
MATHÉMATIQUES

Classe de Mathématiques Spéciales

Table des matières

1	Suites Réelles et Complexes	1
I	Bornes supérieures et bornes inférieures	1
II	Suites réelles et monotonie	2
III	Fonctions convexes de la variable réelle	3
IV	Valeurs d'adhérence d'une suite réelle ou complexe	5
V	Suites de Cauchy	7
VI	Relations de comparaison pour les suites	7
2	Développements Asymptotiques	8
I	Fonctions équivalentes	8
II	Notation o	9
III	Développements asymptotiques	10
IV	Formules de Taylor	10
V	Développements limités	11
3	Séries Numériques	12
I	Définitions	12
II	Absolue convergence	13
III	Séries alternées	14
IV	Quelques applications	14
V	Domination	15
VI	Intégrales impropres sur $[a, +\infty[$	15
VII	Comparaison séries-intégrales	16
VIII	Comparaison logarithmique	17
IX	Asymptotique des sommes partielles des séries divergentes et des restes des séries convergentes	17

4	Compléments sur les Séries Numériques	20
I	Exemples de transformations d'Abel	20
II	Exemples d'études de séries alternées	21
III	Carrés sommables	21
IV	Produits infinis	22
V	Systèmes dynamiques réels	23
VI	Convergence commutative	25
VII	Numération	25
5	Séries Entières à Usage Probabiliste	26
I	Permutation des bornes supérieures	26
II	Généralités sur les séries entières	27
III	Dérivabilité	28
6	Dénombrabilité	30
I	Équipotence	30
II	Ensembles finis	31
III	Ensembles dénombrables	32
IV	Non dénombrabilité de \mathbb{R}	32
7	Familles Sommables	34
I	Introduction	34
II	Familles sommables de $\overline{\mathbb{R}}_+$	35
III	Familles sommables de réels	37
IV	Familles sommables de complexes	39
8	Espaces Probabilisables et Espaces Probabilisés	41
I	Espaces probabilisables	41
II	Opérations sur les tribus	41
III	Variables aléatoires	42
IV	Probabilités	42
V	Loi d'une variable aléatoire	43
VI	Probabilités conditionnelles	44
VII	Indépendance d'événements et de variables aléatoires	45
9	Variables Aléatoires Discrètes	47
I	Introduction aux variables aléatoires discrètes	47
II	Génie fonctionnel	48
III	Variables aléatoires discrètes réelles positives	49
IV	Variables aléatoires discrètes de signe quelconque	49
V	Moments d'une variable aléatoire discrète	50
VI	Variables aléatoires indépendantes	52
VII	Fonctions génératrices	53

10 Suites de Variables Aléatoires	56
I Lemme de Borel-Cantelli	56
II Convergence de suites de variables aléatoires	57
III Loi des grands nombres	59
IV Convergence en loi	61
11 Espaces Métriques et Espaces Normés	62
I Notion de distance	62
II Suites convergentes dans un espace métrique	62
III Parties bornées d'un espace métrique	63
IV Définition d'un espace normé	64
V Distance associée à une norme	64
VI Comparaison de normes	65
12 Topologie d'un Espace Métrique	67
I Ouverts	67
II Fermés	68
III Densité et séparabilité	69
IV Topologie induite	70
V Notion de voisinage	70
13 Continuité	72
I Limite	72
II Continuité en un point	73
III Le miracle de la continuité	74
IV Qu'est-ce qu'une propriété topologique?	75
V Espace produit	76
VI Génie fonctionnel	78
VII Continuité dans un espace induit	78
VIII Prolongements en tous genres	79
14 Compacité	80
I Valeurs d'adhérence	80
II Compacité	81
III Compacts et fermés bornés	81
IV Image continue d'un compact	82
V Théorème de Heine	82
VI Suites admettant une unique valeur d'adhérence	83
VII Compacts, bijections continues et homéomorphismes	84
VIII Intersections décroissantes de fermés	84
IX Propriété de Borel-Lebesgue	85

15 Topologie d'un Espace Normé	87
I Applications linéaires continues	87
II Comparaison de normes	89
III Équivalence des normes en dimension finie	90
IV Représentations analytiques	92
V Exemples	93
VI Séries dans un espace normé	94
VII Théorème de Riesz	96
16 Connexité	97
I Connexité par arcs	97
II Connexité par arcs dans un espace normé	98
III Connexité	99
IV Applications	101
V Connexité des groupes linéaires	103
17 Suites et Séries de Fonctions	104
I Convergence simple	104
II Convergence uniforme	105
III Théorème de Weierstrass	106
IV Critère uniforme de Cauchy	108
V Convergence uniforme sur tout compact	108
VI Théorème d'interversion des limites	108
VII Généralités sur les séries de fonctions	109
VIII Convergence normale	110
IX Quelques théorèmes qualifiant la convergence simple en convergence uniforme	111
18 Intégrales de Fonctions Régliées sur un Segment	113
I Intégrales de fonctions en escaliers	113
II Fonctions continues par morceaux	114
III Fonctions réglées	115
IV Intégrales de fonctions réglées	116
V Sommes de Riemann	118
19 Dérivation	120
I Dérivée	120
II Inégalité des accroissements finis et conséquences	121
III Relation intégrales-primitives	122
IV Dérivation d'une limite	123
V Dérivation sous le signe somme	125

20 Séries Entières	127
I Généralités	127
II Détermination du rayon de convergence	128
III Dérivation complexe	130
21 L'Exponentielle Complexe	133
I Définition	133
II Exponentielle réelle	134
III Exponentielle des imaginaires purs	135
IV Autour de l'argument	136
22 Développements en Séries Entières	137
I Généralités	137
II Composition des développements en séries entières	139
III Développements en séries entières des fractions rationnelles	141
IV Cas des fonctions de la variable réelle	142
V Utilisation des formules de Taylor	143
VI Théorème de convergence radiale d'Abel	145
VII Transmutation des o	147
VIII Expression intégrale des coefficients	148
23 Groupes	149
I Rappels	149
II Groupes quotients	151
III Ordre d'un élément dans un groupe	151
IV Groupe symétrique	152
V Conjugaison dans un groupe	154
24 Anneaux	156
I Généralités	156
II L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	157
III Caractéristique d'un corps	160
IV Idéaux	161
V Corps des fractions d'un anneau intègre	161
25 Polynômes	163
I Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif	163
II Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	164
III Polynômes irréductibles	166
IV Corps algébriquement clos	166
V Radiographie des polynômes	168
VI Polynômes à coefficients rationnels	169
VII Dérivation formelle	170

26	Espaces Vectoriels	173
I	Généralités	173
II	Applications linéaires	174
III	Sommes directes	176
27	Matrices	179
I	Calcul matriciel	179
II	Représentations en tous genres	180
III	Changement de base	181
IV	Rangs	182
V	Déterminants	183
VI	Mineurs	186
VII	Produit par blocs	187
VIII	Décomposition LU des matrices carrées inversibles	188
28	Dualité	190
I	Hyperplans	190
II	Formes linéaires	191
III	Bases duales et préduales	193
IV	Systèmes de formes linéaires	194
V	Systèmes linéaires	194
29	Algèbres	196
I	Généralités	196
II	Polynômes et algèbres	197
III	Polynôme minimal	198
IV	Algébriques et transcendants	198
V	Adjonction de racines	200
30	Polynômes d'Endomorphismes	201
I	Lemme des noyaux	201
II	Valeurs propres d'un endomorphisme	202
III	Suites à récurrence linéaire	202
IV	Matrices semblables	203
V	Trace	204
VI	Valeurs propres d'une matrice	205
VII	Polynôme caractéristique	206
VIII	Endomorphismes cycliques	206
IX	Théorème de Cayley-Hamilton	208

31 Réduction des Endomorphismes	209
I Matrices diagonales	209
II Diagonalisation	210
III Applications de la diagonalisation	212
IV Matrices triangulaires	213
V Trigonalisation	214
VI Polynômes scindés et trigonalisation	215
32 Compléments sur la Réduction	218
I \mathbb{R} et \mathbb{C}	218
II Codiagonalisation	219
III Sous-espaces caractéristiques	220
IV Réduction en dimension 2 dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}	222
V Topologie de $M_n(\mathbb{K})$	223
VI Systèmes dynamiques de matrices ou d'endomorphismes	225
VII Commutant d'une matrice	227
VIII Décomposition de Dunford	228
IX Matrices nilpotentes	229
33 Exponentielle et Systèmes Différentiels Linéaires	231
I Normes d'algèbre	231
II Exponentielle sur une algèbre de dimension finie	232
III Exponentielles de matrices et d'endomorphismes	234
IV Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	235
34 Intégrales sur un Intervalle Quelconque	238
I Intégrales convergentes	238
II Intégrales de fonctions positives	239
III Intégrales absolument convergentes	240
IV Intégration des relations de Landau	241
V Espace des fonctions intégrables	242
VI Rappels sur les espaces préhilbertiens	244
VII Espace des fonctions à carré intégrable	245
35 Intégrales : Suites, Séries et Paramètres	246
I Théorème de convergence dominée	246
II Théorème d'interversion sommes-intégrales	248
III Continuité d'une intégrale à paramètre	250
IV Dérivation d'une intégrale à paramètre	251

36 Équations Différentielles Linéaires	253
I Équations différentielles linéaires d'ordre 1	253
II Équations différentielles linéaires d'ordre n	256
III Résolution des équations d'ordre 1	257
IV Résolution des équations scalaires d'ordre 2	259
V Résolution des équations scalaires à coefficients constants . . .	261
VI Inégalité de Grönwall et applications	262
VII Zéros des solutions d'une équation différentielle	263
 37 La Différentielle	 266
I Définition	266
II Exemples	268
III Composition de fonctions différentiables	270
IV Représentations analytiques	271
V Inégalité des accroissements finis	273
 38 Dérivées Partielles	 275
I Dérivée selon un vecteur	275
II Dérivées partielles standards	277
III Intégrales et différentiabilité	278
IV Dérivées partielles successives	280
V Exemple : expression du laplacien en polaire	281
VI Extrema	282
VII Convexité	284
 39 Espaces Euclidiens	 286
I Espaces euclidiens	286
II Endomorphismes orthogonaux	289
III Matrices orthogonales	291
IV Actions de groupes	292
V Orientation	292
VI Groupe orthogonal en dimension 2	294
VII Réduction des endomorphismes orthogonaux	295
VIII Réduction orientée des endomorphismes orthogonaux directs en dimension 3	297
IX Procédé de Gram-Schmidt	297
 40 Endomorphismes Autoadjoints	 300
I Adjoint d'un endomorphisme	300
II Endomorphismes autoadjoints	301
III Théorème spectral	302
IV Forme matricielle du théorème spectral	303

41 Compléments sur les Endomorphismes Autoadjoints	306
I Codiagonalisation des endomorphismes autoadjoints	306
II Quotient de Rayleigh	307
III Autoadjoints positifs et définis positifs	307
IV Théorème min-max	308
V Matrices symétriques positives et définies positives	310
VI Décomposition polaire	311
VII Forme ultime du théorème spectral	314
VIII Matrices antisymétriques	315
IX Déterminant de Gram	316
42 Espaces Préhilbertiens Réels	318
I Généralités	318
II Projection sur un compact convexe	318
III Formes linéaires	319
IV Orthogonalité	320
V Projections orthogonales	321
VI Familles orthonormales	322
VII Espaces séparables et familles totales	324
VIII Polynômes orthogonaux	325
IX Séries de Fourier	327
X Polynômes de Laguerre	329
43 Compléments sur la Différentielle	331
I Vecteurs tangents	331
II Extrema	332
III Surfaces de niveau	334
IV Points critiques	335
V Théorème d'injectivité locale	336

Chapitre 1

Suites Réelles et Complexes

I Bornes supérieures et bornes inférieures

Vocabulaire 1.1 (Espace ordonné). E un ensemble, \triangleleft une relation d'ordre sur E . Alors (E, \triangleleft) est dit espace ordonné.

Définition 1.2 (Majorant). (E, \triangleleft) un espace ordonné. $X \subset E$, $a \in E$. On dit que a majore X lorsque :

$$\forall x \in X, x \triangleleft a.$$

On note $\text{Maj } X$ l'ensemble des majorants de X .

Définition 1.3 (Minimum). (E, \triangleleft) un espace ordonné. $X \subset E$, $\omega \in E$. On dit que ω est un minimum de X lorsque $\omega \in X$ et $\forall x \in X, \omega \triangleleft x$.

Remarque 1.4. Avec les notations de la définition précédente, si X admet un minimum ω , alors ce minimum est unique. Dans ce cas, on peut noter $\omega = \min X$.

Définition 1.5 (Borne supérieure). (E, \triangleleft) un espace ordonné. $X \subset E$. Si $\text{Maj } X$ possède un minimum, alors ce minimum est appelé borne supérieure de X et noté $\sup X$. On définit de manière analogue la borne inférieure, notée $\inf X$.

Proposition 1.6 (Passage au sup). (E, \triangleleft) un espace ordonné. $X \subset E$, $M \in E$. On suppose que X possède une borne supérieure. S'équivalent :

- (i) $\forall x \in X, x \triangleleft M$,
- (ii) $\sup X \triangleleft M$.

Théorème 1.7. *Il existe un ensemble $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ tel que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, \leq est une relation d'ordre total sur \mathbb{R} , et \mathbb{R} vérifie la propriété de la borne supérieure (i.e. toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure).*

Proposition 1.8 (Critère de la borne supérieure dans \mathbb{R}). *Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. S'équivalent :*

- (i) *a est la borne supérieure de X .*
- (ii) $\begin{cases} \forall x \in X, x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, a - \varepsilon < x \leq a \end{cases}$.

Exemple 1.9. *D un ensemble non vide. On définit une relation binaire \preceq sur \mathbb{R}^D par :*

$$f \preceq g \iff \forall d \in D, f(d) \leq g(d).$$

Alors :

- (i) *\preceq est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^D .*
- (ii) *\preceq est un ordre total ssi D est un singleton.*
- (iii) *Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R}^D possède une borne supérieure pour \preceq .*

Remarque 1.10. *La borne supérieure d'un ensemble majoré de fonctions continues de \mathbb{R}^I , où I est un intervalle, n'est pas toujours continue.*

Définition 1.11 ($\widetilde{\mathbb{R}}$). *On définit $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, muni de $+$, \times et \leq définies ci-dessous (on appelle $\widetilde{+}$ et $\widetilde{\times}$ respectivement $+$ et \times dans \mathbb{R}) :*

$+$	$-\infty$	$x_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$x_1 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x_1 + x_2$	$+\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

\times	$-\infty$	$x_2 \in \mathbb{R}_-^*$	0	$x_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$x_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$x_1 \times x_2$	0	$x_1 \times x_2$	$-\infty$
0		0	0	0	
$x_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$x_1 \times x_2$	0	$x_1 \times x_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x \leq +\infty$	$-\infty \leq +\infty$
---	------------------------

II Suites réelles et monotonie

Proposition 1.12. *$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u \nearrow$.*

- (i) *Si u est majorée, alors u converge.*

(ii) Si u n'est pas majorée, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Proposition 1.13. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $u \in A^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

(i) Si $f \nearrow$, alors (u_n) est monotone.

(ii) Si $f \searrow$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie inverses.

Définition 1.14 (Suites adjacentes). $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. On dit que u et v sont adjacentes lorsque $u \nearrow$, $v \searrow$ et $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Proposition 1.15. u et v deux suites adjacentes. Alors u et v convergent vers une même limite notée ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in [u_n, v_n]$.

III Fonctions convexes de la variable réelle

Notation 1.16. Dans toute cette section, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial (i.e. non vide et non réduit à un point).

Définition 1.17 (Fonction convexe). On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe lorsque :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in]0, 1[, f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Notation 1.18 (Fonction pente). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\omega \in I$, on définit la fonction pente en ω par :

$$p_\omega : x \in I \setminus \{\omega\} \mapsto \frac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega}.$$

Proposition 1.19. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est convexe ssi $\forall \omega \in I, p_\omega \nearrow$.

Lemme 1.20. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On définit $g : x \in (-I) \mapsto f(-x)$. Alors f est convexe ssi g est convexe.

Proposition 1.21. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\omega \in \overset{\circ}{I}$. Alors f admet une dérivée à gauche et à droite en ω :

$$p_\omega(x) \xrightarrow{x \rightarrow \omega^-} f'_g(\omega) \quad \text{et} \quad p_\omega(x) \xrightarrow{x \rightarrow \omega^+} f'_d(\omega).$$

Proposition 1.22. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors f est \mathcal{C}^0 sur $\overset{\circ}{I}$.

Proposition 1.23. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. On suppose que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \in I$ et

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k).$$

Proposition 1.24. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est convexe ssi $f' \nearrow$.

Proposition 1.25. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$.

Application 1.26 (Inégalité arithmético-géométrique).

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Démonstration. Utiliser la convexité de $(-\ln)$ et la proposition 1.23. \square

Proposition 1.27. $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions de \mathbb{R}^I . On suppose que :

- (i) $\forall \lambda \in \Lambda$, f_λ est convexe.
- (ii) $\exists M \in \mathbb{R}^I$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $f_\lambda \leq M$.

On peut alors poser

$$g : x \in I \mapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x),$$

et g est convexe.

Corollaire 1.28. Si elle est définie, la borne supérieure d'une famille de fonctions affines est convexe.

Proposition 1.29. On suppose ici que I est ouvert. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est la borne supérieure d'une famille de fonctions affines.

Démonstration. Pour $x \in I$, poser \mathcal{T}_x la fonction affine associée à la tangente à droite à la courbe représentative de f en x :

$$\mathcal{T}_x : t \in I \mapsto f(x) + (t - x)f'_d(x).$$

Vérifier alors que $\forall x \in I$, $\mathcal{T}_x \leq f$, puis que $\sup_{x \in I} \mathcal{T}_x = f$. \square

Proposition 1.30. On suppose encore I ouvert. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $a \in I$. Alors il existe $B : I \rightarrow \mathbb{R}$ affine t.q. $B(a) = f(a)$ et $B \leq f$.

Démonstration. Il suffit de prendre $B = \mathcal{T}_a$. \square

Proposition 1.31 (Inégalité de Jensen). $(a, b, m, M) \in \mathbb{R}^4$, $a < b$ et $m < M$, I intervalle ouvert contenant $[m, M]$. $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue t.q. $\int_a^b w = 1$; $\varphi : [a, b] \rightarrow [m, M]$ continue ; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors :

$$f \left(\int_a^b w \varphi \right) \leq \int_a^b w \cdot (f \circ \varphi). \quad (*)$$

Démonstration. *Première étape.* En supposant f affine, montrer que $(*)$ est en fait une égalité. *Deuxième étape.* Utiliser alors la proposition 1.29 pour obtenir une famille $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de fonctions affines t.q. $f = \sup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Ainsi, d'après la première étape :

$$\forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \left(\int_a^b w \varphi \right) = \int_a^b w \cdot (A_\lambda \circ \varphi) \leq \int_a^b w \cdot (f \circ \varphi).$$

Obtenir alors $(*)$ en passant au sup sur λ . □

IV Valeurs d'adhérence d'une suite réelle ou complexe

IV.1 Valeurs d'adhérence

Notation 1.32. Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Vocabulaire 1.33 (Extractrice). On appelle extractrice toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$.

Proposition 1.34. Soit φ une extractrice. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Proposition 1.35. La composée de deux extractrices est une extractrice.

Proposition 1.36. $A \subset \mathbb{N}$. S'équivalent :

- (i) A est non majoré.
- (ii) A est infini.
- (iii) Il existe une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) \subset A$.
- (iv) Il existe une extractrice φ telle que $\varphi(\mathbb{N}) = A$.

Proposition 1.37 (Suite extraite). $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u toute suite de la forme $u \circ \varphi$, où φ est une extractrice.

Proposition 1.38 (Valeur d'adhérence). $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle valeur d'adhérence de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe une suite v extraite de u telle que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Proposition 1.39. $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si v est une suite extraite de u et w est une suite extraite de v , alors w est une suite extraite de u .

Proposition 1.40. $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{K}$, alors $\Lambda(u) = \{\ell\}$.

Exemple 1.41. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{i\sqrt{n}}$. Alors $\Lambda(u) = \mathbb{U}$.

Lemme 1.42. (E, \triangleleft) un espace totalement ordonné. Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, alors u possède une sous-suite monotone.

Démonstration. Poser

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, \forall q \geq P, u_n \triangleleft u_q\}.$$

Si A est infini, extraire de u une sous-suite croissante. Sinon, A est majoré et extraire alors de u une sous-suite décroissante. \square

Théorème 1.43 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R}). Toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence dans \mathbb{R} .

Proposition 1.44. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. S'équivalent :

- (i) u converge.
- (ii) u a exactement une valeur d'adhérence.
- (iii) u a au plus une valeur d'adhérence.

IV.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass : extensions

Théorème 1.45 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{C}). Toute suite complexe bornée possède au moins une valeur d'adhérence dans \mathbb{C} .

Proposition 1.46. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. S'équivalent :

- (i) u converge.
- (ii) u a exactement une valeur d'adhérence.
- (iii) u a au plus une valeur d'adhérence.

Théorème 1.47 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\overline{\mathbb{R}}$). Toute suite réelle admet une suite extraite qui converge (au sens de $\overline{\mathbb{R}}$) vers un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

V Suites de Cauchy

Définition 1.48 (Suite de Cauchy). $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.49. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Lemme 1.50. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 1.51. *Toute suite de Cauchy converge.*

Théorème 1.52. *Les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes.*

VI Relations de comparaison pour les suites

Définition 1.53 (o , \mathcal{O} et \sim). $(u, v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$.

- (i) On dit que $u_n = o(v_n)$ lorsqu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de limite 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à PCR.
- (ii) On dit que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ lorsqu'il existe $\phi \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = \phi_n v_n$ à PCR.
- (iii) On dit que $u_n \sim v_n$ lorsqu'il existe $\psi \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de limite 1 telle que $u_n = \psi_n v_n$ à PCR.

Proposition 1.54. $(u, v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, v_n \neq 0$, alors :

- (i) $u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$
- (ii) $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \geq N} \text{ est bornée.}$
- (iii) $u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

Vocabulaire 1.55 (Propriété de nature asymptotique). On dit qu'une propriété \mathcal{P} d'une suite u est de nature asymptotique lorsque \mathcal{P} reste vraie si on modifie un nombre fini de termes de la suite u .

Proposition 1.56. o , \mathcal{O} et \sim sont de nature asymptotique.

Chapitre 2

Développements Asymptotiques

I Fonctions équivalentes

Définition 2.1 (Voisinage de $+\infty$). *On appelle voisinage de $+\infty$ toute partie $V \subset \mathbb{R}$ telle que $\exists M \in \mathbb{R}, [M, +\infty[\subset V$.*

Vocabulaire 2.2 (Fonction définie au voisinage de $+\infty$). *F un ensemble non vide. On dit que $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ est définie au voisinage de $+\infty$ lorsque D est un voisinage de $+\infty$.*

Remarque 2.3. *Dans la suite de ce chapitre, on travaillera exclusivement au voisinage de $+\infty$.*

Définition 2.4 (Fonctions équivalentes). *f, g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} définies au voisinage de $+\infty$. On dit que $f \underset{+\infty}{\sim} g$ lorsqu'il existe u à valeurs dans \mathbb{C} définie au voisinage de $+\infty$ telle que :*

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [M, +\infty[, f(x) = u(x)g(x)$.
- (ii) $\lim_{+\infty} u = 1$.

Proposition 2.5. *f, g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} définies au voisinage de $+\infty$. Si g ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$, alors $\frac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de $+\infty$ et :*

$$f \underset{+\infty}{\sim} g \iff \lim_{+\infty} \left(\frac{f}{g} \right) = 1.$$

Proposition 2.6. *$\underset{+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de $+\infty$.*

Proposition 2.7. f, f_1, g, g_1 quatre fonctions à valeurs dans \mathbb{C} définies au voisinage de $+\infty$.

- (i) Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et $g \underset{+\infty}{\sim} g_1$, alors $fg \underset{+\infty}{\sim} f_1g_1$.
- (ii) Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{+\infty}{\sim} f_1^n$.
- (iii) Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et f ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$, alors f_1 ne s'annule pas dans un voisinage de $+\infty$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f^k \underset{+\infty}{\sim} f_1^k$.
- (iv) On suppose ici que f et f_1 sont à valeurs réelles. Si $f \underset{+\infty}{\sim} f_1$ et $f > 0$ dans un voisinage de $+\infty$, alors $f_1 > 0$ dans un voisinage de $+\infty$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{+\infty}{\sim} f_1^\alpha$.

Proposition 2.8. f, g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} définies au voisinage de $+\infty$. Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et $\lim_{+\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{+\infty} g = \ell$.

Exemple 2.9 (Résine \mathcal{C}^∞). On pose :

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Alors :

- (i) ψ ne s'annule qu'en 0.
- (ii) ψ est \mathcal{C}^∞ .
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi^{(n)}(0) = 0$.

Démonstration. Procéder par récurrence sur n en posant $\mathcal{H}(n)$: ψ est n fois dérivable sur \mathbb{R} et il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et $q_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \psi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{q_n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}},$$

et $\psi^{(n)}(0) = 0$. □

II Notation o

Définition 2.10 (o). f, g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} définies au voisinage de $+\infty$. On dit que $f = o_{+\infty}(g)$ lorsqu'il existe ε à valeurs dans \mathbb{C} définie au voisinage de $+\infty$ telle que :

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [M, +\infty[$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
- (ii) $\lim_{+\infty} \varepsilon = 0$.

Proposition 2.11. f, g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} définies au voisinage de $+\infty$. Alors :

$$f = o_{+\infty}(g) \iff g + f \underset{+\infty}{\sim} g.$$

III Développements asymptotiques

Vocabulaire 2.12 (Développement asymptotique). *f* une fonction à valeurs dans \mathbb{C} définie au voisinage de $+\infty$. On appelle développement asymptotique de *f* au voisinage de $+\infty$ toute relation du type :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k(x) + o_{+\infty}(\varphi_n(x)),$$

où $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ sont définies au voisinage de $+\infty$ et :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_{i+1} = o_{+\infty}(\varphi_i).$$

IV Formules de Taylor

Proposition 2.13 (Formule de Taylor formelle). $P \in \mathbb{C}[X]$, $a \in \mathbb{C}$. Si $\deg P \leq N$, alors :

$$P = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

Proposition 2.14 (Formule de Taylor avec reste intégral). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ C^{n+1} . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarque 2.15. Pour $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse.

Proposition 2.16 (Formule de Taylor avec reste de Lagrange). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^n sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists \zeta \in]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta).$$

Remarque 2.17. Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.

