho} = \frac{1}{r_0} \frac{d}{d\rho} \dots$$

(1.1) devient $-\frac{\hbar^2}{2m r^2} \frac{d^2 u(r)}{d\rho^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} u(r) - \frac{q}{r} u(r) = 0$

$$\text{soit } \frac{d^2u(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{q^2 2m\alpha_0^2 u(r)}{\hbar^2 n^2 r} + \frac{2m\alpha_0^2 E}{\hbar^2} u(r) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u + \frac{2}{r} u + \varepsilon u = 0 \quad \text{avec}$$

$$\varepsilon = -\frac{2m\alpha_0^2 E}{\hbar^2} \quad \text{done} \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2m\alpha_0^2} = \frac{q^2}{2a_0}$$

A.N $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

C. Atomes de Rydberg circulaires

$$Q15 \quad \frac{dP}{dr} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} A(n)^2 \left(-\frac{2}{a_0} \sin\theta \right) \frac{2(n-1)}{r^2} \exp\left(-\frac{2r}{\alpha_0}\right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\frac{dP}{dr} = 2\pi A(n)^2 \frac{-2}{\alpha_0} \left(\frac{r}{a_0}\right)^{2(n-1)} \frac{1}{r^2} \int_{\theta=0}^{\pi} [\sin\theta]^2(n-1) \sin\theta \, d\theta$$

$$Q16 \quad Il faut étudier f(r) = \exp\left(-\frac{2r}{\alpha_0}\right) \times r^{2n}$$

$$f'(r) = -\frac{2}{\alpha_0} e^{-\frac{2r}{\alpha_0}} r^{2n} + 2n r^{2n-1} e^{-\frac{2r}{\alpha_0}}$$

$$f'(r_m) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{\alpha_0} r_m^{2n} + 2n r_m^{2n-1} = 0 \Rightarrow r_m = n^2 a_0$$

$$Q17 \quad \text{Avec } n = 50 \quad (r_m = 0,133 \mu\text{m}) \quad \text{très grand pour un atome}$$

Q18 $\frac{\Delta r}{r} \approx \Delta \theta \approx \frac{1}{10}$ est relativement faible ... on "voit" à peu près où est l'émission

Q19 - on identifie $\frac{1}{r} u(r)$ et $(\frac{r}{a_0})^{n-1} e^{-\frac{r}{\alpha_0}}$ à un coeff donc $u(r) \approx r^n e^{-\frac{r}{\alpha_0}}$ ou bien $u(r) = r^n e^{-\frac{r}{\alpha_0}}$

$$\frac{du}{dr} = n r^{n-1} e^{-\frac{r}{\alpha_0}} - \frac{1}{\alpha_0} r^n e^{-\frac{r}{\alpha_0}}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = n(n-1) r^{n-2} e^{-\frac{r}{\alpha_0}} - 2r^{n-1} e^{-\frac{r}{\alpha_0}} + \frac{1}{\alpha_0^2} r^n e^{-\frac{r}{\alpha_0}}$$

(1-2) donne :

$$n(n-1) r^{n-2} - 2r^{n-1} + \frac{1}{\alpha_0^2} r^n - n(n-1) r^{n-2} + 2r^{n-1} - \varepsilon r^n = 0$$

d'où $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$

et $E = -\frac{E_0}{n^2}$

on retrouve le résultat usuel de l'atome H.

Q20 $\ln \frac{V_{at}}{V_0} = \frac{E_0}{S_0} - \frac{E_0}{S_1} \Rightarrow V_{at} = 5,09 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ (4)
ondes centimétriques

Q21 $||\vec{E}|| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^9}{10^{-20}} \approx 1,5 \cdot 10^{10} \text{ V.m}^{-1}$

champ d'ionisation ?

Q22 plus n est grand, moins il est lié, et plus il est facile de le ioniser :

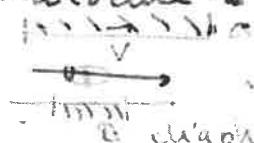
$$n = S_0 \rightarrow 1,6 \cdot 10^4$$

$$n = S_1 = 1,48 \cdot 10^4$$

$$n = S_2 = 1,36 \cdot 10^4$$

Q23 On veut attirer les électrons, donc les potentiels doivent être de plus en plus grands quand on va de a vers b.

Q24. Protocole 1



on ne verrait des électrons
si l'orange est dans l'ionisation
du diaphrême ...

on lit sur le graphique $\Delta t \approx 25 \mu s$

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6}} = 240 \text{ m/s}$$

Q25. $V_a(t) = V_b + K(t - t_0)$

on en déduit le champ dans la chambre
d'ionisation $E = \frac{V_b - V_a}{e} = \frac{K}{e}(t - t_0)$ avec $e = 4 \text{ mm}$.

E doit passer par $E_1 = 1,48 \cdot 10^4 \text{ V.m}$ pour ioniser $n = S_1$
puis $E_2 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ V.m}$

Si on considère que les max de la figure 13 correspondent au champ d'ionisation (cf fig 10).

$$E_2 - E_1 = \frac{K}{e}(t_2 - t_1) = \frac{K}{e}(513,6 - 517,4) \cdot 10^{-6} \Rightarrow K = 1,26 \cdot 10^8 \text{ V.s}^{-1}$$

(l'unité des gaussiennes)

on peut alors déduire $t_0 = -\frac{e E_1}{K} + t_1 = 469,8 \mu s \approx 470 \mu s$

Q26 si la variation est plus rapide, les 2 gaussiennes vont se chevaucher.

si la variation est plus lente, on ne saura pas quand est la "frontière" entre les 2 états

II - Etude de la cavité micro-ondes

A - Miroirs plans

Q28. on doit avoir $\underline{A}_1(d, t) = n_m \underline{A}_0(d, t)$

et \underline{A}_1 est en $S_1 e^{i(wt+kz)} e^{i\phi}$ (4 inconnus)

$$\text{donc } S_1 e^{iwd} e^{i\phi} = n_m S_0 e^{-ikd} e^{i\phi} \Rightarrow S_1 = S_0 \cdot n_m e^{-ikd}$$

Ainsi $\underline{A}_1 = n_m S_0 e^{i(wt+kz-\phi)}$ avec $\phi = \frac{\pi d}{\lambda_0}$

or $\underline{A}_0 = S_0 e^{i(wt-kz)}$

donc $\underline{A}_1 = \underline{A}_0 n_m e^{i(2kz-\phi)}$

Q29 De la même façon on peut passer de \underline{A}_1 à \underline{A}_2 :

$$\underline{A}_2 = S_2 e^{i\phi_2} e^{i(wt-kz)}$$

$$\text{et } \underline{A}_2(0, t) = n_m \underline{A}_1(0, t) \Rightarrow S_2 e^{i\phi_2} = n_m^2 S_0 e^{-i\phi}$$

donc $\underline{A}_2 = n_m^2 e^{-i\phi} \underline{A}_0$

puis $\underline{A}_3 = n_m e^{i(2kz-\phi)} \underline{A}_2$

$$Q30 A_+(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p}(z, t) = A_0(z, t) \left[\sum_{p=0}^{\infty} (n_m^2 e^{-i\phi})^p \right]$$

$$= A_0(z, t) \frac{1}{1 - (n_m^2 e^{-i\phi})} \quad (|n_m| < 1)$$

et $A_-(z, t) = A_0(z, t) \cdot n_m e^{i(2kz-\phi)} \sum_{p=0}^{\infty} (n_m^2 e^{i\phi})^p$

Q31 $I = \frac{I_M}{1 + M \sin^2 \frac{\phi}{2}}$ est max pour $\sin^2 \frac{\phi}{2} = 0 \quad \frac{\phi}{2} = n\pi$
 $\phi = 2n\pi$ cohérent avec la combé

$$\frac{4\pi d}{\lambda_0} = 2n\pi \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2d}{n}$$

$$\frac{v}{cav} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{n c}{2d}$$

Q32 $I_{\max} \left(\frac{\delta\phi}{4} \right) = \frac{I_M}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\delta\phi}{2} = \frac{1}{M} = \frac{(1-R)^2}{4R} \ll 1$

donc $\frac{\delta\phi}{4} \approx \sqrt{\frac{(1-R)^2}{4R}} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$

$$\frac{\pi d S_D}{c} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \Rightarrow S_D = \frac{1-R}{\pi d} \frac{c}{2\sqrt{R}} = \frac{1-R}{\pi d} \frac{1}{\sqrt{R}} v_{\text{ave}}$$

Q33 A la "longeur spatiale", on peut associer une durée (comme durée d'un train d'ondes) $\tau = \frac{1}{\delta v}$

$$\tau = \frac{2\pi d}{c} \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

Q34 Temps que fait le photon pour aller d'un miroir à l'autre $= \frac{d}{c}$. La probabilité pour qu'il existe dans le cañet pour n trajets est

$$p(n) = (R)^{n-1} \times T$$

La durée de vie moyenne est $\tau = \frac{d}{c} \sum_{n=0}^{\infty} n p(n)$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{c} \sum_{n=0}^{\infty} T R^{n-1} n \\ &= \frac{d}{c} (1-R) \frac{d}{dR} \left(\sum_{n=0}^{\infty} R^n \right) = \frac{d}{c} (1-R) \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{1-R} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\tau = \frac{d}{c(1-R)}}$$

Q35 $\tau = 10^{-1} s$, $d = 26,6 \cdot 10^{-3}$ $\Rightarrow 1 - R = 8,87 \cdot 10^{-10}$

R est très proche de 1

Q36 Cela permet d'obtenir un coeff. de réflexion très proche de 1 (\Rightarrow modèle conducteur parfait...)

B. Miroirs sphériques

Q37 A chaque diffraction, la surface sur laquelle s'étale le faisceau est un disque de rayon $(a + d \tan \theta)$.

$$\text{Ratio des surfaces} = \left(\frac{a}{a + d \tan \theta} \right)^2$$

Si on suppose que l'intensité se répartit de manière homogène, l'intensité restante au bout d'un aller ($\frac{d}{c}$) est $I_{\text{fin}} \left(\frac{a}{a + d \tan \theta} \right)^2$

$$\text{au bout de } n \cdot \frac{d}{c} : I = I_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{d \tan \theta}{a}} \right)^{2n}$$

On peut estimer θ à partir des résultats sur la diffraction: $\tan \theta \approx \theta \approx \frac{\lambda}{d}$

$$I = I_0 \left(1 + \frac{d\lambda}{\lambda^2}\right)^{-2n} = \frac{I_0}{1000} \Rightarrow 2n = \frac{\ln 1000}{\ln\left(1 + \frac{d\lambda}{\lambda^2}\right)}$$

$$T_{\text{diff}} = n \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{2c} \frac{\ln 1000}{\ln\left(1 + \frac{d\lambda}{\lambda^2}\right)}$$

avec $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{51,1 \cdot 10^{15}} = 5,87 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $\frac{d\lambda}{\lambda^2} = 0,25$

$T = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. C'est très court... le système des miroirs plans n'est pas viable.

Q3B $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi} \sqrt{\frac{d'}{2} \left(R_n - \frac{d'}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{5,87 \cdot 10^{-3}}{\pi} \sqrt{\frac{27,6 \cdot 10^{-3}}{2} \left(40 - \frac{27,6}{2}\right) 10^{-3}}} = 5,36 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Q3B Ventre en O, miroirs en $\pm \frac{d'}{2}$ ex: $n=3$ 

Il faut que $z' = \frac{d}{e}$ corresponde à $\phi(a; z) - \phi(0,0) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi d'}{2\lambda_0} - \arctan\left(\frac{\lambda_0 d'}{2\pi w_0^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$p = \frac{2d'}{\lambda_0} - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda_0 d'}{2\pi w_0^2}\right) = \boxed{9}$$

Q40 La taille d'un faneau est de l'ordre de $\frac{\lambda_0}{2} = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Taille carrière $\sqrt{3} \times \frac{\lambda_0}{2} = 26,4 \text{ mm.}$

Cet ordre de grandeur est cohérent avec 26,6 et 27,6 mm trou avec $r_{\text{max}} = 3,5 \text{ mm}$?

III Couplage entre un atome de Rydberg et la cavité

A. Représentation électrocinétique

Q41 $u_C + u_L = 0 \Rightarrow u_C + L C \frac{di_{at}}{dt} = 0 \Rightarrow w_{cav} = \frac{1}{\sqrt{L C_{at}}}.$
et $w_{at} = \frac{1}{\sqrt{L C_{at}}}.$

Q42. Ne pas prendre en compte les résistances = négliger les pertes ($R \rightarrow \infty$ dans la cavité) et pas de pertes énergétiques dans l'atome.

Q43 on écrit les 2 eq. électriques:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{cav} + L \frac{di_{cav}}{dt} + M \frac{di_{at}}{dt} = 0 \\ u_{at} + L \frac{di_{at}}{dt} + M \frac{di_{cav}}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad i_{at} = C_{at} \frac{di_{at}}{dt}$$

on dérive pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C_{at}} i_{cav} + L \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + M \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} = 0 \\ \frac{1}{C_{at}} i_{at} + L \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + M \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} = 0 \end{array} \right.$$

s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{1}{L C_{at}} i_{cav} = 0 \\ \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{1}{L C_{at}} i_{at} = 0 \end{array} \right.$

on identifie: $\frac{M}{L} = \frac{\Omega}{w_0}$ $\Omega = \frac{M}{L} w_0$

$$\frac{1}{w_{cav}^2 L C_{at}} = w_0^2 - \varepsilon \quad \frac{1}{L C_{at}} = w_0^2 + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= w_0^2 - w_{cav}^2 = (w_0 - w_{cav})(w_0 + w_{cav}) \\ &= (\underline{w_{at} - w_{cav}})(w_0 + (w_0 - \frac{\delta}{2})) \end{aligned}$$

ε = $\frac{\delta}{2}(2w_0 + \frac{\delta}{2}) \approx w_0 \delta$ à l'ordre 1 en δ.

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{at} = w_0 + \frac{\delta}{2} \\ w_{cav} = w_0 - \frac{\delta}{2} \end{array} \right.$$

Q44 le système d'équations s'écrit

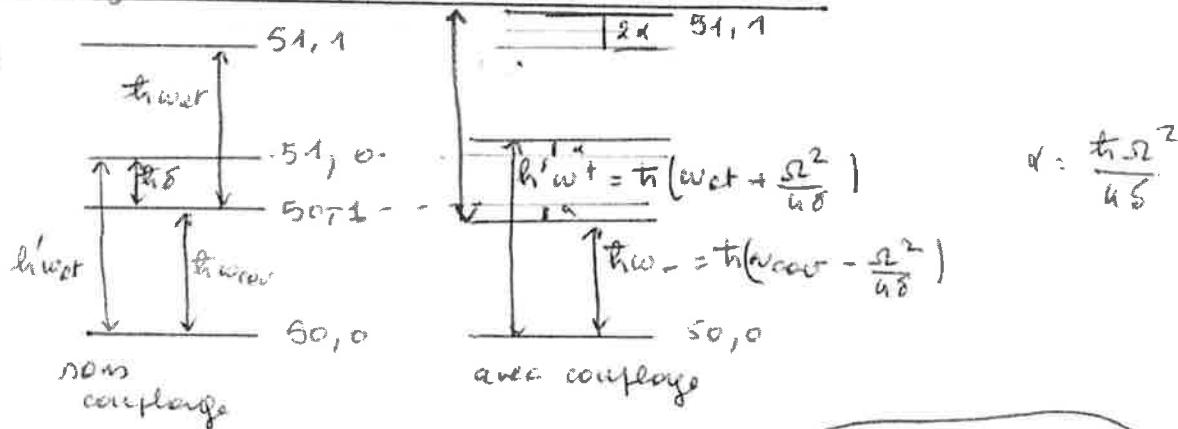
$$\left\{ \begin{array}{l} [-\omega^2 + \omega_0^2 - \varepsilon] I_{car} + \left(\frac{\Omega}{\omega_0} x - \omega^2\right) I_{at} = 0 \\ -\omega^2 \frac{\Omega}{\omega_0} I_{car} + [\omega_0^2 + \varepsilon - \omega^2] I_{at} = 0 \end{array} \right.$$

pour avoir des solutions non nulles, il faut que le déterminant soit nul :

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \varepsilon - \omega^2)(\omega_0^2 + \varepsilon - \omega^2) - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \omega^4 = 0$$

B. Couplage atome-photon dans la cavité:

Q45



Q46 Δ pas de photon $t_{110}' \omega_{at} = t_{010}' \omega_- \Rightarrow$

Q47 Δ photon : $\Delta \omega_{at}^{(1ph)} = 3 \frac{t_1 \Omega^2}{4\delta}$

$$\Delta \omega_{at}^{(0ph)} = \frac{t_1 \Omega^2}{4\delta}$$

Centrale 2017 MP - Mouvements dans le champ de pesanteur

I - Un vent supersonique

(A) 1) le flux de \vec{g} à travers une surface fermée est égal à $-4\pi G \times$ masse intérieure

2) Tout plan contenant \vec{GM} est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{g}(M) \parallel \vec{GM}$
Surface = sphère

$$\text{si } r \leq R_T \quad 4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{M_T}{R_T^3} \Rightarrow g_r(r) = -\frac{GM_T}{R_T^3} \frac{r}{r^3}$$

$$\text{si } r \geq R_T \quad 4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G M_T \Rightarrow g_r(r) = -\frac{GM_T}{r^2}$$

3) A la surface $g_s = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

(B)

1) Conservation de l'énergie : $0 - \frac{GM_T m}{(R_T + h)} = \frac{1}{2} m v_{\text{son}}^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$

$$ah = R_T \left(\frac{1}{1 - \frac{v_{\text{son}}^2}{2GM_T}} - 1 \right)$$

$$\text{ou } v_{\text{son}} \ll \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \Rightarrow h_{\text{son}} \approx \frac{v_{\text{son}}^2 R_T}{2GM_T}$$

A.N. $h_{\text{son}} = 5,90 \cdot 10^8 \text{ m}$
 15897 km

2) hypothèses :

$$\rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ avec } H = \frac{RT}{Mg} \approx 8 \text{ km si } T = 273 \text{ K}$$

\Rightarrow on peut supposer qu'assez haut $\rho \approx 0$ et on néglige la traînée

\bullet $v_{\text{max}} \approx 60 \text{ km} \ll R_T$ on peut considérer $g(z) = g \approx$

avec ces hypothèses, on atteint v_{son} après avoir parcouru la distance h_{son} \rightarrow on est passé de $38,9624 \text{ km} \approx 33 \text{ km}$
 $= 33$

\rightarrow Estimation de KA : Pression finale du point :

$$v = v_{\text{final}} \approx v_{\text{son}} \text{ (vitesse limite)} \Rightarrow -mg + KA \rho_0 v_{\text{final}}^2 = 0$$

$$\rho \approx \rho_0 (z \ll H)$$

$$\Rightarrow KA = \frac{mg}{\rho_0 v_{\text{final}}^2}$$

\rightarrow Vérification de l'hypothèse : $-\frac{Mg z_1}{R_T^2} \approx$

$$\text{on calcule } \frac{F_D}{F_{\text{pes}}} (33 \text{ km}) \approx \frac{KA \rho_0 e^{-\frac{z_1}{H}}}{mg} v_{\text{son}}$$

$$\approx \left(\frac{v_{\text{son}}}{v_{\text{final}}} \right)^2 e^{-\frac{z_1}{H}} = \frac{Mg z_1}{R_T^2}$$

$$= \left(\frac{340}{72} \right)^2 \exp(-\frac{33}{8}) \approx 0,3$$

L'approximation est assez grossière.

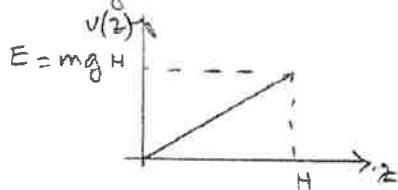
\rightarrow altitude mini : pour avoir $\frac{F_D}{F_{\text{pes}}} < 0,1$ il faut $z > 61,8 \text{ km}$.

- le modèle n'est pas bon

II Etats stationnaires d'un neutron dans le champ de pesanteur

A) $V(z) = mgz$ (g est constant)

- l'énergie totale est conservée : $E_C + V = E = \text{const} = mgH$



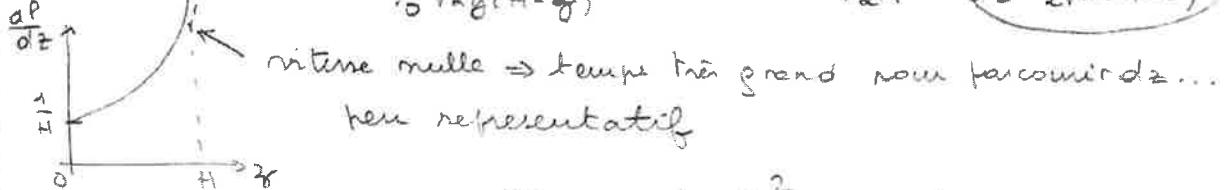
$$2) \frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgH \Rightarrow v = \sqrt{2g(H-z)}$$

$$3) E_C > 0 \Rightarrow z < H$$

Étatal : esté \Rightarrow pas de f de Boltzmann $dz = dt \times \sqrt{2g(H-z)}$

$$dP \text{ prop. à } dz \Rightarrow dP = \frac{A}{\sqrt{2g(H-z)}} dz$$

normalisation : $A \times \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{g}{2H}} = \frac{1}{2\sqrt{H(H-z)}}$



$$4) \frac{h^2}{2m^2g} \text{ en } \frac{(J_A)^2}{kg^2 m \cdot s^{-2}} = \frac{(kg \cdot m^2 s^{-2} \cdot s)^2}{kg^2 m \cdot s^{-2}} = m^3$$

donc $kg = \left(\frac{h^2}{2m^2g}\right)^{1/3}$ est une longueur

$$5) \text{On peut définir par homogénéité } \xi_g = mg/\ell_p$$

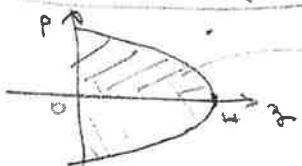
$$6) \xi_g = \left[\frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 3,81 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27})^2} \right]^{1/3} = 3,86 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

$$\xi_g = 3,86 \cdot 10^{-6} \text{ m. soit } (6 \cdot 10^{-13} \text{ eV})$$

il faudra des neutrons ultra-froids pour observer ξ_g .

B) Dans le champ de pesanteur : $mgH = \frac{P^2}{2m} + mgz$

$$\Rightarrow P = \pm m \sqrt{2g(H-z)}$$



Par analogie on calcule

$$\text{+ l'aire } S = \int_0^H |P(z)| dz = 2m \sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{H-z} dz$$

$$\text{d'où } S = 2m \sqrt{2m^2g} \times \frac{2}{3} \cdot H^{3/2}$$

$$\text{avec } S = nh \Rightarrow H_m^{3/2} = \frac{3nh}{4\sqrt{2m^2g}} = \frac{B\pi m}{2} \frac{h}{\sqrt{2m^2g}} = \frac{3\pi m}{2} \xi_g^{3/2}$$

$$\text{D'où } H_m = \xi_g \times \left(\frac{3\pi m}{2} \right)^{2/3}$$

(C) état stationnaire: $|V|^2$ indép de t (densité de probabilité)

$$2) \quad \mathcal{E} = \frac{\hbar}{\ell g} \Rightarrow \frac{d}{dz} = \frac{d}{d\mathcal{E}} \times \frac{1}{\ell g} \dots$$

$$\text{L'équation devient: } -\frac{\hbar^2}{2m\ell g^2} \frac{d^2\psi}{d\mathcal{E}^2} + V(\mathcal{E})\psi(\mathcal{E}) = E\psi(\mathcal{E})$$

$$\text{avec } V(z) = mgz = mg\ell g \frac{z}{\ell g} = Eg \cdot z \text{ et } \frac{\hbar^2}{2m\ell g^2} = mg\ell g = Eg$$

$$\text{D'où } \left[-\frac{d^2\psi}{d\mathcal{E}^2} + \mathcal{E}\psi(\mathcal{E}) = Eg\psi(\mathcal{E}) \right]$$

3) $\psi(\mathcal{E})$ doit être nulle en $\mathcal{E} = 0$ (continuité de la probabilité)

$|V|^2$ doit être intégrable sur $[0, +\infty]$ donc $\psi(\mathcal{E}) \xrightarrow[\mathcal{E} \rightarrow +\infty]{} 0$

4) $Ai(\mathcal{E}) \xrightarrow[\mathcal{E} \rightarrow +\infty]{} 0$ donc cette condition est vérifiée.

- il faut que $Ai(-E) = 0 \Rightarrow -E$ est un zéro de la fonction i :

$$E_1 = 2,34 \quad E_2 = 4,09 \quad E_3 = 5,52$$

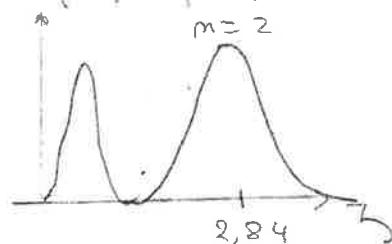
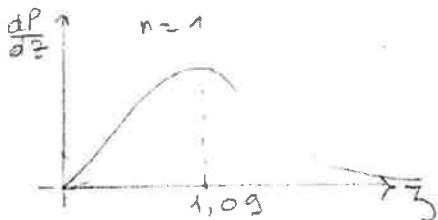
Avec (B)

$$E_1 = 2,81 \text{ Eg} \quad E_2 = 4,46 \text{ Eg} \quad E_3 = 5,84 \text{ Eg}$$

L'approximation est convenable.