Proposition 2.18 (Formule de Taylor-Young). *f* une fonction à valeurs dans \mathbb{R} définie au voisinage de x_0 et *n* fois dérivable en x_0 . Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

V Développements limités

Vocabulaire 2.19 (Développement limité). *f une fonction à valeurs dans \mathbb{C} définie au voisinage de x_0 . On appelle développement limité de f à l'ordre $o((x - x_0)^n)$ tout développement asymptotique du type :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (x - x_0)^k + o_{+\infty}((x - x_0)^n),$$

où $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Chapitre 3

Séries Numériques

I Définitions

Définition 3.1 (Série). $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n , notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n est appelée somme partielle au rang n de la série $\sum u_n$. On dit que $\sum u_n$ converge lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on pose :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Si $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on notera $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 3.2. $z \in \mathbb{C}$. Alors $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$; et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Proposition 3.3. $\sum u_n$ une série convergente. Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\sum u_{q+n}$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{q-1} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_{q+k}.$$

On notera $\sum_{k=q}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_{q+k}$.

Remarque 3.4 (Équivalence suites-séries). $p \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$u_0 = p_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - p_{n-1}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Ainsi, étudier la suite p équivaut à étudier la série $\sum u_n$.

Proposition 3.5. $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge ssi $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Proposition 3.6. $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Proposition 3.7. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. S'équivalent :

- (i) $\sum u_n$ converge.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=p+1}^{p+q} u_k \right| \leq \varepsilon$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 1.52. □

Proposition 3.8. $s \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^s}$ converge ssi $s > 1$.

Définition 3.9 (Fonction ζ de Riemann). On définit :

$$\zeta : s \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Proposition 3.10.

- (i) ζ est décroissante.
- (ii) ζ est convexe.
- (iii) ζ est continue.
- (iv) $\lim_{+\infty} \zeta = 1$ et $\lim_{1+} \zeta = +\infty$.

II Absolue convergence

Définition 3.11 (Absolue convergence). $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 3.12. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. Utiliser la proposition 3.7. □

Vocabulaire 3.13 (Série semi-convergente). Une série convergente non absolument convergente est dite semi-convergente.

III Séries alternées

Proposition 3.14. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $a \searrow$. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p},$$

où $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ et $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. On peut aussi écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Démonstration. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes puis appliquer la proposition 1.15. \square

Définition 3.15 (Série alternée). $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (i) On dit que la série $\sum v_n$ est alternée lorsque $(-1)^n v_n$ garde un signe constant.
- (ii) On dit que $\sum v_n$ vérifie le critère spécifique des séries alternées lorsque $\sum v_n$ est alternée et la suite $(|v_n|)$ tend vers 0 en décroissant.

Proposition 3.16. Si $\sum v_n$ est une série vérifiant le critère spécifique des séries alternées, alors $\sum v_n$ converge, et on a les inégalités données dans la proposition 3.14.

IV Quelques applications

Application 3.17. $(\cos 1) \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. D'après la formule de Taylor avec reste intégral (proposition 2.14), écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos 1 = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \sin t \, dt}_{\varepsilon_n}.$$

Montrer que $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{(2n)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où :

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Comme $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ vérifie le critère spécifique des séries alternées, on a $\forall n \in \mathbb{N}, A_n - \frac{1}{(4n+2)!} \leq \cos 1 \leq A_n$, où $A_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. On obtient aisément des

inégalités strictes en écrivant la même inégalité au rang $(n+1)$. On suppose alors par l'absurde que $\cos 1 = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $q \mid (4n)!$ (par exemple, $n \geq q$ convient), on multiplie l'inégalité par $(4n)!$, et on a :

$$(4n)!A_n - \frac{1}{(4n+1)(4n+2)} < \frac{(4n)!}{q}p < (4n)!A_n,$$

ce qui est absurde. □

V Domination

Proposition 3.18. $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. On suppose que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- (i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- (ii) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 3.19. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument.

Proposition 3.20. $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et $v_n \geq 0$ à PCR. Alors :

- (i) $u_n \geq 0$ à PCR.
- (ii) Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 3.21. $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$. Alors :

- (i) $\sum u_n$ converge ssi $(a, b, c) \in \text{Vect}((1, -2, 1))$.
- (ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -a \ln 2$.

VI Intégrales impropres sur $[a, +\infty[$

Notation 3.22. Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Vocabulaire 3.23 (Continuité par morceaux sur un intervalle non borné). $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux (\mathcal{C}_{pm}^0) sur $[a, +\infty[$ lorsque, pour tout $b \in [a, +\infty[$, f est \mathcal{C}_{pm}^0 sur $[a, b]$.

Définition 3.24 (Intégrale impropre). $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ \mathcal{C}_{pm}^0 . On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ converge lorsque $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite dans \mathbb{K} quand $x \rightarrow +\infty$. On pose alors :

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f.$$

Proposition 3.25. Soit $\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, +\infty[, \mathbb{K}), \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \right\}$. Alors :

- (i) \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}^0([a, +\infty[, \mathbb{K})$.
- (ii) L'application $f \in \mathcal{A} \mapsto \int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire.
- (iii) Si $f \in \mathcal{A}$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f \geq 0$.

Proposition 3.26. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ \mathcal{C}_{pm}^0 . Alors $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi $\int_b^{+\infty} f$ converge. Et en cas de convergence :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.$$

Proposition 3.27. $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ \mathcal{C}_{pm}^0 . Soit $u \in [a, +\infty[^\mathbb{N}$, avec $u_0 = a$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

- (i) Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge.
- (ii) On suppose de plus que f est à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Alors $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge.

En cas de convergence :

$$\int_a^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f.$$

Proposition 3.28. $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ \mathcal{C}_{pm}^0 . Alors $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, +\infty[, \int_a^x f \leq M.$$

Proposition 3.29. $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ \mathcal{C}_{pm}^0 . On suppose que $0 \leq f \leq g$. Alors :

- (i) Si $\int_a^{+\infty} g$ converge alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
- (ii) Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

Proposition 3.30 (Intégrales de Bertrand). $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ converge ssi $(\alpha, \beta) > (1, 1)$.

VII Comparaison séries-intégrales

Proposition 3.31. $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ \mathcal{C}_{pm}^0 . On suppose que $f \geq 0$, $f \searrow$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Alors $\sum f(n)$ converge ssi $\int_0^{+\infty} f$ converge. En cas de convergence, on a :

$$\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f.$$

Proposition 3.32 (Séries de Bertrand). $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge ssi $(\alpha, \beta) > (1, 1)$.

VIII Comparaison logarithmique

VIII.1 Comparaison logarithmique

Proposition 3.33 (Comparaison logarithmique). $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

- (i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- (ii) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 3.34 (Critère de d'Alembert). $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- (i) Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- (ii) Si $\ell = 1$, alors $\sum u_n$ peut converger ou diverger.
- (iii) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

VIII.2 Règle du $n^\alpha u_n$

Méthode 3.35 (Règle du $n^\alpha u_n$). $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Pour déterminer la nature de $\sum u_n$, on peut étudier $\ln(n^\alpha u_n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. En effet :

- (i) Si $\ln(n^\alpha u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- (ii) Si $\ln(n^\alpha u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ avec $\alpha \leq 1$ (il suffit en fait de tester $\alpha = 1$), alors $\sum u_n$ diverge.

IX Asymptotique des sommes partielles des séries divergentes et des restes des séries convergentes

Proposition 3.36. $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et que $v_n \geq 0$ à PCR.

- (i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument et :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$

(ii) Si $\sum v_n$ diverge, alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

Idem en remplaçant \mathcal{O} par o ou \sim .

Proposition 3.37.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où γ est la constante d'Euler.

Démonstration. Écrire

$$\ln n = \sum_{k=2}^n \underbrace{(\ln k - \ln(k-1))}_{\sim \frac{1}{k}} \sim \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

en utilisant la proposition 3.36 car $\frac{1}{k} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Poser ensuite $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ et écrire $v_n = \sum_{k=2}^n (v_k - v_{k-1}) + v_1$, montrer que $v_k - v_{k-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, et continuer en utilisant la même méthode. \square

Proposition 3.38. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha > 1 \implies \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad (i)$$

$$\alpha < 1 \implies \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (ii)$$

Démonstration. Même méthode que pour la proposition 3.37. Par exemple, pour $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{k^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right)}_{\sim \frac{1}{k^\alpha}} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},$$

en utilisant la proposition 3.36 car $\frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. \square

Proposition 3.39 (Formule de Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Démonstration. Poser $A_n = \ln(n!) - \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \, dt$. Montrer que $A_n - A_{n-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en déduire que $A_n = L + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $L \in \mathbb{R}$. En déduire alors que $n! = K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, où $K \in \mathbb{R}_+^*$. Utiliser enfin des intégrales de Wallis pour montrer que $K = \sqrt{2\pi}$. \square

Chapitre 4

Compléments sur les Séries Numériques

I Exemples de transformations d'Abel

Méthode 4.1 (Transformation d'Abel). $(a, u) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On dispose d'informations sur la série $\sum u_n$ et on souhaite étudier la série $\sum a_n u_n$. On note $\sigma_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Une transformation d'Abel consiste à écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k u_k &= \sum_{k=0}^n a_k (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sigma_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \sigma_k \\ &= \sum_{k=0}^n \sigma_k (a_k - a_{k+1}) + \sigma_n a_{n+1}. \end{aligned}$$

Cette réécriture peut faciliter l'étude de $\sum a_n u_n$.

Application 4.2. $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.

- (i) Si $\alpha \in]-\infty, 0]$, alors $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- (ii) Si $\alpha \in]1, +\infty[$, alors $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente.
- (iii) Si $\alpha \in]0, 1]$ et $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge.
- (iv) Si $\alpha \in]0, 1]$ et $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est semi-convergente.

Démonstration. Seul le (iv) nécessite une démonstration. Pour cela, appliquer une transformation d'Abel en remarquant que $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \mathcal{O}(1)$. \square

Application 4.3. $(a, u) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Si $\sum u_n$ converge, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge absolument, alors $\sum a_n u_n$ converge.

Démonstration. Poser $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$, puis écrire :

$$\sum_{k=0}^n a_k u_k = \sum_{k=1}^n \underbrace{r_k (a_k - a_{k-1})}_{=o(|a_{k+1} - a_k|)} + a_0 r_0 - \underbrace{a_n r_{n+1}}_{=o(1)}.$$

\square

II Exemples d'études de séries alternées

Exemple 4.4. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{n}{\ln^\alpha n}}.$$

Alors $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Démonstration. On a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$; mais comme $\frac{(-1)^n}{n}$ ne garde pas un signe constant, la proposition 3.20 ne permet pas de conclure. On poursuit donc le développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n \ln^\alpha n} (1 + o(1)).$$

On peut alors conclure : $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$. \square

III Carrés sommables

Définition 4.5 ($\ell^2(\mathbb{N})$). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note :

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ est dite de carré sommable.

Remarque 4.6. $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- (i) $\sum |u_n| \text{ converge} \implies \sum |u_n|^2 \text{ converge}.$
- (ii) $\sum |u_n|^2 \text{ converge} \not\implies \sum u_n \text{ converge}.$

(iii) $\sum u_n$ converge $\not\Rightarrow \sum |u_n|^2$ converge.

Proposition 4.7. $\ell^2(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Cela repose sur l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$. □

Notation 4.8. On définit un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par :

$$\forall (u, v) \in (\ell^2(\mathbb{N}))^2, \langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

La norme hilbertienne $\|\cdot\|_2$ associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donnée par :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}), \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}.$$

Proposition 4.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$\forall (u, v) \in (\ell^2(\mathbb{N}))^2, \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2}.$$

IV Produits infinis

Définition 4.10 (Produit infini). $u \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. On dit que le produit infini $\prod u_n$ converge lorsque

$$\exists L \in \mathbb{C}^*, \prod_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L.$$

On note alors

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = L.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\prod u_n$ diverge.

Proposition 4.11. $u \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Si $\prod u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Proposition 4.12. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors $\prod (1 + a_n)$ converge ssi $\sum a_n$ converge.

Application 4.13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n -ième nombre premier. Alors $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

Démonstration. Supposer par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Poser $Q_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$. Montrer, en utilisant l'hypothèse $\sum \frac{1}{p_n}$ converge, que $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \in \mathbb{R}_+^*$. En remarquant que $Q_n = \prod_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k}\right)^j$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq Q_n \leq L.$$

C'est une contradiction puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge. \square

Proposition 4.14. $a \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\prod (1 + a_n)$ converge.

Démonstration. Noter $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, $\hat{P}_n = \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|)$. Montrer d'abord que \hat{P} converge et que $\hat{P} \nearrow$. Montrer ensuite, pour $1 \leq r \leq s$, que :

$$|P_s - P_r| \leq |\hat{P}_s - \hat{P}_r|.$$

En déduire que P est de Cauchy, donc $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \in \mathbb{C}$. Pour montrer que $L \neq 0$, écrire $\frac{1}{\hat{P}_n} = \prod_{k=1}^n (1 + b_k)$, avec $|b_k| \sim |a_k|$, d'où par ce qui précède : $\frac{1}{\hat{P}_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M \in \mathbb{C}$. Comme $LM = 1$, il vient $L \neq 0$. \square

V Systèmes dynamiques réels

Définition 4.15 (Suite f -récurrente). $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $u \in A^{\mathbb{N}}$ est dite f -récurrente lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour $a \in A$, il existe au plus une suite f -récurrente u t.q. $u_0 = a$. Si une telle suite existe, elle sera notée \hat{a} .

Proposition 4.16. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. u une suite f -récurrente. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$ et f est \mathcal{C}^0 en ω alors ω est un point fixe de f .

Vocabulaire 4.17. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\omega \in \mathring{A}$ un point fixe de f t.q. f soit dérivable en ω .

- (i) Si $|f'(\omega)| > 1$, alors ω est dit répulsif.
- (ii) Si $|f'(\omega)| = 1$, alors ω est dit indifférent.
- (iii) Si $|f'(\omega)| < 1$, alors ω est dit attractif.
- (iv) Si $|f'(\omega)| = 0$, alors ω est dit super-attractif.

Proposition 4.18. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. u une suite f -récurrente de limite ω . Si ω est répulsif, alors u stationne en ω .

Démonstration. Revenir à la définition de la dérivée comme limite de la pente et en déduire l'existence de $\rho > 0$ t.q. $]\omega - \rho, \omega + \rho[\subset A$ et :

$$\forall x \in]\omega - \rho, \omega + \rho[\setminus \{\omega\}, \left| \frac{f(x) - \omega}{x - \omega} \right| \geq 1.$$

□

Proposition 4.19. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\omega \in \mathring{A}$ un point fixe attractif de f . Alors il existe $\rho > 0$ t.q. $]\omega - \rho, \omega + \rho[\subset A$, \hat{a} est bien définie pour tout $a \in]\omega - \rho, \omega + \rho[$, et :

$$\forall \Delta \in]|f'(\omega)|, 1[, \hat{a}_n = \omega + \mathcal{O}(\Delta^n).$$

Proposition 4.20. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\omega \in \mathring{A}$ un point fixe attractif (non super-attractif) de f . $r > 0$ t.q. $[\omega - r, \omega + r] \subset A$. u une suite f -récurrente de limite ω ne stationnant pas en ω . On suppose que f est \mathcal{C}^∞ sur $]\omega - r, \omega + r[$. Alors :

$$\exists C \in \mathbb{R}^*, u_n - \omega \sim C (f'(\omega))^n.$$

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0, u_n \in [\omega - r, \omega + r]$. Pour $n \geq n_0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\zeta_n \in [\omega, u_n]$ t.q.

$$\frac{u_{n+1} - \omega}{u_n - \omega} = f'(\zeta_n).$$

Or $|\zeta_n - \omega| = \mathcal{O}(|u_n - \omega|) = \mathcal{O}(\Delta^n)$ pour tout $\Delta \in]|f'(\omega)|, 1[$, d'après la proposition 4.19. Donc $f'(\zeta_n) = f'(\omega) + \mathcal{O}(\Delta^n)$. Poser ensuite $v_n = \frac{u_n - \omega}{(f'(\omega))^n}$, et montrer que $\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = 1 + \mathcal{O}(\Delta^n)$. En déduire que $\sum (\ln |v_{n+1}| - \ln |v_n|)$ converge, donc $\ln |v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \in \mathbb{R}$. En déduire que $|v_n| = e^L + \mathcal{O}(\Delta^n)$, puis que $v_n \sim \pm e^L$. □

Exemple 4.21. u une suite sin-récurrente t.q. $u_1 > 0$. Alors :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Démonstration. Montrer d'abord que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On applique ensuite la méthode de l'agrandissement : on recherche $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in]0, +\infty[.$$

Pour cela, montrer que $\frac{1}{\sin^\beta x} - \frac{1}{x^\beta} \sim \frac{\beta}{6} x^{2-\beta}$. Ainsi, en prenant $\beta = 2$, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$. En déduire $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. □

VI Convergence commutative

Lemme 4.22. $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum u_{\sigma(n)}$ converge. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Proposition 4.23. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sum u_n$ converge absolument. $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. Appliquer le lemme 4.22 à $\sum |u_n|$ pour montrer l'absolue convergence de $\sum u_{\sigma(n)}$. Écrire ensuite u_n comme somme de termes positifs : $u_n = -(|u_n| - u_n) + |u_n|$. Les séries $\sum (|u_n| - u_n)$ et $\sum |u_n|$ convergent ; appliquer le lemme 4.22 à ces séries pour montrer l'égalité voulue. \square

Proposition 4.24. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ est semi-convergente. Alors :

(i) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ t.q. $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \ell.$$

(ii) Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} . Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\Lambda \left(\left(\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) = I.$$

VII Numération

Proposition 4.25. $b \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\nu \in \mathbb{N}$ et un unique $(\nu + 1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_\nu) \in \llbracket 0, b \rrbracket^{\nu+1}$ avec $a_\nu \neq 0$ t.q.

$$n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k b^k.$$

Proposition 4.26. $b \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour tout $x \in [0, 1[$, il existe une unique suite $u \in \llbracket 0, b \rrbracket^{(\mathbb{N}^*)}$ ne stationnant pas en $(b - 1)$ t.q.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{b^k}.$$

Cette écriture est appelée développement propre de x en base b .

Proposition 4.27. $b \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. $x \in [0, 1[$. Le développement propre de x en base b est ultimement périodique (i.e. périodique à PCR) ssi $x \in \mathbb{Q}$.

Chapitre 5

Séries Entières à Usage Probabiliste

I Permutation des bornes supérieures

Proposition 5.1. *I et J deux ensembles non vides. $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de \mathbb{R} . Alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$\sup_{i \in I} \left(\sup_{j \in J} x_{ij} \right) = \sup_{(i,j) \in I \times J} x_{ij} = \sup_{j \in J} \left(\sup_{i \in I} x_{ij} \right).$$

Démonstration. *Première étape.* Noter que

$$\forall (i_0, j_0) \in I \times J, x_{i_0 j_0} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} x_{ij}.$$

Passer au sup sur j_0 puis sur i_0 pour obtenir $\sup_{i \in I} \left(\sup_{j \in J} x_{ij} \right) \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} x_{ij}$.
Deuxième étape. Noter que

$$\forall (i_0, j_0) \in I \times J, x_{i_0 j_0} \leq \sup_{j \in J} x_{i_0 j} \leq \sup_{i \in I} \left(\sup_{j \in J} x_{ij} \right).$$

Passer au sup sur (i_0, j_0) pour en déduire $\sup_{i \in I} \left(\sup_{j \in J} x_{ij} \right) \geq \sup_{(i,j) \in I \times J} x_{ij}$. □

Remarque 5.2. *I et J deux ensembles non vides. $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de \mathbb{R} . Alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$\sup_{i \in I} \left(\inf_{j \in J} x_{ij} \right) \leq \inf_{j \in J} \left(\sup_{i \in I} x_{ij} \right).$$

II Généralités sur les séries entières

Notation 5.3. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On notera

$$I_a = \left\{ x \in \mathbb{R}_+, \sum a_n x^n \text{ converge} \right\},$$

et $R_a = \sup I_a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 5.4. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors $I_a = [0, R_a[$ ou $[0, R_a]$.

Notation 5.5. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On définit :

$$\varphi_a : x \in I_a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}_+.$$

Remarque 5.6. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Si a stationne en 0, alors φ_a est polynomiale.

Proposition 5.7. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Alors :

- (i) φ_a est croissante.
- (ii) φ_a est convexe.
- (iii) φ_a est continue.

Démonstration. (i) et (ii). Écrire la croissance (resp. convexité) des fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^N a_n x^n$ puis faire tendre $N \rightarrow +\infty$. (iii) φ_a étant convexe, elle est continue sur $\overset{\circ}{I}_a$. *Continuité en 0.* Soit $u \in \overset{\circ}{I}_a$ fixé. En notant $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{n-1}$, montrer que :

$$\forall x \in]0, u], |\varphi_a(x) - \varphi_a(0)| = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \leq Ax.$$

En déduire $\lim_{0+} \varphi_a = \varphi_a(0)$. *Continuité en R_a* (si $R_a \in I_a$). Par croissance de φ_a , $\lim_{R_a^-} \varphi_a$ existe et, en permutant les sup, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{R_a^-} \varphi_a &= \sup_{x \in [0, R_a[} \varphi_a(x) = \sup_{x \in [0, R_a[} \left(\sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^N a_n x^n \right) \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup_{x \in [0, R_a[} \sum_{n=0}^N a_n x^n \right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^N a_n R_a^n = \varphi_a(R_a). \end{aligned}$$

Donc φ_a est continue en R_a . □

Proposition 5.8. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Si $R_a \notin I_a$, alors

$$\lim_{R_a^-} \varphi_a = +\infty.$$

III Dérivabilité

Lemme 5.9. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. On définit $b \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (n+1)a_{n+1}$. Alors $R_b = R_a$.

Démonstration. *Première étape :* $[0, R_a[\subset [0, R_b]$. Soit $x \in [0, R_a[$. On fixe $y \in]x, R_a[$. Alors :

$$(n+1)a_{n+1}x^n = (n+1)\left(\frac{x}{y}\right)^n a_{n+1}y^n = o(a_{n+1}y^n).$$

Or $\sum a_{n+1}y^n$ converge donc $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ converge, d'où $x \in [0, R_b]$.
Deuxième étape : $[0, R_b[\subset [0, R_a]$. Soit $x \in [0, R_b[$. Alors $a_n x^n = o(na_n x^{n-1})$, et $\sum na_n x^{n-1}$ converge donc $\sum a_n x^n$ converge, d'où $x \in [0, R_a]$. \square

Proposition 5.10. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Alors φ_a est dérivable sur $[0, R_a[$ et :

$$\forall x \in [0, R_a[, \varphi'_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Démonstration. On définit $b \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (n+1)a_{n+1}$. On fixe $x_0 \in [0, R_a[$. Soit $x \in [0, R_a[\setminus \{x_0\}$ et $\varrho = \left| \frac{\varphi_a(x) - \varphi_a(x_0)}{x - x_0} - \varphi_b(x_0) \right|$. Montrer d'abord :

$$\varrho \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \left| \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{x - x_0} - (n+1)x_0^n \right|.$$

Appliquer ensuite le théorème de Rolle, pour $n \in \mathbb{N}$, pour obtenir l'existence de $\zeta_n \in]x_0, x[$ tel que :

$$\varrho \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} |\zeta_n^n - x_0^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} |x^n - x_0^n| = |\varphi_b(x) - \varphi_b(x_0)|.$$

La dérivabilité de φ_a en x_0 découle alors de la continuité de φ_b en x_0 . \square

Corollaire 5.11. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. Alors φ_a est \mathcal{C}^∞ sur $[0, R_a[$ et :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, R_a[, \varphi_a^{(q)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!} a_{n+q} x^n.$$

Proposition 5.12. $a \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, avec $R_a > 0$. On suppose que $R_a \in I_a$. Alors φ_a est dérivable en R_a ssi $\sum (n+1)a_{n+1}R_a^n$ converge. Dans ce cas :

$$\varphi'_a(R_a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}R_a^n.$$

Démonstration. Soit $p : x \in [0, R_a[\mapsto \frac{\varphi_a(R_a) - \varphi_a(x)}{R_a - x}$. Comme φ_a est convexe, p est croissante. Et :

$$\begin{aligned} \lim_{R_a^-} p &= \sup_{x \in [0, R_a[} \frac{\varphi_a(R_a) - \varphi_a(x)}{R_a - x} = \sup_{x \in [0, R_a[} \left(\sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^N a_{n+1} \frac{R_a^{n+1} - x^{n+1}}{R_a - x} \right) \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup_{x \in [0, R_a[} \sum_{n=0}^N a_{n+1} \frac{R_a^{n+1} - x^{n+1}}{R_a - x} \right) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^N (n+1) a_{n+1} R_a^n. \end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Dénombrabilité

I Équipotence

Définition 6.1 (Fonction). A, B deux ensembles. On définit :

$$\mathcal{F}(A, B) = \{f \subset A \times B, \forall a \in A, \exists ! b \in B, (a, b) \in f\}.$$

Les éléments de $\mathcal{F}(A, B)$ sont dits fonctions de A dans B . Si $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $a \in A$, on note $f(a)$ l'unique élément de B tel que $(a, f(a)) \in f$.

Définition 6.2. A, B deux ensembles.

- (i) On dit que A est équipotent à B , et on note $A \sim B$, lorsqu'il existe une bijection de A dans B .
- (ii) On dit que A s'injecte dans B , et on note $A \hookrightarrow B$, lorsqu'il existe une injection de A dans B .

Proposition 6.3. A, B deux ensembles. Alors il existe une injection de A dans B ssi il existe une surjection de B dans A .

Théorème 6.4. A, B deux ensembles. Alors $A \hookrightarrow B$ ou $B \hookrightarrow A$.

Théorème 6.5 (Théorème de Cantor-Bernstein). A, B deux ensembles. Si $A \hookrightarrow B$ et $B \hookrightarrow A$, alors $A \sim B$.

Démonstration (Première méthode). Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ deux injections. Par commodité, on suppose $A \cap B = \emptyset$. On appelle *généalogie* de $x \in A \cup B$ la suite des antécédents successifs de x par f et g . On note $A(\infty)$ l'ensemble des $a \in A$ admettant une généalogie infinie, $A(A)$ l'ensemble des $a \in A$ dont la généalogie s'arrête dans A , et $A(B)$ l'ensemble des $a \in A$ dont

la généalogie s'arrête dans B . On définit $B(\infty)$, $B(A)$ et $B(B)$ de manière analogue. On a alors $A = A(\infty) \sqcup A(A) \sqcup A(B)$, $B = B(\infty) \sqcup B(A) \sqcup B(B)$, $A(\infty) \sim B(\infty)$, $A(A) \sim B(A)$ et $A(B) \sim B(B)$, ce qui permet de construire une bijection de A dans B . \square

Démonstration (Deuxième méthode). Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ deux injections. On définit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ X \longmapsto A \setminus g(B \setminus f(X)) \end{cases}.$$

Montrer que φ est croissante pour l'inclusion puis que φ admet un point fixe X_0 (pour cela, considérer $\Delta = \{X \in \mathcal{P}(A), X \supset \varphi(X)\}$, montrer que Δ est stable par intersection quelconque, puis que Δ admet un plus petit élément pour l'inclusion X_0). On a alors $X_0 \sim f(X_0)$ et $B \setminus f(X_0) \sim g(B \setminus f(X_0)) = A \setminus X_0$, ce qui permet de construire une bijection de A dans B . \square

Théorème 6.6 (Théorème de Cantor). *E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E) \not\hookrightarrow E$.*

Démonstration. Supposer par l'absurde qu'il existe une surjection $s : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. Montrer alors que $\{x \in E, x \notin s(x)\} \notin s(E)$, ce qui est absurde. \square

II Ensembles finis

Définition 6.7 (Ensemble fini). *A un ensemble. On dit que A est fini lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \sim \llbracket 1, n \rrbracket$. Si tel est le cas, n est unique, on l'appelle cardinal de A et on le note $|A|$.*

Lemme 6.8. *$X \subset \mathbb{N}$. Alors X est fini ssi X est majoré.*

Proposition 6.9. *A, B deux ensembles.*

- (i) *On suppose que $A \sim B$. Alors A est fini ssi B est fini. Dans ce cas, $|A| = |B|$.*
- (ii) *On suppose que $A \hookrightarrow B$. Si B est fini, alors A est fini. Dans ce cas, $|A| \leq |B|$.*

Proposition 6.10. *A_1, \dots, A_p p ensembles finis.*

- (i) *$\prod_{k=1}^p A_k$ est fini et $|\prod_{k=1}^p A_k| = \prod_{k=1}^p |A_k|$.*
- (ii) *$A_1^{A_2}$ est fini et $|A_1^{A_2}| = |A_1|^{|A_2|}$.*
- (iii) *$\mathcal{P}(A_1)$ est fini et $|\mathcal{P}(A_1)| = 2^{|A_1|}$.*

III Ensembles dénombrables

Définition 6.11 (Ensemble dénombrable). *E un ensemble. On dit que E est dénombrable lorsque E est fini ou $E \sim \mathbb{N}$.*

Proposition 6.12. *E, F deux ensembles tels que $E \sim F$. Alors E est dénombrable ssi F est dénombrable.*

Lemme 6.13. *Toute partie de \mathbb{N} est dénombrable.*

Proposition 6.14. *Tout ensemble s'injectant dans un ensemble dénombrable est dénombrable.*

Lemme 6.15. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition 6.16. *Tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Proposition 6.17. *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Exemple 6.18. \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont dénombrables mais pas $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 6.19. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \nearrow$. Alors le nombre de points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Démonstration. Construire une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans \mathbb{Q} en associant à chaque point de discontinuité ω un élément de $\mathbb{Q} \cap]\lim_{\omega-} f, \lim_{\omega+} f[$. \square

IV Non dénombrabilité de \mathbb{R}

Lemme 6.20. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

Démonstration (Première méthode). Supposer par l'absurde qu'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Construire alors $u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (s(n))_n$. Montrer alors que $u \notin s(\mathbb{N})$. C'est une contradiction. \square

Démonstration (Deuxième méthode). Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ puis utiliser le théorème 6.6 pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \not\sim \mathbb{N}$. \square

Proposition 6.21. $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Montrer d'abord $\mathbb{R} \sim [0, 1[$ puis utiliser les développements propres en bases 2 et 3 pour obtenir $[0, 1[\hookrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow [0, 1[$. \square

Proposition 6.22. \mathbb{R} est non dénombrable.

Lemme 6.23. X, Y, Z trois ensembles. Alors $X^{Y \times Z} \sim (X^Y)^Z$.

Proposition 6.24. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$.

Démonstration. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim (\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{(\mathbb{N}^2)} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$
 et $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc $\mathbb{R} \sim \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. \square

Chapitre 7

Familles Sommables

I Introduction

I.1 Familles

Définition 7.1 (Famille). E, Λ deux ensembles, $\Lambda \neq \emptyset$. On appelle famille indexée par Λ toute application $a : \Lambda \rightarrow E$, qu'on notera alors $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Vocabulaire 7.2 (Famille finie ou dénombrable). Une famille $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est dite finie (resp. dénombrable) lorsque Λ est fini (resp. dénombrable).

Vocabulaire 7.3 (Sous-famille). $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de E . Si $K \subset \Lambda$, alors on dit que $(a_\lambda)_{\lambda \in K}$ est une sous-famille de $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Vocabulaire 7.4 (Famille obtenue par réindexation). $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de E . Si $\varphi : L \rightarrow \Lambda$ est une bijection, alors la famille $(a_{\varphi(\ell)})_{\ell \in L}$ est dite obtenue par réindexation à partir de $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

I.2 Quelques mots sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Notation 7.5. On se place dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c.f. définition 1.11) et on note

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty].$$

Proposition 7.6. Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ admet un sup dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 7.7 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). $u \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$.

- (i) On dit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

(ii) On dit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M.$$

Définition 7.8 (Séries dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). $u \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors on pose :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n.$$

I.3 Borne supérieure d'une famille

Définition 7.9 (Borne supérieure d'une famille). $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On définit :

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sup \{a_\lambda, \lambda \in \Lambda\}.$$

Proposition 7.10. $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. $(L_\delta)_{\delta \in \Delta}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\Lambda)$ telle que $\bigcup_{\delta \in \Delta} L_\delta = \Lambda$. Alors :

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sup_{\delta \in \Delta} \left(\sup_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \right).$$

Corollaire 7.11. $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :

$$\sup_{i \in I} \left(\sup_{j \in J} x_{ij} \right) = \sup_{(i,j) \in I \times J} x_{ij} = \sup_{j \in J} \left(\sup_{i \in I} x_{ij} \right).$$

II Familles sommables de $\overline{\mathbb{R}}_+$

II.1 Généralités

Remarque 7.12. Si $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille finie d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$, la notation $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ a bien un sens car l'addition est associative et commutative dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Notation 7.13. Si Λ est un ensemble, on note :

$$\mathcal{P}_f(\Lambda) = \{M \in \mathcal{P}(\Lambda), M \text{ est fini}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\Lambda).$$

Définition 7.14 (Somme d'une famille dénombrable). $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille dénombrable d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On pose :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sup_{M \in \mathcal{P}_f(\Lambda)} \sum_{\lambda \in M} a_\lambda.$$

Proposition 7.15. $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ deux familles dénombrables d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

- (i) Si $\forall \lambda \in \Lambda, 0 \leq a_\lambda \leq b_\lambda \leq +\infty$, alors $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$.
- (ii) Si $L \subset \Lambda$, alors $\sum_{\ell \in L} a_\ell \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$.

Proposition 7.16. $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille dénombrable d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\Lambda)$ vérifiant :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset I_{n+1}$,
- (ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \Lambda$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda \in I_n} a_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda.$$

Vocabulaire 7.17 (Exhaustion). Λ un ensemble dénombrable. On appelle exhaustion de Λ toute suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}_f(\Lambda)$ telle que :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset I_{n+1}$,
- (ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \Lambda$.

Proposition 7.18. Tout ensemble dénombrable admet une exhaustion.

Proposition 7.19. $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ deux familles dénombrables d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. $t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda + b_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda, \quad (i)$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (ta_\lambda) = t \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda. \quad (ii)$$

II.2 Associativité

Lemme 7.20 (Lemme d'associativité). $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille dénombrable d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. $(L_\delta)_{\delta \in \Delta}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{P}(\Lambda)$ vérifiant :

- (i) $\bigcup_{\delta \in \Delta} L_\delta = \Lambda$.
- (ii) $\forall (\delta_1, \delta_2) \in \Delta^2, \delta_1 \neq \delta_2 \implies L_{\delta_1} \cap L_{\delta_2} = \emptyset$.

Alors :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda.$$

Démonstration. (\leq) Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}_f(\Lambda), \sum_{\lambda \in M} a_\lambda \leq \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda$ puis passer au sup sur M . (\geq) Soit $D \in \mathcal{P}_f(\Delta)$. On suppose $\forall \delta \in D, \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda < +\infty$, sinon l'inégalité est claire. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\delta \in D$, on choisit $M_\delta \in \mathcal{P}_f(L_\delta)$ t.q.

$$\sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \leq \frac{\varepsilon}{1 + |D|} + \sum_{\lambda \in M_\delta} a_\lambda.$$

Il vient alors :

$$\sum_{\delta \in D} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \leq \varepsilon + \sum_{\delta \in D} \sum_{\lambda \in M_\delta} a_\lambda = \varepsilon + \sum_{\lambda \in \bigsqcup_{\delta \in D} M_\delta} a_\lambda \leq \varepsilon + \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda.$$

On en déduit $\sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$. \square

Proposition 7.21. $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille dénombrable d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

Proposition 7.22. $(a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

II.3 Lien avec les séries à terme général positif

Proposition 7.23. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de \mathbb{R}_+ . Alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Proposition 7.24. $(a_{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille d'éléments de \mathbb{R}_+ . Alors :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} a_{pq}.$$

III Familles sommables de réels

III.1 Généralités

Définition 7.25 (Famille sommable de réels positifs). $a \in (\mathbb{R}_+)^{\Lambda}$ dénombrable. On dit que a est sommable lorsque

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < +\infty.$$

Définition 7.26 (Famille sommable de réels). $a \in \mathbb{R}^\Lambda$ dénombrable. On dit que a est sommable lorsque

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| < +\infty.$$

Définition 7.27 (Somme d'une famille sommable). $a \in \mathbb{R}^\Lambda$ sommable. $I \in (\mathcal{P}_f(\Lambda))^\mathbb{N}$ une exhaustion de Λ . Alors la suite $(\sum_{\lambda \in I_n} a_\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de l'exhaustion choisie, et on pose :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda \in I_n} a_\lambda.$$

Notation 7.28 ($\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R})$). Λ dénombrable. On note :

$$\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R}) = \left\{ a \in \mathbb{R}^\Lambda, \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| < +\infty \right\}.$$

Proposition 7.29. Λ dénombrable. Alors :

- (i) $\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^Λ .
- (ii) L'application $a \in \mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{R}) \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

Proposition 7.30. Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Lemme 7.31 (Lemme d'associativité). $a \in \mathbb{R}^\Lambda$ sommable. $L \in (\mathcal{P}(\Lambda))^\Delta$ dénombrable avec :

- (i) $\bigcup_{\delta \in \Delta} L_\delta = \Lambda$.
- (ii) $\forall (\delta_1, \delta_2) \in \Delta^2, \delta_1 \neq \delta_2 \implies L_{\delta_1} \cap L_{\delta_2} = \emptyset$.

Alors :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\lambda \in L_\delta} a_\lambda.$$

III.2 Lien avec les séries

Proposition 7.32. $a \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. La famille a est sommable ssi $\sum a_n$ est absolument convergente. Si tel est le cas, alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Définition 7.33 (Produit de Cauchy). $(a, b) \in (\mathbb{R}^\mathbb{N})^2$. Le produit de Cauchy de a et b est la suite $c \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j.$$

Proposition 7.34. $(a, b) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. On note c le produit de Cauchy de a et b . Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors $\sum c_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Théorème 7.35 (Théorème de permutation des sommes). $a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^2)}$. On suppose que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < +\infty.$$

Alors :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

IV Familles sommables de complexes

Définition 7.36 (Famille sommable de complexes). $a \in \mathbb{C}^{\Lambda}$ dénombrable. On dit que a est sommable lorsque

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_{\lambda}| < +\infty.$$

Définition 7.37 (Somme d'une famille sommable). $a \in \mathbb{C}^{\Lambda}$ sommable. $I \in (\mathcal{P}_f(\Lambda))^{\mathbb{N}}$ une exhaustion de Λ . Alors la suite $(\sum_{\lambda \in I_n} a_{\lambda})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de l'exhaustion choisie, et on pose :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda \in I_n} a_{\lambda}.$$

Proposition 7.38. $a \in \mathbb{C}^{\Lambda}$ dénombrable. Alors a est sommable ssi $\Re(a)$ et $\Im(a)$ sont sommables. Et dans ce cas :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Re(a_{\lambda}) + i \sum_{\lambda \in \Lambda} \Im(a_{\lambda}).$$

Notation 7.39 $(\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{C}))$. Λ dénombrable. On note :

$$\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{C}) = \left\{ a \in \mathbb{C}^{\Lambda}, \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_{\lambda}| < +\infty \right\}.$$

Proposition 7.40. Λ dénombrable. Alors :

- (i) $\mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^Λ .
- (ii) L'application $a \in \mathcal{S}^1(\Lambda, \mathbb{C}) \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire.

Remarque 7.41. On généralise aux familles sommables de complexes toutes les propositions de la section III.

Chapitre 8

Espaces Probabilisables et Espaces Probabilisés

I Espaces probabilisables

Définition 8.1 (Espace probabilisable). Ω un ensemble. On appelle tribu sur Ω tout $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- (ii) $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$.
- (iii) $\forall A \in \mathcal{T}^I$ dénombrable, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que (Ω, \mathcal{T}) est un espace probabilisable. Les éléments de Ω sont dits issues ou aléas, et les éléments de \mathcal{T} sont dits événements.

Proposition 8.2. (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{T}^I \text{ dénombrable, } \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}.$$

II Opérations sur les tribus

Proposition 8.3. (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable, \mathcal{U} un ensemble, et $X : \mathcal{U} \rightarrow \Omega$. On pose :

$$\mathcal{T}_X = \{X^{-1}(V), V \in \mathcal{T}\}.$$

Alors \mathcal{T}_X est une tribu sur \mathcal{U} .

Définition 8.4 (Tribu engendrée). Ω un ensemble. $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On considère :

$$\Theta = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{T} \text{ est une tribu sur } \Omega \text{ et } \mathcal{T} \supset S\}.$$

Alors Θ admet un plus petit élément pour l'inclusion, appelé tribu engendrée par S , et noté $\mathcal{T}(S)$.

Exemple 8.5. Ω un ensemble. $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une partition dénombrable de Ω . Alors :

$$\mathcal{T}(S) = \left\{ \bigcup_{A \in M} A, M \subset S \right\}.$$

Définition 8.6 (Tribu produit). $(\Omega_1, \mathcal{T}_1), \dots, (\Omega_s, \mathcal{T}_s)$ des espaces probabilisables. On appelle tribu produit sur $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_s$ la tribu

$$\mathcal{T} \left(\bigcup_{i=1}^s \{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_s, A_i \in \mathcal{T}_i\} \right).$$

III Variables aléatoires

Définition 8.7 (Variable aléatoire). (Ω, \mathcal{T}) et $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ deux espaces probabilisables. On dit que $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ est une variable aléatoire lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{S}, X^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Notation 8.8. (Ω, \mathcal{T}) et $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ deux espaces probabilisables. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire. Alors, pour $V \in \mathcal{S}$, l'événement $X^{-1}(V)$ sera noté $\{X \in V\}$.

IV Probabilités

Définition 8.9 (Probabilité). (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ avec :

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (ii) Pour toute famille $A \in \mathcal{T}^I$ dénombrable d'événements deux à deux disjoints :

$$\mathbb{P} \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Proposition 8.10. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$.

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii) $A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- (iii) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- (iv) $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Proposition 8.11. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration. La suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell \in [0, 1]$. Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left((A_0) \sqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{n+1} \setminus A_n)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)) = \ell. \end{aligned}$$

□

Corollaire 8.12. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

V Loi d'une variable aléatoire

Notation 8.13. Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ est un espace probabilisable.

Définition 8.14 (Loi de probabilité). $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire. On pose :

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1] \\ V \longmapsto \mathbb{P}(X \in V) \end{cases}.$$

Alors \mathbb{P}_X est une probabilité sur $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, dite loi de probabilité de X .

Vocabulaire 8.15. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire. Q une probabilité sur $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. On dit que X suit la loi Q , et on note $X \hookrightarrow Q$, lorsque $\mathbb{P}_X = Q$.

Exemple 8.16 (Quelques lois classiques).

(i) Ω un ensemble fini non vide. On définit \mathbb{P} sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

\mathbb{P} est dite loi uniforme sur Ω , et notée $\mathcal{U}(\Omega)$.

(ii) $p \in [0, 1]$. On définit \mathbb{P} sur $(\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ par :

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{1\}) = p.$$

\mathbb{P} est dite loi de Bernoulli de paramètre p , et notée $\text{Be}(p)$.

(iii) $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit \mathbb{P} sur $(\llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(\llbracket 0, n \rrbracket))$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

\mathbb{P} est dite loi binomiale de paramètres n, p , et notée $\mathcal{B}(n, p)$.

(iv) $p \in]0, 1[$. On définit \mathbb{P} sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = p(1 - p)^{n-1}.$$

\mathbb{P} est dite loi géométrique de paramètre p , et notée $G(p)$.

(v) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit \mathbb{P} sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

\mathbb{P} est dite loi de Poisson de paramètre λ , et notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

VI Probabilités conditionnelles

Vocabulaire 8.17. $A \in \mathcal{T}$.

(i) On dit que A est presque certain lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

(ii) On dit que A est négligeable lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

Proposition 8.18. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$.

(i) Si A est presque certain alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

(ii) Si A est négligeable alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.

Définition 8.19 (Probabilité conditionnelle). $A \in \mathcal{T}$ non négligeable. On définit :

$$\mathbb{P}(\cdot | A) : \begin{cases} \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1] \\ B \longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}.$$

Alors $\mathbb{P}(\cdot | A)$ est une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) , dite probabilité conditionnelle sachant A .

Proposition 8.20. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ non négligeables. Alors :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}(B | A).$$

Vocabulaire 8.21 (Système complet d'événements). On dit qu'une famille $A \in \mathcal{T}^I$ est un système complet d'événements (SCE) lorsque $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Proposition 8.22. $A \in \mathcal{T}^I$ un système complet d'événements non négligeables dénombrable. $B \in \mathcal{T}$. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i).$$

Proposition 8.23 (Formule de Bayes). $A \in \mathcal{T}^I$ un système complet d'événements non négligeables dénombrable. $B \in \mathcal{T}$ non négligeable. Alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(B | A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)}.$$

VII Indépendance d'événements et de variables aléatoires

Définition 8.24 (Événements indépendants). $(A, B) \in \mathcal{T}^2$. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Proposition 8.25. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$. A et B sont indépendants ssi \overline{A} et B sont indépendants ssi \overline{A} et \overline{B} sont indépendants.

Définition 8.26 (Événements mutuellement indépendants). $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{T}^p$. On dit que A_1, \dots, A_p sont mutuellement indépendants lorsque

$$\forall J \subset \llbracket 1, p \rrbracket, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Proposition 8.27. $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{T}^p$. Si A_1, \dots, A_p sont mutuellement indépendants, alors A_1, \dots, A_p sont deux à deux indépendants.

Notation 8.28. Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $A \in \mathcal{T}$, on note :

$$A^\varepsilon = \begin{cases} A & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \bar{A} & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}.$$

Proposition 8.29. $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{T}^p$. Alors A_1, \dots, A_p sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \{-1, 1\}^p, \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^p A_i^{\varepsilon_i} \right) = \prod_{i=1}^p \mathbb{P}(A_i^{\varepsilon_i}).$$

Définition 8.30 (Variables aléatoires indépendantes). $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ n ensembles. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires. On dit que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes lorsque pour tout $(V_1, \dots, V_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$, les événements $(X_1 \in V_1), \dots, (X_n \in V_n)$ sont mutuellement indépendants dans $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Proposition 8.31. $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ n ensembles. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires. Alors X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes ssi

$$\forall (V_1, \dots, V_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{U}_i), \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in V_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in V_i).$$

Proposition 8.32. $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ $2n$ ensembles. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors :

- (i) Pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, les $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.
- (ii) Soit $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_t = n$, soit $Y_k = (X_{1+m_{k-1}}, \dots, X_{m_k})$ pour $k \in \llbracket 1, t \rrbracket$. Alors Y_1, \dots, Y_t sont mutuellement indépendantes.
- (iii) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $f_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$. Alors $(f_1 \circ X_1), \dots, (f_n \circ X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 8.33. Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\text{Be}(p)$. Alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Chapitre 9

Variables Aléatoires Discrètes

Notation 9.1. Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}))$ est un espace probabilisable.

I Introduction aux variables aléatoires discrètes

I.1 Variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs

Proposition 9.2. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une application, avec $X(\Omega)$ fini. S'équivalent :

- (i) X est une variable aléatoire de (Ω, \mathcal{T}) dans $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}))$.
- (ii) $\forall u \in \mathcal{U}, X^{-1}(\{u\}) \in \mathcal{T}$.

Proposition 9.3. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire, avec $X(\Omega)$ fini. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = a).$$

Définition 9.4 (Espérance). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire (on considère $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ comme espace probabilisable), avec $X(\Omega)$ fini. Alors l'espérance de X est par définition :

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \mathbb{P}(X = a).$$

Exemple 9.5.

- (i) $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(F)$, alors $E(X) = \frac{1}{|F|} \sum_{x \in F} x$.

(ii) $p \in [0, 1]$. Si $X \hookrightarrow \text{Be}(p)$, alors $E(X) = p$.

(iii) $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

Lemme 9.6. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire, avec $X(\Omega)$ fini. $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ un système complet d'événements dénombrable t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X|_{A_\lambda}$ est constante. On pose, pour $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda = X|_{A_\lambda} \in \mathbb{R}$. Alors :

$$E(X) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda).$$

Proposition 9.7. On pose \mathfrak{V} l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^\Omega$ tels que $X(\Omega)$ est fini et X est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Alors :

(i) \mathfrak{V} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^Ω .

(ii) L'espérance $E : \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

I.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 9.8 (Variable aléatoire discrète). Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ est dite discrète lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable.

Proposition 9.9. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une application, avec $X(\Omega)$ dénombrable. S'équivalent :

(i) X est une variable aléatoire discrète de (Ω, \mathcal{T}) dans $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}))$.

(ii) $\forall u \in \mathcal{U}$, $X^{-1}(\{u\}) \in \mathcal{T}$.

Proposition 9.10. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire discrète. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = a).$$

II Génie fonctionnel

Proposition 9.11. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire discrète, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ une application. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète de (Ω, \mathcal{T}) dans $(\mathcal{V}, \mathcal{P}(\mathcal{V}))$.

Proposition 9.12. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ n applications. On pose :

$$X : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n \\ \omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases}.$$

S'équivalent :

(i) X est une variable aléatoire discrète de (Ω, \mathcal{T}) dans $(\prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i, \mathcal{P}(\prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i))$.

(ii) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i est une variable aléatoire discrète de (Ω, \mathcal{T}) dans $(\mathcal{U}_i, \mathcal{P}(\mathcal{U}_i))$.

III Variables aléatoires discrètes réelles positives

Définition 9.13 (Espérance). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. On définit l'espérance de X par :

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \mathbb{P}(X = a) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On dit que X admet une espérance finie lorsque $E(X) < +\infty$, sinon on dit que l'espérance de X est infinie.

Exemple 9.14.

- (i) $p \in]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow G(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.
- (ii) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

Lemme 9.15. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ un système complet d'événements dénombrable t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X|_{A_\lambda}$ est constante. On pose, pour $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda = X|_{A_\lambda} \in \mathbb{R}$. Alors :

$$E(X) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda).$$

Proposition 9.16. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. S'équivalent :

- (i) $E(X) < +\infty$.
- (ii) Il existe un système complet d'événements dénombrable $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X|_{A_\lambda} = \varphi_\lambda \in \mathbb{R}$ et $\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda) < +\infty$.
- (iii) Pour tout système complet d'événements dénombrable $A \in \mathcal{T}^\Lambda$ t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$, $X|_{A_\lambda} = \varphi_\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda) < +\infty$.

Proposition 9.17. $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux variables aléatoires discrètes, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- (i) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- (ii) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.
- (iii) Si $0 \leq X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

IV Variables aléatoires discrètes de signe quelconque

Définition 9.18 (Espérance). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X est d'espérance finie lorsque $|X|$ admet une espérance finie. Si tel est le

cas, on définit à bon droit :

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \mathbb{P}(X = a) \in \mathbb{R}.$$

Lemme 9.19. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète d'espérance finie. $\mathcal{A} \in \mathcal{T}^\Lambda$ un système complet d'événements dénombrable t.q. $\forall \lambda \in \Lambda, X|_{A_\lambda}$ est constante. On pose, pour $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda = X|_{A_\lambda} \in \mathbb{R}$. Alors la famille $(\varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable et :

$$E(X) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \mathbb{P}(A_\lambda).$$

Proposition 9.20. On note \mathfrak{M}_1 l'ensemble des variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ admettant une espérance finie.

- (i) \mathfrak{M}_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^Ω .
- (ii) L'espérance $E : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

Proposition 9.21 (Formule de transfert). $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ une variable aléatoire discrète. $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors $f \circ X$ est d'espérance finie ssi la famille $(f(a) \mathbb{P}(X = a))_{a \in X(\Omega)}$ est sommable. Si tel est le cas :

$$E(f \circ X) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a) \mathbb{P}(X = a).$$

Proposition 9.22. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_1^2$. Alors :

$$X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y).$$

Proposition 9.23 (Inégalité de Markov). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire discrète. Si X est d'espérance finie, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Démonstration. Poser $Y = \mathbf{1}_{(X \geq \lambda)}$, et montrer que $E(Y) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$ et que $X \geq \lambda Y$. □

V Moments d'une variable aléatoire discrète

V.1 Moment d'ordre k

Définition 9.24 (Moment d'ordre k). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On dit que X possède un moment d'ordre k lorsque X^k est d'espérance finie.

Notation 9.25. On note \mathfrak{M}_k l'ensemble des variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ admettant un moment d'ordre k .

Proposition 9.26.

- (i) \mathfrak{M}_k est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^Ω .
- (ii) $\mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{M}_{k+1}$.

Proposition 9.27. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète.

- (i) Si X est bornée, alors $X \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{M}_k$.
- (ii) Si $X(\Omega)$ est fini, alors $X \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{M}_k$.

V.2 Moment d'ordre 2 et variance

Définition 9.28 (Variance). $X \in \mathfrak{M}_2$. On définit la variance de X par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Proposition 9.29. $X \in \mathfrak{M}_2$.

- (i) $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
- (ii) $V(X) \geq 0$.
- (iii) $\forall c \in \mathbb{R}, V(X + c) = V(X)$.