5) $\frac{dP_i}{dz} = |\psi(z)|^2 = N^2(Ai(\mathcal{E}_i))^2$ sera max pour $Ai(\mathcal{E}_i)$ max

soit $\mathcal{E} = E_2 - 1,25$ (lecture graphique)



$n \nearrow E_m \nearrow$ la probabilité de présence en \mathcal{E} (plus grand) \nearrow
Cette fois, on n'a pas de divergence

D) Spectroscopie résonante gravitationnelle

1) a) $e^{i(kz - \omega t)}$ représente le terme de "propagation de l'onde", (ou un faisceau "infini" de neutrons).

L'équation de Schrödinger devient

$$i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar} - \omega t \right) \psi_1(z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''_1(z) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_1(z) + V(z) \psi_1(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''_1(z) + \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E - \frac{i\hbar\omega}{\hbar} + V(z) \right] \psi_1(z) = 0$$

$$b) \text{ avec } V(z)=0 \Rightarrow \varphi''_1(z) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2 n}{2m} \right) \varphi_1(z) = 0$$

k^2

les 2 limites entraînent

$$\varphi_1(z) = A \sin(Kz) \text{ avec } \sin(KL) = 0 \Rightarrow KL = n\pi$$

on retrouve bien le puits infini

$$E_{\infty m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

c) On observe que E_1 varie de 2 décades alors que $\frac{H}{2g}$ varie de 1 (\Rightarrow pente -2 en échelle log).

$$\Rightarrow \log(E_1) = \text{cte} - 2 \log\left(\frac{H}{2g}\right) \Rightarrow E_1 \text{ en } \frac{1}{H^2} \text{ comme } E_{1,00}$$

Si $H \gg h_0$, on ne "voit" plus les niveaux d'énergie, on retrouve le modèle de la partie précédente ($V(z) = mgz$ pour $z > 0$) et on retrouve la valeur $E_1 = 2,34$ obtenue avec la fonction d'Airy. C'est cohérent avec ce que l'on lit sur l'échelle log...

d) le document donne $H = 25,5 \mu\text{m}$ soit $\frac{H}{2g} = 4,35$
 $(2g = 5,86 \cdot 10^{-8} \text{ m/mmAs})$

\Rightarrow on est à $E_1 = 2,34$ (sur l'asymptote).

2) a) P.Q.d sur un mention : $\begin{cases} \ddot{z} = -g \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} = -gE + v_{20} \\ \dot{x} = v_x \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{20}t \\ x = v_{x0}t \end{cases}$

(origine des temps c'est à propos du rebond)

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{20}}{g} \text{ et } z = \frac{v_{20}^2}{2g} = H_m \Rightarrow x_{\max} = v_{x0} \sqrt{\frac{2H_m}{g}}$$

$$\text{et } L_m = 2x_{\max} = 2v_{x0} \sqrt{\frac{24m}{g}} \quad \text{CRFD}$$

b) $H_2 > H \rightarrow$ absorption

$H_1 \rightarrow$ n'atteint pas le miroir ($\frac{H-H_1}{2g} = 2,06$) $T_1 \approx 2,7 \cdot 10^{-3}$

$$H_2 \rightarrow \frac{H-H_2}{2g} = 0,255 \quad T_2 \approx 0,71$$

les mentions "d'énergie" E_1 disparaissent, et $\approx 30\%$ des mentions d'énergie E_2 .

c) cours.

d) $T_1 = 2,7 \cdot 10^{-3}$

e) $\begin{cases} P_{p+1} = P_p \times (1-T_1) \\ P_0 = (1-T_1) \end{cases} \Rightarrow P_p = (1-T_1)^p$

A la distance x , il y aura en $E\left(\frac{x}{L_1}\right)$ rebonds, si $x = x_0 \approx x_m$ modifie au 1. ordre très petit, on

Donc :

$$P(x+dx) = P(x) \times \left(1 - T_1 \frac{dx}{L_1}\right)$$

En ds, il y a $\frac{dx}{L_1}$ rebonds ----

$$P(x+dx) - P(x) = - \frac{T_1}{L_1} P(x) dx = - P(x) \frac{dx}{D_1}$$

A la limite $\frac{dP}{dx} = - \frac{P(x)}{D_1} \Rightarrow P(x) = A \cdot \exp(-x/D_1)$

Et on normalise $1 = A \int_0^\infty e^{-x/D_1} dx \Rightarrow A = \frac{1}{D_1} \quad P(x) = \frac{1}{D_1} e^{-x/D_1}$

g) $\frac{D_1}{D_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{0,71}{2,7 \cdot 10^3} \times \sqrt{\frac{13,4}{24}} = 156$
 $\Rightarrow D_1 = 7,33 \text{ m.}$

La longueur du quide est de 15 cm \Rightarrow on élimine presque tous les " E_2 " et on garde 3 tous les " E_1 ".

3) a) R' non galiléen car le rapport de R'/R n'est pas uniforme
 $\vec{F}_{12} = -m\vec{a}_2 = -m\alpha(t)\vec{u}_2$

$$\text{et } \vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_2 = - \frac{dV_{12}}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{V}_{12} = m\alpha(t) V_{12}}$$

b) $i\hbar \frac{d\phi_1}{dt} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1 + c_1(E_1) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} i\hbar \frac{d\phi_2}{dt} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2 =$
 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + V(z) \psi_1 + V_{12}(z, t) \psi_2 \right] c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \dots = i\hbar \omega_1 \psi_1$

deuxièmement $i\hbar \frac{d\phi_2}{dt} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} + i\hbar \frac{d\phi_3}{dt} e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}}$

$$= V_{12}(z, t) \left(\psi_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_2 + \psi_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_3 \right)$$

on multiplie par $i\hbar \psi_1 e^{+\frac{iE_1 t}{\hbar}}$ et on intègre :

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\phi_1}{dt} \times 1 + i\hbar \frac{d\phi_2}{dt} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \times 0$$

$$= c_1 m\alpha(t) \times \psi_1 + m\alpha(t) \psi_1 \delta e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_3$$

ce qui donne la 1^{re} relation demandée.

De même on multiplie par $i\hbar \psi_3 e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}}$
et on obtient la 2^e relation.

c) Initialement, on considère qu'en est dans l'état 1.

d) Si $a(+)=0$, on reste dans l'état 1, il ne peut faire rien ($\psi_1(+)=1, \psi_3(+)=0$) - logique

e)

a) on constate le même effet que pour la molécule d'ammoniac -

L'état n'est pas stationnaire

Si $\omega_2 = \omega_3$ on peut avoir $c_3 = 1$ et $c_1 = 0$: le menton "oscille" entre l'état 1 et l'état 3 \rightarrow "résonance"

f) si le menton sort de M' dans l'état 3 alors il sera absorbé dans la phase suivante ...

\rightarrow effet de a_0 : voir 2^e partie figure 8 -

comme v_A est constant, le temps t mis pour traverser M' est toujours le même, $\frac{\omega_R t}{2\pi}$ aussi. $|C_1|^2$ et $|C_3|^2$ varient avec a_0 .

Entre 600 et 700 cm⁻¹ \rightarrow intervention d'autres résonances.

$$g) \omega_R = 2\pi f_R = \frac{E_3 - E_1}{\hbar} = mg\lg \frac{E_3 - E_1}{\hbar}$$

Avec \lg fixe

$$\Rightarrow g = \frac{\ln f_R}{m \lg(E_3 - E_1)} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 664}{1,62 \cdot 10^{-22} \times 5,26 \cdot 10^{-10} \cdot (5,52 - 2,32)}$$

$$g = 9,87 \text{ ms}^{-2}$$

$$\frac{U(g)}{g} = \frac{U(g)}{9,87} = \frac{1}{664} \quad (\text{si on considère } \hbar \text{ comme } 1 \text{ eV s})$$

En tenant en compte que lg dépend de g, on obtient

$$g = 4 \cdot 10^{3/2} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \left(\frac{P_r}{E_3 - E_1} \right)^{3/2} = 9,842 \text{ ms}^{-2}$$

$$\frac{N(g)}{g} = \frac{3}{2} \frac{U(g)}{P_r} = 3,23 \cdot 10^{-3} \Rightarrow U(g) = 3,18 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow g = 3,84 \pm 0,04 \text{ ms}^{-2}$$

$$h) a_0 = \alpha_0 \cdot \omega_R^2 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{6,62}{(2\pi \cdot 664)^2} \approx 0,72 \mu\text{m}, \text{ de l'ordre de } \lg \dots$$

$$i) \text{ avec le doc 4 } \Delta \text{passez} = \frac{\hbar}{q \cdot m} = \frac{0,2}{6,6} = 3,11 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

$$\text{Donc } \frac{\omega_R t}{2\pi} = \omega_R t = 16,77$$

avec la figure 3

$$\text{largeur de raie } \Delta g \approx \frac{500 \cdot 630}{2} = 33$$

$$\text{Heisenberg } \Delta g \cdot \Delta t \approx 1 \quad \Delta t = \frac{1}{33} = 2,85 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$$

même ordre de grandeur.

Centrale RP 2016_42 - Installation nucléaire REP

I. Circuit secondaire et enrichissement de l'Uranium

A. Cycle du circuit secondaire

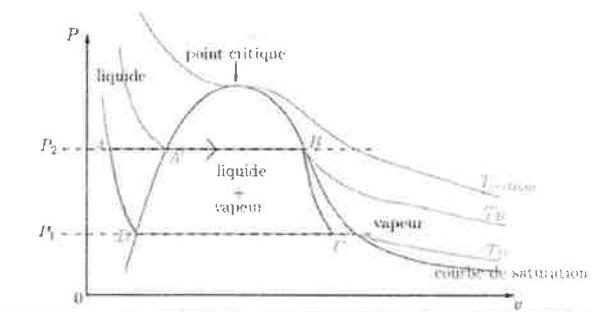
1) a)

$$\left. \begin{aligned} W + Q_{ch} + Q_F &= 0 \\ \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} + \frac{Q_{Fr}}{T_{Fr}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta = -\frac{W}{Q_{ch}} = 1 + \frac{Q_{Fr}}{Q_{ch}} = 1 - \frac{T_{Fr}}{T_{ch}}$$

b) $\eta = 0,442$

c) $r_{real} = \frac{P_e}{P_t} = \frac{900}{2785} = 0,323 < r_{carnot}$... le cycle n'est pas réversible

2) a)

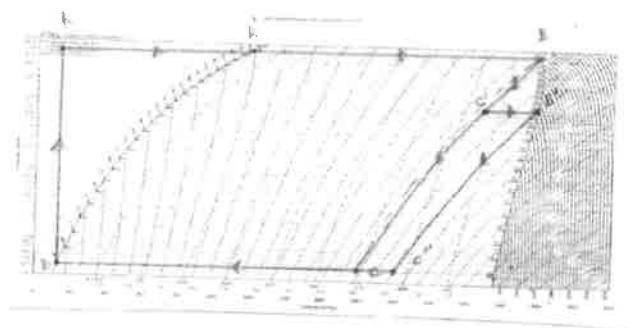


b)

	A'	B	D
P _m	1190,1	2788,46	125,22
S _m	2,1853	5,1226	0,4348
T	543K 270°C	543K 270°C	303K 30°C

(on utilise les informations sur les températures)

c)



D → A isenthalpique
A → B isobare
B → C isentropique
C → D isobare

d) $\Delta h = h_B - h_A = w_{AB} + q$

e) $w_{BC} = h_C - h_B = 1200 - 2788 = -1588 \approx -10^3 \text{ kJ/kg}$ une précision ...

f) $q_{AA'} = c_p(T_{A'} - T_A) \approx c_p(T_{B'} - T_B) = 1003,2 \approx 10^3 \text{ kJ/kg}$

g) $q_{AB} = L_v(T_B) = h_B - h_A \approx 1600 \text{ kJ/kg}$

h) on prend alors $\eta = \frac{w_{BC}}{q_{AA'} + q_{AB}} = \frac{1}{2,6} = 0,38$ encore > au rendement réel ... il y a des pertes à la conversion en électricité + ce cycle n'est pas forcément réel.

i) en C : état liquide + vapeur - $x_v \approx \frac{13}{19} = 0,68$ ($\frac{D_C}{D_{B''}}$)

3) a) cf graphique

b) $x_{c1} = 0,85 \quad x_{c2} = 0,77 > x_c$ - limite la corrosion

$$c) Q_{ch} = Q_{AA'} + Q_{A'B} + Q_{C'B} = 1000 + 1600 + 270 = 2870 \text{ kJ/kg}$$

$$W_p = (h_{C'} - h_B) + (h_{C''} - h_{B'}) = -670 - 800 = -1470 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta = -\frac{W_p}{Q_{ch}} = \frac{-1470}{2870} = 0,37$$

Le rendement est un peu plus faible

B. Enrichissement de U par centrifugation

1) R₁ est en rotation uniforme autour de l'axe Oz, il n'est donc pas galiléen

2) les forces subies sont :

- le poids $\rho \vec{g} d^3 r$
- la force d'inertie d'entraînement $\rho \cdot \omega^2 r \vec{u}_x$,
- il n'y a pas de force de Coriolis ($\vec{v}_n = \vec{0}$ équilibre)
- les forces de pressions : $-\nabla P d^3 r$

3) $\|\vec{\alpha}_e\| = r \cdot \omega^2 = r \times (\pi \cdot 10^5)^2$ avec $r \approx 1 \text{ cm}$ à comparer à $g = 10 \text{ ms}^{-2}$
on peut donc négliger le poids.

4) on en déduit que $-\nabla P + \rho \omega^2 r \vec{u}_x = 0$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \rho(r) \omega^2 r$$

De plus le gaz est parfait $\Rightarrow \rho(r) = \frac{P(r) M}{R T}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{M \omega^2}{R T} \rho(r) \cdot r = \frac{m \omega^2 \rho(r)}{R_A T} r$$

on peut passer à : $n^*(r) = \frac{\rho(r)}{M} N_A$ et $k_B = \frac{R}{N_A}$.

$$\Rightarrow \frac{dn^*}{dr} = \frac{m \omega^2}{R_A T} r \cdot n^* \quad (m = \frac{M}{N_A})$$

$$\frac{1}{n^*} \frac{dn^*}{dr} = \frac{m \omega^2 r}{R_A T} \Rightarrow \ln(n^*(r)) = \frac{m \omega^2 r^2}{2 k_B T} + \underbrace{\ln n^*(0)}_{\text{constante}}$$

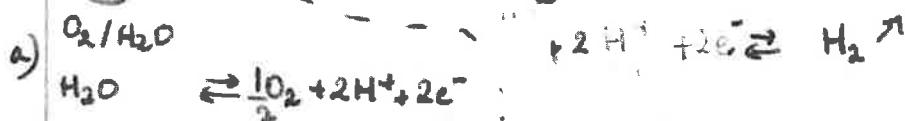
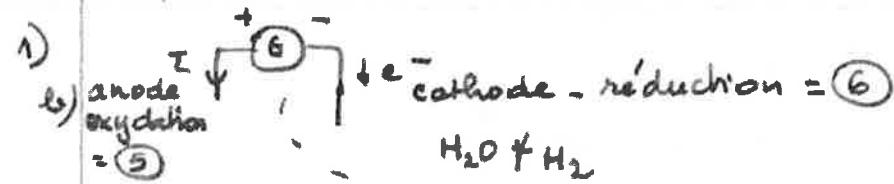
$$n^*(r) = n^*(0) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{m \omega^2 r^2}{k_B T}\right)$$

5) on retrouve $\exp(-\frac{E_p}{RT})$ avec $E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ qui est l'énergie potentielle associée à la force centrifuge.

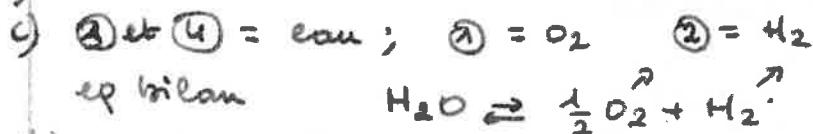
²³⁸UF₆ a une masse m plus grande et se trouve plus à l'extérieur la zone centrale s'enrichit en ²³⁵U (3)

II - Contrôle des effluents de la centrale.

A - rejet de Tritium .



b) les H^+ sont produits à gauche et migrent à droite

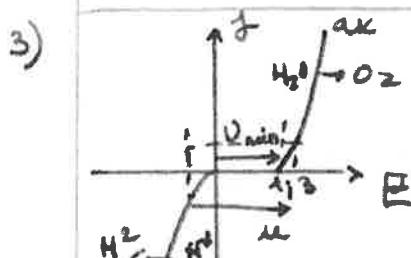


e) on ne veut pas de réaction parallèle .

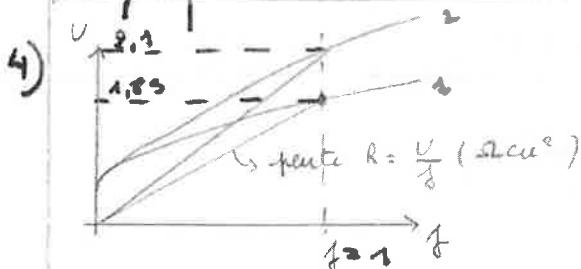
2) a) A l'anode, on produit systématiquement 1 H et 1 T pour HTO
 on ne peut rien séparer .

La différence se passe donc à la cathode

b) β va dépendre de la température, nature de la cathode, état de surface , etc .



$U_{\min} \approx 1,3 \text{ V}$
 ▲ U est la différence de potentiel pas le potentiel



$$R_1 = 1,83 \Omega \text{cm}^{-2}$$

$$R_2 = 2,1 \Omega \text{cm}^{-2}$$

$$R_2 - R_1 = 0,27 \Omega \text{cm}^{-2}$$

On a intérêt à avoir une résistance faible, donc une épaisseur faible → anode brisillité

B. Risques liés à la libération de RuO₄

4

1) RuO₄ a une t_m^{ue} de fusion basse \rightarrow peu de liaisons à casser : on a un cristal moléculaire, il suffit de casser les liaisons de Van der Waals.

RuO₂ a une t_m^{ue} de fusion bien plus élevée, on peut avoir un solide covalent, ou métallique

2) on sait que $\ln K = -\frac{\Delta r G^\circ}{RT} = -\frac{\Delta r H^\circ}{R} \times \frac{1}{T} + \frac{\Delta r S^\circ}{R}$

on identifie $\frac{\Delta r S^\circ}{R} = -3,6829 \Rightarrow \Delta r S^\circ = -30,61 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
 $-\frac{\Delta r H^\circ}{R} = 14461 \Rightarrow \Delta r H^\circ = 120,23 \text{ kJ mol}^{-1}$

Enfin avec une cinétique d'ordre 1
on sait que $t_{1/2} \sim \frac{1}{k}$ donc $t_{1/2} \sim e^{\frac{E_a}{RT}}$
donc $\ln t_{1/2} = \text{cte} + \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T}$

T	$t_{1/2}$
323	$2,6 \cdot 10^7$
373	$4,3 \cdot 10^4$
423	$3,5 \cdot 10^2$

on trace, on trouve une droite de pente $\frac{E_a}{R} \approx 15300$
 $\Rightarrow E_a \approx 127,2 \text{ kJ mol}^{-1}$

3) plus T \nearrow plus le cinétique de décomposition de RuO₄ est rapide; et plus l'équilibre est déplacé vers la gauche (réaction exothermique, loi de vant Hoff).

III Surveillance visuelle d'un site nucléaire.

A $\delta = 2(\phi_0 + \psi(t))$

B. on nomme les amplitudes: $\underline{A} = A(1 + e^{+\frac{i 2\pi \delta}{\lambda}})$
l'intensité est

$$\begin{aligned} I &= |\underline{A}|^2 = A^2 \left(1 + 1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} \right) \right) \\ &= 2A^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2\phi_0 + \frac{4\pi}{\lambda} \psi(t) \right) \right) \end{aligned}$$

C Il faut se placer dans une zone où I varie beaucoup \Rightarrow on choisit plutôt le point Q.

Q correspond à $\cos \phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} [\pi]$

(5)

D) $d_0 = \frac{\pi}{8}$ $\Phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2d_0 = \frac{\pi}{2}$: oui....

1) entre 0,1 et 0,2 s, on voit ± 8 oscillations, la différence de marche a phase $8 \cdot \lambda$, alors que $y(t)$ a varié de $-4y_M$ à $+4y_M$. donc δ de $-24m$ à $+24m$ donc $y_M = \frac{4 \lambda}{2} = 2\lambda$.

$$\frac{T}{2} = 0,1s \Rightarrow T = 0,2s \Rightarrow f = 5Hz$$

5. Cette fois $\Delta\delta = 8,5\lambda \Rightarrow y_M = 2,125\lambda$ fig 12

$$\frac{I}{I_{max}} = 0,75 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = -0,25 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\delta = 0,98\pi \quad \delta = 0,25\pi$$

on compte $\delta = (0,2 + 0,25 + 8,5)\lambda \approx 9\lambda$

$$y_M = \frac{9}{4} \cdot \lambda = 2,25\lambda$$

Centrale MP II 2020 (Proxima du Centaure)¹

Q1. Le spectre ultraviolet débute pour des longueurs d'onde inférieures à 400 nm ce qui est cohérent avec les données de la figure 1.

Considérons un photon de longueur d'onde 400 nm, son énergie vaut :

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{4 \times 10^{-7}} \approx 5 \times 10^{-19} \text{ eV} \Rightarrow E \approx 3 \text{ eV}$$

L'énergie des photons ultra-violets est d'au moins quelques eV, comparable à l'énergie de liaison des électrons du cortège électronique (Cf. énergie du niveau fondamental de l'hydrogène en annexe). Lors de l'absorption d'un tel photon, un électron peut donc être arraché et l'entité ionisée.

Q2. La figure 2 montre que, lors de la traversée de l'atmosphère, la couche d'ozone réduit de moitié le flux de rayons UVa et totalement les UVc qui sont associés aux photons les plus énergétiques.

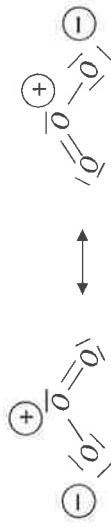
Ces rayons pénètrent en profondeur dans la peau pouvant provoquer lésions et brûlures et favoriser le développement de cancers, les plus énergétiques pouvant briser l'ADN et entraîner des mutations. Il est donc important que la couche d'ozone filtre ce rayonnement UV.

Q3. Pour l'oxygène $Z = 8$, configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^4$.

Q4. L'oxygène possède 6 électrons de valence, il y a donc 12 électrons à répartir sur la structure, c'est à dire 6 doublets. On répartit ces doublets de manière à respecter la règle de l'octet pour chacun des atomes d'oxygène.

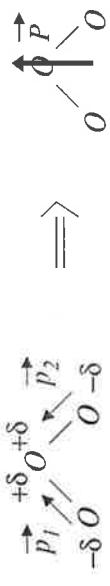


Q5. Pour la molécule d'ozonc, il y a $3 \times 6 = 18$ électrons à répartir, c'est à dire 9 doublets. On constate la présence de deux formes mésomères équiprobables. Les propositions assurent que la règle de l'octet est vérifiée pour chacun des atomes d'oxygène.



Q6. Les charges formelles qui apparaissent et les deux formes mésomères permettent de définir une structure équivalente moyenne où un dipôle (dirige du pôle négatif vers le pôle positif) apparaît sur chacune des liaisons oxygène-oxygène.

Le moment dipolaire \vec{P} de la molécule résulte de l'addition vectorielle de ces deux dipôles élémentaires.



Q7. On commence par déterminer les grandeurs standard de réaction dans l'approximation d'Ellingham sachant que l'enthalpie standard de formation du dioxygène gazeux est nulle :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= 2 \times 141,9 \quad \Rightarrow \quad \Delta_r H^\circ = 283,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S^\circ &= 2 \times 239 - 3 \times 205 \quad \Rightarrow \quad \Delta_r S^\circ = -137 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G^\circ &= 283,8 \times 10^3 - 298 \times (-137) \quad \Rightarrow \quad \Delta_r G^\circ = 342,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit alors la constante d'équilibre :

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{342,6 \times 10^3}{8,31 \times 298}\right) \quad \Rightarrow \quad K^\circ = 1,2 \times 10^{-57}$$

Q8. On exprime alors la constante d'équilibre à l'aide des pressions partielles (avec une pression totale égale à la pression standard) :

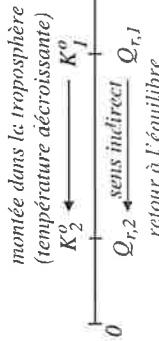
$$K^\circ = \frac{a_{O_3}^2}{a_{O_2}^3} = \frac{p_{O_3}^2 p^\circ}{p_{O_2}^3} = \frac{p_{O_3}^2 p^\circ}{x_{O_2}^3 (p^\circ)^3} \quad \Rightarrow \quad p_{O_3} = p^\circ \times x_{O_2}^{3/2} \times \sqrt{K^\circ}$$

$$p_{O_3} = 10^5 \times (0,20)^{3/2} \times (1,2 \times 10^{-57})^{1/2} \quad \Rightarrow \quad p_{O_3} = 3,1 \times 10^{-25} \text{ Pa}$$

Q9. La figure 1 fait apparaître l'évolution de la température dans l'atmosphère, température décroissante dans la troposphère et croissante dans la stratosphère.

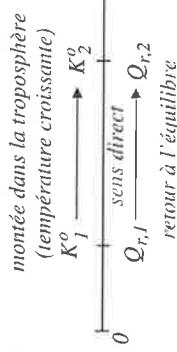
De plus, comme $\Delta_r H^\circ > 0$, la loi de Van't Hoff $\frac{d \ln(K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ assure que la constante d'équilibre est une fonction croissante de la température.

Dans la troposphère : la température diminue avec l'altitude, il en va de même de la constante d'équilibre ; un retour à l'équilibre nécessite donc une diminution du quotient de réaction est une réaction dans le sens indirect, la formation d'ozone est défavorisée.



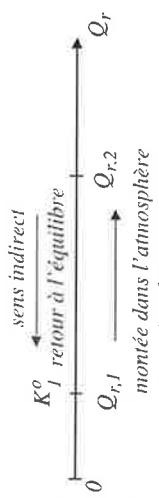
1. Remarques : cedric.grange@laposte.net

Dans la stratosphère : la température augmente avec l'altitude, il en va de même de la constante d'équilibre ; un retour à l'équilibre nécessite donc une augmentation du quotient de réaction est une **réaction dans le sens direct, la formation d'ozone est favorisée.**



Le raisonnement précédent a tenu compte du seul paramètre d'équilibre température. Lors de l'élévation dans l'atmosphère, on observe également une baisse de la pression. Le quotient de réaction s'écrit : $Q_r = \frac{n_{O_3}^2 n_{tot}}{n_{O_2}^3 p_{tot}} \times \frac{p^\circ}{p}$.

Une baisse de la pression entraîne une augmentation du quotient d'équilibre, un retour à l'équilibre est alors marqué par une réaction dans le sens indirect. **Une élévation associée à une baisse de pression favorise la réaction dans le sens indirect.** Cet effet nuance les résultats obtenus avec la seule température.



Q10. L'équilibre I.1 conduisant à la formation de l'ozone nécessite la présence de dioxygène et un rayonnement ultraviolet ; en basse altitude la concentration en dioxygène est maximale mais le rayonnement UV est filtré par l'ozone ; en haute altitude le rayonnement UV est maximal mais la présence de dioxygène quasi-nulle. On conçoit donc une concentration maximale à une altitude intermédiaire.

$$K_R^o = \frac{p_O^2 \bullet}{p_{O_2} p^\circ}.$$

Q11. D'après l'équation de réaction I.1, $K_R^o = \frac{p_O^2 \bullet}{p_{O_2} p^\circ}$.

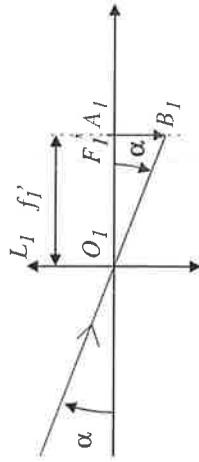
Q12. D'après la réaction I.2 vérifiant la loi de Van't Hoff :

$$v_{O_3} = k p_{O_2} p \bullet \Rightarrow v_{O_3} = k \sqrt{K_R^o p^\circ} \times p_{O_2}^{3/2}$$

C'est à dire un ordre **[3/2]** par rapport au dioxygène.

Q13. Soit $d_{TS} \approx 1,5 \times 10^{11}$ m la distance Terre-Soleil et $D_E = 3,9 \times 10^{16}$ m la distance Soleil-Proxima Centauri, comme $d_{TS} \ll D_E$, on peut assimiler la distance Terre-Proxima Centauri à la distance Soleil-Proxima Centauri.

Q14. $f'_1 \ll D_E$, l'étoile Proxima Centauri est considérée à l'infini, l'image intermédiaire se forme dans le plan focal image de la lentille L_1 .



Q15. L'étoile Proxima Centauri est vue sous un angle $\alpha \approx \frac{2R_E}{D_E}$ (approximation des petits angles). D'après la figure obtenue à la question 14 :

$$A_1 B_1 = f'_1 \alpha \quad \Rightarrow \quad A_1 B_1 = \frac{2R_E f'_1}{D_E}$$

Q16. Schéma synoptique : $A_1 \xrightarrow{L_2} A_2$; en appliquant la formule de grandissement et de conjugaison, il vient :

$$\frac{1}{\overline{O_2 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_2 A_1}}$$

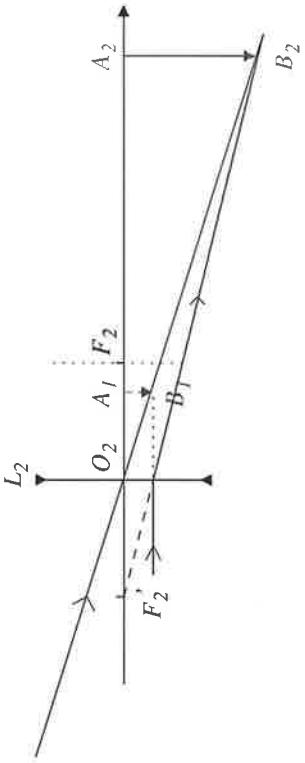
En combinant les deux relations, on en déduit : $\overline{O_2 A_1} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} f'_2 = 1,5$ cm.

La lentille L_2 se trouve placée 1,5 cm avant l'image intermédiaire. Il est sans doute préférable de proposer ce résultat que celui demandé par l'énoncé :

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 A_1} + \overline{A_1 O_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{O_1 O_2} = f'_1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} f'_2$$

Q17. Pour le tracé de l'image finale, on considère deux rayons pour effectuer le trace.

- le rayon incident passant par le centre optique (et dont le prolongement passe par B) n'est pas dévié ;
- le rayon parallèle à l'axe optique (et donc le prolongement passe par B) émerge avec son prolongement qui passe par F'_2 . L'intersection des deux rayons fournit le point B_2 et le point A_2 par projection sur l'axe.



Terr.

- *Flux de photons entrant dans la lunette*
En multipliant par la section d'entrée de la lunette, on en déduit la puissance électromagnétique qui entre dans la lunette; il suffit alors de prendre en compte l'énergie moyenne d'un photon $h\nu = hc/\lambda$ pour en déduire le flux de photons :

$$\phi = p_S \times \frac{d_{ST}^2}{D_E^2} \times \pi \frac{D_1^2}{4} \times \frac{\lambda}{hc}$$

- On considère alors la durée d'exposition et le rendement quantique pour un déduire le nombre d'électrons :

$$N = QE \times \phi \times T \quad \Rightarrow \quad N = p_S \times \frac{d_{ST}^2}{D_E^2} \times \pi \frac{D_1^2}{4} \times \frac{\lambda}{hc} \times QE \times T$$

$$N = 600 \times \left(\frac{1,5 \times 10^{11}}{3,99 \times 10^{16}} \right)^2 \times \frac{\pi \times (0,50)^2}{4} \times \frac{6,0 \times 10^{-7}}{6,626 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8} \times 0,30 \times 12 \times 60$$

$$N = 1,1 \times 10^{12} \text{ électrons} \quad |Q| = Ne = 1,7 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

- Q21.** L'ouverture de la lunette de rayon D_1 génère une diffraction dont le demi-angle vaut, en ordre de grandeur :

$$\theta_{\text{dif.}} \approx \frac{\lambda}{D_1} = \frac{6 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-1}} \Rightarrow \theta_{\text{dif.}} \approx 10^{-6} \text{ rad}$$

Cette angle étant supérieur à l'angle α sous lequel est vue l'étoile, il est gênant pour la résolution.

- Q22.** Le satellite Hipparcos tournant au voisinage de la Terre, on peut à l'échelle de la distance Terre-Soleil confondre sa position avec celle de la Terre.

Dans la limite des « petits angles » : $P_E \approx \frac{O_1 O_2}{SE} = \frac{2d_{TS}}{SE}$, il vient :

$$SE = \frac{2d_{TS}}{P_E}$$

A.N. : $SE = \frac{2 \times 1,50 \times 10^8}{1545 \times 10^{-3} \times \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180}} \Rightarrow SE = 4,00 \times 10^{13} \text{ km}$

L'énoncé propose une valeur $D_E = 3,99 \times 10^{13} \text{ km}$, les résultats sont cohérents, la question suivante permet de proposer une explication de l'écart relatif de l'ordre avec p_{PC} la puissance surfacique de *Proxima Centauri* à la surface terrestre et $p_S = 600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ la puissance surfacique du Soleil à la surface de la

Q18. Compte tenu du facteur de grandissement : $A_2 B_2 = \frac{2\gamma R_E f_1}{D_E}$.

$$\text{AN. : } A_2 B_2 = \frac{2 \times 4 \times 9,81 \times 10^4 \times 8}{3,99 \times 10^{13}} \Rightarrow A_2 B_2 = 0,16 \mu\text{m}.$$

La taille de l'image sur la plaque est inférieure à la taille d'un cristal, l'image apparaît ponctuelle.

Q19. Soit L et ℓ les dimensions du capteur, a le côté d'un pixel et N le nombres de pixels :

$$Na^2 = L \times \ell \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{L \times \ell}{N}}$$

$$\text{AN. : } a = \sqrt{\frac{24 \times 10^{-3} \times 36 \times 10^{-3}}{10^8}} \Rightarrow a = 3 \mu\text{m}.$$

Là encore la taille de l'image est plus petite que la taille d'un pixel, l'image est ponctuelle.

Q20. Démarche :

- *Puissance de Proxima Centauri à la surface de la Terre*
Faute d'information supplémentaire, on supposera que la puissance totale \mathcal{P}_0 émise par *Proxima Centauri* est identique à celle émise par le Soleil. Du fait de l'émission supposée isotrope, cette puissance se répartit sur une sphère, c'est à dire pour des sphères ayant respectivement le rayon de la distance Terre-Soleil d_{ST} puis le rayon de la distance Terre-*Proxima Centauri* D_E :

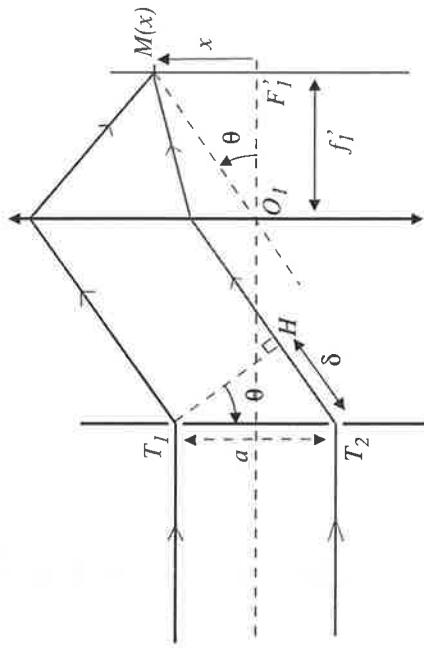
$$\mathcal{P}_0 = p_{PC} \times 4\pi \frac{d_{ST}^2}{4} = p_S \times 4\pi \frac{d_{ST}^2}{D_E^2} \quad \Rightarrow \quad p_{PC} = p_S \times \frac{d_{ST}^2}{D_E^2} \quad \Rightarrow \quad SE = 4,00 \times 10^{13} \text{ km}$$

Avec p_{PC} la puissance surfacique de *Proxima Centauri* à la surface terrestre et $p_S = 600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ la puissance surfacique du Soleil à la surface de la

de 0,2%.

Q23. La distance entre le Soleil et la Terre varie au cours de l'année car la Terre parcourt une ellipse d'excentricité 0,017 et non un cercle.

Q24. Les rayons qui convergent en M point du plan focal image sont nécessairement issus de rayons incidents parallèles entre eux, on les obtient en traçant le rayon d'appui qui passe par le centre optique de la lentille et par M .



Q29. Pour la nouvelle différence de marche : $\delta_{S'}(x) = \frac{a\alpha}{2} + \frac{ax}{f'_1}$ et l'ordre d'interférence :

$$p_{S'}(M) = \frac{a\alpha}{2\lambda} + \frac{ax}{\lambda f'_1}$$

La source étant à l'infini sur l'axe, la différence de marche est nulle au niveau des trous d'Young. Par retour inverse de la lumière, on a nécessairement $(T_1 M) = (H M)$, au final :

$$\delta_S(x) = (SM)_2 - (SM)_1 \Rightarrow \boxed{\delta_S(x) = T_2 H}$$

Q25. Dans la limite des petits angles, $\delta_S(x) \approx a\theta$ et $\theta \approx x/f'_1$, il vient pour la différence de marche $\delta_S(x) = ax/f'_1$. Par définition de l'ordre d'interférence :

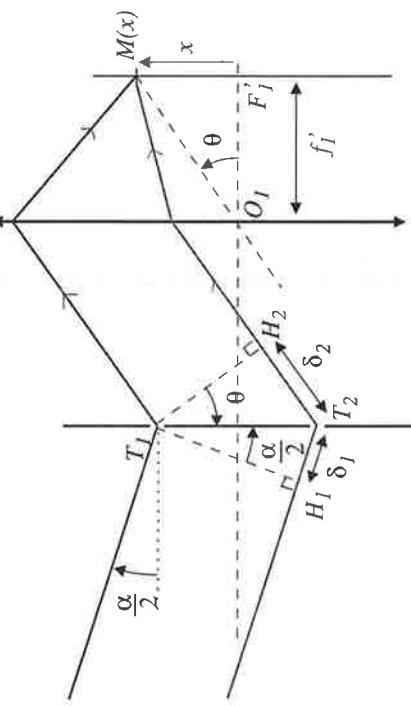
$$ps(M) = \frac{\delta_S(x)}{\lambda} \Rightarrow \boxed{ps(M) = \frac{ax}{\lambda f'_1}}$$

Q26. Un ordre d'interférence fixé est associé à un x fixé, la figure d'interférences correspond à des franges d'interférences avec une frange claire au centre $x = 0$.

Q27. Pour une interférence à deux ondes de même amplitude :

$$\boxed{I(x) = I_0 \times \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'_1} \right) \right]}$$

Q28. Les rayons interférant au même point M , le déphasage est le même en aval des trous d'Young. Il faut ajouter le déphasage en amont du fait d'un angle α non nul (l'angle à considérer cst $\alpha/2$ car α est associé au diamètre).



Q29. Pour la nouvelle différence de marche : $\delta_{S'}(x) = \frac{a\alpha}{2} + \frac{ax}{f'_1}$ et l'ordre d'interférence :

$$p_{S'}(M) = \frac{a\alpha}{2\lambda} + \frac{ax}{\lambda f'_1}$$

Q30. Les deux sources étant incohérentes, on somme les intensités des deux figures d'interférences. Les ordres d'interférence différents de $\frac{a\alpha}{2\lambda}$, il y aura brouillage quand cette différence vaudra une valeur demi-entièrre, les deux systèmes de frange seront alors décalés de telle façon que les franges brillantes d'un système correspondent aux franges sombres de l'autre système et le contraste s'annulera. La première valeur de a vérifiant cette condition est :

$$\frac{a_{\min}\alpha}{2\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{a_{\min} = \frac{\lambda}{\alpha}}$$

$$\text{Q31. A.N. : } a_{\min} = \frac{6,00 \times 10^{-7}}{1,02 \times 10^{-3} \times (1/3600) \times (\pi/180)} \Rightarrow \boxed{a_{\min} = 121 \text{ m}}$$

Cette distance paraît très significative mais elle est réalisable en utilisant deux télescopes mobiles (cas du VLT).

Q32. On peut appliquer le raisonnement en associant deux à deux les points de l'étoile comme indiqué sur le schéma suivant, pour chacun des couples il y a brouillage pour a_{\min} .

$$\begin{array}{c} S'_1 \\ \vdash \dashv \\ S'_2 \\ \vdash \dashv \\ S^o \\ \vdash \dashv \\ S^o_2 \\ \vdash \dashv \\ S_I \\ \vdash \dashv \\ S_2 \end{array}$$

$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}}_t \approx \mu_0\gamma \frac{\partial \vec{\underline{E}}_t}{\partial t}$$

Q37. En reportant l'expression proposée pour le champ électrique transmis dans l'équation de diffusion, on en déduit :

$$\begin{aligned} -k_m^2 &= \mu_0\gamma \times j\omega \quad \Leftrightarrow \quad k_m^2 = -j\mu_0\gamma\omega = \mu_0\gamma\omega e^{-j\pi/2} \\ \text{Il vient } k_m &= \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}e^{-j\pi/4} = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega} \times \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1-j). \end{aligned}$$

La solution avec le signe $-$ serait associée à une propagation vers les $x < 0$, non pertinente ici. On retient donc :

$$k_m = \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

On reporte alors dans l'expression du champ électrique :

$$\forall x > 0, \quad \forall t, \quad \vec{\underline{E}}_t(x, t) = t \underline{E}_0 \exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_y$$

Le champ électrique s'atténue sur une distance caractéristique δ du fait de la dissipation par effet Joule, il s'agit de l'**épaisseur de peau**. C'est la longueur caractéristique sur laquelle le champ se propage au sein du métal.

Q38. Commençons par déterminer la valeur de δ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu_0\gamma \times 2\pi c}} = \sqrt{\frac{2 \times 6 \times 10^{-7}}{4\pi \times 10^{-7} \times 4,5 \times 10^7 \times 2\pi \times 3 \times 10^8}}$$

C'est à dire $\delta \approx 3 \times 10^{-9}$ m. En pratique, une épaisseur $\epsilon = 5\delta$ est suffisante pour considérer une atténuation quasi-totale du champ et un milieu semi-infini. De ce point de vue, une voile d'une épaisseur de quelques dizaines de nanomètre est suffisante.

On peut toutefois s'interroger sur la résistance d'une voile solaire aussi fine qui devra être déployée dans l'espace, considérons alors plutôt une épaisseur $\epsilon \approx 1 \mu\text{m}$ et pour la masse :

$$m = \rho Se = 19,3 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} \Rightarrow m \approx 2 \text{ kg}$$

Q39. Notons tout d'abord que ce n'est pas la moyenne de la norme du vecteur de Poynting qui est représentée mais cette grandeur divisée par la norme du vecteur de Poynting de l'onde incidente.

Considérons alors une situation idéalisée pour laquelle l'énergie incidente se par-

Q33. Dans le vide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

En reportant l'expression proposée pour le champ électrique dans l'équation de d'Alembert, on en déduit $k = \omega/c$, caractérisant une **propagation non dis perse**, la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ est indépendante de la fréquence.

Q34. Pour une onde électromagnétique **plane progressive harmonique** se propagant dans le vide dans le sens des x croissants :

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \vec{\underline{E}}(x, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \exp(j[\omega t - kx]) \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{I} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

Remarque : une autre méthode consiste à exprimer les grandeurs réelles des champs électrique et magnétique, de déterminer alors le vecteur de Poynting et de prendre enfin la moyenne temporelle de cette expression.

Q36. Comparons les ordres de grandeur des deux termes du même de droite de l'équation :

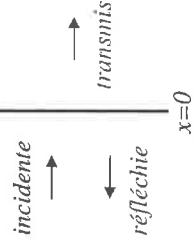
$$r = \left| \frac{\mu_0\gamma \frac{\partial \vec{\underline{E}}_t}{\partial t}}{\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}_t}{\partial t^2}} \right| \propto \frac{\mu_0\gamma\omega}{\mu_0\epsilon_0\omega^2} = \frac{\gamma}{\epsilon_0 \times 2\pi f} = \frac{\gamma \times \lambda}{\epsilon_0 \times 2\pi c}$$

Considérons une onde de lumière rouge $\lambda \approx 6 \times 10^{-7}$ m, c'est à dire :

$$r = \frac{4,5 \times 10^7 \times 6 \times 10^{-7}}{8,85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 3 \times 10^8} \Rightarrow r \approx 1,6 \times 10^3$$

La longueur d'onde augmente dans l'infrarouge et le rapport est encore plus important, on peut donc négliger le terme associé à la dérivée seconde :

tage en deux au niveau d'une interface infiniment fine et non absorbante.



À l'interface la puissance surfacique incidente se partage entre une puissance surfacique réfléchie et une puissance transmise :

$$\langle \|\vec{H}_i\| \rangle_{x=0^-} = \left\langle \|\vec{H}_r\| \right\rangle_{x=0^-} + \left\langle \|\vec{H}_t\| \right\rangle_{x=0^+}$$

En divisant par la norme du vecteur de Poynting incident et en appelant R le coefficient de réflexion en énergie et T le coefficient de transmission en énergie, il vient :

$$1 = R + T \Leftrightarrow T = 1 - R$$

Il y a donc une proportion $1 - R$ de l'énergie qui est transmise et on retrouve en amont de l'interface, le faisceau incident et le faisceau réfléchi pour une énergie représentant une proportion $1 + R$ de l'énergie incidente.

Les oscillations en amont sont associées aux **interférences des ondes incidente et réfléchie** créant des zones où le vecteur de Poynting résultant est plus ou moins intense.

Notons toutefois que le document ne semble pas tenir compte de l'absorption au sein du métal réel ainsi que de la seconde interface métal-vide.

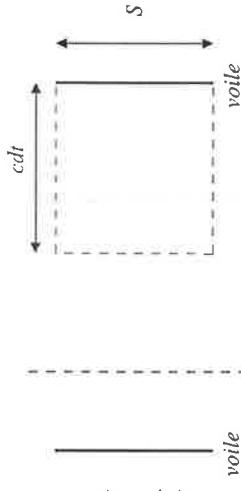
Q40. Pour simplifier on supposera que les photons ont tous la même longueur d'onde moyenne λ . Dans un premier temps, on se place dans un modèle de voile parfaitement réfléchissante et la démarche est alors la suivante :

- déterminer l'action de la voile sur un photon ;
- en déduire, l'action d'un ensemble de photons sur la voile ;
- relier le flux de photons au vecteur de Poynting.

Considérons une durée arbitraire dt pendant laquelle un photon vient frapper la voile ; le photon, de longueur d'onde moyenne λ se réfléchit de manière élastique, un bilan de quantité de mouvement conduit à :

$$\vec{F}_{\text{voile} \rightarrow \text{photon}} dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -\frac{h}{\lambda} \vec{u}_x - \left(\frac{h}{\lambda} \vec{u}_x \right) = -\frac{2h}{\lambda} \vec{u}_x$$

C'est à dire pour l'action du photon sur la voile : $\vec{F}_{\text{photon} \rightarrow \text{voile}} = \frac{2h}{\lambda dt} \vec{u}_x$



Pendant cet intervalle de temps dt , il y a δN photons qui viennent frapper la voile, pour une force résultante :

$$\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = \frac{2h}{\lambda} \frac{\delta N}{dt} \vec{u}_x$$

Il reste maintenant à relier le flux dc photons au vecteur de Poynting. En multipliant le débit de photons $\delta N/dt$ par l'énergie d'un photon, on obtient la puissance du faisceau qui est le produit de la norme de la moyenne du vecteur de Poynting par la surface du faisceau :

$$\frac{\delta N}{dt} \times h\nu = \Pi \times S \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\delta N}{dt} = \frac{\Pi \times S}{h\nu}$$

Il vient alors :

$$\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = \frac{2\Pi S}{\lambda\nu} \vec{u}_x \quad\Leftrightarrow\quad \vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = 2\frac{\Pi}{c} S \vec{u}_x$$

Le facteur 2 est lié au fait qu'il y a un double effet de pression de radiation, pour les photons qui viennent frapper la voile et ceux qui repartent. Si la voile n'est pas parfaitement réfléchissante et que seule une proportion de puissance R est réfléchie (les autres photons étant absorbés dans le métal), il faut remplacer 2Π par $(1 + R)\Pi$ (car $(1 - R) + 2 \times R = 1 + R$) et finalement :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = (1 + R) \frac{\Pi}{c} S \vec{u}_x}$$

A.N. (avec $R = 1$) :

$$\boxed{\|\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}}\| = \frac{2 \times 10^3 \times 100}{3 \times 10^8} \Rightarrow \|\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}}\| \approx 10^{-3} \text{ N}}$$

L'effet paraît très limité, la force correspondant au poids d'un objet de 0,1 g générant une accélération très modeste. Cependant, contrairement à des boosters, cet effet perdure sur la durée et permet par accumulation d'affecter significativement le mouvement de l'objet.

Q41. En partant de la définition du centre de masse :

$$\vec{0} = M_E \overrightarrow{GE} + M_P \overrightarrow{GP} = M_E \left(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PE} \right) + M_P \overrightarrow{GP}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \overrightarrow{EP}$$

Étude des cas limites :

- pour $M_E \gg M_P$: $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{EP}$, toute la masse se concentre au niveau de l'étoile, le centre de masse et l'étoile se confondent, c'est par exemple une très bonne approximation dans le cas du système Soleil-Terre ;
- pour $M_E = M_P$: $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{EP}/2$, le centre de masse est au milieu du segment joignant l'étoile et la planète.

Q42. Le système planète-étoile est un système isolé. Le centre de masse est donc en mouvement de translation uniforme et le référentiel d'étude ayant pour centre, le centre de masse G et trois directions pointant vers des étoiles lointaines fixes constitue bien un référentiel galiléen.