Lemme 9.30. $X \in \mathfrak{M}_2$. Si X est centrée, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) = E(\mathbf{1}_{|X| \geq \varepsilon}) = E(\mathbf{1}_{X^2 \geq \varepsilon^2}) \leq E\left(\frac{X^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$. □

Proposition 9.31 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). $X \in \mathfrak{M}_2$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Proposition 9.32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2$. Alors $XY \in \mathfrak{M}_1$ et :

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}.$$

VI Variables aléatoires indépendantes

VI.1 Couples de variables aléatoires indépendantes

Proposition 9.33. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ deux variables aléatoires discrètes. S'équivalent :

- (i) X et Y sont indépendantes.
- (ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B)$.
- (iii) $\forall (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $\mathbb{P}((X = u) \cap (Y = v)) = \mathbb{P}(X = u) \mathbb{P}(Y = v)$.

Vocabulaire 9.34. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2^2$. On dit que X et Y sont décorréliées lorsque

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Proposition 9.35. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2^2$. Si X et Y sont mutuellement indépendantes alors X et Y sont décorréliées.

Proposition 9.36. $(X, Y) \in \mathfrak{M}_2^2$. Si X et Y sont décorréliées, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

VI.2 n -uplets de variables aléatoires indépendantes

Proposition 9.37. $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ des ensembles. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires discrètes. S'équivalent :

- (i) X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.
- (ii) $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.
- (iii) $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, les événements $(X_1 = u_1), \dots, (X_n = u_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 9.38. $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ $2n$ ensembles. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors :

- (i) Pour tout $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, les $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.
- (ii) Soit $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_t = n$, soit $Y_k = (X_{1+m_{k-1}}, \dots, X_{m_k})$ pour $k \in \llbracket 1, t \rrbracket$. Alors Y_1, \dots, Y_t sont mutuellement indépendantes.
- (iii) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $f_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$. Alors $(f_1 \circ X_1), \dots, (f_n \circ X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

VI.3 Variance et indépendance

Proposition 9.39. $(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{M}_2^n$. On suppose que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes. Alors :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Proposition 9.40. $(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{M}_2^n$. On suppose que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Corollaire 9.41. $(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{M}_2^n$. On suppose que X_1, \dots, X_n sont de même loi et mutuellement indépendantes. On note $\mu = E(X_1)$, $V = V(X_1)$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V}{n\varepsilon^2}.$$

VI.4 Suites de variables aléatoires indépendantes

Définition 9.42 (Suite de variables aléatoires indépendantes). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ une variable aléatoire. On dit que les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_0, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Proposition 9.43. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_n$ une variable aléatoire. Alors les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes ssi, pour tout $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, les $(X_n)_{n \in F}$ sont mutuellement indépendantes.

VII Fonctions génératrices

VII.1 Généralités

Définition 9.44 (Fonction génératrice). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. On appelle fonction génératrice de X la fonction

$$\mathcal{G}_X : t \in [0, 1] \mapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbb{P}(X = n).$$

Proposition 9.45. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Alors :

- (i) \mathcal{G}_X est croissante, convexe et continue sur $[0, 1]$.

(ii) \mathcal{G}_X est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1[$.

(iii) La loi de X est caractérisée par \mathcal{G}_X :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{\mathcal{G}_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Proposition 9.46. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Alors $X \in \mathfrak{M}_1$ ssi \mathcal{G}_X est dérivable en 1. Si tel est le cas :

$$E(X) = \mathcal{G}'_X(1).$$

Proposition 9.47. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Alors $X \in \mathfrak{M}_2$ ssi \mathcal{G}_X est deux fois dérivable en 1. Si tel est le cas :

$$V(X) = \mathcal{G}''_X(1) + \mathcal{G}'_X(1) - \mathcal{G}'_X(1)^2.$$

VII.2 Fonctions génératrices et indépendance

Proposition 9.48. $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ deux variables aléatoires. Si X et Y sont mutuellement indépendantes, alors :

$$\mathcal{G}_{X+Y} = \mathcal{G}_X \mathcal{G}_Y.$$

Corollaire 9.49. $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ n variables aléatoires. Si X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors :

$$\mathcal{G}_{X_1 + \dots + X_n} = \mathcal{G}_{X_1} \cdots \mathcal{G}_{X_n}.$$

Exemple 9.50.

(i) $p \in [0, 1]$. Si $X \hookrightarrow \text{Be}(p)$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \mathcal{G}_X(t) = (1 - p) + pt.$$

(ii) $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \mathcal{G}_X(t) = ((1 - p) + pt)^n.$$

(iii) $p \in]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow G(p)$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \mathcal{G}_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}.$$

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \mathcal{G}_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

VII.3 Étude d'un exemple

Application 9.51. $X, N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ deux variables aléatoires. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} avec :

- (i) $N, X_1, \dots, X_n, \dots$ sont mutuellement indépendantes.
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de X .

On pose :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

i.e. $\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. Alors :

- (i) $\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_X$.
- (ii) Si $X \in \mathfrak{M}_1$ et $N \in \mathfrak{M}_1$, alors $S \in \mathfrak{M}_1$ et :

$$E(S) = E(N)E(X).$$

- (iii) Si $X \in \mathfrak{M}_2$ et $N \in \mathfrak{M}_2$, alors $S \in \mathfrak{M}_2$ et :

$$V(S) = E(X)^2 V(N) + E(N) V(X).$$

Démonstration. (i) Montrer d'abord que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k) \mathbb{P}(N = n),$$

puis injecter cette expression dans la définition de $\mathcal{G}_S(t)$ et intervertir les sommes. (ii) et (iii) Utiliser (i). □

Chapitre 10

Suites de Variables Aléatoires

Notation 10.1. Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

I Lemme de Borel-Cantelli

Lemme 10.2 (Lemme de Borel-Cantelli). $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On note E l'événement : “*parmi les A_n , une infinité sont réalisés*”. Autrement dit :

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p.$$

On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors $\mathbb{P}(E) = 0$.

Démonstration. D'après le corollaire 8.12, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_p) = 0.$$

□

Proposition 10.3. $A \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On note E l'événement : “*parmi les A_n , une infinité sont réalisés*”. On suppose que les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants. On a alors :

- (i) Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(E) = 0$.
- (ii) Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(E) = 1$.

Démonstration. (i) Utiliser le lemme 10.2. (ii) Écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{p=n}^N A_p \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)) \right) \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p=n}^N \exp(-\mathbb{P}(A_p)) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\exp \left(- \sum_{p=n}^N \mathbb{P}(A_p) \right) \right] \right) = 1.
 \end{aligned}$$

□

II Convergence de suites de variables aléatoires

Lemme 10.4. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) $\left(X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \right)$ est un événement.
- (ii) $((X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge})$ est un événement.

Démonstration. (i) Écrire :

$$\left(X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \left(|X_n - \lambda| \leq \frac{1}{\alpha} \right).$$

(ii) Utiliser le théorème 1.52 pour écrire :

$$((X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n_0} \bigcap_{q \geq n_0} \left(|X_p - X_q| \leq \frac{1}{\alpha} \right).$$

□

Définition 10.5 (Convergence en probabilité, convergence presque-sûre).
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers λ , et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \lambda,$$

lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

(ii) On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers λ , et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \lambda,$$

lorsque :

$$\mathbb{P} \left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \right) = 1.$$

Proposition 10.6. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors :

- (i) $\left(E(X_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right) \implies \left(E(|X_n|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right).$
- (ii) $\left(E(|X_n|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right) \implies \left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0 \right).$
- (iii) $\left(\sum E(|X_n|) \text{ converge} \right) \implies \left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \right).$
- (iv) $\left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \right) \implies \left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0 \right).$

Démonstration. (i) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 9.32).

(ii) Utiliser l'inégalité de Markov (proposition 9.23). (iii) En supposant que

$\sum E(|X_n|)$ converge, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right) &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \left(|X_k| \geq \frac{1}{\alpha} \right) \right) \\
 &\geq 1 - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \left(|X_k| \geq \frac{1}{\alpha} \right) \right) \\
 &= 1 - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq n} \left(|X_k| \geq \frac{1}{\alpha} \right) \right) \\
 &\geq 1 - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P} \left(|X_k| \geq \frac{1}{\alpha} \right) \\
 &\geq 1 - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha E(|X_k|) = 1.
 \end{aligned}$$

(iv) On suppose que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} (|X_k| \geq \varepsilon)\right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (|X_k| \geq \varepsilon)\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} \left(|X_k| \geq \frac{1}{\alpha}\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\right) = 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 10.7. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(S_n^2) = n$.
- (ii) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|S_{2n+2}|) = E(|S_{2n+1}|)$.
 (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|S_{2n+1}|) = E(|S_{2n}|) + \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.
- (iv) $E(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

III Loi des grands nombres

Théorème 10.8 (Loi faible des grands nombres). $X \in \mathfrak{M}_2$. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de X . Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} E(X).$$

Démonstration. Voir le corollaire 9.41.

□

Théorème 10.9 (Loi forte des grands nombres). $X \in \mathfrak{M}_2$. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de X . Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} E(X).$$

Démonstration (Cas où $X \in \mathfrak{M}_4$). On note $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $\Gamma = \left(Y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(X) \right)$. En utilisant la proposition 8.11 et le corollaire 8.12, montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{\Gamma}) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq n_0} \left(|Y_n| \geq \frac{1}{p} \right) \right) \right) \\ &\leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P} \left(|Y_n| \geq \frac{1}{p} \right) \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P} \left(Y_n^4 \geq \frac{1}{p^4} \right) \right) \\ &\leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} p^4 E(Y_n^4) \right). \end{aligned}$$

Montrer alors que $p^4 E(Y_n^4) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en déduire que la série $\sum p^4 E(Y_n^4)$ converge, et donc que $\mathbb{P}(\bar{\Gamma}) = 0$. \square

Démonstration (Cas où $X \in \mathfrak{M}_2$). On se place dans le cas où $E(X) = 0$. On pose $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer d'abord que $\mathbb{P}(|\mu_{n^2}| \geq \varepsilon) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par le lemme 10.2, en déduire que $(|\mu_{n^2}| \geq \varepsilon)$ ne se produit presque-sûrement que pour un nombre fini de valeurs de n , donc $\mu_{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$. Poser alors

$$V_n = \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} (\mu_k - \mu_{n^2})^2.$$

Montrer que $E(V_n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire avec la proposition 10.6 que $V_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.

0. Écrire alors :

$$\mu_N = \mu_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor^2} + \left(\mu_N - \mu_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor^2} \right).$$

Or $\mu_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor^2} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$, et :

$$0 \leq \left(\mu_N - \mu_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor^2} \right)^2 \leq V_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor^2} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

Donc $\mu_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$. \square

IV Convergence en loi

Notation 10.10. Dans cette section, $((\Omega_n, \mathcal{T}_n, \mathbb{P}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'espaces probabilisés.

Définition 10.11 (Convergence en loi). $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. S'équivalent :

- (i) $\forall a \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_n(X_n = a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = a),$
- (ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P}_n(X_n \in A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \in A).$

On dit alors que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ en loi.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Clair (i) \Rightarrow (ii) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbb{P}_n(X_n \in A)$. Alors $u \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ donc $\Lambda(u) \neq \emptyset$ (d'après le théorème 1.43). Soit donc $\lambda \in \Lambda(u)$, soit φ extraction t.q. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. On a :

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{P}_f(A), \mathbb{P}(X \in B) &= \sum_{b \in B} \mathbb{P}(X \in b) = \sum_{b \in B} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\varphi(n)}(X_{\varphi(n)} = b) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\varphi(n)}(X_{\varphi(n)} \in B) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{\varphi(n)}(X_{\varphi(n)} \in A) = \lambda. \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sup_{B \in \mathcal{P}_f(A)} \mathbb{P}(X \in B) \leq \lambda.$$

En raisonnant de même avec \overline{A} , on obtient $\mathbb{P}(X \in \overline{A}) \leq 1 - \lambda$. Il vient $\lambda = \mathbb{P}(X \in A)$. Donc $\mathbb{P}(X \in A)$ est la seule valeur d'adhérence de u , d'où $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \in A)$ (c.f. proposition 1.44). \square

Proposition 10.12. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. S'équivalent :

- (i) $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ en loi.
- (ii) $\forall t \in [0, 1], \mathcal{G}_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}_X(t).$

Exemple 10.13. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \llbracket \lceil \lambda \rceil, +\infty \rrbracket$, soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ en loi.

Chapitre 11

Espaces Métriques et Espaces Normés

I Notion de distance

Définition 11.1 (Distance). E un ensemble. On dit que $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une distance lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) Séparation : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (ii) Symétrie : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) Inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Dans ce cas, on dit que (E, d) est un espace métrique.

Définition 11.2 (Isométrie). (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On dit qu'une bijection $\varphi : E \rightarrow F$ est une isométrie lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = \delta(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Définition 11.3 (Espace induit). (E, d) un espace métrique, $X \subset E$. Alors $d|_{X^2}$ est une distance sur X , et l'espace métrique $(X, d|_{X^2})$ est dit espace induit par (E, d) sur X .

II Suites convergentes dans un espace métrique

Définition 11.4 (Convergence). (E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}, \ell \in E$. On dit que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(u_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

Proposition 11.5. (E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}, \ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ssi $d(u_n, \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Proposition 11.6. (E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}, (\ell, \ell') \in E^2$. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Proposition 11.7 (Valeur d'adhérence). (E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle valeur d'adhérence de u tout $\lambda \in E$ tel qu'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Exemple 11.8. E un ensemble. On muni E de la distance

$$d : \begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto 1 - \mathbf{1}_{\{x\}}(y) \end{cases}.$$

$u \in E^{\mathbb{N}}, \ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ssi u stationne en ℓ .

III Parties bornées d'un espace métrique

Définition 11.9 (Boules et sphères). (E, d) un espace métrique. $\omega \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$. On définit :

- (i) $\mathcal{B}_o(\omega, r) = \{x \in E, d(x, \omega) < r\}$ (boule ouverte).
- (ii) $\mathcal{B}_f(\omega, r) = \{x \in E, d(x, \omega) \leq r\}$ (boule fermée).
- (iii) $\mathcal{S}(\omega, r) = \{x \in E, d(x, \omega) = r\}$ (sphère).

Définition 11.10 (Partie bornée). (E, d) un espace métrique. $A \subset E$. S'équivalent :

- (i) $\exists \omega \in E, \exists r > 0, \mathcal{B}_f(\omega, r) \supset A$.
- (ii) $\forall \omega \in E, \exists r > 0, \mathcal{B}_f(\omega, r) \supset A$.

On dit alors que A est bornée.

Proposition 11.11. Toute réunion finie de parties bornées est bornée.

Proposition 11.12. (E, d) un espace métrique. $A \subset E$. Alors A est bornée ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq M.$$

Proposition 11.13. (E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si u converge, alors u est bornée (i.e. $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné).

IV Définition d'un espace normé

Notation 11.14. Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 11.15 (Norme). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que $\mathfrak{N} : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une \mathbb{K} -norme lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) Séparation : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \mathfrak{N}(x) > 0$.
- (ii) Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathfrak{N}(\lambda x) = |\lambda| \cdot \mathfrak{N}(x)$.
- (iii) Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, \mathfrak{N}(x + y) \leq \mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(y)$.

Dans ce cas, on dit que (E, \mathfrak{N}) est un espace normé.

Proposition 11.16. $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors :

$$\forall (u, v) \in E^2, \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|.$$

V Distance associée à une norme

Proposition 11.17. $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors l'application

$$d : \begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$$

est une distance sur E , donc E a une structure d'espace métrique.

Proposition 11.18. $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. $u \in E^{\mathbb{N}}, \ell \in E$. Alors :

- (i) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff \|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (ii) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \implies \|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$.

Proposition 11.19. $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On pose :

$$\mathfrak{V} = \{u \in E^{\mathbb{N}}, u \text{ converge}\}.$$

Alors :

- (i) \mathfrak{V} est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
- (ii) L'application $\mathfrak{L} : \begin{cases} \mathfrak{V} \longrightarrow E \\ u \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \end{cases}$ est linéaire.
- (iii) L'ensemble $\text{Ker } \mathfrak{L} = \left\{ u \in E^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{V} .

Définition 11.20 (Série dans un espace normé). $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Si tel est le cas, on pose :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

VI Comparaison de normes

Proposition 11.21. E un \mathbb{K} -espace vectoriel. \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux normes sur E . S'équivalent :

- (i) $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \mathfrak{N}_2(x) \leq A\mathfrak{N}_1(x)$.
- (ii) Toute partie de E bornée pour \mathfrak{N}_1 est bornée pour \mathfrak{N}_2 .
- (iii) Pour tout $u \in E^{\mathbb{N}}$, si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ au sens de \mathfrak{N}_1 , alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ au sens de \mathfrak{N}_2 .

On dit alors que \mathfrak{N}_1 est plus fine que \mathfrak{N}_2 .

Vocabulaire 11.22 (Normes équivalentes). Deux normes sont dites équivalentes lorsque chacune est plus fine que l'autre.

Proposition 11.23. E un \mathbb{K} -espace vectoriel. \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux normes sur E . S'équivalent :

- (i) \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 sont équivalentes.
- (ii) $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, A\mathfrak{N}_1(x) \leq \mathfrak{N}_2(x) \leq B\mathfrak{N}_1(x)$.
- (iii) L'ensemble des parties de E bornées pour \mathfrak{N}_1 est égal à l'ensemble des parties de E bornées pour \mathfrak{N}_2 .
- (iv) L'ensemble des suites de E convergeant vers 0 au sens de \mathfrak{N}_1 est égal à l'ensemble des suites de E convergeant vers 0 au sens de \mathfrak{N}_2 .
- (v) Pour $\ell \in E$, l'ensemble des suites de E convergeant vers ℓ au sens de \mathfrak{N}_1 est égal à l'ensemble des suites de E convergeant vers ℓ au sens de \mathfrak{N}_2 .

Exemple 11.24. On se place dans $E = \mathcal{C}^0([-2, 2], \mathbb{R})$. On pose

$$\psi : x \in [-2, 2] \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-2, -1] \\ x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}.$$

En utilisant le théorème de Weierstrass, il existe une suite $P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|P_n - \psi\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On se place alors dans le sous-espace $\mathbb{R}[X]$, on définit

deux normes \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 par :

$$\mathfrak{N}_1 : Q \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{[-2,-1]} |Q| \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}_2 : Q \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{[1,2]} |Q|.$$

Alors $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$ au sens de \mathfrak{N}_1 et $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ au sens de \mathfrak{N}_2 . Donc \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 ne sont pas équivalentes.

Chapitre 12

Topologie d'un Espace Métrique

Notation 12.1. Dans tout le chapitre, (E, d) est un espace métrique.

I Ouverts

I.1 Généralités

Définition 12.2 (Ouvert). On appelle ouvert de (E, d) tout $\Omega \subset E$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, \exists r > 0, \mathcal{B}_o(\omega, r) \subset \Omega.$$

Proposition 12.3.

- (i) \emptyset et E sont des ouverts.
- (ii) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- (iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Proposition 12.4.

- (i) Une boule ouverte est un ouvert.
- (ii) Le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert.

Proposition 12.5. $\Omega \subset E$. Ω est un ouvert ssi Ω s'écrit comme réunion de boules ouvertes.

Démonstration. (\Rightarrow) Pour $\omega \in \Omega$, choisir $r_\omega > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r_\omega) \subset \Omega$. Écrire alors :

$$\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{B}_o(\omega, r_\omega).$$

□

I.2 Intérieur d'une partie

Définition 12.6 (Intérieur). $A \subset E$. On pose :

$$\mathcal{U}(A) = \{\Omega \in \mathcal{P}(E), \Omega \subset A \text{ et } \Omega \text{ est un ouvert}\}.$$

Alors $\mathcal{U}(A)$ possède un plus grand élément (au sens de \subset), appelé intérieur de A et noté $\overset{\circ}{A}$.

Démonstration. Montrer que $\bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(A)} \Omega = \max \mathcal{U}(A)$. □

Proposition 12.7. $A, B \subset E$. Si $A \subset B$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Proposition 12.8. $A \subset E$. Alors :

$$\overset{\circ}{A} = \{\omega \in E, \exists r > 0, \mathcal{B}_o(\omega, r) \subset A\}.$$

Proposition 12.9. $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ un espace normé. $\omega \in \mathfrak{V}$, $r > 0$. Alors :

$$\overbrace{\mathcal{B}_f(\omega, r)}^{\circ} = \mathcal{B}_o(\omega, r).$$

II Fermés

II.1 Généralités

Définition 12.10 (Fermé). $F \subset E$. On dit que F est un fermé lorsque $E \setminus F$ est un ouvert.

Proposition 12.11.

- (i) \emptyset et E sont des fermés.
- (ii) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
- (iii) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Proposition 12.12.

- (i) Une boule fermée est un fermé.
- (ii) Le complémentaire d'une boule ouverte est un fermé.

Proposition 12.13. $F \subset E$. Alors F est un fermé ssi

$$\forall u \in F^{\mathbb{N}}, \forall \ell \in E, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \implies \ell \in F.$$

Corollaire 12.14. d_1, d_2 deux distances sur E . Si d_1 et d_2 sont équivalentes (i.e. d_1 et d_2 définissent la même notion de convergence), alors d_1 et d_2 définissent les mêmes fermés (et donc les mêmes ouverts).

II.2 Adhérence d'une partie

Définition 12.15 (Adhérence). $A \subset E$. On pose :

$$\mathcal{F}(A) = \{F \in \mathcal{P}(E), F \supset A \text{ et } F \text{ est un fermé}\}.$$

Alors $\mathcal{F}(A)$ possède un plus petit élément (au sens de \subset), appelé adhérence de A et noté \overline{A} .

Proposition 12.16. $A \subset E$. Alors :

$$E \setminus \overline{A} = \overbrace{(E \setminus A)}^{\circ}.$$

Proposition 12.17. $A, B \subset E$. Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposition 12.18. $A \subset E, \omega \in E$. S'équivalent :

- (i) $\omega \in \overline{A}$.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, d(a, \omega) < \varepsilon$.
- (iii) $\exists u \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$.

Proposition 12.19. $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ un espace normé. $\omega \in \mathfrak{V}, r > 0$. Alors :

$$\overline{\mathcal{B}_o(\omega, r)} = \mathcal{B}_f(\omega, r).$$

III Densité et séparabilité

Définition 12.20 (Partie dense). $A \subset E$. S'équivalent :

- (i) $\overline{A} = E$.
- (ii) $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, d(x, a) < \varepsilon$.
- (iii) $\forall x \in E, \exists u \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
- (iv) $\forall \Omega$ ouvert non vide de $E, \Omega \cap A \neq \emptyset$.

Si tel est le cas, on dit que A est dense dans E .

Définition 12.21 (Espace séparable). On dit que l'espace métrique (E, d) est séparable lorsqu'il existe $D \subset E$ dénombrable et dense dans E .

Proposition 12.22. \mathbb{R}^d est séparable (car \mathbb{Q}^d est dénombrable et dense dans \mathbb{R}^d).

Proposition 12.23. $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$. Alors $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (muni de $\|\cdot\|_{\infty}$) est séparable.

Démonstration. On pose :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathbb{R}} &= \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a, b], f(x) = P(x)\}, \\ \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} &= \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \exists P \in \mathbb{Q}[X], \forall x \in [a, b], f(x) = P(x)\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ d'après le théorème de Weierstrass. En utilisant la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , en déduire que $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer de plus que $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable (car $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{Q}[X]$). \square

IV Topologie induite

Vocabulaire 12.24 (Trace). $X, A \subset E$. On dit que $A \cap X$ est la trace de A sur X .

Lemme 12.25. $X \subset E$. $\omega \in X$, $r > 0$. On note $\delta = d|_{X^2}$. Alors :

$$\mathcal{B}_o^{(X, \delta)}(\omega, r) = X \cap \mathcal{B}_o^{(E, d)}(\omega, r),$$

où $\mathcal{B}_o^{(X, \delta)}(\omega, r)$ (resp. $\mathcal{B}_o^{(E, d)}(\omega, r)$) est la boule ouverte de centre ω et de rayon r au sens de (X, δ) (resp. (E, d)).

Proposition 12.26. $X \subset E$.

- (i) Les ouverts de $(X, d|_{X^2})$ sont les traces sur X des ouverts de (E, d) .
- (ii) Les fermés de $(X, d|_{X^2})$ sont les traces sur X des fermés de (E, d) .

Proposition 12.27. $X \subset E$.

- (i) Si X est un ouvert, alors les ouverts de $(X, d|_{X^2})$ sont les ouverts de (E, d) qui sont inclus dans X .
- (ii) Si X est un fermé, alors les fermés de $(X, d|_{X^2})$ sont les fermés de (E, d) qui sont inclus dans X .

V Notion de voisinage

Définition 12.28 (Voisinage). $a \in E$, $V \subset E$. On dit que V est un voisinage de a lorsque :

$$\exists r > 0, \mathcal{B}_o(a, r) \subset V.$$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

Proposition 12.29. $a \in E$.

- (i) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(a)$.
- (ii) Si $(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}(a)^n$, alors $\bigcap_{k=1}^n V_k \in \mathcal{V}(a)$.

Proposition 12.30.

- (i) $\Omega \subset E$. Alors Ω est ouvert ssi $\forall \omega \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}(\omega)$.
- (ii) $A \subset E$. Alors $\mathring{A} = \{\omega \in E, A \in \mathcal{V}(\omega)\}$.
- (iii) $A \subset E$. Alors $\overline{A} = \{\omega \in E, \forall V \in \mathcal{V}(\omega), V \cap A \neq \emptyset\}$.
- (iv) $u \in E^{\mathbb{N}}, \ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \in V.$$

Chapitre 13

Continuité

Notation 13.1. Dans tout le chapitre, (E, d) , (F, δ) et (G, \mathfrak{d}) sont des espaces métriques, et $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

I Limite

Définition 13.2 (Limite). $f : A \subset E \rightarrow F$. $\omega \in \overline{A}$, $\ell \in F$. On dit que ℓ est une limite de f en ω lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, d(x, \omega) \leq \eta \implies \delta(f(x), \ell) \leq \varepsilon.$$

Proposition 13.3. $f : A \subset E \rightarrow F$. $\omega \in \overline{A}$, $\ell \in F$. S'équivalent :

(i) ℓ est une limite de f en ω .

(ii) $\forall u \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega \implies f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Proposition 13.4. $f : A \subset E \rightarrow F$. $\omega \in \overline{A}$. Si f possède une limite ℓ en ω , alors celle-ci est unique. On note alors :

$$\lim_{\omega} f = \ell.$$

Proposition 13.5. $f : A \subset E \rightarrow F$. $\omega \in \overline{A}$. Si $\lim_{\omega} f$ existe, alors $\lim_{\omega} f \in \overline{f(A)}$.

Proposition 13.6. $f : A \subset E \rightarrow F$. $B \subset A$, $\omega \in \overline{B}$. Si $\lim_{\omega} f$ existe, alors $\lim_{\omega} f|_B$ existe et :

$$\lim_{\omega} f = \lim_{\omega} f|_B.$$

Proposition 13.7. $f : A \subset E \rightarrow F$, $g : B \subset F \rightarrow G$, avec $f(A) \subset B$. $\omega \in \overline{A}$. On suppose que f admet une limite en ω , et on note $\ell = \lim_{\omega} f$. On suppose de plus que g admet une limite en ℓ (cela a un sens car $\ell \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$). Alors :

$$\lim_{\omega} (g \circ f) = \lim_{\ell} g.$$

Proposition 13.8. $f : A \subset E \rightarrow F$. $\omega \in \overline{A}$, $\ell \in F$. Alors ℓ est limite de f en ω ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(\omega), f(W \cap A) \subset V.$$

II Continuité en un point

Définition 13.9 (Continuité en un point). $f : E \rightarrow F$, $\omega \in E$. On dit que f est continue en ω lorsque $\lim_{\omega} f$ existe.

Proposition 13.10. $f : E \rightarrow F$, $\omega \in E$. S'équivalent :

- (i) f est continue en ω .
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, \omega) \leq \eta \implies \delta(f(x), f(\omega)) \leq \varepsilon$.
- (iii) $\forall u \in E^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega \implies f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\omega)$.
- (iv) $\forall V \in \mathcal{V}(f(\omega)), \exists W \in \mathcal{V}(\omega), f(W) \subset V$.
- (v) $\forall V \in \mathcal{V}(f(\omega)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(\omega)$.

Définition 13.11 (Frontière). $A \subset E$. On appelle frontière de A l'ensemble :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Proposition 13.12. $A \subset E$.

- (i) $\text{Fr}(A) = \{\omega \in E, \forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}_o(\omega, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{B}_o(\omega, \varepsilon) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset\}$.
- (ii) $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$.
- (iii) $\text{Fr}(E \setminus A) = \text{Fr}(A)$.
- (iv) $\text{Fr}(A)$ est un fermé.

Exemple 13.13. $A \subset E$. Alors l'ensemble des points de continuité de la fonction $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ est $E \setminus \text{Fr}(A)$.

Proposition 13.14. $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$. $\omega \in E$. Si f est continue en ω et g est continue en $f(\omega)$, alors $(g \circ f)$ est continue en ω .

Proposition 13.15. $f : E \rightarrow F$. $A \subset E$, $\omega \in A$. Si f est continue en ω , alors $f|_A$ est continue en ω .

III Le miracle de la continuité

III.1 Caractérisation topologique de la continuité

Définition 13.16 (Continuité d'une fonction). $f : E \rightarrow F$ est dite continue si f est continue en tout point de E . On notera $\mathcal{C}^0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues de E dans F .

Théorème 13.17. $f : E \rightarrow F$. S'équivalent :

- (i) f est continue.
- (ii) Pour tout V ouvert de (F, δ) , $f^{-1}(V)$ est un ouvert de (E, d) .
- (iii) Pour tout Y fermé de (F, δ) , $f^{-1}(Y)$ est un fermé de (E, d) .

III.2 Fonctions lipschitziennes et höldériennes

Définition 13.18 (Fonction lipschitzienne). $f : E \rightarrow F$. $\rho \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est ρ -lipschitzienne lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, \delta(f(x), f(y)) \leq \rho \cdot d(x, y).$$

Définition 13.19 (Fonction contractante). $f : E \rightarrow F$. On dit que f est contractante lorsqu'il existe $\rho \in [0, 1[$ t.q. f est ρ -lipschitzienne.

Proposition 13.20. Toute fonction lipschitzienne est continue.

Définition 13.21 (Fonction höldérienne). $f : E \rightarrow F$. $r \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est r -höldérienne lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E^2, \delta(f(x), f(y)) \leq M (d(x, y))^r.$$

Proposition 13.22. Toute fonction höldérienne est continue.

III.3 Distance à une partie

Définition 13.23 (Distance à une partie). $x \in E$. $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On définit :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition 13.24. $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. La fonction $D_A : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d(x, A) \end{cases}$ est 1-lipschitzienne donc continue.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Écrire

$$\forall a \in A, D_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

En passant à l'inf, en déduire $D_A(x) \leq d(x, y) + D_A(y)$, i.e. $D_A(x) - D_A(y) \leq d(x, y)$. En permutant x et y , obtenir $-(D_A(x) - D_A(y)) \leq d(x, y)$, d'où $|D_A(x) - D_A(y)| \leq d(x, y)$. \square

Vocabulaire 13.25. $x \in E$. $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On dit que $d(x, A)$ est réalisée lorsqu'il existe $a \in A$ t.q. $d(x, a) = d(x, A)$.

Proposition 13.26. $A \subset E$, A non fermé. Alors il existe $x \in E$ t.q. $d(x, A)$ n'est pas réalisée.

Proposition 13.27. \mathfrak{U} un sous-espace vectoriel fermé de \mathfrak{V} . Alors (i) ou (ii) est vraie :

- (i) $\forall x \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{U}$, $d(x, \mathfrak{U})$ est réalisée.
- (ii) $\forall x \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{U}$, $d(x, \mathfrak{U})$ n'est pas réalisée.

De plus, (i) et (ii) sont effectifs.

Proposition 13.28. $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Pour $r > 0$, on pose :

$$A(r) = \{x \in E, d(x, A) < r\}.$$

Alors :

$$A(r) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{B}_o(a, r).$$

Application 13.29. $A, B \subset E$. On suppose que A et B sont fermés et que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe U et V ouverts t.q. $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Démonstration. On définit : $U = \{x \in E, d(x, A) < d(x, B)\}$, puis $V = \{x \in E, d(x, B) < d(x, A)\}$. Vérifier que U et V conviennent. \square

IV Qu'est-ce qu'une propriété topologique ?

Définition 13.30 (Topologie d'un espace). La topologie de l'espace métrique (E, d) est l'ensemble des ouverts de (E, d) .

Vocabulaire 13.31 (Propriété purement topologique). Une propriété \mathcal{P} d'un espace métrique (E, d) est dite purement topologique si, pour toutes distances d_1 et d_2 définissant la même topologie sur E , (E, d_1) vérifie \mathcal{P} ssi (E, d_2) vérifie \mathcal{P} .

Lemme 13.32. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ssi pour tout Ω ouvert de (E, d) contenant ℓ , $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \in \Omega$.

Exemple 13.33. $A \subset E$, $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$, $f : E \rightarrow F$.

- (i) La propriété “ A est un ouvert de (E, d) ” est purement topologique.
- (ii) La propriété “ A est un fermé de (E, d) ” est purement topologique.
- (iii) La propriété “ $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ” est purement topologique.
- (iv) La propriété “ f est continue” est purement topologique.
- (v) La propriété “ A est une partie bornée de (E, d) ” n’est pas purement topologique.

Définition 13.34 (Homéomorphisme). On appelle homéomorphisme de (E, d) sur (F, δ) toute bijection $f : E \rightarrow F$ t.q. f est continue et f^{-1} est continue. On dit alors que E et F sont homéomorphes, et on note $E \sim F$.

Proposition 13.35. \sim est une relation d’équivalence entre les espaces métriques.

Proposition 13.36. $f : E \rightarrow F$ un homéomorphisme. Alors :

$$\forall u \in E^{\mathbb{N}}, \forall \ell \in E, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell).$$

Proposition 13.37. $f : E \rightarrow F$ une bijection. S’équivalent :

- (i) f est un homéomorphisme.
- (ii) $\forall V \in \mathcal{P}(E), V$ est un ouvert de $(E, d) \iff f(V)$ est un ouvert de (F, δ) .
- (iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(E), Y$ est un fermé de $(E, d) \iff f(Y)$ est un fermé de (F, δ) .

Exemple 13.38. \mathbb{U} n’est homéomorphe à aucune partie de \mathbb{R} .

Démonstration. Soit par l’absurde $A \subset \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow A$ un homéomorphisme. En notant $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(e^{it}) \in \mathbb{R}$, montrer que f est continue et que $A = f([0, 2\pi])$, et en déduire que A est un segment. Considérer alors l’application $g : z \in \mathbb{U} \mapsto -z \in \mathbb{U}$: g n’admet aucun point fixe, et pourtant $(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})$ est une fonction continue d’un segment sur lui-même donc admet un point fixe. En déduire une contradiction. \square

Exemple 13.39. Pour tout $z_0 \in \mathbb{U}$, $\mathbb{U} \setminus \{z_0\}$ est homéomorphe à \mathbb{R} .

V Espace produit

Proposition 13.40. d_1, d_2 deux distances sur un ensemble E . Pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, on note \mathcal{T}_i la topologie de (E, d_i) (i.e. l’ensemble des ouverts de (E, d_i)), et $\mathcal{C}_i = \left\{ (u, \ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \text{ au sens de } d_i \right\}$. Alors :

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2.$$

Définition 13.41 (Distance compatible avec un produit). $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. Une distance d sur $E_1 \times \dots \times E_s$ est dite (d_1, \dots, d_s) -compatible lorsque, pour toute suite $u \in (E_1 \times \dots \times E_s)^{\mathbb{N}}$, et pour tout $\ell \in E_1 \times \dots \times E_s$ on a :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \text{ au sens de } d \iff \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, u_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_i \text{ au sens de } d_i$$

Proposition 13.42. $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. Alors il existe des distances (d_1, \dots, d_s) -compatibles.

Proposition 13.43. $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. On munit $E = E_1 \times \dots \times E_s$ d'une distance (d_1, \dots, d_s) -compatible.

(i) Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, la fonction

$$\pi_i : \begin{cases} E \longrightarrow E_i \\ x \longmapsto x_i \end{cases}$$

est continue.

(ii) Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et $a \in E$, la fonction

$$s_{i,a} : \begin{cases} E_i \longrightarrow E \\ x_i \longmapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_s) \end{cases}$$

est continue.

Proposition 13.44. (E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ d'une distance (d, d) -compatible. Alors l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

Proposition 13.45. (X, \mathfrak{d}) un espace métrique. $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. On munit $E = E_1 \times \dots \times E_s$ d'une distance (d_1, \dots, d_s) -compatible. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, soit $f_i : X \rightarrow E_i$, puis soit

$$f : \begin{cases} X \longrightarrow E \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_s(x)) \end{cases}.$$

Alors f est continue ssi pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, f_i est continue.

Définition 13.46 (Fonction séparément continue). (X, \mathfrak{d}) un espace métrique. $(E_1, d_1), \dots, (E_s, d_s)$ s espaces métriques. On munit $E = E_1 \times \dots \times E_s$ d'une distance (d_1, \dots, d_s) -compatible. On considère $f : E \rightarrow X$. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et $a \in E$, on définit :

$$f_{i,a} = f \circ s_{i,a},$$

où $s_{i,a}$ est définie dans la proposition 13.43. On dit que f est séparément continue lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et pour tout $a \in E$, $f_{i,a}$ est continue.

Proposition 13.47. *Toute fonction continue est séparément continue.*

Proposition 13.48. *Il existe des fonctions séparément continues mais pas continues.*

Démonstration. Montrer que la fonction suivante est séparément continue mais pas continue :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

□

VI Génie fonctionnel

Notation 13.49. *Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .*

Proposition 13.50. *Les fonctions $\|\cdot\| : \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $+$: $\mathfrak{V}^2 \rightarrow \mathfrak{V}$ et \cdot : $\mathbb{K} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$ sont continues.*

Corollaire 13.51. *La fonction $\times : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.*

Proposition 13.52.

- (i) $\mathcal{C}^0(E, \mathfrak{V})$ est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{V}^E .
- (ii) $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de \mathbb{K}^E (i.e. c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^E stable par \times et contenant 1).

Proposition 13.53. *On note $\mathfrak{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K} (autrement dit, $\mathfrak{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(\mathbb{K}^n)}$ engendré par les $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$). Alors :*

$$\mathfrak{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}).$$

Remarque 13.54. *Les résultats précédents peuvent être écrits en utilisant la continuité en un point.*

VII Continuité dans un espace induit

Proposition 13.55. *$f : E \rightarrow F$, $X \subset E$. Si f est continue en tout point de X , alors $f|_X$ est continue.*

Vocabulaire 13.56 (Recouvrement ouvert). *On appelle recouvrement ouvert de (E, d) toute famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de (E, d) t.q.*

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = E.$$

Proposition 13.57. $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de (E, d) . $f : E \rightarrow F$. S'équivalent :

- (i) f est continue.
- (ii) $\forall i \in I$, $f|_{\Omega_i}$ est continue.

Proposition 13.58. (F_1, \dots, F_p) un p -uplet de fermés de (E, d) t.q. $E = F_1 \cup \dots \cup F_p$. $f : E \rightarrow F$. S'équivalent :

- (i) f est continue.
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f|_{F_i}$ est continue.

VIII Prolongements en tous genres

Proposition 13.59. $f : A \subset E \rightarrow F$, $\omega \in \overline{A} \setminus A$. S'équivalent :

- (i) $\lim_{\omega} f$ existe.
- (ii) Il existe une unique fonction $\tilde{f} : A \cup \{\omega\} \rightarrow F$ t.q. $\tilde{f}|_A = f$ et \tilde{f} est continue en ω .

On dit alors que \tilde{f} est le prolongement par continuité de f en ω .

Proposition 13.60. $(f, g) \in (\mathcal{C}^0(E, F))^2$. $A \subset E$. Alors :

$$(\forall x \in A, f(x) = g(x)) \implies (\forall x \in \overline{A}, f(x) = g(x)).$$

Chapitre 14

Compacité

Notation 14.1. Dans tout le chapitre, (E, d) et (F, δ) sont des espaces métriques, et $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

I Valeurs d'adhérence

Proposition 14.2 (Valeur d'adhérence). $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle valeur d'adhérence de u tout $\lambda \in E$ tel qu'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Proposition 14.3. $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $\Lambda(u) = \{\ell\}$.

Lemme 14.4. $u \in E^{\mathbb{N}}$.

$$\Lambda(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\}}.$$

Proposition 14.5. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Alors $\Lambda(u)$ est un fermé.

Lemme 14.6. Si Y est un fermé non vide et majoré de \mathbb{R} , alors $\sup Y \in Y$.

Proposition 14.7. $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est bornée, alors $\Lambda(u)$ est non vide, fermé et borné. Donc $\Lambda(u)$ possède un plus petit élément et un plus grand élément, que l'on note respectivement $\underline{\lim} u$ et $\overline{\lim} u$.

II Compacité

Définition 14.8 (Espace métrique compact). *On dit que l'espace métrique (E, d) est compact lorsque :*

$$\forall u \in E^{\mathbb{N}}, \Lambda(u) \neq \emptyset.$$

Exemple 14.9. *Tout espace métrique fini est compact.*

Proposition 14.10. *La compacité est une propriété purement topologique. Supposons en effet que (E, d) et (F, δ) sont homéomorphes. Alors (E, d) est compact ssi (F, δ) est compact.*

Définition 14.11 (Partie compacte d'un espace métrique). *$X \subset E$. On dit que X est une partie compacte de (E, d) lorsque l'espace métrique $(X, d|_{X^2})$ est compact.*

Proposition 14.12. *$X \subset E$. S'équivalent :*

- (i) *X est une partie compacte de E .*
- (ii) *$\forall u \in X^{\mathbb{N}}, \Lambda(u) \cap X \neq \emptyset$.*

Proposition 14.13. *\emptyset est compact.*

Proposition 14.14. *Toute réunion finie de parties compactes est compacte.*

Proposition 14.15. *Tout produit fini d'espaces compacts est compact.*

Exemple 14.16. *$u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$. Soit $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Alors K est une partie compacte de E .*

III Compacts et fermés bornés

Proposition 14.17. *Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée et bornée.*

Théorème 14.18. *$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On munit \mathbb{K}^n de $\|\cdot\|_{\infty}$. Alors les compacts de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ sont les fermés bornés de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\infty})$.*

Proposition 14.19. *On suppose que (E, d) est un espace métrique compact. Alors les parties compactes de (E, d) sont les fermés de (E, d) .*

IV Image continue d'un compact

Théorème 14.20. *On suppose que (E, d) est compact. Si $f : E \rightarrow F$ est continue, alors $f(E)$ est une partie compacte de (F, δ) .*

Corollaire 14.21. *K une partie compacte de (E, d) (qui est un espace métrique quelconque). Si $f : E \rightarrow F$ est continue, alors $f(K)$ est une partie compacte de (F, δ) .*

Théorème 14.22. *K une partie compacte non vide de (E, d) . On munit \mathbb{R} de la distance usuelle. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f|_K$ est bornée et atteint ses bornes.*

Définition 14.23 (Diamètre). *$X \subset E$, $X \neq \emptyset$. On définit :*

$$\text{diam } X = \sup_{(a,b) \in X^2} d(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Proposition 14.24. *$X \subset E$, $X \neq \emptyset$. Alors :*

- (i) *X est borné ssi $\text{diam } X < +\infty$.*
- (ii) *Si X est compact, alors $\text{diam } X$ est atteint.*

Proposition 14.25. *K une partie compacte non vide de (E, d) . Alors :*

$$\forall x \in E, \exists k \in K, d(x, k) = d(x, K).$$

Proposition 14.26. *K_1, \dots, K_s des parties compactes de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$. Alors $K_1 + \dots + K_s$ est une partie compacte de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. Considérons $\varphi : (x_1, \dots, x_s) \in K_1 \times \dots \times K_s \mapsto x_1 + \dots + x_s$. $K_1 \times \dots \times K_s$ est compact (comme produit de compacts) et φ est continue, donc $K_1 + \dots + K_s = \varphi(K_1 \times \dots \times K_s)$ est compact. \square

V Théorème de Heine

Définition 14.27 (Uniforme continuité). *Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite uniformément continue lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \leq \eta \implies \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Proposition 14.28. *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Théorème 14.29 (Théorème de Heine). *On suppose que (E, d) est compact. Soit $f : E \rightarrow F$. Alors f est continue ssi f est uniformément continue.*

Démonstration. (\Leftarrow) Voir proposition 14.28. (\Rightarrow) Par contraposée : on suppose que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in E^2, d(x, y) \leq \eta$ et $\delta(f(x), f(y)) > \varepsilon_0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(x_n, y_n) \in E^2$ t.q.

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon_0.$$

E étant supposé compact, il existe φ extractrice et $\lambda \in E$ t.q. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda$. Montrer alors $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda$. Si f était continue, on aurait $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\lambda)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\lambda)$, donc $\delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui est impossible car $\forall n \in \mathbb{N}, \delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) > \varepsilon_0$. \square

Application 14.30. $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. $\varepsilon > 0$.

- (i) Il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escaliers t.q. $\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon$.
- (ii) Il existe $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ affine par morceaux et \mathcal{C}^0 t.q. $\|f - \psi\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

VI Suites admettant une unique valeur d'adhérence

Théorème 14.31. On suppose que (E, d) est compact. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si u possède une unique valeur d'adhérence, alors u converge.

Démonstration. On écrit $\Lambda(u) = \{\lambda\}$. Supposer par l'absurde que u ne converge pas vers λ . Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ t.q. $A = \{n \in \mathbb{N}, d(u_n, \lambda) > \varepsilon_0\}$ est infini. Soit alors $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ une extraction. Extraire de $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergente et en déduire une contradiction. \square

Proposition 14.32. K une partie compacte non vide de (E, d) . On suppose que :

$$\forall \omega \in E, \exists ! k \in K, d(\omega, k) = d(\omega, K).$$

On définit alors $\pi : E \rightarrow K$ par :

$$\forall \omega \in E, d(\omega, \pi(\omega)) = d(\omega, K).$$

Alors π est continue.

Démonstration. Soit $\omega \in E$. Montrons que π est continue en ω . Soit donc $u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \omega$. Soit alors $\lambda \in \Lambda(u)$ et φ une extractrice associée. Montrons que $\lambda = \pi(\omega)$. On a :

$$\begin{aligned} (u_{\varphi(n)}, \pi(u_{\varphi(n)})) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (\omega, \lambda) \\ \text{donc } d(u_{\varphi(n)}, K) &= d(u_{\varphi(n)}, \pi(u_{\varphi(n)})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} d(\omega, \lambda). \end{aligned}$$

Or par continuité de $x \mapsto d(x, K)$, on a :

$$d(u_{\varphi(n)}, K) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(\omega, K).$$

Donc $d(\omega, \lambda) = d(\omega, K)$, donc $\lambda = \pi(\omega)$. Ainsi $\emptyset \subsetneq \Lambda(\pi(u)) \subset \{\pi(\omega)\}$, donc $\Lambda(\pi(u)) = \{\pi(\omega)\}$, donc par le théorème 14.31, $\pi(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi(\omega)$ et π est continue en ω . \square

Exemple 14.33. $(\mathfrak{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. K une partie convexe compacte non vide de \mathfrak{V} . Alors :

$$\forall \omega \in \mathfrak{V}, \exists ! k \in K, d(\omega, k) = d(\omega, K).$$

VII Compacts, bijections continues et homéomorphismes

Théorème 14.34. On suppose que (E, d) est compact. Si $f : E \rightarrow F$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue. Pour cela, soit Y un fermé de (E, d) . Montrons que $(f^{-1})^{-1}(Y)$ est un fermé de (F, δ) . Comme E est compact, Y est compact (d'après la proposition 14.19). Donc $(f^{-1})^{-1}(Y) = f(Y)$ est compact (d'après le corollaire 14.21), donc fermé. \square

VIII Intersections décroissantes de fermés

Théorème 14.35. On suppose que (E, d) est compact. Soit $\Gamma \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ t.q.

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n$ est fermé.
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n \neq \emptyset$.
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$.

Alors :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \neq \emptyset.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n \in \Gamma_n$. Montrer que $\emptyset \subsetneq \Lambda(u) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$. \square

IX Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 14.36 (Propriété de Borel-Lebesgue). *On dit que l'espace métrique (E, d) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue lorsque, pour tout recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i \in I}$ de (E, d) , il existe $J \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :*

$$E = \bigcup_{j \in J} \Omega_j.$$

En d'autres termes, (E, d) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si de tout recouvrement ouvert de (E, d) on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Lemme 14.37. *On suppose que (E, d) est compact. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (\omega_1, \dots, \omega_n) \in E^n, E = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_o(\omega_i, \varepsilon).$$

Démonstration. Raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (\omega_1, \dots, \omega_n) \in E^n, E \not\supseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_o(\omega_i, \varepsilon)$. Construire alors $u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \implies d(u_m, u_n) \geq \varepsilon.$$

Extraire de u une sous-suite convergente et aboutir à une contradiction. \square

Corollaire 14.38. *Si (E, d) est compact, alors (E, d) est séparable.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, poser $(x_1^{(n)}, \dots, x_{s_n}^{(n)}) \in E^{s_n}$ t.q.

$$E = \bigcup_{k=1}^{s_n} \mathcal{B}_o\left(x_k^{(n)}, \frac{1}{n}\right).$$

Poser ensuite :

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ x_k^{(n)}, k \in \llbracket 1, s_n \rrbracket \right\}.$$

D est clairement dénombrable ; montrer que $\overline{D} = E$. \square

Lemme 14.39. *On suppose que (E, d) est compact. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de (E, d) . Alors :*

$$\exists \rho > 0, \forall x \in K, \exists i \in I, \mathcal{B}_o(x, \rho) \subset \Omega_i.$$

Démonstration. Raisonner par l'absurde et construire $x \in E^{(\mathbb{N}^*)}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I, \mathcal{B}_o\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset \Omega_i.$$

Extraire de x une sous-suite convergente et aboutir à une contradiction. \square

Théorème 14.40. *S'équivalent :*

- (i) (E, d) est compact.
- (ii) (E, d) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Lemmes 14.37 et 14.39. (ii) \Rightarrow (i) Pour $u \in E^{\mathbb{N}}$, écrire $\Lambda(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$, avec $V_n = \{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\}$. Si $\Lambda(u) = \emptyset$, alors $(E \setminus \overline{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert, donc $\exists J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $\bigcap_{j \in J} \overline{V_j} = \emptyset$. En déduire que $\exists n \in \mathbb{N}$, $V_n = \emptyset$ (en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \supset V_{n+1}$). Absurde. \square

Corollaire 14.41. *On suppose que (E, d) est compact. Si $(\Gamma_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de (E, d) t.q. $\bigcap_{i \in I} \Gamma_i = \emptyset$, alors il existe $J \in \mathcal{P}_f(I)$ t.q.*

$$\bigcap_{j \in J} \Gamma_j = \emptyset.$$

Chapitre 15

Topologie d'un Espace Normé

Notation 15.1. Dans tout le chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Applications linéaires continues

I.1 Généralités

Notation 15.2. On notera :

$$\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F).$$

Proposition 15.3. $\mathcal{L}_C(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 15.4. $f \in \mathcal{L}(E, F)$. S'équivalent :

- (i) f est continue.
- (ii) f est continue en 0.
- (iii) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq A \|x\|_E$.
- (iv) Il existe \mathcal{U} ouvert non vide de E tel que $f(\mathcal{U})$ est borné.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair. (ii) \Rightarrow (iii) Si f est continue en 0, alors il existe $\eta > 0$ t.q. $\forall x \in E, \|x\|_E \leq \eta \implies \|f(x)\|_F \leq 1$. En déduire que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta} \|x\|_E$. (iii) \Rightarrow (i) f est A -lipschitzienne donc continue. (iii) \Rightarrow (iv) Clair. (iv) \Rightarrow (iii) Par contraposée : on suppose $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in E, \|f(x)\|_F > A \|x\|_E$. Soit alors \mathcal{U} un ouvert non vide de E . Soit $\omega \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, 2r) \subset \mathcal{U}$. Pour $M \in \mathbb{R}_+$, soit $A = \frac{M + \|f(\omega)\|_E}{r}$, soit $u \in E$ t.q. $\|f(u)\|_F > A \|u\|_E$. Montrer alors que $\|f(x)\|_F \geq M$, avec $x = \omega + r \frac{u}{\|u\|_E} \in \mathcal{U}$. Donc $f(\mathcal{U})$ n'est pas borné. \square

I.2 Norme d'opérateur

Définition 15.5 ($\|\cdot\|$). Pour $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$, on pose :

$$\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Lemme 15.6.

$$\forall f \in \mathcal{L}_C(E, F), \|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 15.7. $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_C(E, F)$, dite norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Proposition 15.8. $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$. Alors :

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E.$$

Lemme 15.9. $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq A \|x\|_E$. Alors $\|f\| \leq A$.