On applique alors, dans ce référentiel, le principe fondamental de la dynamique à la planète soumise à l'action de l'étoile :

$$M_P \frac{d^2 \overrightarrow{GP}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{M_E M_P}{EP^3} \overrightarrow{EP}$$

C'est à dire compte tenu de la relation obtenue à la question précédente :

$$\frac{M_P M_E}{M_E + M_P} \frac{d^2 \overrightarrow{EP}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{M_E M_P}{EP^3} \overrightarrow{EP} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G} (M_E + M_P)}{r^2} \vec{u}_r$$

Q43. Pour un mouvement circulaire et uniforme à la vitesse v :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = a_r \vec{u}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G} (M_E + M_P)}{r^2} \vec{u}_r$$

Avec $v = \frac{2\pi r}{T}$, on en déduit :

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \times \frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G} (M_E + M_P)}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G} (M_E + M_P)}{4\pi^2}$$

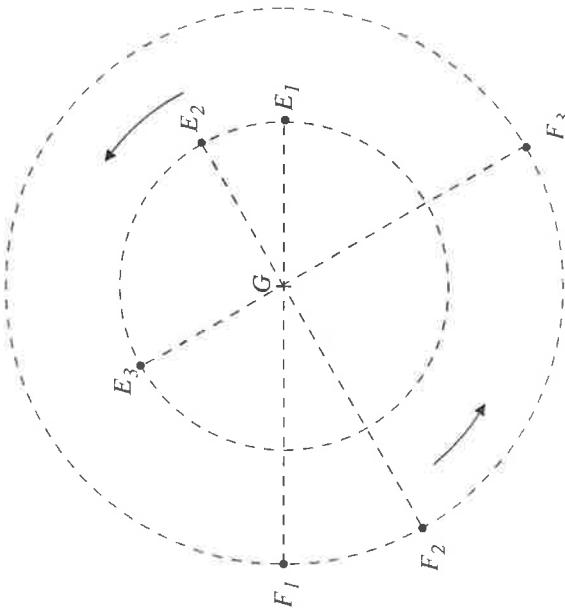
Cette loi porte le nom de **troisième loi de Kepler**. Il s'agit de la version généralisée dans le cas de figure où les deux objets ont des masses comparables et où l'on ne peut plus considérer l'étoile comme fixe. Pour $M_P \ll M_E$, on retrouve la formulation simplifiée bien connue.

Q44. Repartons de la définition du centre de masse :

$$M_P \overrightarrow{GP} + M_E \overrightarrow{GE} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GP} = -\frac{M_E \overrightarrow{GE}}{M_P}$$

Il vient alors :

$$\vec{r} = \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{EG} \times \left(1 + \frac{M_E}{M_P} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GE} = -\frac{M_P}{M_P + M_E} \vec{r}$$



L'étoile a donc par rapport au centre de masse un mouvement homothétique à celui du point F , c'est à dire un **mouvement circulaire de même période** mais de rayon $\frac{M_P}{M_P + M_E} r$ et donc pour la vitesse de l'étoile :

$$v_E = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad v_E = \frac{2\pi r}{T} \times \frac{M_P}{M_P + M_E}$$

Q45. Considérons tout d'abord la situation où l'étoile est en E_1 (Cf. figure page suivante) pour laquelle sa vitesse est dirigée en totalité selon la direction de la ligne de visée. L'étoile se déplaçant vers la Terre, la fréquence observée est supérieure à la fréquence d'émission.

$$T \approx 68/6 \text{ jours}$$

(environ 6 périodes entre le jour 20 et le jour 88). La dérive observée peut certainement s'expliquer par des mouvements annexes non pris en compte comme par exemple le déplacement de la Terre autour du Soleil.

D'après la question Q45, la vitesse de l'étoile autour du centre de masse est donnée par :

$$V_E = \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \approx \frac{M_P}{M_E^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3}$$

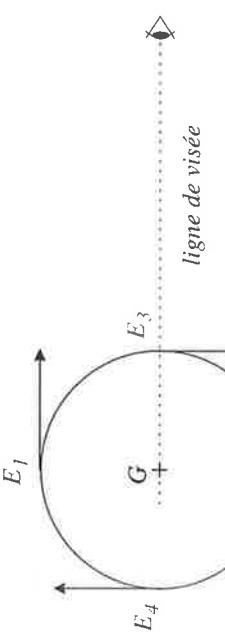
L'énoncé évoque une planète de masse égale à 1,3 fois la masse de la Terre, il semble donc raisonnable de négliger la masse de la planète vis à vis de la masse de l'étoile ce qui donne la formule approchée dérivée ci-dessus. On en déduit :

$$M_P = V_E M_E^{2/3} \times \left(\frac{T}{2\pi G} \right)^{1/3}$$

$$\text{A.N. : } M_P = \frac{6,5}{3,6} \times (2,44 \times 10^{29})^{2/3} \times \left(\frac{68 \times 24 \times 3600}{6 \times 2 \times \pi \times 6,67 \times 10^{-11}} \right)^{1/3}$$

$$M_P = 9,4 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

Le résultat obtenu correspond à environ 1,5 fois la masse de la Terre, résultat cohérent avec l'énoncé si on considère une détermination assez grossière de l'amplitude des vitesses et des simplifications opérées sur e et i .



$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{V_{E_1}}{c} = \frac{1}{c} \times \frac{2\pi r}{T} \times \frac{M_P}{M_P + M_E}$

Par ailleurs le rayon de la trajectoire vérifie la troisième loi de Kepler « généralisée » : $r = \left(\frac{G(M_P + M_E)T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. En reportant cette expression dans la formule de l'effet Doppler, il vient :

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \pm \frac{1}{c} \times \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3}$$

Dans la situation E_2 , l'étoile s'éloigne et on observe un décalage opposé vers le rouge. Finalement, pour les valeurs extrêmes de la variation relative de fréquence :

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \pm \frac{1}{c} \times \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3}$$

Au cours de la trajectoire circulaire, la variation relative de fréquence varie entre ces deux valeurs extrêmes en s'annulant en particulier pour les positions E_3 et E_4 de l'étoile.

La formule obtenue sur ce cas simplifié se déduit de la formule de l'énoncé en posant :

— $e = 0$ (mouvement circulaire) ;

— $i = \pi/2$, la Terre étant supposée dans le plan de la trajectoire de l'étoile autour du centre de masse, la ligne de visée et la normale au plan de la trajectoire sont perpendiculaires.

La formule de l'énoncé ne fournit que le décalage extrémal lorsque l'étoile s'éloigne ce qui n'est pas tout à fait explicite dans l'énoncé.

Q46. On constate que la vitesse de l'étoile autour du centre de masse au cours du temps suit une loi sinusoïdale d'amplitude $V_E \approx 6,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et de période

I- Champ gravitationnel et champ de pesanteur

A

Q1 $\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi G M_{\text{int}}$

Q2 symétries + cours $\Rightarrow \vec{g}' = -\frac{GM_T}{(R_T+z)^2} \vec{u}_z$

B

Q3 $\|\vec{g}\| = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2} \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) \quad (\text{DL à l'ordre } 1)$

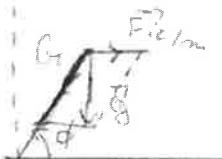
Q4 Variation de 1% $\Rightarrow \frac{2z}{R_T} = 10^{-2} \Rightarrow z = 31,9 \text{ km}$

 Q5 $\frac{\partial g_T}{\partial z} = -2 \frac{GM_T}{R_T^3}$ permet de savoir comment varie g_T lorsque z varie ...

Q6 $\frac{\partial g_T}{\partial z} = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} = 3,08 \mu\text{gal.cm}^{-1}$

C Q7 $\vec{F}_{\text{ie}} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$

Q8 $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{g}_T + m\omega^2 R_T \cos \phi \vec{u} \Rightarrow \vec{g} = -g_T(z) \vec{u}_z + \omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$



(le dessin n'est pas à l'échelle !)

Q9 Il faut calculer $\frac{\omega^2 R_T}{g_T(z)} = \frac{\omega^2 R_T^3}{GM_T} \approx 3,45 \cdot 10^{-3} \ll 1$

$$(\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}) \text{ la correction est faible.}$$

II Méthodes de mesure par pendule

A

L'eq du mouvement est $\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$

 donc la période des petites oscillations est $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, dépend de g ...

Q11 on peut s'imaginer que l'altitude varie, mais la fourchette est étroite. On a surtout la latitude qui varie.

$$\ln T = \ln(2\pi\sqrt{l}) - \frac{1}{2} \ln g \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta g}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{g_{\text{cayenne}} - g_{\text{Paris}}}{g_{\text{Paris}}} = -2 \cdot \frac{T_{\text{cayenne}} - T_{\text{Paris}}}{T_{\text{Paris}}} = -2 \cdot \frac{148}{86400} = -3,43 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow g_{\text{cayenne}} = 9,776 \text{ m.s}^{-2}$$

Q12 $\Delta g = 1 \mu\text{gal} , g = 9,81 \text{ m s}^{-2} = 981 \text{ gal}$
 $\Rightarrow |\frac{\Delta T}{T}| = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} = 5 \cdot 10^{-10}$ soit $5 \cdot 10^{-8} \%$... invraisemblable!

Q13 équilibre d'un ressort usuel : $l = l_0 + \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = \frac{m}{k} \cdot \Delta g$
 avec $\omega^2 = \frac{k}{m} \approx \frac{4\pi^2}{T^2} \approx 4\pi^2 \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}$ on prend $T \approx 1 \text{ s}$.
 d'où $\Delta l = \frac{\Delta g}{\omega^2} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$: non mesurable!
 Q14 aucun intérêt car Δg ne dépend pas de l_0 ...

III. Gravimètre à fléau de Lacoste et Romberg

Q15 Un changement de \vec{g} modifie θ , car le moment du poids varie. Grâce à y_f , on peut choisir $\theta = 0$ au départ, et mesurer des petites variations de θ .

Q16 $E_p = -mg a \sin(\theta) + \frac{1}{2} k (s - s_0)^2$

Q17 avec $s^2 = (y_f + b \sin \theta)^2 + b^2 \cos^2 \theta = y_f^2 + b^2 + 2yb \sin \theta$

Q18 $M = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = +mg a \cos \theta - k(s - s_0) \cdot \frac{\partial s}{\partial \theta}$
 avec $\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{2yb \cos \theta}{\sqrt{y_f^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}}$

$$M = \cos \theta \left[mg a - \frac{k y b (\theta - \theta_0)}{\sqrt{y_f^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} \right]$$

$$= \cos \theta \left[mg a + \frac{k y b \theta_0}{\sqrt{y_f^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} - k y b \right] \text{ CQFD.}$$

Q19 Avec $\theta_0 = 0$ M devient $M = \cos \theta [mg a - k y b]$
 $\Gamma = 0 \Rightarrow g = \frac{k y b}{m a}$

On fait varier y_f de sorte que le ressort reste à la position initiale. Il suffit alors de mesurer y_f ...
 Si $s_0 \neq 0$ on peut encore ajuster y_f pour annuler M mais il faudra mesurer s et s_0 ... peu pratique, beaucoup d'erreurs.

Q20 On aura une nouvelle expression de s :

$$s^2 = (y_f \cos \phi + b \sin \theta)^2 + (y_f \sin \phi - b \cos \theta)^2$$

$$s = \sqrt{y_f^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)}$$

(ou Ab-Kachi...)

$$\text{d'où } E_p = -mga \sin\theta + \frac{1}{2} k \left[(y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \varphi))^{1/2} - b_0 \right]^2$$

Q21 L'équilibre est lorsque $\Gamma = 0$, donc à un extrémum de $E_p(\theta)$. Avec $\varphi = 0$ on a un maximum \Rightarrow instable avec $\varphi \neq 0$ minimum, stable.

Q22 $\Gamma' = \cos\theta mga + k(b-b_0) \times \frac{1}{2\Delta} \times 2yb \cos(\theta-\varphi)$ et $b_0=0$
(par hypothèse)

d'où $M' = mga \omega \theta - kyb \cos(\theta-\varphi)$
 $= (mga - kyb \cos\varphi) \cos\theta - kyb \sin\theta \sin\varphi$ CQFD

Q23 le TMC / à l'asse de rotation donne (liaison parfaite):
 $J\ddot{\theta}' = M'$

A l'ordre 1 en θ $J\ddot{\theta}'' = (mga - kyb \cos\varphi) - kyb \sin\varphi \cdot \dot{\theta}$
 $\ddot{\theta} + \frac{kyb}{J} \sin\varphi \cdot \dot{\theta} = \frac{mga - kyb \cos\varphi}{J}$

Q24 on pose $\omega^2 = \frac{kyb}{J} \sin\varphi = \text{ pulsation}$

$$et \theta_0 = \theta_{\text{moy}} = \frac{mga - kyb \cos\varphi}{kyb \sin\varphi} \quad \text{la solution particulière}$$

Q25 $\theta_0 = 0$ pour $g = g_0 \Rightarrow \gamma = \frac{mga}{kyb \cos\varphi}$

Alors $\omega^2 = \frac{mga \tan\varphi}{J} = \frac{4\pi^2}{T^2}$

On doit prendre $\tan\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{J}{mga} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a}{g_0}$

A.N $\tan\varphi = 3,9 \cdot 10^5$ ($\varphi = 3,9 \cdot 10^5 \text{ rad}$) : très petit !

Q26 $\theta'_0 = \frac{mga - mgoa \cos\varphi}{mgoa \sin\varphi} = \frac{g-g_0 \cos\varphi}{g_0 \sin\varphi} = \frac{\Delta g}{g_0} \frac{1}{\tan\varphi}$

comme $\tan\varphi$ est très petit, on a une grande "amplification" de la variation de g .

Q27 $\theta'_0 = \frac{10^{-7}}{10} \frac{1}{3,9 \cdot 10^5} = 10^{-4} \text{ rad}^-$

C'est faible, mais moins ridicule que les valeurs précédentes. Mesurable.

IV - Applications de la gravimétrie

Q28 On prend uniquement la boule de masse volumique μ' invariante, symétries Gauss \Rightarrow pour $r > R$

$$\vec{g}_{\text{boule}} = (-G\mu' \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{r^2} \hat{e}_z)$$

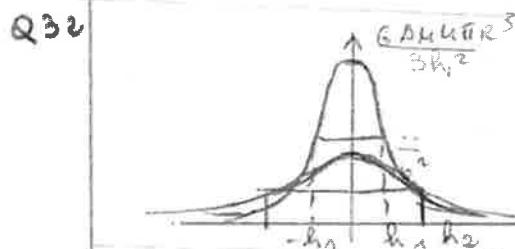
Q29 $\vec{g}_{\text{boule}} \cdot \hat{e}_z = G\mu' \frac{4\pi R^3}{3r^2} \cos\theta$ avec $\cos\theta = \frac{h}{r}$ $r = \sqrt{x^2 + h^2}$

Q30 loin de la boule, $\vec{g} = g_0 \hat{e}_z$ = acc par le sol plein et homogène.

On superpose les champs, si on avait $\mu' = \mu_m$ on aurait $\vec{g} = g_0 \hat{e}_z$. La différence est le champ acc par une boule de masse volumique $\Delta\mu$

Q31 et $\Delta g = g_z - g_0 = G\Delta\mu \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$

pour $x=0$ $\Delta g(0) = G\Delta\mu \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{h^2}$ = anomalie maximale.



Q33 A mi hauteur $(x^2 + h^2)^{3/2} = 2h^3 \Rightarrow x = h\sqrt[2/3]{2} - 1$
plus h est grand, plus l'anomalie est "faible" et fortement étalée.

Q34 on lit à mi hauteur $\Rightarrow x = 60m \Rightarrow h = 78,3m$

Q35 Compenser avec une sphère "creuse" de même centre de sorte que les deux anomalies se compensent ("creuse" : $\Delta\mu$ aucun de signe opposé à $\Delta\mu_m$)



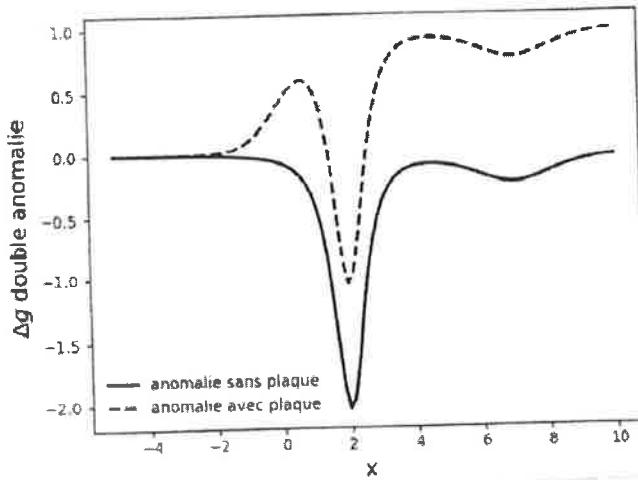
$$M_{R_0} R_0^3 - \mu_m R^3 = 0$$

$$R_0 = \left(\frac{\mu_m}{\mu_r}\right)^{1/3} R$$

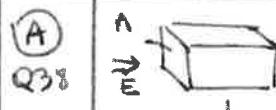
avec $\mu_r = 2000 \text{ kg m}^{-3} \Rightarrow R_0 = 0,47m$.

Q37 pour les grottes : $\Delta\mu = -\mu_m$ est négatif, et les hauteurs sont différentes.

Il faut superposer l'effet de la plaque.



I Prospection électrique des sols.



$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Q39 courant alternatif pour ne pas accumuler de charges aux électrodes. Bonne fréquence pour laisser le régime transitoire s'terminer et avoir une mesure ≈ en régime continu

Q40 Si on ne considère que l'électrode A, le courant se répartit de manière "isotrope" dans le sol.

$$\vec{J} = f(r) \hat{e}_r \text{ et } I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 2\pi r^2 f(r)$$

(flux à travers la $1/2$ sphère)

Q41 $\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \rho \cdot \frac{I}{2\pi r} \hat{e}_r$

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho I}{2\pi r} \Rightarrow V = +\frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (V \rightarrow 0 \text{ when } r \rightarrow \infty)$$

Q42 On superpose les 2 potentiels créés par A et B

$$\Rightarrow V = +\frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad \begin{matrix} + \\ \downarrow \\ \vec{I} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ - \\ -I \end{matrix}$$

Les équipotentielles vérifient $V(r) = \text{ste}$

Q43 $V_M - V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left(-\frac{1}{r_M} + \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_B} \right) f$

on peut donc avoir ρ à partir de ΔV

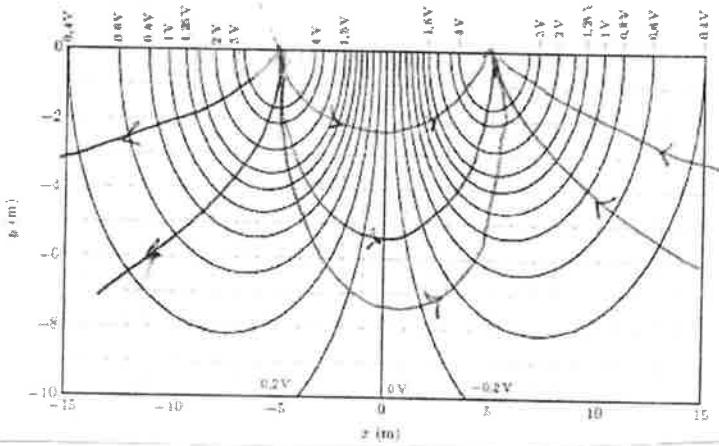
Q44 sur la configuration de Wenner

$$\Delta V = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \right) = +\frac{\rho I}{2\pi e}$$

donc $\rho = +\frac{2\pi e}{I} \Delta V$ et $f = \frac{1}{e}$

Q45 on a $3l = 10 \text{ m} \Rightarrow f = \frac{1}{l} = 0,3 \text{ m}^{-1}$ /6
 on peut lire $V(0) \approx V(-N)$ en $\frac{l}{2} = 1,67 \text{ m}$
 $\Rightarrow \Delta V = 1,2 \times 2 = 2,4 \text{ V}$
 D'où $f = \frac{2\pi \Delta V}{I_p} = 0,30 \text{ m}^{-1}$ c'est bien cohérent.

Q46 les lignes de courant sont les lignes de champ de E et sont + aux équipotentielles.



I - Température dans la couronne solaire

A

Q1 $E_p(z) = mg z \quad (m z=0 \quad m=m_0 \dots)$
 on en déduit $H = \frac{k_B T}{mg}$

Q2 $m = \frac{m_p + m_e}{2} \approx m_p/2$

Q3 $\exp\left(-\frac{R_s}{H}\right) = 10^{-3} \Rightarrow H = \frac{R_s}{3 \ln 10} \approx 10^8 \text{ m}.$
 on peut alors évaluer $T = \frac{mgH}{k_B} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ K}$

Q4. on utilise le th. de Gauss.

→ symétrique + attention au signe

$$\Rightarrow 4\pi r^2 g(r) = + 4\pi G \cdot M_s = 4\pi R_s^2 g_s$$

$$\Rightarrow g(r) = g_s \frac{R_s^2}{r^2}$$

Q5. pour un O.P., on a $P = m_2 k_B T$

on corrige l'hypothèse $T = \text{cte}$, mais cette fois g dépend de r .

$$\frac{dP}{dr} = - m \cdot g_s \frac{R_s^2}{r^2} \cdot \frac{P}{k_B T} \quad (\text{car } P = m \cdot n)$$

on intègre entre R_s et r , en séparant les variables:

$$\ln\left(\frac{P(r)}{P(R_s)}\right) = \ln\left(\frac{n_2(r)}{n'_0}\right) = + \frac{m g_s R_s^2}{k_B T} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right)$$

Q6. on peut tracer

$$y = \ln(n_2) \text{ en fonction de } x = \frac{R_s}{r} \text{ et vérifier que}$$

l'on a une droite : $\underbrace{\ln n_2}_y = \underbrace{\ln n'_0}_y - \frac{m g_s R_s}{k_B T} + \frac{m g_s R_s}{k_B T} \times \frac{R_s}{r}$

on utilise le tableau de la calculatrice, et on

trouve une droite de pente $10,38$
 c'est cohérent.

On peut encore estimer T :

$$T = \frac{m g_s R_s}{k_B \times 10,38} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ K}$$

(2)

Q.7 il faut $h\nu = \frac{hc}{\lambda} > E_1 \Rightarrow \lambda < \frac{hc}{E_1} = 3,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$
ce sont des rayons X.

Q.8 $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ (Théorème d'équipartition

Q.9 formule valable pour l'ion et l'électron
de l'énergie)

Il faut donc $3k_B T > E_1 \quad T > \frac{E_1}{3k_B} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ K}$

Q.10 on considère que le plus émissif correspond à la fraction massive la plus élevée

sont pour Fe XII : $\log T_{\max} = 6,2 \quad T = 1,6 \cdot 10^6 \text{ K}$

Fe XV $\log T_{\max} = 6,35 \quad T = 2,2 \cdot 10^6 \text{ K}$

sur les images, Fe XV semble plus "éblouissant",
donc fraction massive de Fe XV doit être supérieure
à celle de Fe XII $\rightarrow T_7 = 10^{6,65} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ K}$

Q.11 prendre diverses longueurs d'onde permet
d'explorer des gammes plus larges de température

Q.12 l'hydrogène est totalement ionisé à ces températures.

(C)

Q.13 Il s'agit de l'effet Doppler.

Q.14 $(v - v_0)^2 = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \Rightarrow \Delta v = \frac{v_0}{c} \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{u})^2}$

Q.15 $\langle v^2 \rangle = \frac{2}{m_{Fe}} \langle E_c \rangle = \frac{3 k_B T}{m_{Fe}}$

Q.16 $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x$ par exemple .. $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ car isotrope
 $\Rightarrow \langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle = \frac{k_B T}{m_{Fe}}$

Q.17 D'où $\Delta v = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m_{Fe}}}$

$\lambda = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = - \frac{dv}{v} \Rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{v_0} = \left(\frac{k_B T}{c^2 m_{Fe}} \right)^{1/2} = \left(\frac{R T}{c M_{Fe}} \right)^{1/2}$

Q.18 raie verte de Fe XIV : $T_2 \frac{c^2 m_{Fe}}{k_B} \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \right)^2$

$$= \frac{c^2 M_{Fe}}{R} \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \right)^2 = 1,9 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Q.19 Fe XIV max à $\log T = 6,3 \rightarrow T = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$ cohérent.

II

Densité volumique d'électrons dans la couenne

A

$$Q20 \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{c} ; \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 ; \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 ; \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$Q20 \quad \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_z \quad \text{amplitude}$$

$$Q22 \quad I = \langle \vec{\pi} \cdot \vec{u}_z \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

B

$$Q23 \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{\omega} \wedge \vec{B}) \quad \text{le terme en } \vec{\omega} \wedge \vec{B} \text{ est négligeable devant } \vec{E} \text{ si } \frac{v}{c} \ll 1$$

$$\text{avec } \langle v^2 \rangle = 3 \frac{h \nu_0 T}{m_e} \Rightarrow v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 8,2 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

$$\frac{v_{qm}}{c} \approx 2,7 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad \text{l'approximation est valide.}$$

Q24
 il faut que l'amplitude du mouvement de l'électron soit faible devant le longueur d'onde de l'onde E.H.
 Avec une hypothèse harmonique:

$$\text{amplitude} \approx \frac{v}{\omega} \approx \frac{v}{2\pi\nu} \approx \frac{v}{2\pi c} \lambda \quad \frac{v}{2\pi c} \ll 1 \quad \text{OK.}$$

$$Q25 \quad \sigma = \frac{\langle P \rangle \leftarrow w}{I \leftarrow W \cdot m^{-2}} \quad \sigma \text{ est en } m^2.$$

$$\sigma = \frac{e^2 a^2}{G \pi \epsilon_0 c^3 I} \frac{1}{2} \quad \text{avec par ailleurs le P.F.D sur l'el.} \Rightarrow \\ m_e \cdot a_0 = e \cdot E_0 \quad \text{et } \langle a^2 \rangle = \frac{a_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \frac{e^4 E_0^2}{G \pi \epsilon_0 c^3 m_e^2} \times \frac{2}{\epsilon_0 c E_0} = \frac{e^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2}$$

$$\text{A.N } \sigma = 6,6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 \quad \text{ouf !}$$

C

on fait un bilan de puissance sur le volume grisé:

$$Q26 \quad S I(z+dz) - S I(z) + \underbrace{m_e(z) \times S \times dz \times \sigma \cdot I(z)}_{\text{sort sur les côtés}}$$

$$\text{d'où l'éq. diff} \quad \frac{dI}{dz} = - m_e(z) \cdot I(z) \sigma$$

$$\Rightarrow \ln \frac{I(z)}{I(0)} = - \sigma \int_0^z m_e(z) dz \quad \text{en séparant les variables.}$$

$$I(z) = I(0) \exp(-\sigma N)$$

$$Q27 \quad I(z) = I(0) (1 - \sigma N) \Rightarrow f = -\frac{I(z) - I(0)}{I(0)} = +\sigma N$$

Q28 $N = \bar{n}_e \times 0,6 R_S$ d'où $\bar{n}_e = \frac{1}{50,6 R_S} = 3,6 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$
 (vaut $3,6 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$)

III Rayonnement radio de la couronne solaire

A) Q29 cf cours → notation complexe à définir... ?

Q30 Equations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\vec{J} = -n_e e \vec{v} \text{ et } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

Avec une notation en $\exp(i(\omega t - k_z z)) \Rightarrow \vec{v} = \frac{-e \vec{E}}{m i \omega}$
 et $\vec{J} = \frac{n_e e^2}{m i \omega} \vec{E}$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad -i \vec{k} \times \vec{B} = \mu_0 (\epsilon + i \epsilon_0 \omega) \vec{E}$$

soit $-i \vec{k} \times \left(\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0 \left(\frac{n_e e^2}{m i \omega} + i \epsilon_0 \omega \right) \vec{E}$
 $i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \mu_0 \left(\frac{n_e e^2}{m i \omega} + i \epsilon_0 \omega \right) \vec{E}$

soit $k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2 - \frac{1}{c^2} \times \underbrace{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}}_{w_p^2}$ $k^2 = \frac{\omega^2 - w_p^2}{2}$

Q31 il y aura propagation si $k^2 > 0$ soit $\omega > w_p$
 si $\omega < w_p$, on aura une onde évanescante.

B)

Q32 $\rho = [n_0 - n_e(z, t)] e$

Q33 $\vec{J} = -n_e(z, t) e \vec{v}_e + \vec{0}$

conservation de la charge: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$

$$\Rightarrow -e \frac{\partial n_e}{\partial t} + (-e) \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 \quad (1)$$

Q34 $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_0) \quad (2)$

Q35 P.F.D.: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} \quad (3)$

Q36 Avec les notations complexes:

$$(2) \Rightarrow -ik E_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} N. \quad (3) \Rightarrow im \omega V = -e E_0$$

En revanche il faut linéariser (1)

(5)

$$n_e \cdot V_0 \approx n_{0e} \cdot V_0$$

$$(1) \text{ devient } i\omega N - ik n_0 V = 0 \Rightarrow N = \frac{k}{\omega} n_0 V$$

$$\text{d'où } E_0 = \frac{e}{ik\epsilon_0} N = \frac{e}{i\omega\epsilon_0} n_0 V = -\frac{e^2 n_0}{\omega^2 m \epsilon_0} E_0$$

$$\text{donc soit } E_0 = 0$$

$$\text{soit } \omega^L = \frac{mc^2}{m\epsilon_0} = \omega_p^2$$

Q37 $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mc^2}{m\epsilon_0}} = 9,0 \cdot 10^7 \text{ Hz} \approx 90 \text{ MHz}$

Q38 ce rayonnement traverse l'espace interplanétaire; pour traverser l'atm. terrestre il faut être au delà de la fréquence plasma de la ionosphère. Cette fréquence est de l'ordre de la modulation de fréquence qui permet de communiquer avec des satellites (radio, TV...) donc le rayon traverse l'atmosphère.

Q39 $f_{p1} = 120 \text{ MHz}$ } on calcule n_1 et n_2 puis r_1 et r_2 :
 $f_{p2} = 75 \text{ MHz}$

$$n_i = \frac{4\pi^2 f_{pi}^2 m \epsilon_0}{e^2} = N_1 \exp\left(\frac{eR_s}{r_i}\right)$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{eR_s}{\ln\left(\frac{4\pi^2 f_{p2}^2 m \epsilon_0}{e^2 N_1}\right)} = \frac{6,96 \cdot 10^3}{\ln\left(f_{p2}^2 \times 3,1 \cdot 10^{-13}\right)} \Rightarrow r_2 = 9,32 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$v \approx \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} \approx 1,0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} : \text{ les particules sont relativistes}$$

IV - Prolongement de la couonne dans l'espace 1...

Q40 $\lambda_0 = 9 \cdot 10^3 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-1}$ à comparer à ≈ 100 pour un métal
c'est donc un bon conducteur.

Q41 loi de Fourier $\vec{J} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$

Q42 on se place en régime permanent \Rightarrow
conservation du flux: $4\pi r^2 f(r) = \text{cte} = \phi$
 $-4\pi \lambda r^2 \frac{dT}{dr} = \phi$

$$\lambda(T) \frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi} \frac{1}{r^2} \Rightarrow \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} dT = -\frac{\phi}{4\pi} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} \lambda_0 \frac{1}{T_0^{5/2}} \left[T^{7/2} - T_0^{7/2} \right] = + \frac{\phi}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\text{soit encore: } T(r) = T_0 \left(1 + \underbrace{\frac{\phi}{\frac{2}{7} \lambda_0 T_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}_{K}\right)^{2/7} \quad 16$$

Q43 si $r \rightarrow +\infty$ $\frac{T(r)}{T_0} \rightarrow 0$ donc $1 - \frac{K}{r_0} = 0$

$$\text{et finalement } T(r) = T_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/7}$$

(B)

$$T(r_p) \approx T_0 \left(\frac{1,2}{3,6}\right)^{2/7} \approx 0,55 \cdot T_0 \approx 5,5 \cdot 10^5 \text{ K}$$

le boudier thermique n'est pas suffisant!

Q45 on utilise la 3^e loi de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1 \text{ an}^2}{r_p^3} \quad \text{avec } a = \frac{r_p + r_a}{2} = 0,388 \text{ u.a}$$

$$T = 1 \text{ an} \times (0,388)^{3/2} = 0,24 \text{ an} = 88 \text{ jours.}$$

Q46 conservation de l'énergie:

$$E = -\frac{GM_S m}{r_a + r_p} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GM_S m}{r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{GM_S}{r_p(r_a+r_p)}}^{1/2}$$

$$\text{A.N: } v_p = 4,2 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$$

Q47

$$r_a = \frac{r}{1-e} \quad r_p = \frac{r}{1+e} \Rightarrow \frac{1+e}{1-e} = \frac{r_a}{r_p} \Rightarrow e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0,88$$

$$\text{et on en déduit } p = r_p(1+e) = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p} = 8,65 \cdot 10^{-2} \text{ u.a.} \\ = 1,23 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Q48 θ va varier entre $-\theta_{10}$ et $+\theta_{10}$ avec $r_{10} = \frac{r}{1+e \cos \theta_{10}}$

$$\Rightarrow \theta_{10} = \arccos\left(\frac{1}{e}\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\right) = 0,24 \text{ rad}$$

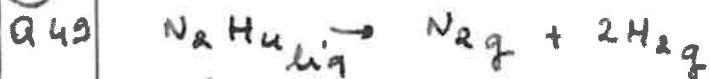
La loi des aires donne $r^2 \dot{\theta} = v_p r_p$; l'ici $r \approx r_p \approx r_{10}$

$$\Rightarrow \dot{\theta} \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{v_p}{r_p} \quad (\text{on apprécie l'ellipse à un cercle de rayon } r_p)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{r_p}{v_p} \cdot 2\theta_{10} = 7,6 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 21 \text{ h.}$$

I Correction de l'ajoutoire

(A)

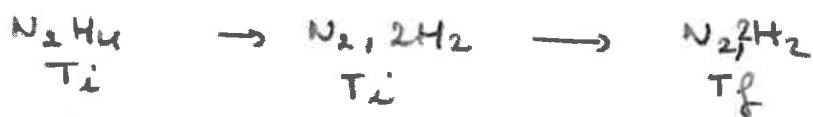


on forme du gaz qui sera ensuite accéléré

Q50 le catalyseur modifie le mécanisme cinétique. Il n'est pas consommé et n'intervient pas dans l'équation bilan.

Q51 $\Delta_f H = -\Delta_f H^\circ(\text{N}_2\text{H}_4) < 0$ la réaction est donc exoth.

Q52 schéma fictif :



$\Delta H = Q = 0$ car adiabatique monodare

$$\Delta H = -\Delta_f H^\circ(\text{Ti}) + (2C_p\text{H}_2 + C_p\text{N}_2)(T_f - T_i) = 0$$

$$\Rightarrow T_f - T_i = \frac{\Delta_f H^\circ(\text{Ti})}{2C_p\text{H}_2 + C_p\text{N}_2} = 584 \text{ K}$$

Q53 $C_p\text{N}_2, C_p\text{H}_2, \Delta_f H^\circ$ sont en réalité fonction de T.
l'hypothèse adiabatique est forte

(B)

Q54 NH_3 en excès déplace l'équilibre vers la droite
($T \downarrow \Delta G = RT \ln \frac{n}{n_0} \downarrow$)

Q55 $x = [\text{NH}_2\text{Cl}]$. Avec une réaction d'ordre 1 :

$$v = k x \approx k' x \text{ car } [\text{NH}_3] \text{ est } \approx \text{constant}$$

$$\frac{dx}{dt} = -k' x \Rightarrow \ln x = \ln x_0 - k't$$

on trace $\ln x$ en fonction de t à la calculatrice
on obtient une droite de pente $-7,15 \cdot 10^{-3} \text{ mn}^{-1}$ → VALIDE

t	0	10	20	30	50	70	90
$\ln x$	-6,21	-6,29	-6,36	-6,43	-6,57	-6,72	-6,86

Q56 $k' = +6,21 \text{ s}^{-1}$ donc $k = 7,15 \cdot 10^{-3} \text{ mn}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ L}$.

Q57 on refait l'expérience à une température différente puis $\frac{k_1}{k_2} = \exp \left[\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right]$

$$Q58 \text{ le temps } t_{1/2} \text{ vérifie } x = \frac{x_0}{2} \Rightarrow e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$k_{N_2} = \frac{\ln 2}{t_{\text{half}}} = \frac{\ln 2}{t \cdot [NH_3]}$$

$$\text{at } k(100) = k(27,3) \times \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{300,45} - \frac{1}{403,15}\right)\right)$$

$$= 19,54 \text{ L mol}^{-1} \text{ min}^{-1}$$

$$t_{1/2} \approx 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ min} = 0.12 \text{ s}$$

Q59 Si $[OH^-] \uparrow$ $pH \uparrow$ $k_2 \cdot 10^{pH} \uparrow$ la vitesse globale \uparrow
 c'est donc possible.

6

Q65 on trace l'assurance au msc. d'absorption

Q61 figure 8 droite : vérification de la loi de Beer-Lambert

$$A = \epsilon \times l \times c$$

↓ ↓ → conc enazine (mol.l⁻¹)

coefficients longueur ave (cm)

d'extinction molaire

L.mol⁻¹.cm⁻¹

Q62 A la pipette on relève 1 mL de solution à diluer, on le met dans une flûte sangée de 100 mL et on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait

Q63 les 20' permettent d'attendre que la réaction soit faite.

$$Q64 \quad S_0 = \frac{S_{\text{pure}}}{2 \cdot 10^5} \quad \text{et} \quad S_{\text{pure}} = \frac{e}{M} = \frac{d \cdot P_{\text{cav}}}{M} = 3,14 \cdot 10^4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

= 31,4 mol \cdot L^{-1}

\hookrightarrow en filtre

for the measure:

$$A_1 = 0,2 \Rightarrow C = 15,8 \mu\text{mol.L}^{-1} \quad (\text{du sur la droite})$$

= $\text{calculé avec l'éq. 1}$

$$\text{Or } C = \frac{5}{50} \times S_0 \quad (\text{5 mL dans 50 mL de fiole jauge})$$

$$\Rightarrow S_0 = 10 \text{ c} \quad \Delta_{\text{pure}} = 2 \cdot 10^6 \times c = 310 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

les deux valeurs sont proches.

I - généralitésA - le 4ème dipôle

$$1) \boxed{1} u = Ri \quad \boxed{2} q = C u \quad \boxed{3} \phi = L i$$

$$2) \boxed{4} i = \frac{dq}{dt}$$

$$\vec{\nabla}_A \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint \vec{\nabla}_A \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\phi \vec{E} \cdot d\vec{e}}_{\leftarrow \text{en convention générateur}} = - \frac{d\phi}{dt}$$

donc en convention récepteur $u = \frac{d\phi}{dt}$ (relation 5)

3) en écriture différentielle

$$\boxed{1} dq = C du \quad \boxed{2} du = R di \quad \boxed{3} d\phi = L di$$

$$\boxed{4} dq = i dt \quad \boxed{5} d\phi = u dt$$

$$4) \text{relation supplémentaire } d\phi = M dq \Leftrightarrow \frac{u}{i} dq \quad (\text{avec 4 et 5})$$

$\Rightarrow M$ est en Ω , comme une résistance

5) en série : traversés par le même i : donc même dq

$$\Rightarrow d\phi_1 = M_1 dq \quad d\phi_2 = M_2 dq$$

$$\underbrace{d\phi_1 + d\phi_2}_{d\phi_{\text{tot}}} = (M_1 + M_2) dq \quad \text{les } M \text{ s'ajoutent}$$

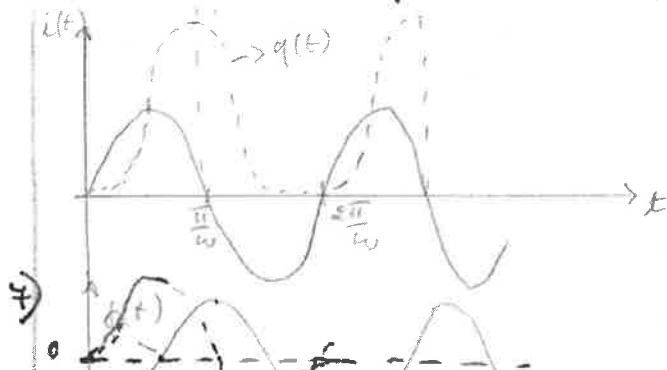
en parallèle : on peut supposer que le u est le même, donc $d\phi = u dt$ aussi.

$$dq = dq_1 + dq_2 = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) d\phi \rightarrow \text{les } \frac{1}{M} \text{ s'ajoutent}$$

$$6) i(t) = i_0 \sin \omega t$$

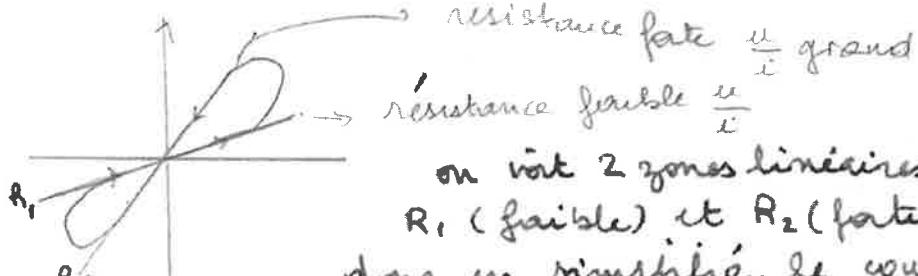
$$\frac{dq}{dt} = i \Rightarrow q(t) = -\frac{i_0}{\omega} \cos \omega t + cte$$

$$\text{avec } q(0) = 0 \Rightarrow q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$



$u = \frac{d\phi}{dt}$: nul aux extrêmes de ϕ

8)



12

on voit 2 zones linéaires de pente R_1 (faible) et R_2 (forte) ...
donc, en simplifié, le courant passe (R_1)
ou ne passe pas (R_2)

- ⑨ on a un phénomène d'hystéresis - R dépend du sens de variation de i ($i \uparrow : R_1$, $i \downarrow : R_2$) - L'état du memristor peut correspondre à 1 ou 0 ...
- ⑩ l'état du memristor reste le même tant qu'on ne fait pas une variation d'intensité importante.

B. Conductivité

11) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q \vec{E}_0}{m}$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{q \vec{E}_0 \tau}{m} + \vec{A} e^{-t/\tau}$$

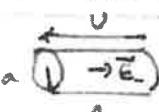
En régime permanent $\vec{v} = \frac{q \tau}{m} \vec{E}_0$

↳ valable au bout de quelques 10^{-12} s : non contraint

12) mobilité $\mu = \frac{q \tau}{m}$

$$\vec{J}_0 = nq \vec{v} = \frac{nq^2 \tau}{m} \vec{E}_0 \Rightarrow \tau_0 = \frac{nq^2 \tau}{m}$$

on retrouve la loi d'Ohm locale

13)  $U = E_0 l ; I = \frac{U}{R} = \frac{E_0}{R} l$
 $\tau_0 = \tau_0 E_0 \Rightarrow I = \frac{\tau_0}{l} \frac{\pi r^2}{m} U \Rightarrow R_0 = \frac{1}{\tau_0} \frac{l}{\pi r^2}$

- 14) le temps de réponse est de quelques 10^{-12} s : on peut dire que si "suit" parfaitement i , qui varie bien plus lentement ...

- 15) En régime sinusoïdal forcé, on peut écrire

$$\vec{v} (i \omega t + \frac{m}{\tau}) = q \vec{E}_{1m} e^{i \omega t}$$

$$\vec{v} = \frac{q \tau}{m} \vec{E}_{1m} e^{i \omega t}$$

on aura une expression complexe pour μ ... le calcul

$$\text{conduit à } \underline{Z} = \frac{1}{\tau_0} \frac{l}{\pi r^2} (1 + i \omega \tau) = R_0 (1 + i \omega \tau)$$

on retrouve R_0 à branche basse fréquence E_{1m} / U et τ_0 à

$$16) \quad P = q \vec{E}_0 \cdot \vec{v} \underset{\text{apport}}{\Rightarrow} P_v = n \cdot P_i = n q v \vec{E}_0 = \vec{j}_0 \cdot \vec{E}_0 \quad (3)$$

$$17) \quad \text{Sur le conducteur total: } p = P_v \cdot \pi a^2 l = (\underbrace{j \cdot \pi a^2}_i) \times \underbrace{E_0 l}_u$$

on retrouve bien $p = u \cdot i$

$$18) \quad \text{pour un memristor } u = M i \quad (M = H_1 \text{ ou } H_2)$$

$$\Rightarrow p = M i^2$$

II - le memristor des HP labo

$$19) \quad R_{mem} = R_{on} \frac{z_0}{l} + R_{off} \left(\frac{l-z_0}{l} \right) \quad (\text{résistances en série, proportionnelles à la longueur})$$

$$20) \quad \vec{v} = \mu \vec{E}_0 \text{ décroit} \quad \vec{v} \leftrightarrow \frac{dz}{dt}$$

$$E_0 \leftrightarrow \frac{u}{l} \leftrightarrow \frac{R_{on} i}{l}$$

$$21) \quad \frac{dz}{dt} = \mu \frac{R_{on}}{l} \cdot \frac{da}{dt} \Rightarrow z(t) - z_0 = \mu \frac{R_{on}}{l} q(t) \quad (\text{on intègre entre t=0 et t})$$

- état le plus conducteur possible $\Rightarrow z = l$

- cas le plus défavorable: $z_0 = 0$

$$\text{donc } Q_{min} = \frac{l^2}{\mu R_{on}}$$

$$22) \quad R_{mem} = R_{off} + \frac{z}{l} (R_{on} - R_{off})$$

$$R_{mem_0} = R_{off} + \frac{z_0}{l} (R_{on} - R_{off})$$

$$\Rightarrow R_{mem} = R_{mem_0} + \frac{z(t) - z_0}{l} (R_{on} - R_{off})$$

$$\downarrow \quad = R_{mem_0} + \frac{\mu R_{on}}{l^2} (R_{on} - R_{off}) q(t)$$

$$\Rightarrow M(q) = R_{mem_0} + (R_{on} - R_{off}) \frac{q(t)}{Q_{min}}$$

Plus l est petit, plus Q_{min} est petit, donc on pourra passer plus vite de $R_{off} \rightarrow R_{on} \rightarrow$ temps de réponse plus faible...

$$23) \quad i(t) = i_0 \sin(\omega t) \Rightarrow q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (\text{déjà vu})$$

$$u(t) = M(q) \cdot i(t) = R_{off} \left(1 - \frac{i_0}{\omega Q_{min}} (1 - \cos \omega t) \right) i_0 \sin(\omega t)$$

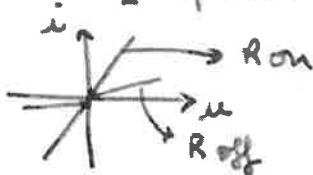
$$\uparrow \\ R_{mem_0} = R_{off} \text{ et } R_{on} - R_{off} \approx R_{off}$$

$$u(t) = R_{off} i_0 \sin(\omega t) \left[1 - \frac{i_0}{Q_{min}} (1 - \cos \omega t) \right]$$

24 on a $i = f(u)$ au lieu de $u = f(i)$.

L'allure est ressemblante :

- zone de transition plus étroite
- pente différente pour $u < 0$ et $u > 0$ pour R_{off}



- le sens de parcours n'est pas le même ?

$$\begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ u \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} u \\ \uparrow \\ i \end{array}$$

III Une falaise de potentiel

25 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$ ($i\hbar \frac{d\psi}{dx} = E\psi$)

26 Dans le milieu 1 : $V(x) = 0 \Rightarrow \psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$
avec $k_1 = \sqrt{\frac{2me}{\hbar^2}}$

Dans le milieu 2 $V(x) = -V_0$

$$\psi_2(x) = A' e^{ik_2 x} \quad (\text{pas de propagation depuis } +\infty)$$

avec $k_2 = \sqrt{\frac{2me(E+V_0)}{\hbar^2}}$

27 $B = nA$; $A' = kA$

Rekt $\psi'(x)$ sont continues en $x=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad n = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$$

$$\begin{aligned} R(1+n) &= A k \\ R k_1 (1-n) &= A' k_2 n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 \quad \vec{F}_{in} &= |A_1|^2 t_k \vec{k}_1 \\ &= |A_1|^2 t_k \frac{\vec{k}_1}{m} \\ \vec{F}_{ref} &= (B_1)^2 t_k \frac{\vec{k}_1}{m} \\ &= (A')^2 t_k \frac{\vec{k}_2}{m} \\ \vec{F}_t &= (A')^2 t_k \frac{\vec{k}_2}{m} \\ &= k^2 A^2 t_k \frac{\vec{k}_2}{m}. \end{aligned}$$

$$R = \frac{\|\vec{F}_{in}\|}{\|\vec{F}_{in}\|} = n^2 \quad T = \frac{\|\vec{F}_t\|}{\|\vec{F}_{in}\|} = t_k^2 \frac{k_2}{k_1} = \frac{4 \log k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1+\alpha}}{1 + \sqrt{1+\alpha}} \right)^2 \quad \text{avec } \alpha = \frac{V_0}{E}$$

$$T = \frac{4 \sqrt{E} \sqrt{E+V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0})^2} = \frac{4 \sqrt{1+\alpha}}{(1+\sqrt{1+\alpha})^2}$$

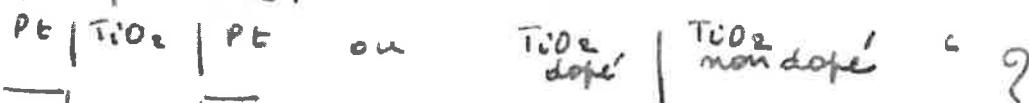
avec $\alpha = 3 \quad R = 0,25 \quad T = 0,75$

plus α est grand : $R \rightarrow 1$, $T \rightarrow 0$

symétrique
non échange
(1) et (2).

↓
le sens de parcours
importe peu.

29 Texte pas clair :



MP 2020 - 7/11/2020 - Q2 - Loi de Wiedemann-Franz

I - Détermination expérimentale de la conductivité du Cu.

1- Pour avoir la plus grande précision, ou la meilleure résolution, il faut se placer sur le plus petit calibre, soit 500Ω .

On aura une incertitude élargie $\Delta R = \frac{0,3}{100} \times 0,1 + 3 \times 0,1$

$$\Delta R \approx 0,3 \Omega \approx 3R.$$

Ce n'est pas acceptable !