Proposition 15.10. $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$, $g \in \mathcal{L}_C(F, G)$. Alors $(g \circ f) \in \mathcal{L}_C(E, G)$ et :

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|.$$

I.3 Exemples

Exemple 15.11. On pose $\ell^1(\mathbb{N}) = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum u_n \text{ converge absolument}\}$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u \text{ est bornée}\}$. On munit $\ell^1(\mathbb{N})$ de $\|\cdot\|_1$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on pose :

$$\varphi_a : u \in \ell^1(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \in \mathbb{C}.$$

Alors l'application $a \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto \varphi_a \in \mathcal{L}_C(\ell^1(\mathbb{N}), \mathbb{C})$ est linéaire, bijective et continue et $\forall a \in \ell^\infty(\mathbb{N}), \|a\|_\infty = \|\varphi_a\|$.

Exemple 15.12. On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_1$. Pour $g \in E$, on pose :

$$\psi_g : f \in E \mapsto \int_0^1 fg \in \mathbb{R}.$$

Alors l'application $g \in E \mapsto \psi_g \in \mathcal{L}_C(E, \mathbb{R})$ est linéaire, injective et continue (avec E muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{L}_C(E, \mathbb{R})$ muni de la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|$) et $\forall g \in E, \|g\|_\infty = \|\psi_g\|$.

II Comparaison de normes

Notation 15.13. \mathfrak{N} une norme sur E . On notera :

- (i) $\mathfrak{B}(E, \mathfrak{N}) = \{X \subset E, X \text{ est bornée au sens de } (E, \mathfrak{N})\}$.
- (ii) $\mathfrak{C}\mathfrak{V}_0(E, \mathfrak{N}) = \left\{u \in E^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ au sens de } (E, \mathfrak{N})\right\}$.
- (iii) $\mathfrak{C}\mathfrak{V}(E, \mathfrak{N}) = \left\{(u, \ell) \in E^{\mathbb{N}} \times E, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \text{ au sens de } (E, \mathfrak{N})\right\}$.
- (iv) $\mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}) = \{\Omega \subset E, \Omega \text{ est un ouvert de } (E, \mathfrak{N})\}$.

Proposition 15.14. \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux normes sur E . S'équivalent :

- (i) $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \mathfrak{N}_2(x) \leq A\mathfrak{N}_1(x)$.
- (ii) $\mathfrak{B}(E, \mathfrak{N}_1) \subset \mathfrak{B}(E, \mathfrak{N}_2)$.
- (iii) $\mathfrak{C}\mathfrak{V}_0(E, \mathfrak{N}_1) \subset \mathfrak{C}\mathfrak{V}_0(E, \mathfrak{N}_2)$.
- (iv) $\mathfrak{C}\mathfrak{V}(E, \mathfrak{N}_1) \subset \mathfrak{C}\mathfrak{V}(E, \mathfrak{N}_2)$.
- (v) $\mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}_2) \subset \mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}_1)$.

On dit alors que \mathfrak{N}_1 est plus fine que \mathfrak{N}_2 .

Démonstration. (i) \Leftrightarrow (v) Raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}_2) \subset \mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}_1) &\iff id_E : (E, \mathfrak{N}_1) \rightarrow (E, \mathfrak{N}_2) \text{ est continue} \\ &\iff \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \mathfrak{N}_2(x) \leq A\mathfrak{N}_1(x). \end{aligned}$$

□

Exemple 15.15. On se place dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Alors $\|\cdot\|_{\infty}$ est plus fine que $\|\cdot\|_2$, qui est plus fine que $\|\cdot\|_1$.

Vocabulaire 15.16 (Normes équivalentes). Deux normes \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 sur E sont dites équivalentes lorsque chacune est plus fine que l'autre. On note alors $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$.

Proposition 15.17. E un \mathbb{K} -espace vectoriel. \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux normes sur E . S'équivalent :

- (i) $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$.
- (ii) $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, A\mathfrak{N}_1(x) \leq \mathfrak{N}_2(x) \leq B\mathfrak{N}_1(x)$.
- (iii) $\mathfrak{B}(E, \mathfrak{N}_1) = \mathfrak{B}(E, \mathfrak{N}_2)$.
- (iv) $\mathfrak{C}\mathfrak{V}_0(E, \mathfrak{N}_1) = \mathfrak{C}\mathfrak{V}_0(E, \mathfrak{N}_2)$.
- (v) $\mathfrak{C}\mathfrak{V}(E, \mathfrak{N}_1) = \mathfrak{C}\mathfrak{V}(E, \mathfrak{N}_2)$.
- (vi) $\mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{T}(E, \mathfrak{N}_1)$.

III Équivalence des normes en dimension finie

III.1 Théorème d'équivalence des normes en dimension finie

Proposition 15.18. \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

Lemme 15.19. Soit \mathfrak{N} une norme sur \mathbb{K}^d , soit $N_\infty : x \in \mathbb{K}^d \mapsto \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$. Alors :

$$\mathfrak{N} \sim N_\infty.$$

Démonstration. *Première étape.* N_∞ est plus fine que \mathfrak{N} . Soit en effet (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{K}^d . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{K}^d, \mathfrak{N}(x) = \mathfrak{N}\left(\sum_{i=1}^d x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \mathfrak{N}(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^d \mathfrak{N}(e_i)\right) N_\infty(x).$$

Deuxième étape. \mathfrak{N} est plus fine que N_∞ . Pour le montrer, on voudrait trouver un $B \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall x \in \mathbb{K}^d, N_\infty(x) \leq B\mathfrak{N}(x)$; il suffit en fait d'avoir $\forall x \in S, N_\infty(x) \leq B\mathfrak{N}(x)$, avec $S = \{x \in \mathbb{K}^d, N_\infty(x) = 1\}$. Or, en vertu du théorème 14.18, S est un compact de (\mathbb{K}^d, N_∞) . Mais l'application $\mathfrak{N} : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue au sens de (\mathbb{K}^d, N_∞) car elle est lipschitzienne d'après la première étape. Ainsi, $\mathfrak{N}|_S$ admet un minimum (d'après le théorème 14.22). Soit $x_0 \in S$ t.q. $\mathfrak{N}(x_0) = \min_{x \in S} \mathfrak{N}(x)$. On a $x_0 \neq 0$ (car $x_0 \in S$) donc $\mathfrak{N}(x_0) > 0$. On a alors $\forall x \in S, N_\infty(x) \leq \frac{1}{\mathfrak{N}(x_0)} \mathfrak{N}(x)$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{K}^d, N_\infty(x) \leq \frac{1}{\mathfrak{N}(x_0)} \mathfrak{N}(x).$$

Conclusion. $\mathfrak{N} \sim N_\infty$. □

Lemme 15.20. Soit \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux normes sur \mathbb{K}^d . Alors :

$$\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2.$$

Théorème 15.21 (Théorème d'équivalence des normes en dimension finie). On suppose que E est de dimension finie. Soit \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux normes sur E . Alors :

$$\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2.$$

Démonstration. On note $d = \dim E$. Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Phi : \mathbb{K}^d \rightarrow E$. Alors $\mathfrak{N}_1 \circ \Phi$ et $\mathfrak{N}_2 \circ \Phi$ sont des normes sur \mathbb{K}^d , donc selon le lemme 15.20, $\mathfrak{N}_1 \circ \Phi \sim \mathfrak{N}_2 \circ \Phi$. Donc il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ t.q.

$$\forall y \in \mathbb{K}^d, A(\mathfrak{N}_1 \circ \Phi)(y) \leq (\mathfrak{N}_2 \circ \Phi)(y) \leq B(\mathfrak{N}_1 \circ \Phi)(y).$$

Par bijectivité de $\Phi : \forall x \in E, A\mathfrak{N}_1(x) \leq \mathfrak{N}_2(x) \leq B\mathfrak{N}_1(x)$. □

Remarque 15.22. Dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut ne pas préciser la norme utilisée, car toutes les normes sont équivalentes.

III.2 Applications générales

Théorème 15.23. (E, \mathfrak{N}_E) et (F, \mathfrak{N}_F) deux espaces normés. On suppose que E est de dimension finie. Alors :

$$\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_C(E, F).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose :

$$\nu : x \in E \longmapsto \mathfrak{N}_E(x) + \mathfrak{N}_F(f(x)).$$

Alors ν est une norme sur E , qui est de dimension finie, donc d'après le théorème 15.21, $\nu \sim \mathfrak{N}_E$. En particulier, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ (et on peut supposer $A > 1$) t.q. $\forall x \in E, \nu(x) \leq A\mathfrak{N}_E(x)$. Autrement dit :

$$\forall x \in E, \mathfrak{N}_F(f(x)) \leq (A - 1)\mathfrak{N}_E(x).$$

Donc $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$. □

Corollaire 15.24. (E, \mathfrak{N}_E) et (F, \mathfrak{N}_F) deux espaces normés de dimension finie. Si $\varphi : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors φ est un homéomorphisme.

Théorème 15.25. (E, \mathfrak{N}) un espace normé de dimension finie. Alors les compacts de (E, \mathfrak{N}) sont les fermés bornés de (E, \mathfrak{N}) .

Démonstration. Se transporter dans $(\mathbb{K}^d, \mathfrak{N} \circ \Phi)$, où $d = \dim E$, et $\Phi : \mathbb{K}^d \rightarrow E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Utiliser alors le théorème 14.18 et le théorème 15.21. □

Corollaire 15.26. (E, \mathfrak{N}) un espace normé de dimension finie. Alors toute suite bornée à valeurs dans E admet une valeur d'adhérence au sens de (E, \mathfrak{N}) .

III.3 Espaces complets

Définition 15.27 (Suite de Cauchy). (E, d) un espace métrique. $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 15.28. Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 15.29 (Espace complet). On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de (E, d) converge au sens de (E, d) .

Vocabulaire 15.30 (Espace de Banach). *Un espace normé complet est dit de Banach.*

Théorème 15.31. *Tout espace normé de dimension finie est de Banach.*

Démonstration. Soit (E, \mathfrak{N}) un espace normé de dimension finie, soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On suppose que u est de Cauchy. Montrer d'abord que u est bornée. Il existe donc $R > 0$ t.q. $u \in K^{\mathbb{N}}$, où $K = \mathcal{B}_f(0, R)$. Or, d'après le théorème 15.25, K est compact. Donc $\Lambda(u) \neq \emptyset$. Montrer que $\Lambda(u)$ est un singleton et en déduire avec le théorème 14.31 que u converge. \square

III.4 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 15.32. *(E, \mathfrak{N}) un espace normé. F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F est un fermé de (E, \mathfrak{N}) .*

Démonstration. Soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$. On se place dans $(F, \mathfrak{N}|_F)$. Alors u est bornée, donc d'après le corollaire 15.26, il existe φ extraction et $\omega \in F$ t.q. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$ au sens de $(F, \mathfrak{N}|_F)$, donc au sens de (E, \mathfrak{N}) . Or $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $\ell = \omega \in F$. \square

Proposition 15.33. *(E, \mathfrak{N}) un espace normé. F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors pour tout $a \in E$, la distance $d(a, F)$ est réalisée.*

Démonstration. Soit $a \in E$. Poser $x \in F^{(\mathbb{N}^*)}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(a, F) \leq \mathfrak{N}(a - x_n) \leq d(a, F) + \frac{1}{n}$. Montrer que x est bornée, et en déduire avec le corollaire 15.26 qu'il existe φ extraction et $\omega \in F$ t.q. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$. Montrer alors que $\mathfrak{N}(a - \omega) = d(a, F)$. \square

IV Représentations analytiques

Proposition 15.34. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E . Pour $x \in E$, on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice de x dans la base \mathcal{B} . Alors en identifiant $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à \mathbb{K}^n , l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ est un homéomorphisme.*

Définition 15.35 (Représentation analytique). *E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et de bases respectives \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . $f : \Omega \subset E \rightarrow F$. On note $\tilde{\Omega} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(\Omega) \subset \mathbb{K}^p$. On appelle représentation analytique de f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F la fonction*

$$\tilde{f} : x \in \tilde{\Omega} \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F} \left(f \left((\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E})^{-1}(x) \right) \right) \in \mathbb{K}^n.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega & \xrightarrow{f} & F \\
 \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E} \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F} \\
 \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{K}^n
 \end{array}$$

Définition 15.36 (Fonction polynomiale $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$). *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est polynomiale lorsque chacune de ses coordonnées est polynomiale.*

Définition 15.37 (Fonction polynomiale $E \rightarrow F$). *E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. $f : \Omega \subset E \rightarrow F$. S'équivalent :*

- (i) f possède une représentation analytique polynomiale.
- (ii) Toutes les représentations analytiques de f sont polynomiales.

Si tel est le cas, on dit que f est polynomiale.

Proposition 15.38. *E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Toute fonction polynomiale $f : \Omega \subset E \rightarrow F$ est continue.*

Corollaire 15.39. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors la fonction $\det : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ est polynomiale donc continue.*

Corollaire 15.40. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ (au sens de l'unique topologie d'espace normé de $\mathcal{L}(E)$).*

Définition 15.41 (Variété algébrique). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel. $V \subset E$. On dit que V est une variété algébrique de E lorsqu'il existe $P : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ polynomiale t.q.*

$$V = P^{-1}(\{0\}).$$

V Exemples

Exemple 15.42. *On se place dans $\mathbb{R}[X]$. On pose, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\mathfrak{N}_r : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{|x| \leq r} |P(x)|.$$

Alors $(\mathfrak{N}_r)_{r \in \mathbb{R}_+^}$ est une famille non dénombrable de normes deux à deux non équivalentes.*

Démonstration. On fixe $r \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $\delta_a : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a) \in \mathbb{R}$. Montrer que δ_a est continue au sens de $(\mathbb{R}[X], \mathfrak{N}_r)$ ssi $|a| \leq r$. Ainsi, si $0 < r < r'$, $\delta_{r'}$ est continue au sens de $(\mathbb{R}[X], \mathfrak{N}_{r'})$ mais pas au sens de $(\mathbb{R}[X], \mathfrak{N}_r)$. Donc $\mathfrak{N}_r \not\sim \mathfrak{N}_{r'}$. \square

Exemple 15.43. Soit $P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, P_n(-1) = 1,$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |P_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Alors $\deg P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Démonstration. On suppose par l'absurde que $\deg P_n$ ne tend pas vers $+\infty$. Alors il existe φ extraction t.q. $(\deg P_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $d \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = P_{\varphi(n)}$. Alors $Q \in \mathbb{R}_d[X]^{\mathbb{N}}$. On munit $\mathbb{R}_d[X]$ de la norme

$$\mathfrak{N} : H \in \mathbb{R}_d[X] \mapsto \sup_{[0,1]} |H|.$$

On a alors $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or l'application $\delta : P \in \mathbb{R}_d[X] \mapsto P(-1)$ est linéaire donc d'après le théorème 15.23, comme $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie, elle est continue au sens de $(\mathbb{R}_d[X], \mathfrak{N})$. En particulier $1 = Q_n(-1) = \delta(Q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(0) = 0$. C'est absurde. \square

Exemple 15.44. On pose :

$$\Omega = \{P \in \mathbb{R}_d[X] \setminus \mathbb{R}_{d-1}[X], P \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{R}\}.$$

Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}_d[X]$ (au sens de l'unique topologie d'espace normé de $\mathbb{R}_d[X]$).

Démonstration. Soit $P = a \prod_{i=1}^d (X - u_i) \in \Omega$, avec $u_1 < \dots < u_d$. Construire $(T_0, \dots, T_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ t.q. $T_0 < u_0 < T_1 < u_1 < \dots < u_d < T_d$. Poser $\mathcal{V} = \{Q \in \mathbb{R}_d[X], \forall i \in [1, d], Q(T_{i-1})Q(T_i) < 0\}$. Montrer que $P \in \mathcal{V} \subset \Omega$, et que \mathcal{V} est un ouvert. Ainsi Ω est un voisinage de P ; donc Ω est un ouvert. \square

VI Séries dans un espace normé

VI.1 Généralités

Notation 15.45. Dans la suite du chapitre, $(E, \|\cdot\|)$, est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 15.46 (Série). $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n , notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n est appelée somme partielle au rang n de la série $\sum u_n$. On dit que $\sum u_n$ converge lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on pose :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Proposition 15.47. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Vocabulaire 15.48. $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 15.49. $(u, v) \in (E^{\mathbb{N}})^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Définition 15.50 (Absolue convergence). $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Proposition 15.51. S'équivalent :

- (i) E est de Banach, i.e. toute suite de Cauchy de E converge.
- (ii) Toute série absolument convergente de E est convergente.

Corollaire 15.52. On suppose E de dimension finie. Alors toute série absolument convergente de E est convergente.

Démonstration. Tout espace normé de dimension finie est de Banach d'après le théorème 15.31. □

VI.2 Théorème des approximations successives de Picard

Théorème 15.53 (Théorème des approximations successives de Picard). On suppose E de dimension finie. Soit X un fermé non vide de E . Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction contractante de rapport $\rho \in [0, 1[$. Pour $a \in X$, on note $\hat{a} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite f -récurrente t.q. $\hat{a}_0 = a$. Alors :

- (i) f admet un unique point fixe ω sur X .
- (ii) $\forall a \in X$, $\hat{a}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$.
- (iii) $\forall a \in X$, $\|\hat{a}_n - \omega\| = \mathcal{O}(\rho^n)$.
- (iv) $\forall a \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_n - \omega\| \leq \frac{\rho}{1-\rho} \|\hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}\|$.

Démonstration. (i) et (ii) Soit $a \in X$ (car $X \neq \emptyset$). On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n\| = \|f(\hat{a}_n) - f(\hat{a}_{n-1})\| \leq \rho \|\hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}\|$ donc par récurrence immédiate :

$$\|\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n\| = \mathcal{O}(\rho^n).$$

Donc $\sum \|\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n\|$ converge, donc par le corollaire 15.52, $\sum (\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n)$ converge, donc \hat{a} converge vers $\omega \in X$ (car X fermé). Montrer que $f(\omega) = \omega$

(par continuité de f) puis que ω est l'unique point fixe de f (car f est contractante). (iii) Soit $a \in X$. Écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_n - \omega\| = \|f(\hat{a}_{n-1}) - f(\omega)\| \leq \rho \|\hat{a}_{n-1} - \omega\|$, et en déduire par récurrence $\|\hat{a}_n - \omega\| = \mathcal{O}(\rho^n)$. (iv) Soit $a \in X$. Écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\hat{a}_n - \omega\| \leq \rho \|\hat{a}_{n-1} - \omega\| \leq \rho \|\hat{a}_n - \hat{a}_{n-1}\| + \rho \|\hat{a}_n - \omega\|$. \square

VII Théorème de Riesz

Théorème 15.54 (Théorème de Riesz). *S'équivalent :*

- (i) E est de dimension finie.
- (ii) $\mathcal{B}_f(0, 1)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|)$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Voir théorème 15.25. (ii) \Rightarrow (i) On suppose que $\mathcal{B}_f(0, 1)$ est un compact. Alors d'après le lemme 14.37, il existe $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathcal{B}_f(0, 1))^s$ t.q.

$$\mathcal{B}_f(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^s \mathcal{B}_f\left(\omega_i, \frac{1}{2}\right).$$

On pose alors $F = \text{Vect}(\omega_1, \dots, \omega_s)$. Montrons $E = F$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$\mathcal{H}(n) : \forall x \in E, \exists z \in F, \|x - z\| \leq \frac{1}{2^n} \|x\|.$$

Montrer d'abord $\mathcal{H}(1)$ en normalisant $x \in E$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\mathcal{H}(n)$ vraie. Soit $x \in E$. Par $\mathcal{H}(n)$, soit $z_1 \in F$ t.q. $\|x - z_1\| \leq \frac{1}{2^n} \|x\|$, puis par $\mathcal{H}(1)$, soit $z_2 \in F$ t.q. $\|(x - z_1) - z_2\| \leq \frac{1}{2} \|x - z_1\|$. Avec $z = z_1 + z_2 \in F$, on a bien alors $\|x - z\| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|x\|$, donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. En déduire :

$$E \subset \overline{F}.$$

Or, d'après la proposition 15.32, $\overline{F} = F$. Il vient $E = F$, donc E est de dimension finie. \square

Définition 15.55 (Espace métrique localement compact). (X, \mathfrak{d}) un espace métrique. *S'équivalent :*

- (i) $\forall \omega \in X, \exists V \in \mathcal{V}(\omega)$, V est un compact de (X, \mathfrak{d}) .
- (ii) $\forall \omega \in X, \exists r > 0$, $\mathcal{B}_f(\omega, r)$ est un compact de (X, \mathfrak{d}) .

Si tel est le cas, on dit que (X, \mathfrak{d}) est localement compact.

Théorème 15.56. *S'équivalent :*

- (i) E est de dimension finie.
- (ii) E est localement compact.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 15.54 et du fait que $\forall \omega \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}_f(\omega, r) \sim \mathcal{B}_f(0, 1)$. \square

Chapitre 16

Connexité

Notation 16.1. Dans tout le chapitre, (E, d) est un espace métrique, et $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

I Connexité par arcs

I.1 Généralités

Définition 16.2 (Chemin). $(a, b) \in E^2$. On appelle chemin joignant a à b dans E toute application $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], E)$ t.q. $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Définition 16.3 (Espace métrique connexe par arcs). On dit que (E, d) est connexe par arcs lorsque, pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un chemin joignant a à b dans E .

Définition 16.4 (Partie connexe par arcs d'un espace métrique). $X \subset E$. On dit que X est connexe par arcs lorsque $(X, d|_{X^2})$ est un espace métrique connexe par arcs.

Proposition 16.5. Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Proposition 16.6. L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs.

Proposition 16.7. Dans un espace normé, tout convexe est connexe par arcs.

I.2 Composantes connexes par arcs

Définition 16.8 (Être connectés). On définit une relation \mathcal{R} sur E par $x\mathcal{R}y$ ssi il existe un chemin joignant x à y dans E . On dit que x et y sont connectés dans E lorsque $x\mathcal{R}y$.

Proposition 16.9. \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E .

Définition 16.10 (Composantes connexes par arcs). Les composantes connexes par arcs de E sont les classes d'équivalence de E pour \mathcal{R} .

Proposition 16.11. E est connexe par arcs ssi E a une seule composante connexe par arcs.

Proposition 16.12. Dans un espace normé, les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des ouverts.

II Connexité par arcs dans un espace normé

Proposition 16.13. On suppose que $2 \leq \dim \mathfrak{V} \leq +\infty$. Soit D une partie dénombrable de \mathfrak{V} . Alors $\mathfrak{V} \setminus D$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $(a, b) \in (\mathfrak{V} \setminus D)^2$, $a \neq b$. Soit $\omega \in]a, b[$, soit $\zeta \in \mathfrak{V} \setminus \text{Vect}(a - b)$ (car $\dim \mathfrak{V} \geq 2$). Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{V}$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $(0, \frac{1}{2}, 1)$, avec :

$$\gamma_s(0) = a, \quad \gamma_s\left(\frac{1}{2}\right) = \omega + s\zeta, \quad \gamma_s(1) = b.$$

γ_s est un chemin joignant a à b dans \mathfrak{V} . Vérifier alors que :

$$\forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, s_1 \neq s_2 \implies \gamma_{s_1}([0, 1]) \cap \gamma_{s_2}([0, 1]) = \emptyset.$$

On suppose par l'absurde que $\forall s \in \mathbb{R}, \gamma_s([0, 1]) \cap D \neq \emptyset$. Alors on peut construire une injection $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow D$ définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \varphi(s) \in \gamma_s([0, 1]) \cap D.$$

Donc $\mathbb{R} \hookrightarrow D$, ce qui est absurde. Donc il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\gamma_{s_0}([0, 1]) \subset \mathfrak{V} \setminus D$, donc a et b sont connectés dans $\mathfrak{V} \setminus D$. \square

Proposition 16.14. On suppose que $2 \leq \dim \mathfrak{V} \leq +\infty$. Soit $(\omega, r) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors $\mathcal{S}(\omega, r)$ est connexe par arcs.

Démonstration. Montrer d'abord que : $\forall (\omega, r) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{S}(\omega, r) \sim \mathcal{S}(0, 1)$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{S}(0, 1)$ est connexe par arcs. Soit $(a, b) \in (\mathcal{S}(0, 1))^2$, $a \neq b$. Si $a \neq -b$, poser :

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|} \in \mathcal{S}(0, 1).$$

Alors γ est un chemin joignant a à b dans $\mathcal{S}(0, 1)$. Si $a = -b$, soit $c \in \mathcal{S}(0, 1) \setminus \{a, -a\}$. Alors, d'après l'étape précédente, a est connecté à c , et c est connecté à b , donc a est connecté à b . \square

Proposition 16.15. *On suppose que $2 \leq \dim \mathfrak{V} \leq +\infty$. Soit $(\omega, r) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors $\mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(\omega, r)$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1)$ est connexe par arcs. Soit $(a, b) \in (\mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1))^2$, $a \neq b$. On pose $c = \frac{\|b\|}{\|a\|}a$. Alors $[a, c] \subset \mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1)$ donc a est connecté à c dans $\mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1)$. De plus $c \in \mathcal{S}(0, \|b\|)$. Or $\mathcal{S}(0, \|b\|)$ est connexe par arcs d'après la proposition 16.14, et $\mathcal{S}(0, \|b\|) \subset \mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1)$, donc c est connecté à b dans $\mathcal{S}(0, \|b\|)$, donc dans $\mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1)$. Ainsi, a est connecté à b dans $\mathfrak{V} \setminus \mathcal{B}_f(0, 1)$. \square

III Connexité

Définition 16.16 (Espace métrique connexe). *S'équivalent :*

- (i) *Il n'existe pas de couple $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})^2$ d'ouverts disjoints non vides de (E, d) tel que $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V} = E$.*
- (ii) *Il n'existe pas de couple $(F, G) \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})^2$ de fermés disjoints non vides de (E, d) tel que $F \sqcup G = E$.*
- (iii) *Les seuls ouverts fermés de (E, d) sont \emptyset et E .*
- (iv) $\forall Y \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$, $\text{Fr}(Y) \neq \emptyset$.
- (v) *Toute application $\varphi \in \mathcal{C}^0(E, \{0, 1\})$ est constante ($\{0, 1\}$ étant muni de la distance usuelle).*

Si tel est le cas, on dit que (E, d) est connexe.

Définition 16.17 (Partie connexe d'un espace métrique). $X \subset E$. *On dit que X est connexe lorsque $(X, d|_{X^2})$ est un espace métrique connexe.*

Proposition 16.18. *L'image continue d'un connexe est connexe.*

Proposition 16.19. *Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Corollaire 16.20. *Les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.*

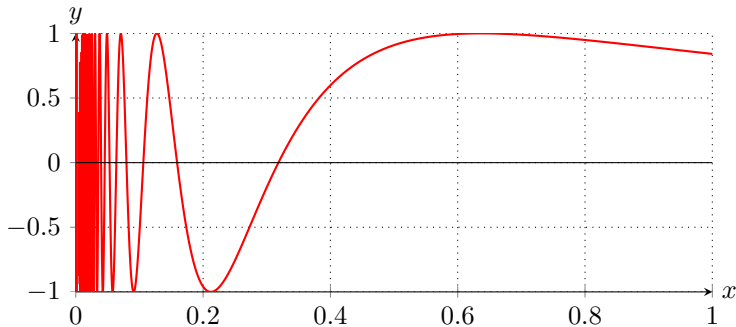
Proposition 16.21. *Il existe des espaces métriques connexes mais pas connexes par arcs.*

Démonstration. Considérer l'espace

$$\mathcal{A} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right), x \in]0, 1] \right\}.$$

Connexité. Montrer que, s'il existait un couple $(F, G) \in (\mathcal{P}(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\})^2$ de fermés disjoints non vides de \mathcal{A} tel que $F \sqcup G = \mathcal{A}$, alors $F = \{0\} \times [-1, 1]$ et $G = \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right), x \in]0, 1] \right\}$, donc G n'est pas fermé car $(0, 0) \in \overline{G} \setminus G$. C'est

absurde, donc \mathcal{A} est connexe. *Connexité par arcs.* Supposer par l'absurde qu'il existe un chemin γ joignant $(0,0)$ à $(1, \sin 1)$ dans \mathcal{A} . Pour $t \in [0, 1]$, notons $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathcal{A}$. Comme γ est continue, α et β sont continues. Considérer $t_0 = \sup(\alpha^{-1}(\{0\})) = \max(\alpha^{-1}(\{0\})) < 1$. Poser $w_n = t_0 + \frac{1}{n_0 + n}$, avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_0 + \frac{1}{n_0} < 1$. Alors $\alpha(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha(t_0) = 0$ et $\beta(w_n) = \sin\left(\frac{1}{\alpha(w_n)}\right)$ (car $\gamma(w_n) \in \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in]0, 1]\}$ comme $w_n > t_0$), donc $(\beta(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. C'est absurde, donc \mathcal{A} n'est pas connexe par arcs. \square



Un espace métrique connexe mais pas connexe par arcs

Proposition 16.22. *Soit $K \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties connexes, compactes et non vides de (E, d) . Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est connexe, compact et non vide.*

Démonstration. *Non vide.* En se plaçant dans l'espace $(K_0, d|_{K_0^2})$, on applique le théorème 14.35, et on obtient $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. *Compact.* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un fermé (comme intersection de fermés) inclus dans K_0 , qui est compact, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact. *Connexe.* On suppose par l'absurde qu'il existe un couple $(F, G) \in (\mathcal{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n) \setminus \{\emptyset\})^2$ de fermés disjoints non vides de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ tel que $F \sqcup G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. F et G sont des compacts; on pose :

$$\rho = \inf_{(x,y) \in F \times G} d(x, y) = \min_{(x,y) \in F \times G} d(x, y) > 0.$$

On considère alors :

$$\mathcal{U} = \left\{ x \in E, d(x, F) < \frac{\rho}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \left\{ x \in E, d(x, G) < \frac{\rho}{3} \right\}.$$

\mathcal{U} et \mathcal{V} sont des ouverts disjoints non vides de E et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{K}_n = K_n \cap (E \setminus (\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V})).$$

Alors \tilde{K} est une suite décroissante de parties compactes, mais $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{K}_n = \emptyset$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{K}_{n_0} = \emptyset$, autrement dit $K_{n_0} \subset \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$. Comme K_{n_0} est connexe et $K_{n_0} \cap \mathcal{U}$ et $K_{n_0} \cap \mathcal{V}$ sont des ouverts disjoints de K_{n_0} tels que $(K_{n_0} \cap \mathcal{U}) \sqcup (K_{n_0} \cap \mathcal{V}) = K_{n_0}$, l'un des deux est vide ; par exemple : $K_{n_0} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Donc :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset K_{n_0} \subset \mathcal{U}.$$

Il vient $G = \emptyset$. C'est absurde. Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est connexe. □

Proposition 16.23. *On suppose (E, d) compact. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$d(u_n, u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors $\Lambda(u)$ est connexe.

IV Applications

Théorème 16.24. *On suppose (E, d) connexe. Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E t.q.*

$$\forall x \in X, \exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in V, x \mathcal{R} y.$$

Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On a $\forall y \in \text{Cl}(x), \text{Cl}(x) = \text{Cl}(y) \in \mathcal{V}(y)$, donc $\text{Cl}(x)$ est un ouvert. Or :

$$\text{Cl}(x) = E \setminus \bigcup_{y \in E \setminus \text{Cl}(x)} \text{Cl}(y),$$

donc $\text{Cl}(x)$ est un fermé. Or E est connexe, donc $\text{Cl}(x) = \emptyset$ ou $\text{Cl}(x) = E$. Mais $x \in \text{Cl}(x)$ donc $\text{Cl}(x) = E$. □

Lemme 16.25. $(P, Q) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2$. *On suppose qu'il existe \mathcal{U} ouvert non vide de \mathbb{R}^n tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{U}, P(x) = Q(x).$$

Alors $P = Q$.

Proposition 16.26. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^n . Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localement polynomiale, i.e.*

$$\forall \omega \in \Omega, \exists V \in \mathcal{V}(\omega), \exists P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], \forall x \in V, f(x) = P(x).$$

Alors f est polynomiale.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. D'après le lemme 16.25, on peut définir sans ambiguïté $P_\omega \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ t.q. $\exists V \in \mathcal{V}(\omega), \forall x \in V \cap \Omega, f(x) = P_\omega(x)$. On définit alors une relation d'équivalence \mathcal{R} sur Ω , par :

$$x\mathcal{R}y \iff P_x = P_y.$$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\text{Cl}(\omega)$ est un ouvert de Ω . Donc d'après le théorème 16.24 : $\text{Cl}(\omega) = \Omega$. D'où $\forall x \in \Omega, f(x) = P_\omega(x)$. \square

Proposition 16.27. *On suppose (E, d) compact et connexe, non réduit à un point. Alors E est équipotent à \mathbb{R} .*

Démonstration. *Première étape.* Soit $(a, b) \in E^2, a \neq b$. On pose $R = d(a, b)$. Pour $r \in [0, R]$, choisir $\varphi(r) \in \mathcal{S}(a, r)$ (ce qui est possible par connexité de E). Montrer que l'application $\varphi : [0, R] \rightarrow E$ ainsi définie est une injection, donc $\mathbb{R} \hookrightarrow [0, R] \hookrightarrow E$. *Deuxième étape.* D'après le corollaire 14.38, (E, d) est séparable; soit donc D dénombrable et dense dans E . Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow D$ une bijection. Poser alors :

$$\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega \longmapsto (d(\omega, u_n))_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}.$$

Montrer que φ est une injection, et en déduire $E \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$. *Troisième étape.* $E \hookrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \hookrightarrow E$, donc d'après le théorème 6.5, $E \sim \mathbb{R}$. \square

Proposition 16.28. *Soit Ω un ouvert connexe par arcs de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|)$. Alors Ω est connexe par arcs polygonaux, i.e.*

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \Omega^2, \exists s \in \mathbb{N}, \exists (m_0, \dots, m_s) \in \Omega^{s+1}, \\ m_0 = a \text{ et } m_s = b \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, [m_{i-1}, m_i] \subset \Omega. \end{aligned}$$

Démonstration. On définit une relation d'équivalence \mathcal{R} sur Ω par :

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b \iff \exists s \in \mathbb{N}, \exists (m_0, \dots, m_s) \in \Omega^{s+1}, \\ m_0 = a \text{ et } m_s = b \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, [m_{i-1}, m_i] \subset \Omega. \end{aligned}$$

Soit $a \in \Omega$. Soit $b \in \text{Cl}(a)$ et $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(b, r) \subset \Omega$. Alors $\mathcal{B}_o(b, r) \subset \text{Cl}(b) = \text{Cl}(a)$, donc $\text{Cl}(a)$ est un ouvert de Ω . Donc, d'après le théorème 16.24, $\text{Cl}(a) = \Omega$. \square

V Connexité des groupes linéaires

Notation 16.29. On notera $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, $GL_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $GL_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$.

Lemme 16.30. $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par :

$$\{I_n + \lambda E_{k\ell}, \lambda \in \mathbb{R}, (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, k \neq \ell\}.$$

Proposition 16.31. $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. On écrit, en vertu du lemme précédent, $A = (I_n + \lambda_1 E_{k_1 \ell_1}) \cdots (I_n + \lambda_s E_{k_s \ell_s})$. On pose alors :

$$\gamma : t \in [0, 1] \longmapsto (I_n + t\lambda_1 E_{k_1 \ell_1}) \cdots (I_n + t\lambda_s E_{k_s \ell_s}) \in SL_n(\mathbb{R}).$$

Alors $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], SL_n(\mathbb{R}))$, avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. Donc toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est connectée à I_n , donc $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. \square

Proposition 16.32. $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $B \in GL_n^+(\mathbb{R})$. On pose :

$$\varphi : t \in [0, 1] \longmapsto (I_n + (\beta(t) - 1) E_{11}) B \in GL_n^+(\mathbb{R}),$$

avec $\beta : t \in [0, 1] \longmapsto (1 - t) + \frac{t}{\det B} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1], GL_n^+(\mathbb{R}))$, avec $\varphi(0) = B$ et $\varphi(1) \in SL_n(\mathbb{R})$. En utilisant le fait que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, en déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. \square

Proposition 16.33. $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs : $GL_n^-(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Chapitre 17

Suites et Séries de Fonctions

Notation 17.1. Dans tout le chapitre, $(F, \|\cdot\|)$ est un espace normé, et X est un ensemble non vide.

I Convergence simple

Définition 17.2 (Convergence simple). $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. On dit que f converge simplement vers ℓ , et on note

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell,$$

lorsque

$$\forall x \in X, f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell(x).$$

Proposition 17.3. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $(\ell_1, \ell_2) \in (F^X)^2$. Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell_1$ et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$. On dit alors que ℓ_1 est la limite simple de la suite f .

Remarque 17.4. On suppose $F \neq \{0\}$.

- (i) Si X est fini, alors la convergence simple correspond à une convergence dans un espace normé.
- (ii) Si X est infini et dénombrable, alors la convergence simple correspond à une convergence dans un espace métrique, mais pas dans un espace normé.
- (iii) Si X est non dénombrable, alors la convergence simple ne correspond pas à une convergence dans un espace métrique.

Proposition 17.5. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. On suppose $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$.

- (i) Monotonie. $X \subset \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow$, alors $\ell \nearrow$.
- (ii) Convexité. X une partie convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $F = \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe, alors ℓ est convexe.
- (iii) Linéarité. X et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}(X, F)$, alors $\ell \in \mathcal{L}(X, F)$.

Exemple 17.6. Propriétés ne passant pas à la limite simple.

- (i) Borne supérieure. Pour $n \geq 2$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1)$, avec $f(0) = f(\frac{2}{n}) = f(1) = 0$ et $f(\frac{1}{n}) = 1$. On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} 0$, et $\forall n \geq 2$, $\sup_{[0,1]} f_n = 1$, mais $\sup_{[0,1]} 0 = 0$.
- (ii) Continuité. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \mathbf{1}_{\{1\}}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, mais $\mathbf{1}_{\{1\}} \notin \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- (iii) Intégrale. Pour $n \geq 2$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et affine par morceaux de subdivision adaptée $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1)$, avec $f(0) = f(\frac{2}{n}) = f(1) = 0$ et $f(\frac{1}{n}) = n$. On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} 0$, et $\forall n \geq 2$, $\int_0^1 f_n = 1$, mais $\int_0^1 0 = 0$.

II Convergence uniforme

II.1 Généralités

Définition 17.7 (Convergence uniforme). $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. On dit que f converge uniformément vers ℓ , et on note

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell,$$

lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in X, \|f_n(x) - \ell(x)\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 17.8. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. Alors :

$$\left(f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell \right) \implies \left(f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell \right).$$

Proposition 17.9. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée, et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$, alors ℓ est bornée, et :

$$\sup_X f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sup_X \ell.$$

Proposition 17.10. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$, $\omega \in X$. On munit X d'une distance d . Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en ω et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$, alors ℓ est continue en ω .

Corollaire 17.11. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. On munit X d'une distance d . Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(X, F)$ et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$, alors $\ell \in \mathcal{C}^0(X, F)$.

Exemple 17.12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$. Alors f_n converge simplement, mais pas uniformément, vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$.

II.2 Nouveau point de vue

Notation 17.13. On note :

$$\mathfrak{B}(X, F) = \{f \in F^X, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq A\}.$$

On définit de plus :

$$\|\cdot\|_\infty : f \in \mathfrak{B}(X, F) \mapsto \sup_X \|f\|.$$

Proposition 17.14. $(\mathfrak{B}(X, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 17.15. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. Alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $(f_n - \ell) \in \mathfrak{B}(X, F)$,
- (ii) $\|f_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Proposition 17.16. On munit X d'une distance d . Alors $\mathcal{C}^0(X, F) \cap \mathfrak{B}(X, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathfrak{B}(X, F), \|\cdot\|_\infty)$.

III Théorème de Weierstrass

Notation 17.17 (Polynômes de Bernstein). Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

$B_n(f)$ est dit polynôme de Bernstein à l'ordre n de f .

Théorème 17.18 (Théorème de Weierstrass).

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \exists P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}, P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrons que $B_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f$.

Première étape. Soit $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S_n^{(x)}$ une variable aléatoire t.q. $S_n^{(x)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$. Montrer :

$$(B_n(f))(x) = E \left(f \left(\frac{S_n^{(x)}}{n} \right) \right).$$

Deuxième étape. Soit $\varepsilon > 0$. f est \mathcal{C}^0 sur $[0, 1]$, donc \mathcal{UC}^0 . Soit donc $\eta > 0$ t.q.

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On majore alors $r_n(x) = |f(x) - (B_n(f))(x)|$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \left| f(x) - E \left(f \left(\frac{S_n^{(x)}}{n} \right) \right) \right| = \left| E \left(f(x) - f \left(\frac{S_n^{(x)}}{n} \right) \right) \right| \\ &\leq E \left(\left| f(x) - f \left(\frac{S_n^{(x)}}{n} \right) \right| \right) = \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right| \mathbb{P} \left(S_n^{(x)} = k \right) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \eta}} \left| f(x) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right| \mathbb{P} \left(S_n^{(x)} = k \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \eta}} \left| f(x) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right| \mathbb{P} \left(S_n^{(x)} = k \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{P} \left(\left| S_n^{(x)} - nx \right| > n\eta \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty} \frac{V \left(S_n^{(x)} \right)}{n^2 \eta^2} = \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty} \frac{nx(1-x)}{n^2 \eta^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}}{2n\eta^2}. \end{aligned}$$

En choisissant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{\|f\|_{\infty}}{2n_0\eta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], |f(x) - (B_n(f))(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc $B_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f$. □

Corollaire 17.19. $\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \exists P \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}, P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f$.

IV Critère uniforme de Cauchy

Définition 17.20 (Critère uniforme de Cauchy). $f \in (F^X)^\mathbb{N}$. On dit que f vérifie le critère uniforme de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 17.21. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$. On suppose F de dimension finie. S'équivalent :

- (i) f vérifie le critère uniforme de Cauchy.
- (ii) f converge uniformément.

V Convergence uniforme sur tout compact

Vocabulaire 17.22. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. $Y \subset X$. On dit que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ sur Y lorsque $f_n|_Y \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell|_Y$.

Lemme 17.23. $\ell \in F^X$. On munit X d'une distance d . S'équivalent :

- (i) ℓ est continue.
- (ii) La restriction de ℓ à n'importe quel compact de (X, d) est continue.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair. (ii) \Rightarrow (i) Soit $\omega \in X$. Soit $u \in X^\mathbb{N}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \omega$. Montrer (par exemple en utilisant le théorème 14.40) que $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega\}$ est un compact de (X, d) . Donc $\ell|_K$ est continue, d'où $\ell(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell(\omega)$, donc ℓ est continue en ω . \square

Proposition 17.24. $f \in (F^X)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^X$. On munit X d'une distance d . On suppose :

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ sur tout compact de (X, d) ,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(X, F)$.

Alors $\ell \in \mathcal{C}^0(X, F)$.

VI Théorème d'interversion des limites

Théorème 17.25 (Théorème d'interversion des limites). $\Omega \subset X$, $\omega \in \overline{\Omega}$. $f \in (F^\Omega)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^\Omega$. On munit X d'une distance d . On suppose :

- (i) F est de dimension finie,

(ii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ sur Ω ,

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en ω .

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow \omega} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existent, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow \omega} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Démonstration. Si $\omega \in \Omega$, il suffit d'utiliser la proposition 17.10. Si $\omega \notin \Omega$, poser \tilde{f}_n le prolongement par continuité de f_n en ω , pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\tilde{f}_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge (par le théorème 15.31). Poser :

$$\tilde{\ell} : x \in \Omega \cup \{\omega\} \mapsto \begin{cases} \ell(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}_n(\omega) & \text{si } x = \omega \end{cases}.$$

Remarquer que $\tilde{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \tilde{\ell}$ sur Ω et $\tilde{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \tilde{\ell}$ sur $\{\omega\}$, donc :

$$\tilde{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \tilde{\ell}.$$

Ainsi, par la proposition 17.10, $\tilde{\ell}$ est continue en ω . En déduire le résultat. \square

Corollaire 17.26. Ω une partie non majorée de \mathbb{R} . $f \in (F^\Omega)^\mathbb{N}$, $\ell \in F^\Omega$. On suppose :

(i) F est de dimension finie,

(ii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ sur Ω ,

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en $+\infty$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

VII Généralités sur les séries de fonctions

Définition 17.27 (Série de fonctions). $u \in (F^X)^\mathbb{N}$. On appelle série de terme général u_n , notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n est appelée somme partielle au rang n de la série $\sum u_n$.

(i) On dit que $\sum u_n$ converge simplement lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement.

(ii) On dit que $\sum u_n$ converge uniformément lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

Proposition 17.28. $u \in (F^X)^\mathbb{N}$. S'équivalent :

- (i) $\sum u_n$ converge uniformément.
- (ii) $\sum u_n$ converge simplement et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 17.29. $u \in (F^X)^{\mathbb{N}}, \omega \in X$. On munit X d'une distance d . Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est continue en ω et $\sum u_n$ converge uniformément, alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est continue en ω .

Application 17.30. Soit D une partie dénombrable de \mathbb{R} . Alors il existe une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ croissante et dont l'ensemble des points de continuité est $\mathbb{R} \setminus D$.

Démonstration. Traiter d'abord le cas où D est fini. En supposant D infini, soit $\delta : \mathbb{N} \rightarrow D$ une bijection. Poser, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{[\delta_n, +\infty[}.$$

Montrer d'abord que $\sum u_n$ converge simplement et poser :

$$S : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Montrer que S convient. □

VIII Convergence normale

Définition 17.31 (Convergence normale). $u \in (F^X)^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge normalement lorsque :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est bornée,
- (ii) $\sum \|u_n\|_{\infty}$ converge.

Proposition 17.32. $u \in (F^X)^{\mathbb{N}}$. On suppose que F est de dimension finie. Alors :

$$\sum u_n \text{ converge normalement} \implies \sum u_n \text{ converge uniformément.}$$

IX Quelques théorèmes qualifiant la convergence simple en convergence uniforme

Théorème 17.33 (Théorème de Dini). (K, d) un espace métrique compact non vide. $f \in (\mathbb{R}^K)^\mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. On suppose :

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$,
- (iii) $\ell \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$,
- (iv) $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} \leq f_n$.

Alors :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell.$$

Démonstration (Première méthode). Poser d'abord $g_n = f_n - \ell$. On a $g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq g_{n+1} \leq g_n$ et $g_n \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. Supposer par l'absurde que la convergence n'est pas uniforme. Comme la suite $(\|g_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, elle est donc minorée par un certain $r > 0$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose de $\omega_n \in K$ t.q. $|g_n(\omega_n)| = \|g_n\|_\infty$ (en vertu du théorème 14.22). Extraire de ω une sous-suite convergente et en déduire une contradiction. \square

Démonstration (Deuxième méthode). On pose encore $g_n = f_n - \ell$. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in K, g_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Alors, à ε fixé, $(K_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés d'intersection vide. D'après le théorème 14.35, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $K_{n_0}(\varepsilon) = \emptyset$, d'où $\forall n \geq n_0, K_n(\varepsilon) = \emptyset$. Ceci montre que la convergence est uniforme. \square

Théorème 17.34. I segment de \mathbb{R} . $f \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{R}^I$. On suppose :

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \nearrow$,
- (iii) $\ell \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Alors :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell.$$

Corollaire 17.35. I intervalle ouvert de \mathbb{R} . $f \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{R}^I$. On suppose :

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est convexe.

Alors ℓ est convexe, et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ sur tout segment de I .

Démonstration. Montrer la convexité de ℓ . Avec la proposition 1.22, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit alors $[a, b]$ un segment de I , avec $a < b$. Soit $\omega \in I$ t.q. $\omega < a$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, p_n la fonction pente de f_n en ω , puis on note q la fonction pente de ℓ en ω . Avec le théorème 17.34, montrer que $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} q$, puis en déduire que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$. \square

Théorème 17.36. (K, d) un espace métrique compact non vide. $f \in (\mathbb{R}^K)^\mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. On suppose :

(i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$,

(ii) Il existe $\rho > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est ρ -lipschitzienne.

Alors ℓ est ρ -lipschitzienne et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$.

Démonstration. Utiliser le lemme 14.37. \square

Chapitre 18

Intégrales de Fonctions Régliées sur un Segment

Notation 18.1. Dans tout le chapitre, $I = [a, b]$ est un segment de \mathbb{R} , avec $a < b$, et $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés non nuls de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Intégrales de fonctions en escaliers

Définition 18.2 (Subdivision). On appelle subdivision de I tout $\sigma \in I^{n+1}$ t.q.

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = b.$$

On note $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des subdivisions de I .

Vocabulaire 18.3. $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$, $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_m) \in \mathcal{S}(I)$. On dit que σ est plus fine que τ lorsque $\{\sigma_i, i \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \supset \{\tau_i, i \in \llbracket 0, m \rrbracket\}$.

Définition 18.4 (Fonction en escaliers). Une fonction $f : I \rightarrow F$ est dite en escaliers lorsqu'il existe $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ t.q.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f|_{] \sigma_{i-1}, \sigma_i]} \text{ est constante.}$$

On dit alors que la subdivision σ est adaptée à f . On notera $\text{Esc}(I, F)$ l'ensemble des fonctions en escaliers $I \rightarrow F$.

Proposition 18.5. $f \in \text{Esc}(I, F)$, $(\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ adaptée à f . Alors :

$$f = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\sigma_i\}} f(\sigma_i) + \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{] \sigma_{i-1}, \sigma_i]} f\left(\frac{\sigma_{i-1} + \sigma_i}{2}\right).$$

Notation 18.6. $f \in \text{Esc}(I, F)$, $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ adaptée à f . On note alors :

$$\mu_F^{(\sigma)}(f) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_{i-1}) f\left(\frac{\sigma_{i-1} + \sigma_i}{2}\right).$$

Proposition 18.7. $f \in \text{Esc}(I, F)$. $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}(I)^2$ adaptées à f . Alors :

$$\mu_F^{(\sigma)}(f) = \mu_F^{(\tau)}(f).$$

Démonstration. Montrer que $\mu_F^{(\sigma)}(f) = \mu_F^{(\sigma \cup \tau)}(f) = \mu_F^{(\tau)}(f)$. \square

Définition 18.8 (Intégrale d'une fonction en escaliers). Pour $f \in \text{Esc}(I, F)$, on pose :

$$\mu_F(f) = \mu_F^{(\sigma)}(f),$$

où $\sigma \in \mathcal{S}(I)$ est une subdivision adaptée à f quelconque.

Notation 18.9. On se place dans $(\mathfrak{B}(I, F), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 18.10.

- (i) $\text{Esc}(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{B}(I, F)$.
- (ii) $\mu_F \in \mathcal{L}_C(\text{Esc}(I, F), F)$.
- (iii) $\|\mu_F\| = b - a$.

Proposition 18.11. Si $f \in \text{Esc}(I, F)$ et $\psi \in G^F$, alors $(\psi \circ f) \in \text{Esc}(I, G)$.

Proposition 18.12. Si $f \in \text{Esc}(I, F)$ et $\Lambda \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

$$(\Lambda \circ \mu_F)(f) = \mu_G(\Lambda \circ f).$$

Proposition 18.13 (Inégalité triangulaire). Si $f \in \text{Esc}(I, F)$, alors $\|f\|_F \in \text{Esc}(I, \mathbb{R})$ et :

$$\|\mu_F(f)\|_F \leq \mu_{\mathbb{R}}(\|f\|_F).$$

II Fonctions continues par morceaux

Définition 18.14 (Fonction continue par morceaux). Une fonction $f : I \rightarrow F$ est dite continue par morceaux lorsqu'il existe $(\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in F^{[\sigma_0, \sigma_1]} \times \dots \times F^{[\sigma_{n-1}, \sigma_n]}$ t.q. :

- (i) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i \in \mathcal{C}^0([\sigma_{i-1}, \sigma_i], F)$,
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f|_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i[} = \varphi_i|_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i[}$.

On notera $\mathcal{C}_{pm}^0(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux $I \rightarrow F$.

Proposition 18.15. $f \in F^I$. Alors $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, F)$ ssi il existe $(\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}(I)$ t.q.

- (i) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f|_{] \sigma_{i-1}, \sigma_i[} \in \mathcal{C}^0(] \sigma_{i-1}, \sigma_i[, F),$
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f$ admet une limite à gauche en $\sigma_i,$
- (iii) $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, f$ admet une limite à droite en $\sigma_i.$

Proposition 18.16.

$$\mathcal{C}_{pm}^0(I, F) = \text{Esc}(I, F) + \mathcal{C}^0(I, F).$$

En particulier, \mathcal{C}_{pm}^0 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{B}(I, F)$.

Proposition 18.17. $\mathcal{C}_{pm}^0(I, F) \subsetneq \overline{\text{Esc}(I, F)}$ (au sens de $(\mathfrak{B}(I, F), \|\cdot\|_\infty)$).