2- le montage 1 (longue dérivation) donne

$$\frac{V_1}{I_1} = R_1 = R + R_A \Rightarrow E_1 = \frac{R_A}{R} \quad E_1 \downarrow \text{si } R \uparrow$$

le montage 2 (courte dérivation) donne $\frac{V_2}{I_2} = \frac{RR_V}{R+R_V}$

$$E_2 = \left(R - \frac{R R_V}{R+R_V} \right) \frac{1}{R} = \frac{R}{R+R_V} \quad E_2 \uparrow \text{si } R \uparrow \quad \left(\frac{1}{E_2} = 1 + \frac{R_V}{R} \right)$$

donc pour les grandes résistances, le montage 1 convient
pour les petites résistances le montage 2 convient

$$3- R_i = \frac{287,5 \cdot 10^{-3}}{5,23} = 5 \cdot 10^{-2} \Omega$$

L'erreur systématique est $\frac{0,05}{0,05 + 11 \cdot 10^6} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{\text{très faible}}$

Il reste l'erreur sur V et sur I

$$\Delta V = \frac{0,3}{100} \times 287,5 + 2 \times 0,1 \text{ (mV)} = 0,8 \text{ mV} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{0,8}{287,5}$$

$$\Delta I = \frac{1}{100} \times 5,23 + 3 \times 0,01 \text{ (A)} = 0,08 \text{ A} \quad \frac{\Delta I}{I} = \frac{0,08}{5,23}$$

La propagation des incertitudes, donne

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} \approx \frac{\Delta I}{I} \quad \text{car } \frac{\Delta I}{I} \gg \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{8}{523} \quad \Delta R = \frac{8}{523} \times 5 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-4} \Omega$$

donc $R = 5 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3} \Omega$ (on n'a donné qu'un chiffre significatif à R : cet amondi évasé l'incertitude !! 😊)

La précision est clairement meilleure.

$$4- On sait que R = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} \Rightarrow \gamma = \frac{L}{R \cdot S} = \frac{10}{0,05 \times \pi \times 10^{-3} \times 2}$$

$$\gamma = \frac{10^7}{0,05 \pi} \approx \frac{20}{\pi} 10^7 \approx 6 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$$

2) Relation entre conductivités thermique et électrique

5) PFD sur $1e^-$, le poids échant négligé :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{m}{2} \vec{v} + \vec{f}_c$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{2} = \frac{\vec{f}_c}{m}$$

τ est le "temps de réponse" de l' e^- au champ \vec{E}, \vec{B}

En régime permanent, au bout de quelques τ ,

$$\vec{v} = \frac{\tau}{m} \vec{f}_c = \frac{\tau}{m} (-e) \vec{B}$$

$$\vec{f} = -me\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

6) Entre 2 collisionna, $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_c$ (seule force réelle appliquée)
 si il n'y a pas de choc $\frac{d\vec{p}_i}{dt} dt = \vec{f}_c dt$; si il y a choc :
 $m\vec{v}_i(t+dt) = \vec{v}_i(t) + \frac{\vec{f}_c}{m} dt$; on repart à \vec{p}_i^{+}

$$\vec{p}_i(t+dt) = \underbrace{(1 - \frac{dt}{\theta})}_{\text{moins de choc}} \times (\vec{p}_i^0 + \frac{\vec{f}_c}{m} dt) + \frac{dt}{\theta} \vec{p}_i^{+}$$

moins de choc

7) En moyennant $\vec{p}_i(t+dt) = (1 - \frac{dt}{\theta})(\vec{p}_i(t) + \frac{\vec{f}_c}{m} dt) + \frac{dt}{\theta} \vec{p}_i^{+}$
 $\Rightarrow \frac{\vec{p}_i(t+dt) - \vec{p}_i(t)}{dt} = \frac{\vec{f}_c}{m}(1 - \frac{dt}{\theta}) + \frac{1}{\theta}(\vec{p}_i^{+} - \vec{p}_i(t))$
 or en moyenne la direction de \vec{p}_i^{+} est aléatoire
 donc $\vec{p}_i^0 = \sum_i' \vec{p}_i^{0+} = \vec{0}$

Pas passage à la limite :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{\vec{p}_i}{\theta} = \frac{\vec{f}_c}{m}(t) \Rightarrow \boxed{\theta = \tau}$$

8) Pour qu'il n'y ait pas de choc entre 0 et $t+dt$
 il faut que n'y ait pas de choc de 0 à $t = \Pi(t)$
 } que n'y ait pas de choc entre t et $t+dt$:

$$\Rightarrow \Pi(t+dt) = \Pi(t) \times (1 - \frac{dt}{\theta})$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\Pi}{\theta} \Rightarrow \boxed{\Pi(t) = A e^{-t/\theta}}$$

\bar{A} est un facteur de normalisation :

$\bar{\Pi}(t) \times \frac{dt}{\theta} = \text{probabilité que le choc soit entre } t \text{ et } t+dt$

On doit avoir $\int_0^\infty \bar{\Pi}(t) \frac{dt}{\theta} = 1 \Rightarrow \bar{A} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = 1$

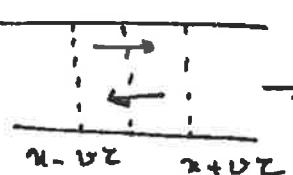
$$\bar{A} \times \frac{1}{\theta} \times [-\theta e^{-t/\theta}]_0^\infty = 1 \Rightarrow \bar{A} = 1$$

le temps moyen entre 2 collisions est

$$\begin{aligned} \langle t_{\text{moy}} \rangle &= \int_0^\infty t \bar{\Pi}(t) \frac{dt}{\theta} = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty t e^{-t/\theta} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \left[-t \theta e^{-t/\theta} \right]_0^\infty + \theta \int_0^\infty e^{-t/\theta} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \times (0 + \theta \times \theta) \Rightarrow \langle t_{\text{moy}} \rangle = \theta \end{aligned}$$

$\tau = \theta$ peut être interprété comme le temps moyen entre 2 chocs.

9)



on fait un bilan algébrique

de l'énergie qui traverse une section à l'abscisse x , pendant dt dans le sens \rightarrow : $\frac{1}{2} \times n \times (v dt) \times E_c(x-vz)$

dans le sens \leftarrow $\frac{1}{2} n (v dt) E_c(x+vz)$

Lors d'un choc E_c varie : on considère donc que les éruptions qui traversent, proviennent d'une zone telle qu'elles n'ont pas changé leur E_c , en moyenne.

finalement $f_Q = \frac{1}{2} n v (E_c(x-vz) - E_c(x+vz))$

10

$$E_c(x-vz) - E_c(x+vz) \approx -2vz \frac{dE_c}{dx} \quad \text{si } vz \ll L^*$$

L^* = longueur caractéristique des variations de E_c .

$$\text{Alors } f_Q = \frac{1}{2} n v \times (-2vz \times \frac{dE_c}{dx} \frac{dT}{dx})$$

$$= -n v^2 z C_v \frac{dT}{dx} \quad \text{avec } C_v = \frac{dE_c}{dT}$$

On peut donc relier ce à la loi de Fourier

$$f_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{avec } \lambda = n v^2 z C_v$$

- 11 Pour un CP unidimensionnel, le rapport d'équipartition de l'énergie donne $E_C(T) = -\frac{1}{2} k_B T$
 soit $C_V = \frac{1}{2} k_B$
 on obtient $\lambda = \frac{1}{2} m v^2 c k_B$
 et depuis v^2 représente la vitesse quadratique moyenne $E_k \approx \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k_B T}{m}$
 d'où $\lambda = m \frac{k_B^2 T}{2m} c$

12 on a alors $\frac{\lambda}{\delta T} = \frac{\frac{m k_B^2 T c}{2m} c}{\frac{m}{k_B T} \delta T} = \frac{k_B^2}{2c^2} \circlearrowleft = \frac{k_B^2}{2c^2}$

$\frac{\lambda}{\delta T}$ est donc une constante.

Dans le modèle tridimensionnel

* on peut considérer que la probabilité que les e^- aillent dans la bonne direction est de $\frac{1}{6}$
 $(\frac{v_x^2}{v^2})$

* $C_V = \frac{3}{2} k_B$

* $v^2 = \frac{3k_B T}{m}$ (mais $v_x^2 = \frac{k_B T}{m} \dots *$)

Donc $f_Q = \frac{1}{6} m v_x \times 2 v_z \times \frac{3}{2} k_B \cdot \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{2} m v^2 c k_B \frac{dT}{dx}$

puis $\lambda = \frac{1}{2} m \times \frac{3k_B T}{m} c k_B = \frac{3}{2} \frac{m}{m} k_B^2 T c$

d'où $\frac{\lambda}{\delta T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{c}\right)^2 = K_{\text{class}}$

(* soit on met $\frac{1}{6}$ et v^2 ; soit on laisse $\frac{1}{2} (\leftarrow, \rightarrow)$ et v_x^2)

- 13 Dans le modèle quantique $\lambda = \frac{1}{3} m v^2 c \times \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{2m v^2} \right)^2 k_B$
 avec $v = v_F$ (énoncé)

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2}{3} \frac{m}{m} c k_B^2 T \Rightarrow \frac{\lambda}{\delta T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3} \frac{c}{c^2} = K_{\text{quant.}}$$

14 $\frac{K_{\text{class}}}{K_{\text{quant}}} = \frac{\frac{3}{2} \frac{3}{\pi^2}}{\frac{\pi^2}{3}} = \frac{9}{2\pi^2} \approx 0,5$

Les énergies des électrons vont entre 0 et E_F

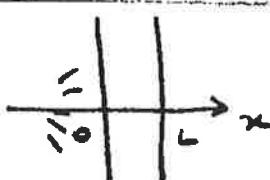
le facteur de Boltzmann est en $\exp(-\frac{E}{k_B T})$

On ne peut pas considérer que l'on a un continuum d'énergie (qui serait si $E/k_B T \ll 1$). \Rightarrow le modèle classique ne peut pas être bon.

III Determination expérimentale du λ du Cu.

- 15 mesure de ρ : on mesure la masse d'un morceau de cuivre et son volume (on le plongeant dans l'eau par exemple). Puis $\rho = \frac{m}{v}$
mesure de C_p : par une méthode calorimétrique.

16



cours $\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\rho c}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

17 $T(x,t) = f(x)g(t) \Rightarrow D \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} \quad \forall x, \forall t$
donc $\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{1}{D}$ (ϵ quelconque); le signe - vient du fait qu'on refait $e^{+t/\epsilon}$!
alors $f''(x) = -(\frac{1}{D}) f(x) \Rightarrow$ solutions en $\left\{ \cos \frac{x}{\sqrt{D}\epsilon} \right. \sin \frac{x}{\sqrt{D}\epsilon}$
Donc $T(x,t) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{D}\epsilon} + \epsilon\right) e^{-t/\epsilon}$

18: éq linéaire...
La plaque est isolée $\Rightarrow \begin{cases} g(x=0, t)=0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x=L, t)=0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(x=L, t)=0 \end{cases}$
or $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \sum_n e^{-d_m t} (-k_m u_m \sin(k_m x) + w_m k_m \cos(k_m x))$,
en $x=0 \Rightarrow \sum_n w_m k_m e^{-d_m t} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{w_m = 0}$
en $x=L \Rightarrow \sum_n e^{-d_m t} \times -k_m u_m \sin(k_m L) = 0 \quad \forall t$
 $\Rightarrow \sin(k_m L) = 0$ ou $u_m = 0 \Rightarrow$ solution nulle: non.
 $\Rightarrow \boxed{k_m = \frac{n\pi}{L}}$ et on doit avoir $\boxed{k_m^2 D = d_m}$
 $\Rightarrow \boxed{d_m = m^2 \frac{\pi^2 D}{L^2}}$

20 Pour trouver u_m on peut utiliser le formulaire

$$\int_0^L T(x, D) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \sum_m u_m \int_0^L \cos\frac{m\pi}{L}x \cos\frac{m\pi}{L}x dx$$

$$= u_m \frac{L}{2}$$

d'où $u_m \frac{L}{2} = \int_0^L \frac{\delta}{8} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{\pi L}{8 m \pi} \left[\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right]_0^\delta$

$$u_m = \frac{2}{\lambda} \frac{\Delta}{m\pi} \sin\left(m\pi \frac{\delta}{L}\right) \times \frac{T_L}{\delta}$$

$$u_m = \frac{2T \sin m\pi \frac{\delta}{L}}{m\pi \frac{\delta}{L}}$$

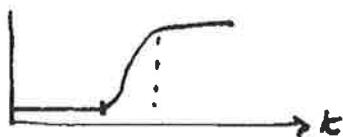
on obtient alors l'expression demandée.

21. $\cos(k_m L) = \cos(m\pi) = (-1)^m$ {
 si $\delta/L \ll \sin_c(m\pi \frac{\delta}{L}) \approx 1$ } $\Rightarrow T(L, t) = T(1 + 2 \sum_n^1 (-1)^n e^{i k_n t})$

22. $\xi(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ le calcul serait compliqué.

on peut dire $\alpha_1 t = 1/4$

23. Si on considère le modèle valide, on aurait



mais il y a des pertes et
 $T(L, t)$ se décline lentement
 après $T_{max} = 7 \text{ u.a.}$

$$T = 3,5 \text{ u.a. pour } t_{1/2} = 58 \text{ ms} - 68 \text{ ms} \approx 10 \text{ ms}$$

$$\text{donc } \alpha_1 = \frac{1,4}{10 \cdot 10^{-3}} \approx 1,4 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{or } \alpha_1 = \frac{\pi^2 D}{L} = \frac{\pi^2 \lambda}{L^2 \rho c} \Rightarrow \lambda = \frac{c \cdot \rho \cdot L^2 \alpha_1}{\pi^2}$$

$$\lambda = \frac{9 \cdot 10^3 \times 4 \cdot 10^2 \times (3,14 \cdot 10^{-3})^2}{\pi^2} \approx 1,4 \times 10^{-6} \text{ W/mK}$$

$$\lambda \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$$

24. on a $\lambda = 500 \quad \sigma = 6 \cdot 10^7 \quad T = 300 \text{ (u.a.)}$

$$\frac{\lambda}{\sigma T} = \frac{500}{6 \cdot 10^7 \times 300} = 2,8 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Or } \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{1,4 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \times 10^{-8}$$

$$\approx 2,5 \cdot 10^{-8}$$

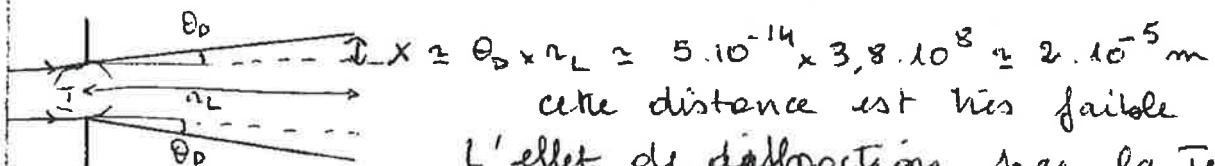
C'est bien compatible !

comme ça pour!

Mines MP 2020 - 41 - Au temps des Mayas.

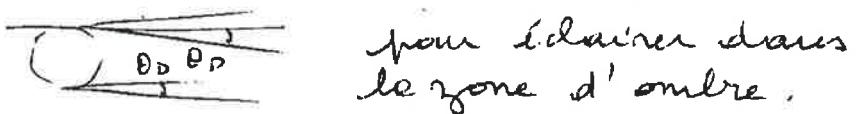
I - Couleur de la lune totalement éclipsée

- A)
- 1) la lune émerge de la zone d'ombre \Rightarrow entre 3 et 4.
 - 2) Pour une ouverture de diamètre d , l'angle d'Airy est $1,22 \frac{\lambda}{d}$; donc ici $\theta_d = 0,61 \frac{\lambda}{R_T}$
avec un λ moyen $\approx 0,55 \text{ nm}$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
 $\theta_d \approx \frac{0,61 \times 0,55 \cdot 10^{-9}}{6,37} \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ rad}$



cette distance est très faible
L'effet de diffraction par la Terre
est négligeable

Rq: question mal posée, $x \ll R_T$, et il faudrait plutôt dessiner



pour éclairer dans
la zone d'ombre.

B) Modèle d'atmosphère isotherme

3) loi de la statique des fluides: $\frac{dP}{dz} = -\rho_a g$
 $GP \Rightarrow PV = nRT \Rightarrow P = \rho_a \frac{RT}{M_a}$

d'où $\frac{d\rho_a}{dz} = -\frac{M_a g}{RT} \rho_a \Rightarrow \rho_a(z) = \rho_a(0) e^{-\frac{z}{H_c}}$

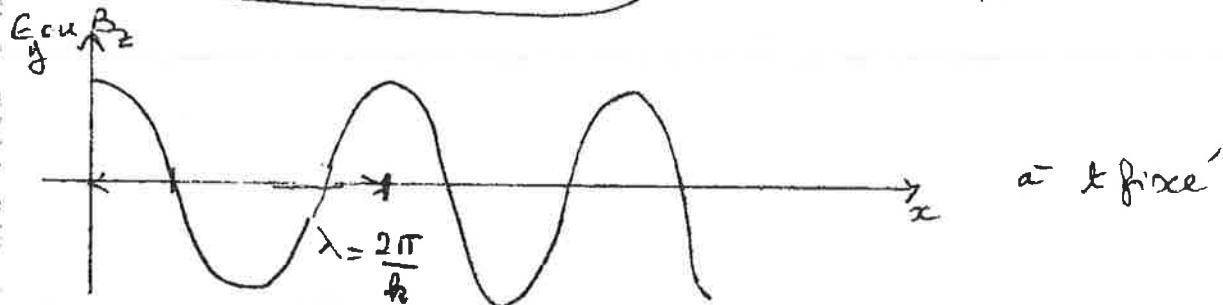
avec $H_c = \frac{RT}{M_a g}$

A.N.: $H_c = \frac{8,31 \times 293}{9,8 \times 29 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{8,3}{9,8} \cdot 10^4 \approx 8 \text{ km}$

4) on $z=0$ $P_0 = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow \rho_a(0) = \frac{M_a P(0)}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \times 10^5}{8,31 \times 293}$
soit $\rho_a(0) \approx \frac{10}{8} \approx 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$

en $z=8348 \text{ m}$ $P(z) \approx P(0) \left(\frac{z}{H_c}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times 1,2 \approx 0,4 \text{ kg.m}^{-3}$
le modèle n'est pas bon du tout car l'atmosphère n'est pas isotherme! (écart de $40 \text{ K} / 270 \text{ K}$)

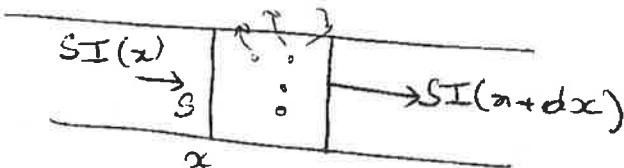
5) $\vec{E} = E_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$
 $\vec{B} = B_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ car
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{E}(x,t) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 soit $+k E_m \sin(\omega t - kx) = +\omega B_m \sin(\omega t - kx)$
 $B_m = \frac{k}{\omega} E_m = \frac{1}{c} E_m \quad (k = \frac{\omega}{c})$



6) $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_y \times \vec{e}_z$
 $|R| = I_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2$ (prendre la valeur moyenne)
 $\Rightarrow E_m = \sqrt{2\mu_0 c I_0} = \left(2 \times 10^{-6} \times 3 \cdot 10^8 \times 10^3 \right)^{1/2} = \sqrt{60 \cdot 10^4} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ V/m}$

D - Transfert du rayonnement solaire

7) $P_a(x) = \frac{M_a}{N_A} \times \eta_a(x)$ donc $\eta_a(x) = \frac{N_A}{M_a} P_a(x)$



1 particule diffuse $\eta_a I(x)$ - (même pour les poussières)
 Dans le volume on rencontre $(S dx) \eta_a(x)$ particules

d'où $I(x+dx) \xi = I(x) \xi - S dx (\eta_a(x) P_a + \eta_p(x) P_p)$

d'où $\frac{dI}{dx} = -\xi (\eta_a(x) P_a + \eta_p(x) P_p)$

par passage à la limite
 on sépare les variables

$$\frac{dI}{I} = (\eta_a(x) P_a + \eta_p(x) P_p) dx \xi$$

et on intègre de 0 à x

on obtient $\ln \frac{I(x)}{I(0)} = - \left(P_a \int_0^x n_a(s) ds - P_b \int_0^x n_p(s) ds \right)$

$d_0(x)$

E. Réfraction atmosphérique

10 Il y a réfraction car l'indice n n'est pas homogène

$$M. \quad \frac{n}{n_0} = \frac{R_T + z}{R_T + z_0} = \frac{1 + \frac{z}{R_T}}{1 + \frac{z_0}{R_T}} \approx 1 + \frac{(z - z_0)}{R_T} \text{ à l'ordre 1}$$

$$\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 - 1} \approx \sqrt{1 + 2\left(\frac{z}{R_T}\right)} - 1 \approx \sqrt{\frac{2z}{R_T}}$$

Par ailleurs: $dn = \frac{\epsilon \lambda}{P_a(0)} dz$ et $de(z) = P_a(0) e^{-\frac{z-z_0}{H_c}} dz$

avec $dz = du$ et $P_a(z_0) = P_a(0) e^{-z_0/H_c}$

D'où $dn = \frac{\epsilon \lambda}{P_a(z_0)} e^{-\frac{u}{H_c}} \times -\frac{1}{H_c} du$

11 On reporte

$$\Theta_d(z_0, \lambda) = 2d \int_{\frac{u=z_0}{H_c}}^{\frac{u=+\infty}{H_c}} \frac{\epsilon \lambda}{\sqrt{2R_T}} du \sqrt{\frac{R_T}{2u}} e^{-\frac{u}{H_c}}$$

$n=1: z \rightarrow \infty$
 $n=n_0: z = z_0$
 $u \rightarrow 0$

Soit donc $\Theta_d(z_0, \lambda) = \frac{\epsilon \lambda}{\sqrt{4H_c}} \sqrt{\frac{2R_T}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv \quad v = \frac{u}{H_c}; du = \frac{dv}{H_c}$

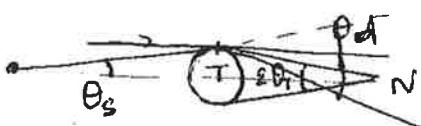
$$= \frac{\epsilon \lambda}{\sqrt{2R_T \pi}} \frac{P_a(z_0)}{P_a(0)}$$

s'écrit enfin $\Theta_d(z_0, \lambda) = \Theta_e(z_0) \text{ avec } \Theta_e(z_0) = \sqrt{\frac{2R_T \pi}{H_c}} e^{-\frac{z_0}{H_c}}$

$\Theta_e(z_0)$ est maximale pour $z_0 = 0$

13. $\delta \Theta_d = \Theta_e(z_0) \frac{d \Theta_e}{d \lambda} d\lambda = \Theta_e(z_0) \cdot \left(-\frac{2 \lambda c^2}{\lambda^3} \right) d\lambda$

(penser aux dérivées $\epsilon_\lambda(\lambda + d\lambda) - \epsilon_\lambda(\lambda) \approx d\lambda \frac{d \epsilon_\lambda}{d \lambda}$)



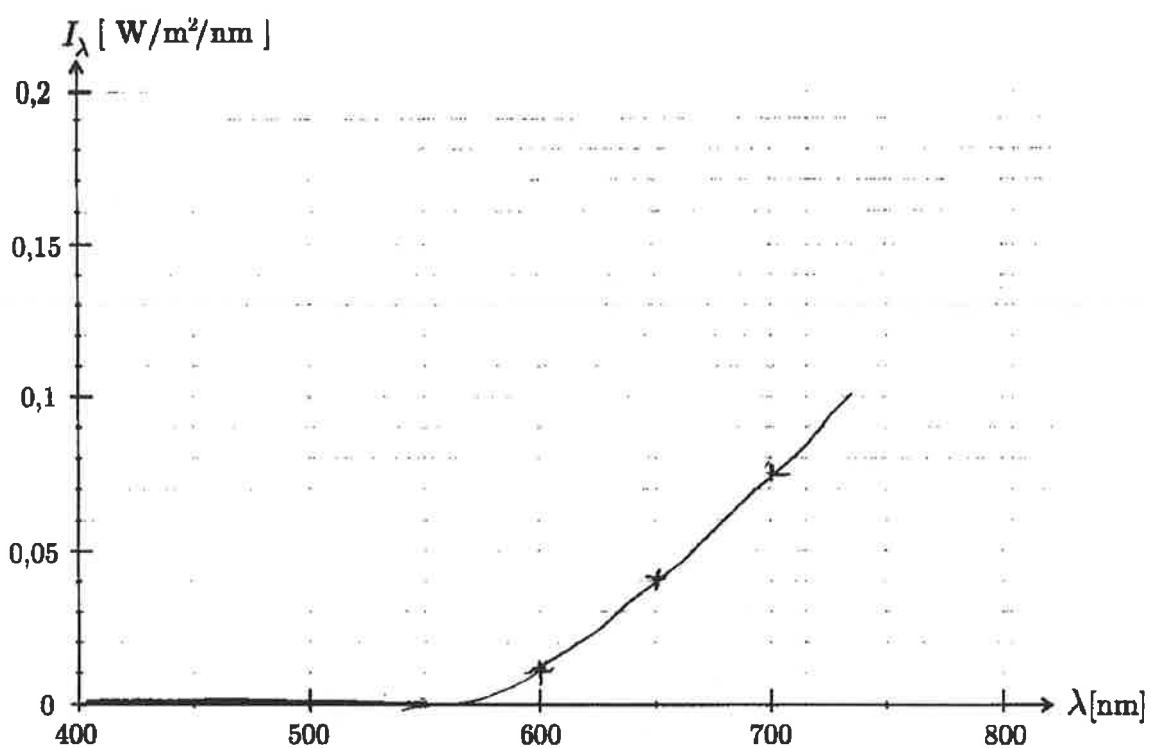
$$\Theta_d - \Theta_s \approx 54^\circ \approx \theta_r - \theta_f = 57'$$

le point N est "atteignable" par un moyen (même ordre de grandeur)

$$\Theta_d - \Theta_s = 70 - 16 = 54'$$

15

F - Precision du spectre



$$\begin{aligned}
 \text{Pour } 600 \text{ nm} &: 1,8 \times 0,006 \approx 10^{-2} \\
 650 \text{ nm} &: 1,6 \times 0,025 \approx 4 \cdot 10^{-2} \\
 700 \text{ nm} &: 1,4 \times 0,06 = 8,4 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

La lune paraît donc rouge.

II - Echo de la grande pyramide de Chichen Itza

4

A. Sonoogramme

16. On peut estimer $f_1 = 1500 \text{ Hz}$ et $f_2 = 3000 \text{ Hz}$
le pic 2 est à $-50 \text{ dB} \Rightarrow$

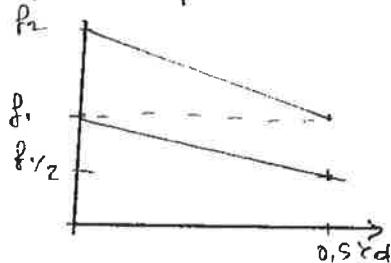
$$-50 = 20 \log \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = 10^{-2,5} = 3,16 \cdot 10^{-3}$$

donc $a_2 = 3,16 \cdot 10^{-3} \times 0,1 = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

17. Le théorème de Shannon impose $F_e > 2F_{\max}$
donc ici $F_e > 6 \text{ kHz}$.
Pour une résolution spectrale $\delta f = \frac{1}{T_0} = 100 \text{ Hz}$
 $\Rightarrow T_0 = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$.

18. Le spectre est calculé tous les multiples de T_a , sur les valeurs acquises entre $(n-1)T_a$ et nT_a . On a donc $\delta f = \frac{1}{T_a}$.
Le nombre de pixels en horizontal est $\frac{\tau}{T_a}$
vertical est $\frac{f_m}{\delta f}$.
Le sonoogramme comporte donc $\frac{\tau}{T_a} \times \frac{f_m}{\delta f} = \tau \cdot f_m$ pixels.
A.N. $\tau \cdot f_m = 0,5 \times 3,5 \cdot 10^3 = 1,75 \cdot 10^3$ pixels.

19. En 1 intervalle de temps T_a , la fréquence varie de $f_1 \frac{T_a}{\tau}$, la plus petite variation de fréquence décalable est δf ; il est préférable que le signal ne change pas trop vite de fréquence $\rightarrow \delta f > f_1 \frac{T_a}{\tau}$



20. La durée est environ 200ms
 $f_1 = 600 \text{ Hz}, 1200 \text{ Hz}, 1800 \text{ et } 2400 \text{ Hz}$ (peu précis)

B. Diffraction du son

$$21. \psi(S_n, t) = A(t - \frac{S_n c_s}{c_A}) \quad \text{onde progressive.}$$

Ensuite $\psi'(S, t) = K \cdot A(t - \frac{S c_s}{c_A}) - \frac{S_n S}{c_A}$

$$22. \psi_m(t) = w(t - 2 \frac{d_m}{c_A})$$

C - Superposition constructive

23 $\Delta\phi_m' = \frac{2}{c_s} \frac{d_{m+1} - d_m}{c_s}$

24 la superposition est constructive si $\Delta\phi_m' \equiv 0 [2\pi]$
donc $\frac{2}{c_s} (d_{m+1} - d_m) = 2p\pi$ ($p \in \mathbb{N}$)

$$w = 2\pi\nu \Rightarrow \frac{2}{c_s} (d_{m+1} - d_m) = p \cdot \nu \Rightarrow \nu = p \cdot \frac{c_s}{2(d_{m+1} - d_m)}$$

25 Or $d_m = [(a + m b)^2 + (m b)^2]^{1/2} = [a^2 + 2m ab + 2m^2 b^2]^{1/2}$

(en considérant que $b/a \ll 1$)

$$d_m \approx a \left(1 + 2m \frac{b}{a} + \frac{2m^2 b^2}{a^2}\right)^{1/2} \approx a \left(1 + m \frac{b}{a}\right)$$

(ceci conduit à $d_m = a + m b$: trop simplifié)

$$d_{m+1}^2 - d_m^2 = 2ab + 2b^2((m+1)^2 - m^2) = 2ab + 2b^2(1+2m)$$

$$(d_{m+1} - d_m) = \frac{2ab + 2b^2(1+2m)}{d_{m+1} + d_m} = \frac{ab + b^2(1+2m)}{d_m}$$

d'où $\nu = \frac{p c_s d_m}{2(ab + b^2(1+2m))} = \frac{p c_s d_m}{2ab} \times g(m)$ avec $g(x) = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}(1+2x)}$

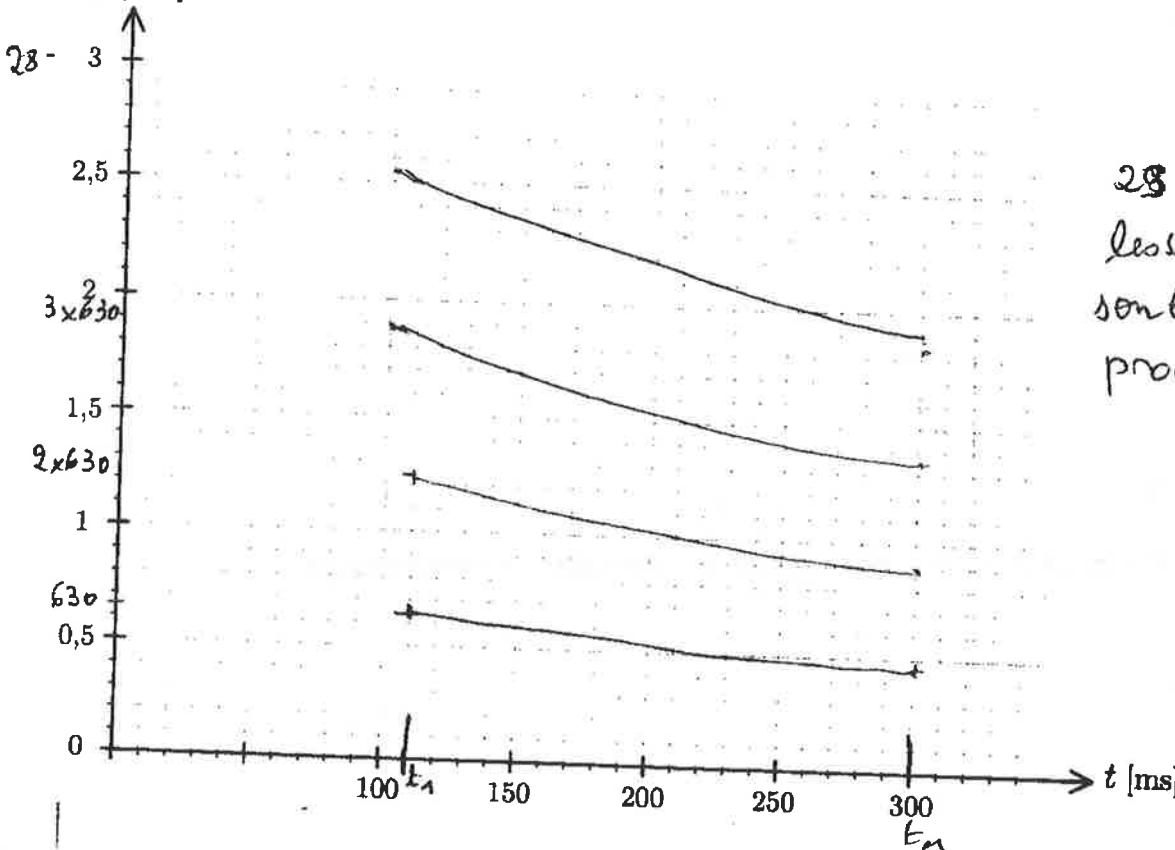
27. pour $d_1 = a \approx 20m$, au début $\rightarrow d_{51} = 50m$

$$\nu_1 = \frac{c_s \times 19,5}{2ab} = 630 \text{ Hz} \quad (\text{proche des } 600 \dots)$$

$$\nu_2 = \frac{14,7 \times c_s}{2ab} \approx 480 \text{ Hz}$$

28. $t_1 = \frac{2d_1}{c_s} \approx \frac{40}{340} \approx 0,12 \text{ s} \quad t_2 = \frac{2 \times 50}{340} \approx 0,3 \text{ s}$

f [kHz]



28.
les périodes
sont
proches ...

MP Mines 2018 - Q2 - Et pour un neutron de plus...

I. Masse du deuton et du deutérium.

1) 1 atome ^2H : $m_e + m_p + m_n \approx 2m_p$

1 atome ^1H : $m_e + m_p \approx m_p$

masse ^2H tot

$$\frac{\text{masse } ^2\text{H tot}}{\text{masse } ^2\text{H tot} + \text{masse } ^1\text{H tot}} = \frac{2m_p}{2m_p + 6420 \cdot m_p} \approx \frac{2}{6422} \approx 3,1 \cdot 10^{-4}$$

2) masse du moyen = $\frac{m_p + m_n}{\text{masse de l'atome}} = \frac{m_p + m_n}{m_p + m_n + m_e} \approx \frac{2m_p}{2m_p + m_e} \approx 1 - \frac{m_e}{2m_p}$

$$\frac{m_e}{m_p} = \frac{3,1 \cdot 10^{-4}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \quad \% \text{ du deuton/deutérium} = 1 - 5,5 \cdot 10^{-4}$$

3) on tire un atome H. soit $p = \frac{1}{6240}$ la probabilité que ce soit du D.

proba d'avoir $\text{D}_2\text{O} = p^2$

proba d'avoir $\text{DHO} = p(1-p) \approx p$.

proportion en molles = $\frac{p^2}{p(1-p)} \approx p \approx \frac{1}{6241} \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$

4) l'eau lourde peut servir de modérateur (absorbe et ralentit les neutrons) dans certains réacteurs nucléaires

II - Etude classique

A - Spectroscopie et découverte du Deutérium

5) initial : $E_1 \rightarrow$ final E_2

$$\lambda_m = \frac{c}{v_m} = \frac{2hc}{E_0 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right]}$$

AN: $\lambda_3 = \frac{2hc}{E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 5} \times 4 \times 9 = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (rouge)

$$\lambda_4 = \frac{2hc}{E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right)} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{16}{3} = 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$
 (bleu)

Ces longueurs d'onde sont dans le visible

6) $\frac{\lambda'_m}{\lambda_m} = \frac{E_0}{E_1} = \frac{m_e(\text{ deuton})}{m_e(\text{Hyd})} = \frac{1 + \frac{m_e}{M(H)}}{1 + \frac{m_e}{M_D}} = \frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \approx 1 + \frac{m_e}{2m_p} - \frac{m_e}{2m_p} (\text{DL})$

$$\frac{\lambda'_m}{\lambda_m} - 1 = - \frac{m_e}{2m_p}$$

$$\delta = - \frac{m_e}{2m_p} \approx -2,7 \cdot 10^{-4}$$

l'écart est faible, mais mesurable

B. Rôle de la température de l'échantillon

(4) \vec{v}' est en translation + rotation

$$\vec{v}'_{M/K} = \vec{v}_{M/K} + \vec{v}_{O'/K} + \vec{\omega}_n \vec{O'M}$$

(5) Dans le cas d'un référentiel purement en translation

$$\vec{v}'_{M/K} = \vec{v}_{M/K} + \vec{v}_o,$$

$$\text{soit : } \dot{x} = \dot{x}' + v_{ox} - \dots$$

$$\text{soit } x = x' + v_{ox} t + \text{const} \quad \text{d'où } \dot{x}' = x - v_{ox} t + x'_0$$

(6) Dans le vide, l'onde EM vérifie $k = \frac{\omega}{c}$

$$(7) S = S_0 \exp(f(kx - k v_{ox} t + k x'_0 - \omega t))$$

$$= S_0 \exp(f(kx - (\omega + kv_{ox})t + k x'_0))$$

$$\text{d'où } \omega_{\text{app}} = \omega + kv_{ox} = \frac{\omega(1 + \frac{v_{ox}}{c})}{c}$$

(8) le facteur de Boltzmann fait son intervention $\exp(-\frac{E}{k_B T})$
avec ici $E = \frac{1}{2}mv^2$ donc

$$\alpha = \frac{m}{2k_B T}$$

$$(9) \frac{dN}{dv} = K \exp(-\alpha v^2)$$



$$(10) \text{ on dérive } f(v) = \exp(-\alpha v^2)$$

$$f'(v) = -2\alpha v \exp(-\alpha v^2)$$

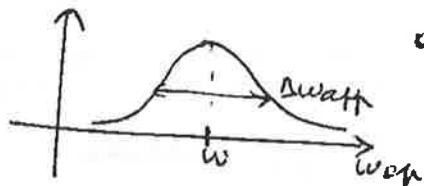
$$f''(v) = [-2\alpha + 4\alpha v^2] e^{-\alpha v^2} = 0 \text{ pour } v^2 = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\text{d'où } v_+ = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad v_- = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

$$\Delta v = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{k_B T}}{\sqrt{m}}$$

plus T est grand, plus Δv est grand

$$(11) \frac{dN'}{dw_{\text{app}}} = \frac{dN}{dv} = K \exp(-\alpha (w_{\text{app}} - w)^2 \frac{c}{\Delta v})$$



on aura la même allure, avec

$$\Delta w_{\text{app}} = \sqrt{\frac{2}{\alpha} \frac{w^2}{c^2}} = 2 \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{w^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{\Delta w_{\text{app}}}{w_{\text{app}}} = \frac{\Delta v}{c} \right)$$

(15) on veut $\frac{\Delta \omega_{app}}{\omega} \leq 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \frac{4k_B T}{mc^2} \leq 25 \cdot 10^{-12}$ (3)

$$T \leq \frac{25 \cdot 10^{-12} \cdot mpc^2}{4k_B} = \frac{25 \cdot 10^{-12} \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 9 \cdot 10^{16}}{4 \times 1,4 \cdot 10^{-23}} = 67 K$$

il faut donc travailler à très haute température

III - le Denton

A. Potentiels radiaux en physique quantique

16) $\Psi(r, t)$ en $e^{-i\omega t}$ correspond aux solutions stationnaires
 $i\hbar \frac{d\Psi}{dt} \leftrightarrow \hbar\omega \Psi$ donc $E = \hbar\omega$ (141^2 indép de t)

17) L'équation de Schrödinger donne : (avec $R'(r) = \frac{R(r)}{r}$)
 $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR'}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2R'}{dr^2} \right) \Psi(0, \varphi) + \frac{E_p(r)}{r^2} \Delta \Psi(0, \varphi) + E_p(r) R'(r) \Psi(0, \varphi) = E R'(r) \Psi(0, \varphi)$
 On "sépare" les termes.

$$\Psi(0, \varphi) \left[\underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR'}{dr} \right) + (E_p(r) - E)}_{X(r)} R'(r) \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \Delta \Psi(0, \varphi) = 0$$

soit $\frac{d\Delta \Psi}{4} = +X(r)$ $= -C$ constante car relation norme $\int r^2 |\Psi|^2 d\Omega, \varphi$

donc $\Delta \Psi = -C \Psi$

et $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR'}{dr} - R(r) \right)}_{-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d^2R}{dr^2}} + [E_p(r) - E(r)] \frac{R(r)}{r^2} \right] + (E_p(r) - E) R'(r) = \frac{-\hbar^2 C}{2\mu} R'(r)$
 ce qui donne bien l'équation proposée
 $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2R}{dr^2} + \left(E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2} \right) R(r) = E R(r)$

(18) $\frac{1}{2} \mu r^2 + E_p(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} = E$

par identification $\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}$ correspond à $\frac{\hbar^2 c}{2\mu r^2}$

et $\frac{1}{2} \mu r^2 \approx -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2R}{dr^2}$

donc $\sigma \rightarrow \hbar \sqrt{C}$

et $(V_{eff}(r) = E_p(r) + \frac{\hbar^2 c}{2\mu r^2})$

une fonction d'onde purement radiale correspond à (4)

$$Y(0, \varphi) = \text{const} \Rightarrow \Delta Y = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$20 \quad Y(0, e) = \theta(a) \cdot \phi(e)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\phi}{d\theta} \right) \right] \phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \cdot \theta = -C \phi(\theta) \phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{\Phi(\theta)} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta}) + C \sin^2 \theta \Phi(\theta) \right] = - \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} \times \frac{1}{\Phi(\theta)} = \text{const } C'$$

$$\text{Dove } \left\{ \frac{d^2\phi}{d\psi^2} = -c' \phi(\psi) \quad (\text{A}) \right.$$

$$\left\{ \sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + C \sin^2 \theta \Theta(\theta) = C' \Theta(\theta) \quad (B) \right.$$

21) $\phi(\epsilon)$ doit être 2π périodique, il faut donc que $C > 0$

(A) $\Rightarrow \phi(\varphi) = \exp i\sqrt{c'}\varphi$ ou $\exp(-i\sqrt{c'}\varphi)$ et $\sqrt{c'}$ doit être entier -
donc $\boxed{\phi(\varphi) = e^{i\sqrt{c'}\varphi}}$

donc $\phi(\varphi) = e^{im\varphi}$ $m \in \mathbb{Z}$

à un coefficient près sans l'importance
(normalisation)

$$22 \quad (\text{B}) \text{ s'écrit } \sin \theta \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{d\theta} + \sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + C \sin^2 \theta \theta'(0) = C' \theta'(0)$$

tion here $\Theta(\theta) = f(x)$ where $x = \cos\theta$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = f'(x) \times \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta f'(x)$$

$$\sin \theta \frac{d\theta}{dx} = -\sin^2 \theta f'(x) = (x^2 - 1)f'(x)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(f(x^2 - 1) f'(x) \right) \times (-\sin \theta)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1) \frac{d}{dx} ((x^2 - 1) f'(x)) + c(1 - x^2) f(x) = \sin^2 f(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)^2 f''(x) + 2x(x^2 - 1)f'(x) + c(1 - x^2)f(x) = m^2 f(x)$$

$$x^4 \frac{l(l-1)}{l-2} x^{l-2} + 2x^3 \cdot l x^{l-1} + c(-x^2) \cdot x^l = m^2 x^l$$

$$\Rightarrow c_{l-1} x^{l+2} + 2l x^{l+2} - cx^{l-2} = 0$$

$$\Rightarrow C = l(l-1) + 2l = l(l+1)$$

$$d'où \boxed{G = \sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

B. Energie de liaison du deuton

5

(23) Avec les formes données, pour $r < a$: $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} - V_0 R(r) = ER(r)$
donc $\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + E) R(r) = 0$

\Rightarrow solutions en $\sin(kr)$ ou $\cos(kr)$ avec $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + E)$
il faut que 4 soit définie en $r=0$ (centre du noyau)
avec $4(r) = R(r)/r$; on ne peut donc prendre que les solutions en $\sin(kr)$ car $\frac{\sin(kr)}{r} \sim k$ pour $r \rightarrow 0$

D'autre part, pour $r > a$: $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} = ER(r)$ avec $E < 0$
 $\Rightarrow R(r) \propto e^{kr}$ ou e^{-kr} avec $k^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$
on élimine e^{kr} qui diverge au $+\infty$

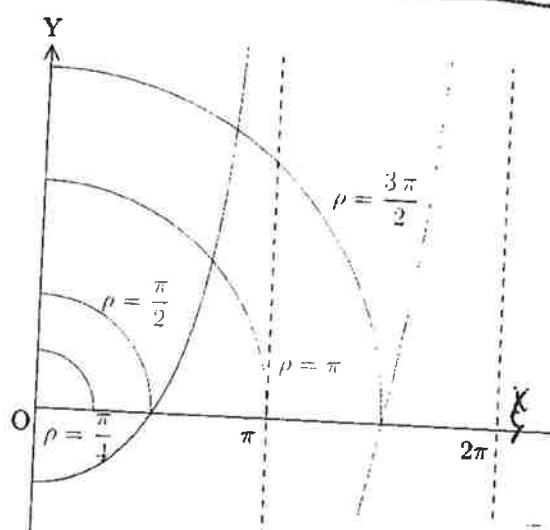
(24) 4 et $4'$ doivent être continues en $x=a$; donc R et R' aussi

(25) $\begin{cases} A \sin(ka) = B e^{-Ka} \\ k A \cos(ka) = -k B e^{-Ka} \end{cases}$

sont $\frac{1}{X} \tan X = -\frac{1}{Ka} \Rightarrow Y = -X \cotan X$

et d'autre part $(X^2 + Y^2 = \frac{2\mu a^2 V_0}{\hbar^2})$ cercle de rayon

$$f = \sqrt{\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}}$$



(27) il n'y a des solutions ($Y > 0$) que si $\rho \geq \frac{\pi}{2}$

donc $\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} \geq \frac{\pi^2}{4}$

$$V_0 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu a^2} = V_{\min}$$

(28) A partir de $\rho = \frac{3\pi}{2}$, il y a plus d'une solution $\Rightarrow V_{\max} = 9V_{\min}$

(29) 1 seul état lié $\Rightarrow V_{\min} < V_0 < V_{\max}$

A N $V_{\min} = \frac{\pi^2 \cdot 10^{34} \cdot 2}{8 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} \cdot \frac{x(1.6 \cdot 10^{-13})^{-1}}{(2 \cdot 10^{-15})^2} = 23 \text{ MeV}$

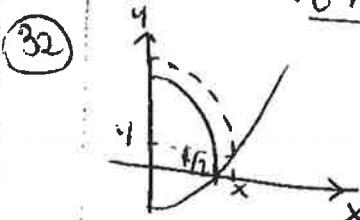
$$V_{\max} = 9V_{\min} = 210 \text{ MeV}$$

(30) Si $V_0 = V_{\min}$: $\rho = \frac{\pi}{2}$ le solution est $y=0 \quad x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{et } y = \sqrt{\frac{2\mu E}{\kappa^2}} a \Rightarrow \text{donc } \boxed{\epsilon \neq 0}$$

6

(31) $E_d = -2,23 \text{ MeV} \approx -\frac{V_{\min}}{10}$ donc $y \ll \rho$ donc ϵ n'est pas beaucoup plus grand que $\frac{\pi}{2}$ ($y \rightarrow 0$ $\rho \rightarrow$ graphiq^b)
donc V_0 n'est pas loin de V_{\min} .



$$\text{on a } x \text{ proche de } \frac{\pi}{2} : \quad x = \frac{\pi}{2} + \epsilon$$

$$y = -x \cos \epsilon x$$

$$\approx -\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)} \\ \approx +\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) x \tan \epsilon$$

$$y \approx +\frac{\pi}{2} \epsilon \quad \downarrow \quad \text{ordre 1}$$

$$\text{et } \Rightarrow \text{avec } y = \kappa a = \sqrt{\frac{-2\mu E_d}{\kappa^2}} a \quad \text{et } x = \frac{\pi}{2} + \epsilon.$$

$$\rho^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\kappa^2} = \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \epsilon\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi \epsilon \quad \text{à l'ordre 1}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{\kappa^2}{2\mu a^2} \times \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \cancel{\pi \epsilon}\right) = \boxed{\frac{\kappa^2}{2\mu a^2} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2a}{\kappa} \sqrt{-2\mu E_d}\right]}$$

cette expression n'est pas celle de l'énoncé, qui devrait éliminer les termes d'ordre 2 en ϵ (DL à l'ordre 1 fait plus haut)

33 on obtient $V_0 = 32 \text{ MeV}$

(et $\epsilon = 0,38$ parulement petit!).

Mines MP 2018 - chimie : le bioéthanol



l'éthanol et l'eau vont former des liaisons hydrogène (doublet non liéant sur O et $\text{H}^{\delta+}$ des liaisons O-H polarisées).

L'essence et l'éthanol sont peu miscibles (apolaire) (polarisé)



3) théorème de Hess $\Delta_f^\circ = \sum_i \Delta_{f,i}^\circ$
 $= 2(-394) + 2(-277) - \Delta_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}^\circ$

on calcule $\Delta_f^\circ_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}$ avec l'information sur la combustion :

$$\Delta_{\text{comb}}^\circ = 6(-394) + 6(-242) - \Delta_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}^\circ = -2316$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}^\circ = -1000 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

puis $\Delta_f^\circ_{\text{H}_2\text{O}} = -242 \text{ kJ.mol}^{-1}$

$\Delta_f^\circ < 0$ la réaction est exothermique



↳ issue de sources végétales mais produit des gaz à effet de serre !

5) $M(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 2 \times 12 + 16 + 6 \times 1 = 46 \text{ g.mol}^{-1}$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{3}{46}$$

état initial

n C₂H₅OH

3 n O₂

12 n N₂ (air)

1 kg H₂O

T_i = 298 K

$\xrightarrow{298 \text{ K}}$

2 n CO₂

3 n H₂O

12 n N₂

1 kg H₂O

T_f

2 n CO₂

3 n H₂O

12 n N₂

1 kg H₂O

adiabatique, supposé isobare: $\Delta H = Q = 0$

$$n \Delta H_2 + (12 n C_p N_2 + 3 n C_p H_2 O + 2 n C_p CO_2 + \frac{1000}{18} C_p H_2 O)(T_f - T_i) = 0$$

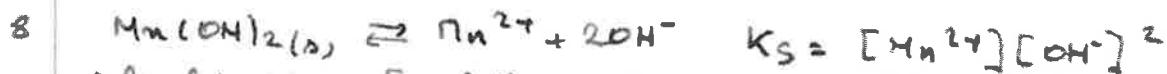
$$\Delta H_e = (T_f - T_i)(12 C_p N_2 + 2 C_p CO_2 + (3 + \frac{1000}{18} n) C_p H_2 O)$$

$$= 20 / (12 \times 29 + 2 \times 37 + 12 + 1000 / 18 \times n)$$

6. $\Delta H^\circ_f = 3 \times (-286) + 2 \times (-354) - 3 \times 0 - (-277)$
 $= -1,37 \text{ kJ.mol}^{-1}$

L'ordre de grandeur est bien le même.

+ m.o:	0	$\rightarrow \text{Mn}_2 \rightarrow 6$	
+II		$\rightarrow \text{Mn}^{2+} \text{ et } \text{Mn(OH)}_2(s)$: $(\text{u})\text{Mn}^{2+}\text{u}(\text{s})\text{Mn(OH)}_2$	
+IV		$\rightarrow \text{MnO}_2(s) \rightarrow (3)$	\downarrow
+VI		$\rightarrow \text{MnO}_4^{2-} \rightarrow (2)$	(plus présent en milieu basique)
+VII		$\rightarrow \text{MnO}_4^- \rightarrow (1)$	



A la limite: $[\text{Mn}^{2+}] = 10^{-2} \quad K_S = 10^{-12,7} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-\frac{10,7}{2}}$
 $\text{p}(\text{OH}) = 5,35 \Rightarrow \text{pH} = 8,65$



$$K_A = 10^{-4,8} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3\text{CO}_2^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$$

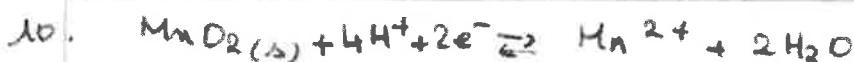
A la frontière $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = [\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{10^{-2}}{e} \Rightarrow \text{pH} = 4,8$



$$E = E^\circ + \frac{0,06}{4} \log \frac{[\text{H}^+]^4 [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]}{[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]}$$

A la limite $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = [\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]$ et

$$E = 0,037 - 0,06 \text{ pH}.$$



$$E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{H}^+]^4}{[\text{Mn}^{2+}]}$$

A $\text{pH} = 0$ et $[\text{Mn}^{2+}] = 10^{-2} \Rightarrow E = E^\circ + 0,06$

on lit $E = 1,3 \Rightarrow E^\circ = 1,24 \text{ V}$



Klechkowski, Pauli, Hund $\Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$

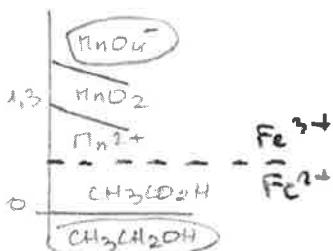
ou $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^5$

c'est la 2^e configuration qui est référencée (nous connaissons une moitié ou 1/2 moitié stabilisée...)

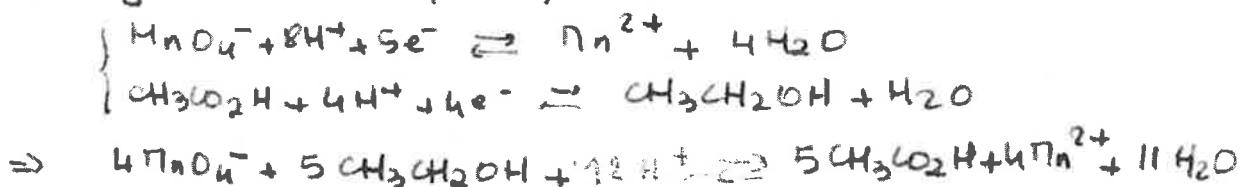
(3)

12. On préleve 5 mL de S₁ à la pipette, que l'on met dans une fiole jaquée. On complète à 50 mL avec de l'eau distillée, on bouille, on agite.

13



on peut s'imaginer de former Mn²⁺ ou MnO₂⁻... mais, si on lit le protocole, on voit que le Fe³⁺ dosera le MnO₄⁻ excédentaire. Or Fe²⁺ ne réagit pas avec MnO₂⁻. Si on formait MnO₂, on le doserait aussi avec le Fe³⁺ et le dosage ne servirait à rien. Il faut donc considérer que l'on forme Mn²⁺ (conforme aux TP faits au lycée et en prépa...)



15. La réaction est lente (on chauffe et on attend) si on dose tout de suite, l'éthanol n'a pas encore réagi.

16. Si l'équivalence $n_{\text{MnO}_4^-} = \frac{1}{5} \cdot c_4 V_E$ (restant)

Initialement $n_{\text{MnO}_4\text{ini}} = c_3 V_3$

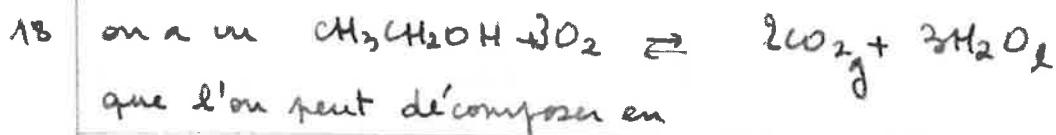
Pour l'éthanol $n_2 = \frac{5}{4} n_{\text{MnO}_4^-}$ consumé

donc $c_3 V_3 - \frac{5}{4} \underbrace{\frac{c_4 V_E}{n_2}}_{n_2} = 5 \cdot c_4 V_E$

$$n_2 = \frac{5}{4} (c_3 V_3 - \frac{1}{5} c_4 V_E) = \frac{5}{4} (10^{-2} \times 0,1 - \frac{1}{5} \cdot 0,2 \times 0,01) \\ = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ moles}$$

d'où $c_2 = \frac{n_2}{V_2} = 0,38 \text{ moles/L}$ et $c_1 = 3,8 \cdot \text{mol.L}^{-1}$

- 17 - Il me faut pas former Mn(OH)_2 , ni Fe(OH)_3 !



20 - à la cathode : réduction de O_2 :

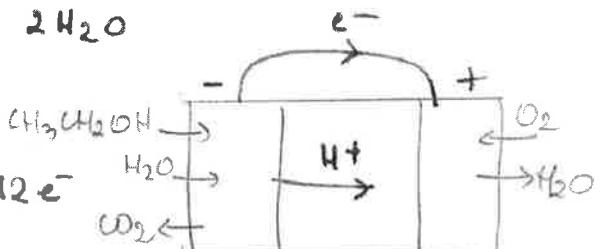


- à l'anode



les H^+ produits à l'anode

migrent dans l'électrolyte, et les e^- dans le circuit



19 : on peut alimenter la pile en continu ; elle ne produit que de l'eau et du CO_2 . L'éthanol est liquide et facilement produit.

Éconvenient : nature de l'électrolyte ? catalyseur ?

21. on a $\Delta_f G^\circ = -n F E^\circ$ avec $n = 12$

$$\text{on peut calculer } \Delta_f G^\circ = \Delta_f H^\circ - T \Delta_f S^\circ$$

$$\text{avec } \Delta_f H^\circ = 2(-384) + 3(-286) - (-277) = -1363 \text{ kJ mol}^{-1}$$

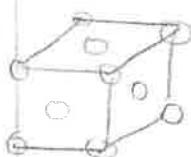
$$\Delta_f S^\circ = 2(214) + 3(70) - 3 \times 205 - 161 = -138 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta_f G^\circ = -1363 \cdot 10^3 + 138 \times 298 = -1,33 \cdot 10^6 \text{ J mol}^{-1}$$

$$E^\circ = 1,15 \text{ V}$$

22 Rhodium : $Z = 45$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^7$
5^e ligne, 9^e colonne - Métaux de transition

23



sur une diagonale : $4r = a\sqrt{2}$

il y a 4 atomes par maille :

$$\rho = \frac{4M}{Na a^3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{4M}{Na\rho} \right)^{1/3}$$

$$\text{A.N. : } r = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{4 \times 103 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \times 12,4 \cdot 10^3} \right)^{1/3} = 1,4 \cdot 10^{-10}$$

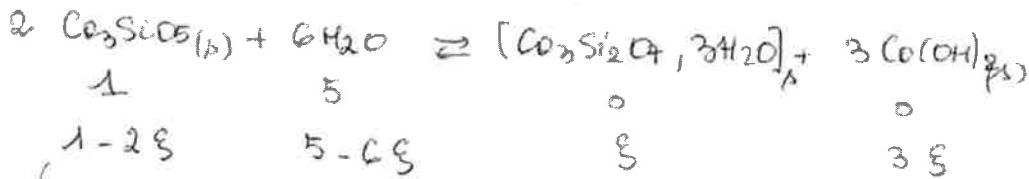
$\approx 1 \cdot 10^{-10}$

A la calculatrice : $1,35 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Mines HP 2016 : le béton

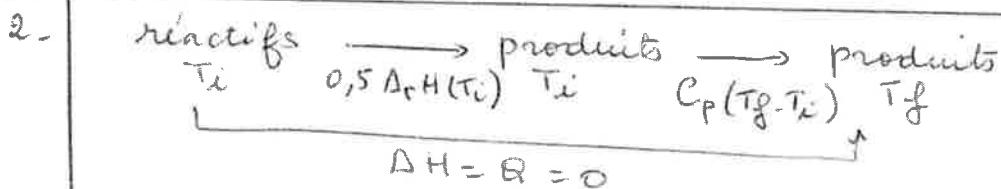
A. Prise d'un béton

1. $M(\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_5) = 3 \times 40 + 28 + 5 \times 16 = 228 \text{ g/mol} \Rightarrow 1 \text{ mole}$
 $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g/mol} \quad m = \frac{90}{18} = 5 \text{ moles}$



donc $S_{\max} = 0,5 \text{ mol}$. Le ciment est le réactif limitant.

0	2	0,5	1,5
---	---	-----	-----

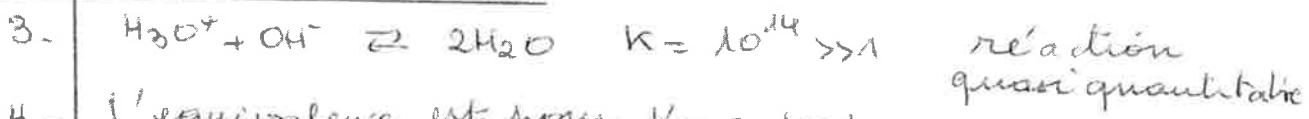


avec $C_p = 1,5 C_p(\text{Ca}(\text{OH})_2) + 0,5 C_p(\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_7 \dots) + 2 C_p(\text{H}_2\text{O})$
 $= 1,5 \times 80 + 0,5 \times 340 + 2 \times 75$
 $= 440 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

on en tire :
$$\Delta rH^\circ(T_i) = -\frac{1}{S_{\max}} C_p \cdot \Delta \theta$$

$\Delta rH^\circ(T_i) = -2 \times 440 \times 15 = -13,2 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}$

B. Basicité d'un béton



4. l'équivalence est pour $V_{\text{eq}} = 1 \text{ mL}$

$0,5 \times V_{\text{eq}} (\text{mL}) = C_{\text{OH}^-} \times 100 \Rightarrow C_{\text{OH}^-} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}^{-1}$

$\Rightarrow \text{pH} = 14 - \text{pOH} = 14 + \log(5 \cdot 10^{-3}) = 14 + \log(\frac{10^{-2}}{2}) = 14 - 2,03$

$\boxed{\text{pH} = 11,7}$

5. pour $V < V_{\text{eq}}$ $\delta = \sum_i \alpha_i \lambda_i \downarrow$ car on consomme des OH^- , qu'on remplace par des Cl^-

pour $V > V_{\text{eq}}$ on ajoute en permanence des H_3O^+ et Cl^- donc $\delta \uparrow$

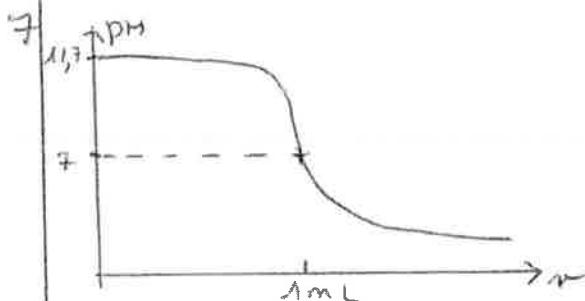
6. $V < V_{\text{eq}}$: δ sur une pente en $\lambda_{\text{Cl}^-} - \lambda_{\text{OH}^-} = 7,6 - 19,8 = -12,2$

$V > V_{\text{eq}}$ δ sur une pente en $\lambda_{\text{Cl}^-} + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} = 7,6 + 12,2 = 19,8$

le rapport des pentes est $\frac{42,6}{12,2} \approx 3,5$

graphiquement : rapport = $\left(\frac{0,17}{0,48}\right) \times \left(\frac{0,06}{0,01}\right)^{-1} = \frac{17}{0,48} \approx 3,5$

les résultats sont bien cohérents



C. Carbonatation d'un béton

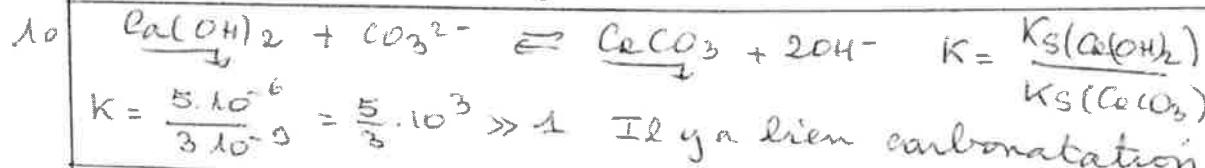
8. Kletchkouski, Pauli, Hund ...



le calcium perd facilement les 2 électrons 4s $\rightarrow \text{Ca}^{2+}$



on aurait $\text{pH} = 11.7 \rightarrow$ zone de CO_3^{2-}



$$\text{Vant'Hoff } \frac{d}{dT} \ln K_s = \frac{\Delta_f H^\circ}{RT^2}$$

$$\text{avec } \Delta_f H^\circ = -543 - 677 - (-1207) = -13 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$$

donc K_s est fonction décroissante de T .

le calcaire est plus soluble à froid.

12. $\Delta_f S^\circ = \sum_i \nu_i \bar{S}_i^\circ = -53 - 57 - 93 = -203 \text{ J.K}^{-1}. \text{mol}^{-1}$

$$\text{du } K = -\frac{\Delta_f G^\circ}{RT} = \frac{\Delta_f S^\circ}{R} - \frac{\Delta_f H^\circ}{RT} = \frac{298 \times (-203) + 13000}{298 \times 8,314} = -47494$$

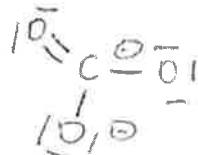
$$\ln K \approx -20$$

$$\log K = \frac{\ln K}{\ln 10} = -\frac{20}{2,3} \quad \text{or} \quad \log K_s = -9 + \log 3 \approx -8,7$$

c'est bien cohérent

13. test à l'eau de chaux (Ca(OH)_2 dissout) qui se trouble en présence de CO_2

14



les 3 O sont en fait équivalents,
l'éclatice possède un centre de
symétrie

13

15

$$\rho = \frac{M}{N_a V} \Rightarrow V = \frac{M}{\rho N_a} = \frac{(40 + 12 + 3 \times 16) \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \times 2,7 \cdot 10^3} = \frac{0,1}{16,2 \cdot 10^{26}}$$

Donc $V = 6,10^{-23} \text{ m}^3$

16

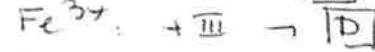
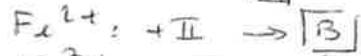
il y a un atome de Ca par maille

donc $V = (0,36)^2 \times \text{min}(120) \times 0,49 \cdot 10^{-27} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0,13 \times 0,49 \cdot 10^{-27}$
 $V \approx 5,6 \cdot 10^{-23} \text{ m}^3$

Le volume de la calcite est plus grand (par unité) \Rightarrow
le béton "gonfle".

D. Corrosion d'un béton armé

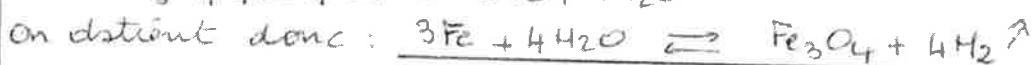
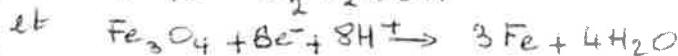
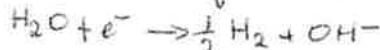
17 et 18



$\boxed{\text{C}}$ et $\boxed{\text{E}}$ peuvent capter des H^+ \rightarrow bases \rightarrow faible pH.

19

En milieu fortement basique, pour l'eau

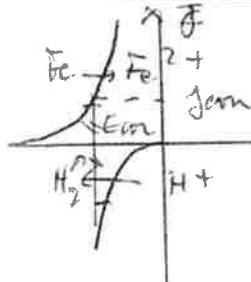


En milieu basique, pour l'oxygène ; on formerait Fe(OH)_3

20

$\text{Fe}_3\text{O}_4(\text{b})$ recouvre le fer et le protège : passivation

21



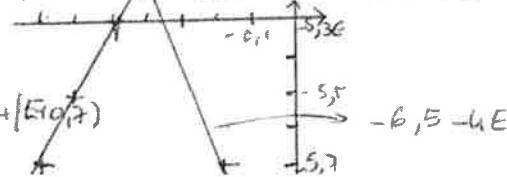
$$E_{\text{cor}} \approx -0,3 \text{ V}$$

22

On cherche le point d'intersection
des droites $\Rightarrow (E_{\text{cor}}, j_{\text{cor}})$

pour $E < E_{\text{cor}}$ c'est $\text{H}^+ \rightarrow \text{H}_2$ qui l'importe
pour $E > E_{\text{cor}}$ c'est $\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+}$

$$\log |j| = -5,7 + [E]_{(7)}$$



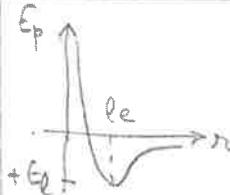
intersection $E = -0,3 \text{ V}$

$$\log |j| = -5,3$$

$$|j| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A.m}^{-2}$$

Mines 2017 - Physique II : Capacité thermique des gaz

I - De la molécule à l'oscillateur harmonique

- 1)  $(F = -\frac{dU}{dr} > 0 \text{ si répulsif} \dots)$
 $\rightarrow E_p < 0 \text{ therm} \dots$

- 2) $le \approx 0,1 \text{ nm}$ et $|Eq| \approx 100 \text{ kJ/mol}^{-1}$ typiquement
 3) Au voisinage de le , on peut remplacer la courbe par une parabole: $E_p(r) = E_p(le) + \frac{1}{2} E''_p(le) (l - le)^2$
 $F(l) = -\frac{E''_p(le)}{k} (l - le)$

$$4) E_{cm} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$5) \bar{v}_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \left(\frac{3 \times 25 \times 300}{30 \cdot 10^{-3}} \right)^{1/2} = 500 \text{ m/s.}$$

$$6) E_{cm} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} k(l - le)^2 + Eq$$

7) Le système est isolé $\Rightarrow (m_A + m_B) \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}_{ext} = \vec{0}$
 (venteuse négligée) $\Rightarrow \vec{v}_G = \text{cste}$

\Rightarrow le référentiel barycentrique est galiléen.

$$8) m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow m_B (\vec{GA} + \vec{AB}) + m_A \vec{GA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} = \frac{m_B \vec{AB}}{m_B + m_A}$$

et de même $\vec{GB} = \frac{m_A \vec{AB}}{m_A + m_B}$

On obtient: $\vec{v}_A - \vec{v}_G = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_B$, idem $\vec{v}_B \dots$

$$\tilde{E}_C = \frac{1}{2} m_A \left(\vec{v}_B - \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_B \right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(\vec{v}_G + \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{v}_B \right)^2$$

$$E_C = \underbrace{\frac{1}{2} (m_A + m_B)}_M \vec{v}_G^2 + 0 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_B^2}_\mu$$

En final $E_{cm} - Eq = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}_B^2 + \frac{1}{2} k l^2$

$$\vec{AB} = l(t) \hat{e}_z \Rightarrow \vec{v} = \dot{l} \hat{e}_z + l \dot{\theta} \hat{e}_\theta + l \sin \theta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$E_{cm} - Eq = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{v}_G^2}_E_{trans} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{l}^2}_E_{rot} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\theta}^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)}_{E_{tors}} + \frac{1}{2} k l^2$$

$$\text{et } E_{tot} = Eq + \frac{1}{2} \mu \dot{l}^2 + \frac{1}{2} k l^2$$

II Capacité thermique d'un gaz parfait diatomique

✓

10) $U = N \langle E_m \rangle$

11) - A chaque degré de liberté (terme quadratique en énergie), correspond $\frac{1}{2} k_B T$ dans $\langle E_m \rangle$

12) 3 degrés en translation (v_x)
 2 degrés en rotation (on a θ et ϕ)
 2 degrés en vibration (r et ℓ) } \Rightarrow on aurait $U = \frac{7}{2} N k_B T$
 $\Rightarrow C_{V,m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{7}{2} N k_B T \right) = \frac{7}{2} R$

13) les prédictions ne sont valides qu'à très haute température : il faut la MQ...

III Oscillation harmonique en physique quantique

14) $\Psi(x,t) = f(x) \exp(-\frac{iE t}{\hbar})$ reporté dans l'éq. de Schrödinger donne : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d''}{dx^2} f(x) + \frac{1}{2} \frac{k \mu E^2}{\hbar^2} f(x) = E f(x)$

15) $-\frac{d''}{dx^2} f(x) + \underbrace{\frac{k \mu E^2}{\hbar^2} x^2}_{m^{-2}} f(x) = \underbrace{\frac{2k \mu E}{\hbar^2}}_{m^{-2}} f(x)$

$\frac{k \mu}{\hbar^2}$ est en m^{-4} $\alpha = x \left(\frac{k \mu}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ est sans dimension

$$\frac{4k \mu E^2}{\hbar^2} = \frac{4k \mu^2 E^2}{\hbar^4} \rightarrow \frac{\hbar^2}{k \mu} = \frac{m^{-4}}{m^{-1}} \Rightarrow \gamma \text{ est sans dimension}$$

16) $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{df}{d\alpha} \times \left(\frac{k \mu}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ puis $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{d\alpha^2} \left(\frac{k \mu}{\hbar^2} \right)^{1/2}$

L'éq devient $\left(\frac{k \mu}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[-\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \alpha^2 f(\alpha) \right] = \frac{2k \mu E}{\hbar^2} f(\alpha)$

$\Rightarrow -\frac{d''}{dx^2} f(x) + \alpha^2 f(x) = \gamma f(x)$

17) $f(\alpha) = e^{\pm \frac{1}{2} \alpha^2} \Rightarrow f'(\alpha) = \pm \alpha e^{\mp \frac{1}{2} \alpha^2} \Rightarrow f''(\alpha) = \pm \alpha^2 e^{\mp \frac{1}{2} \alpha^2} + \alpha^2 e^{\mp \frac{1}{2} \alpha^2}$

$-f''(\alpha) = (\alpha^2 \mp 1 + \gamma) f(\alpha)$

si $\alpha \rightarrow +\infty$ $f''(\alpha) \approx \alpha^2 f(\alpha) -$

cela semble convenir

18 - Il faut pouvoir normaliser la fonction: $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ est à négliger (3)

19) On pose $f(\alpha) = g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$

$$f'(\alpha) = g'(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - \alpha g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$f''(\alpha) = g''(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - 2\alpha g'(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} + \alpha^2 g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$- f''(\alpha) + \alpha^2 f(\alpha) = [-g''(\alpha) + 2\alpha g'(\alpha) - g(\alpha)] e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

D'où $(+g''(\alpha) - 2\alpha g'(\alpha) + (\gamma-1)g(\alpha)) = 0$

$$20) g(\alpha) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \alpha^p \quad g'(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} p b_p \alpha^{p-1} \quad g''(\alpha) = \sum_{p=2}^{\infty} p(p-1) b_p \alpha^{p-2}$$

$$\text{d'où} \quad = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)b_{p+1} \alpha^p \quad = \sum_{p=0}^{\infty} (p+2)(p+1) b_p \alpha^p$$

On obtient $(p+2)(p+1)b_{p+2} - 2p b_p + (\gamma-1)b_p = 0$

$$\Rightarrow b_{p+2} = \frac{1-\gamma+2p}{(p+1)(p+2)} b_p$$

21 il faut que $1-\gamma+2n=0 \Rightarrow \gamma=2n+1$ (n entier ≥ 0)

$$\text{Or } \gamma = \frac{2E}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{k}} \Rightarrow E = \frac{\hbar w}{2} (2n+1) \text{ avec } w = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

IV Capacité thermique et quantification

$$22 - \beta \text{ en } \text{J}^{-1} \quad k_B \text{ en } \text{J.K}^{-1} \quad T \text{ en K} \Rightarrow \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$23 - \pi(\varepsilon_m) = A e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{k_B T} (m + \frac{1}{2})}$$

On normalise: $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi(\varepsilon_m) = 1 \Rightarrow A e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{k_B T}} \times \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{k_B T}}} = 1$

$$A = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2 k_B T}\right) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$24 - \langle E \rangle = N \sum_{m=0}^{+\infty} E_m \cdot \pi(\varepsilon_m) = A \sum_{m=0}^{+\infty} E_m e^{-\beta E_m} = A \times -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_m} \right)$$

$$\langle E \rangle = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{ch}(\beta \hbar \omega / 2)}{2} \right) \times \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$\langle E \rangle = +N \frac{\operatorname{ch}(\beta \hbar \omega / 2)}{\operatorname{sh}(\beta \hbar \omega / 2)} \times \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$C_{V,m} = \frac{\partial}{\partial T} (\langle E \rangle) = \frac{\partial}{\partial \beta} (\langle E \rangle) \times -\frac{1}{k_B T^2}$$

$$N \approx 1 \quad \hbar \omega \approx \operatorname{th}(\beta \hbar \omega / 2) \approx 1 \quad -N k_B \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$26. \quad C_{V,m} = R \cdot \frac{\left(\frac{T_V}{2T}\right)^2}{\ln^2\left(\frac{T_V}{2T}\right)} \quad S = \frac{T_V}{2T} \quad (4)$$

il suffit de poser $u = \frac{2T}{T_V} \Rightarrow C_{V,m} = R \chi(u)$

sur la figure 1

$$T_V \text{ de } 1 \rightarrow 2 \cdot 10^3$$

$$\text{pour H}_2 \quad u = \frac{2T}{T_V} \text{ va de } \frac{2}{2390} \rightarrow \frac{4000}{4390} \rightarrow u \text{ reste} < 1$$

$$\text{pour Cl}_2: \quad u = \frac{2T}{T_V} \text{ va de } \frac{2}{802} \rightarrow \frac{4000}{808} \approx 5 \rightarrow u \text{ parcourt l'axe des valeurs de la figure 2.}$$

On ne part pas de $C_{V,m}=0$ ($u \rightarrow 0$) car on n'a pas pris en compte les énergies cinétiques de translation et de rotation...