III Fonctions réglées

Définition 18.18 (Fonction réglée). On note :

$$\mathcal{R}(I, F) = \overline{\text{Esc}(I, F)}.$$

Les éléments de $\mathcal{R}(I, F)$ sont dits fonctions réglées.

Proposition 18.19. $f \in F^I$. S'équivalent :

- (i) $f \in \mathcal{R}(I, F).$
- (ii) f admet une limite à gauche en tout point de $]a, b]$ et une limite à droite en tout point de $[a, b[.$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Pour $x_0 \in]a, b]$, appliquer le théorème d'interversion des limites (théorème 17.25) à $f|_{[a, x_0[}$. (ii) \Rightarrow (i) Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$\mathcal{A} = \{c \in]a, b], \exists v \in \text{Esc}([a, c], F), \|v - f|_{[a, c]}\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

On veut montrer que $b \in \mathcal{A}$. *Première étape :* $\mathcal{A} \neq \emptyset$. En effet, $\lim_{a+} f$ existe ; soit donc $c \in]a, b]$ t.q. $\forall t \in]a, c], \|f(t) - \lim_{a+} f\|_F \leq \varepsilon$. Poser alors :

$$v : t \in [a, c] \mapsto \begin{cases} f(a) & \text{si } t = a \\ \lim_{a+} f & \text{sinon} \end{cases},$$

et montrer que $v \in \text{Esc}([a, c], F)$ et que $\|v - f|_{[a, c]}\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, $c \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \neq \emptyset$. *Deuxième étape :* \mathcal{A} admet un maximum. Comme \mathcal{A} est non vide et majoré, soit $m = \sup \mathcal{A}$. Supposons par l'absurde $m \notin \mathcal{A}$. Comme $\lim_{m-} f$ existe, soit $d \in [a, m[$ t.q. $\forall t \in [d, m[, \|f(t) - \lim_{m-} f\|_F \leq \varepsilon$. Comme $m =$

$\sup \mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, soit $x \in [d, m[\cap \mathcal{A}$, et soit $u \in \text{Esc}([a, x], F)$ t.q. $\|u - f|_{[a, x]}\|_\infty \leq \varepsilon$. Poser alors :

$$v : t \in [a, m] \mapsto \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [a, x] \\ \lim_{m-} f & \text{si } t \in]x, m[, \\ f(m) & \text{si } t = m \end{cases}$$

et montrer que $v \in \text{Esc}([a, m], F)$ et que $\|v - f|_{[a, m]}\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, $m \in \mathcal{A}$; c'est absurde. *Troisième étape* : $\max \mathcal{A} = b$. Pour cela, supposer par l'absurde $m = \max \mathcal{A} < b$, utiliser le fait que $\lim_{m+} f$ existe, et raisonner comme précédemment. *Conclusion* : $b \in \mathcal{A}$. \square

Corollaire 18.20. *Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est réglée.*

Proposition 18.21. *Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ réglée possède un nombre dénombrable de points de discontinuité.*

IV Intégrales de fonctions réglées

Lemme 18.22. $u \in \text{Esc}(I, F)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{R}(I, F)$. On suppose que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f.$$

Alors la suite $(\mu_F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. Montrer que $(\mu_F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, puis utiliser le théorème 15.31. \square

Lemme 18.23. $(u, v) \in (\text{Esc}(I, F)^{\mathbb{N}})^2$, $f \in \mathcal{R}(I, F)$. On suppose que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f.$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_F(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_F(v_n).$$

Démonstration. Poser $w \in \text{Esc}(I, F)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \begin{cases} u_{n/2} & \text{si } 2 \mid n \\ v_{(n-1)/2} & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}.$$

Alors $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f$, donc $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_F(w_n)$ existe. Or $(\mu_F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_F(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sous-suites de $(\mu_F(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_F(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_F(v_n) = \ell$. \square

Définition 18.24 (Intégrale d'une fonction réglée). *Pour $f \in \mathcal{R}(I, F)$, on pose :*

$$\tilde{\mu}_F(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_F(u_n),$$

où $u \in \text{Esc}(I, F)^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f .

Proposition 18.25. $\forall f \in \text{Esc}(I, F), \tilde{\mu}_F(f) = \mu_F(f)$.

Notation 18.26. *Pour $f \in \mathcal{R}(I, F)$, on notera :*

$$\int_a^b f = \tilde{\mu}_F(f).$$

Proposition 18.27.

- (i) $\tilde{\mu}_F \in \mathcal{L}_C(\mathcal{R}(I, F), F)$.
- (ii) $\|\tilde{\mu}_F\| = b - a$.

Corollaire 18.28. $f \in \mathcal{R}(I, F)^{\mathbb{N}}, \ell \in \mathcal{R}(I, F)$. Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$, alors :

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b \ell.$$

Corollaire 18.29. $u \in \mathcal{R}(I, F)^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge uniformément, alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt.$$

Proposition 18.30 (Inégalité triangulaire). *Si $f \in \mathcal{R}(I, F)$, alors $\|f\|_F \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ et :*

$$\left\| \int_a^b f \right\|_F \leq \int_a^b \|f\|_F.$$

Proposition 18.31. *Si $f \in \mathcal{R}(I, F)$ et $\Lambda \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $(\Lambda \circ f) \in \mathcal{R}(I, G)$ et :*

$$\Lambda \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b (\Lambda \circ f).$$

Corollaire 18.32. $f \in F^I$. (e_1, \dots, e_d) base de F , (e_1^*, \dots, e_d^*) base duale. Alors $f \in \mathcal{R}(I, F)$ ssi $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, (e_i^* \circ f) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. Si tel est le cas :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^d \left(\int_a^b (e_i^* \circ f) \right) e_i.$$

Proposition 18.33 (Relation de Chasles). $f \in \mathcal{R}(I, F)$. $c \in \overset{\circ}{I}$. Alors $f \in \mathcal{R}(I, F)$ ssi $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a, c], F)$ et $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c, b], F)$. Si tel est le cas :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Notation 18.34. On notera $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

V Sommes de Riemann

Définition 18.35 (Subdivision pointée). On appelle subdivision pointée de I tout $\sigma^* = ((x_0, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in I^{n+1} \times I^n$ t.q.

- (i) $a = x_0 < \dots < x_n = b$,
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{i-1} \leq y_i \leq x_i$.

On définit alors le pas de σ^* :

$$|\sigma^*| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

On note $\mathcal{S}^*(I)$ l'ensemble des subdivisions pointées de I .

Définition 18.36 (Somme de Riemann). $\sigma^* = ((x_0, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathcal{S}^*(I)$. $f \in \mathcal{R}(I, F)$. On pose :

$$\Sigma_{\sigma^*}(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(y_i).$$

Lemme 18.37. $\sigma^* \in \mathcal{S}^*(I)$. Alors :

- (i) $\Sigma_{\sigma^*} \in \mathcal{L}_C(\mathcal{R}(I, F), F)$.
- (ii) $\|\Sigma_{\sigma^*}\| = b - a$.

Lemme 18.38. $\sigma^* \in \mathcal{S}^*(I)^{\mathbb{N}}$ t.q. $|\sigma_p^*| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$. On pose :

$$\mathcal{V} = \left\{ f \in \mathcal{R}(I, F), \Sigma_{\sigma_p^*}(f) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f \right\}.$$

Alors :

- (i) \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}(I, F)$.
- (ii) \mathcal{V} est un fermé de $\mathcal{R}(I, F)$ (au sens de $\|\cdot\|_{\infty}$).
- (iii) $\mathcal{V} \supset \text{Esc}(I, F)$.

Démonstration. (iii) Montrer que, pour tout $(u, v) \in I^2$ et pour tout $\omega \in F$:

$$\mathbb{1}_{[u,v]}\omega \in \mathcal{V}.$$

Conclure avec le (i) et la proposition 18.5. □

Théorème 18.39. $\sigma^* \in \mathcal{S}^*(I)^{\mathbb{N}}$ t.q. $|\sigma_p^*| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$. Alors :

$$\forall f \in \mathcal{R}(I, F), \Sigma_{\sigma_p^*}(f) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

Chapitre 19

Dérivation

Notation 19.1. Dans tout le chapitre, I est un intervalle non trivial de \mathbb{R} , et $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés non nuls de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Dérivée

Définition 19.2 (Dérivée). $f \in F^I$, $\omega \in I$. On dit que f est dérivable en ω lorsque $t \in I \setminus \{\omega\} \mapsto \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega}$ admet une limite en ω . On définit alors :

$$f'(\omega) = \lim_{\substack{t \rightarrow \omega \\ t \neq \omega}} \frac{f(t) - f(\omega)}{t - \omega}.$$

Proposition 19.3. $f \in F^I$, $\omega \in I$. Si f est dérivable en ω et $\Lambda \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $(\Lambda \circ f)$ est dérivable en ω et :

$$(\Lambda \circ f)'(\omega) = \Lambda(f'(\omega)).$$

Corollaire 19.4. $f \in F^I$, $\omega \in I$. (e_1, \dots, e_d) base de F , (e_1^*, \dots, e_d^*) base duale. Alors f est dérivable en ω ssi $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $(e_i^* \circ f)$ est dérivable en ω . Si tel est le cas :

$$f'(\omega) = \sum_{i=1}^d (e_i^* \circ f)'(\omega) \cdot e_i.$$

II Inégalité des accroissements finis et conséquences

Théorème 19.5 (Inégalité des accroissements finis). $f \in F^{[a,b]}$, $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, avec $a < b$. On suppose :

- (i) f et φ sont continues sur $[a, b]$,
- (ii) f et φ sont dérivables en tout point de $]a, b[$,
- (iii) $\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\|_F \leq \varphi'(t)$.

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on pose :

$$g : t \in [a, b] \longmapsto \|f(t) - f(a)\|_F - (\varphi(t) - \varphi(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon),$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \{t \in [a, b], g(t) \leq 0\}.$$

Il suffit de montrer : $\forall \varepsilon > 0, b \in \mathcal{A}(\varepsilon)$. On fixe donc $\varepsilon > 0$. *Première étape* : $\mathcal{A}(\varepsilon) \cap]a, b] \neq \emptyset$. En effet, $g(a) = -\varepsilon < 0$, et g est continue, donc il existe $u \in]a, b]$ t.q. $g(u) \leq 0$. *Deuxième étape* : $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est fermé. En effet, $\mathcal{A}(\varepsilon) = g^{-1}(\mathbb{R}_-)$. *Troisième étape* : $\mathcal{A}(\varepsilon)$ admet un plus grand élément. En effet, $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est non vide et majoré donc admet une borne supérieure, qui est un maximum car $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est fermé. *Quatrième étape* : $\max \mathcal{A}(\varepsilon) = b$. On suppose par l'absurde que $c = \max \mathcal{A}(\varepsilon) < b$. D'après la première étape, on a $c \in]a, b[$. Donc f et φ sont dérivables en c : soit $(d_1, d_2) \in]c, b]^2$ t.q.

$$\forall t \in]c, d_1[, \left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'(c) \right\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall t \in]c, d_2[, \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c} - \varphi'(c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $d = \min(d_1, d_2)$. Montrons que $d \in \mathcal{A}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
 \|f(d) - f(a)\|_F &\leq \|f(d) - f(c)\|_F + \|f(c) - f(a)\|_F \\
 &\leq \|f(d) - f(c) - (d - c)f'(c)\|_F + \|(d - c)f'(c)\|_F + \varphi(c) \\
 &\quad - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2}(d - c) + (d - c)\|f'(c)\|_F + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2}(d - c) + (d - c)\varphi'(c) + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \\
 &= (d - c)\left(\varphi'(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \\
 &\leq (d - c) \cdot \left(\frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c} + \varepsilon\right) + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \\
 &= \varphi(d) - \varphi(a) + \varepsilon(d - a) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Donc $d \in \mathcal{A}(\varepsilon)$, et $d > c$. C'est absurde. *Conclusion* : $b \in \mathcal{A}(\varepsilon)$. □

Proposition 19.6. $f \in F^I$ dérivable en tout point de I . $\rho \in \mathbb{R}_+$. S'équivalent :

- (i) f est ρ -lipschitzienne.
- (ii) $\forall t \in I, \|f'(t)\|_F \leq \rho$.

Corollaire 19.7. $f \in F^I$ dérivable en tout point de I . S'équivalent :

- (i) f est constante.
- (ii) $f' = 0$.

III Relation intégrales-primitives

Définition 19.8 (Primitive). $g \in F^I$. On appelle primitive de g toute application $\Gamma \in F^I$ dérivable en tout point de I et telle que $\Gamma' = g$.

Proposition 19.9. $g \in F^I$. Si $\Gamma \in F^I$ est une primitive de g , alors les primitives de g sont les $\Gamma + u$, où $u \in F$.

Définition 19.10 (Fonction réglée sur un intervalle). $g \in F^I$. S'équivalent :

- (i) La restriction de g à tout segment est réglée.
- (ii) g admet une limite à gauche en tout point de $I \setminus \{\inf I\}$ et une limite à droite en tout point de $I \setminus \{\sup I\}$.

On dit alors que g est réglée. Et on note $\mathcal{R}(I, F)$ l'ensemble des fonctions réglées $I \rightarrow F$.

Proposition 19.11. Si $g \in \mathcal{C}^0(I, F)$, alors g possède une primitive.

Démonstration. Soit $a \in I$. Poser :

$$\Gamma : x \in I \mapsto \int_a^x g.$$

Montrer que la restriction de Γ à tout segment est lipschitzienne donc continue. Montrer ensuite, pour tout $\omega \in I$:

$$\Gamma'_g(\omega) = \lim_{\omega^-} g \quad \text{et} \quad \Gamma'_d(\omega) = \lim_{\omega^+} g.$$

En déduire que Γ est dérivable et que $\Gamma' = g$. □

Théorème 19.12 (Théorème fondamental de l'analyse). $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, f(b) - f(a) = \int_a^b f'.$$

Définition 19.13 (Fonction \mathcal{C}^1 par morceaux). Une fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite \mathcal{C}^1 par morceaux lorsqu'il existe $(\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}([a, b])$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in F^{[\sigma_0, \sigma_1]} \times \dots \times F^{[\sigma_{n-1}, \sigma_n]}$ t.q. :

$$(i) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i \in \mathcal{C}^1([\sigma_{i-1}, \sigma_i], F),$$

$$(ii) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f|_{] \sigma_{i-1}, \sigma_i[} = \varphi_i|_{] \sigma_{i-1}, \sigma_i[}.$$

On notera $\mathcal{C}_{pm}^1([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux $[a, b] \rightarrow F$.

Proposition 19.14. $f \in \mathcal{C}_{pm}^1([a, b], F) \cap \mathcal{C}^0([a, b], F)$. On pose :

$$\tilde{f}' : t \in [a, b] \mapsto \begin{cases} f'(t) & \text{si } f \text{ est dérivable en } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\tilde{f}' \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ et :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \tilde{f}'.$$

IV Dérivation d'une limite

Théorème 19.15. $f \in (F^I)^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in F^I$. On suppose :

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, F),$$

$$(ii) \quad \exists a \in I, (f_n(a))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge,}$$

$$(iii) \quad f'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \varphi \text{ sur tout intervalle borné de } I.$$

Alors il existe $\Phi \in F^I$ t.q.

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \Phi$,
- (ii) $\Phi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $\Phi' = \varphi$,
- (iii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \Phi$ sur tout intervalle borné de I .

Démonstration. Montrer d'abord que $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, F)$. Soit $a \in I$ tel que $f_n(a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in F$. Poser :

$$\Phi : x \in I \longmapsto \ell + \int_a^x \varphi \in F.$$

(ii) est une conséquence du théorème fondamental de l'analyse (théorème 19.12). On va montrer (iii), et on en déduira aisément (i). Soit J un intervalle borné de I . Quitte à agrandir J , on peut supposer $a \in J$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, on a :

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - \Phi(x)\|_F &= \left\| f_n(a) + \int_a^x f'_n - \ell - \int_a^x \varphi \right\|_F \\ &\leq \|f_n(a) - \ell\|_F + \left\| \int_a^x (f'_n - \varphi) \right\|_F \\ &\leq \|f_n(a) - \ell\|_F + \delta(J) \cdot \|f'_n - \varphi\|_\infty, \end{aligned}$$

où $\delta(J) = \sup J - \inf J$. Donc :

$$\|f_n - \Phi\|_\infty \leq \|f_n(a) - \ell\|_F + \delta(J) \cdot \|f'_n - \varphi\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

Remarque 19.16. *Le théorème précédent reste valable avec les modifications suivantes :*

- (i) *On peut remplacer “sur tout intervalle borné de I ” par “sur tout segment de I ”.*
- (ii) *On peut remplacer \mathcal{C}^1 par dérivable.*

Démonstration. (ii) Utiliser l'inégalité des accroissements finis (théorème 19.5) et le critère uniforme de Cauchy (théorème 17.21). □

Exemple 19.17. *La fonction suivante est dérivable mais pas \mathcal{C}^1 :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Proposition 19.18. $f \in (F^I)^\mathbb{N}$, $\varphi \in F^I$. On suppose :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^p(I, F),$
- (ii) $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \exists a_k \in I, \left(f_n^{(k)}(a_k) \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge,}$
- (iii) $f_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \varphi \text{ sur tout intervalle borné de } I.$

Alors il existe $\Phi \in F^I$ t.q.

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \Phi,$
- (ii) $\Phi \in \mathcal{C}^p(I, F),$
- (iii) $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, f_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \Phi^{(k)} \text{ sur tout intervalle borné de } I.$

V Dérivation sous le signe somme

Théorème 19.19. $u \in (F^I)^{\mathbb{N}}$. On suppose :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}^1(I, F),$
- (ii) $\exists a \in I, \sum u_n(a) \text{ converge,}$
- (iii) $\sum u'_n \text{ converge uniformément sur tout intervalle borné de } I.$

Alors :

- (i) $\sum u_n \text{ converge simplement, et on pose :}$

$$S : x \in I \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

- (ii) $S \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et :

$$\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x),$$

- (iii) $\sum u_n \text{ converge uniformément sur tout intervalle borné de } I.$

Proposition 19.20. $u \in (F^I)^{\mathbb{N}}$. On suppose :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}^p(I, F),$
- (ii) $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \exists a_k \in I, \sum u_n^{(k)}(a_k) \text{ converge,}$
- (iii) $\sum u_n^{(p)} \text{ converge uniformément sur tout intervalle borné de } I.$

Alors :

- (i) $\sum u_n \text{ converge simplement, et on pose :}$

$$S : x \in I \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

(ii) $S \in \mathcal{C}^p(I, F)$ et :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall x \in I, S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(x),$$

(iii) $\sum u_n$ converge uniformément sur tout intervalle borné de I .

Chapitre 20

Séries Entières

I Généralités

Définition 20.1 (Série entière). *On appelle série entière toute série de fonctions $\sum f_n$, t.q. il existe $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q. pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

La série entière $\sum f_n$ sera notée (abusivement) $\sum a_n z^n$.

Lemme 20.2 (Lemme d'Abel). $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $Z_0 \in \mathbb{C}$.

- (i) *Si la suite $(a_n Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $\forall \rho \in]0, |Z_0|[, \sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{B}_f(0, \rho)$.*
- (ii) *Si la suite $(a_n Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors $\forall Z \in \mathbb{C}, |Z| \geq |Z_0| \implies \sum a_n Z^n$ diverge.*

Proposition 20.3. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$I = \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

Alors I est un intervalle de \mathbb{R}_+ contenant 0. Et on notera :

$$\rho \left(\sum a_n z^n \right) = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Proposition 20.4. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $Z \in \mathbb{C}$.

- (i) *Si $|Z| < \rho(\sum a_n z^n)$, alors $\sum a_n Z^n$ converge absolument.*
- (ii) *Si $|Z| > \rho(\sum a_n z^n)$, alors $\sum a_n Z^n$ diverge.*

Notation 20.5. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On notera :

$$\mathcal{D}\left(\sum a_n z^n\right) = \left\{Z \in \mathbb{C}, \sum a_n Z^n \text{ converge}\right\}.$$

Proposition 20.6. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $D = \mathcal{D}\left(\sum a_n z^n\right)$ et $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(i) Si $R = 0$, alors $D = \{0\}$.

(ii) Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\mathcal{B}_o(0, R) \subset D \subset \mathcal{B}_f(0, R).$$

(iii) Si $R = +\infty$, alors $D = \mathbb{C}$.

Proposition 20.7. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho\left(\sum a_n z^n\right)$ et on suppose que $R \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

(i) Pour tout $Z \in \mathcal{B}_o(0, R)$, la série $\sum a_n Z^n$ converge de façon géométrique.

(ii) La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans $\mathcal{B}_o(0, R)$.

II Détermination du rayon de convergence

II.1 Observation des suites $(a_n Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Proposition 20.8. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $Z \in \mathbb{C}$.

(i) Si $\sum a_n Z^n$ converge, alors $|Z| \leq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. Sinon, $|Z| \geq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(ii) Si $a_n Z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $|Z| \leq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. Sinon, $|Z| \geq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

(iii) Si $(a_n Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $|Z| \leq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$. Sinon, $|Z| \geq \rho\left(\sum a_n z^n\right)$.

II.2 Plasticité des a_n

Proposition 20.9. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum |a_n| z^n\right).$$

Proposition 20.10. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. Alors :

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies \rho\left(\sum a_n z^n\right) \geq \rho\left(\sum b_n z^n\right).$$

Démonstration. Si $\rho(\sum b_n z^n) = 0$, l'inégalité est bien vérifiée. Sinon, soit $r \in [0, \rho(\sum b_n z^n)[$. Alors $\sum b_n r^n$ converge absolument, et $a_n r^n = \mathcal{O}(b_n r^n)$, donc $\sum a_n r^n$ converge absolument. Donc $r \leq \rho(\sum a_n z^n)$. On a montré :

$$\forall r \in \left[0, \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right[, r \leq \rho\left(\sum a_n z^n\right).$$

En faisant tendre $r \rightarrow \rho(\sum b_n z^n)$, il vient $\rho(\sum b_n z^n) \leq \rho(\sum a_n z^n)$. □

Corollaire 20.11. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. Alors :

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \text{ et } b_n = \mathcal{O}(a_n) \implies \rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum b_n z^n\right).$$

Proposition 20.12. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\varepsilon \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ stationne en 0, alors :

$$\rho\left(\sum (a_n + \varepsilon_n) z^n\right) = \rho\left(\sum a_n z^n\right).$$

Proposition 20.13. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \rho\left(\sum a_{n+1} z^n\right).$$

II.3 Opérations algébriques

Proposition 20.14. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. Alors :

$$\rho\left(\sum (a_n + b_n) z^n\right) \geq \min\left[\rho\left(\sum a_n z^n\right), \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right],$$

avec égalité dès que $\rho(\sum a_n z^n) \neq \rho(\sum b_n z^n)$.

Proposition 20.15. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$\rho\left(\sum a_n \lambda^n z^n\right) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \rho\left(\sum a_n z^n\right).$$

Notation 20.16 (Séries lacunaires). $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, φ une extraction. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^{\varphi(n)} \in \mathbb{C}.$$

La série $\sum u_n$ n'est pas à proprement parler une série entière, cependant on lui associera la série entière $\sum b_n z^n$, où $b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{\varphi(n)} = a_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \varphi(\mathbb{N}), b_n = 0.$$

La série entière $\sum b_n z^n$ sera notée $\sum a_n z^{\varphi(n)}$.

Exemple 20.17. $\rho(\sum n!z^{n!}) = 1$.

Proposition 20.18. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On note c le produit de Cauchy de a et b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j.$$

Alors :

$$\rho\left(\sum c_n z^n\right) \geq \min\left[\rho\left(\sum a_n z^n\right), \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right].$$

Et :

$$\begin{aligned} \forall Z \in \mathbb{C}, |Z| < \min\left[\rho\left(\sum a_n z^n\right), \rho\left(\sum b_n z^n\right)\right] \\ \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n\right). \end{aligned}$$

II.4 Règle de d'Alembert

Proposition 20.19. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Alors :

$$\rho\left(\sum a_n z^n\right) = \frac{1}{\ell}.$$

III Dérivation complexe

Définition 20.20 (\mathbb{C} -dérivation). Ω ouvert non vide de \mathbb{C} . $f \in \mathbb{C}^{\Omega}$, $\omega \in \Omega$. On dit que f est \mathbb{C} -dérivable en ω lorsque $z \in \Omega \setminus \{\omega\} \mapsto \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$ admet une limite en ω . On définit alors :

$$f'(\omega) = \lim_{\substack{z \rightarrow \omega \\ z \neq \omega}} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}.$$

Proposition 20.21. $P = \sum_{k=0}^d \lambda_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Alors P est \mathbb{C} -dérivable en tout point de \mathbb{C} , et sa \mathbb{C} -dérivée est égale à sa dérivée formelle :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P'(z) = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) \lambda_{k+1} z^k.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \frac{P(z+h) - P(z)}{(z+h) - z} &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^d \lambda_k \left[(z+h)^k - z^k \right] \\ &= \sum_{k=1}^d \lambda_k \sum_{j=0}^{k-1} (z+h)^j z^{k-1-j} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^d k \lambda_k z^{k-1}. \end{aligned}$$

□

Proposition 20.22. Ω ouvert non vide de \mathbb{C} . $f \in \mathbb{C}^\Omega$. Si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point de Ω alors f' est \mathbb{C} -dérivable en tout point de Ω .

Proposition 20.23. Ω, \mathcal{U} ouverts non vides de \mathbb{C} . $(f, g) \in (\mathbb{C}^\Omega)^2$, $h \in \mathbb{C}^\mathcal{U}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\omega \in \Omega$ t.q. $f(\omega) \in \mathcal{U}$.

(i) Si f est \mathbb{C} -dérivable en ω , et h est \mathbb{C} -dérivable en $f(\omega)$, alors $(h \circ f)$ est \mathbb{C} -dérivable en ω , et :

$$(h \circ f)'(\omega) = f'(\omega) \cdot h'(f(\omega)).$$

(ii) Si f et g sont \mathbb{C} -dérivables en ω , alors $(\lambda f + \mu g)$ est \mathbb{C} -dérivable en ω , et :

$$(\lambda f + \mu g)'(\omega) = \lambda f'(\omega) + \mu g'(\omega).$$

(iii) Si f et g sont \mathbb{C} -dérivables en ω , alors fg est \mathbb{C} -dérivable en ω , et :

$$(fg)'(\omega) = f'(\omega)g(\omega) + f(\omega)g'(\omega).$$

Théorème 20.24. $a \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. On pose $R = \rho(\sum a_n z^n)$ et on suppose $R \in]0, +\infty]$. On définit :

$$S : Z \in \mathcal{B}_o(0, R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathbb{C}.$$

Alors :

(i) $\rho(\sum (n+1)a_{n+1}z^n) = \rho(\sum a_n z^n)$.

(ii) S est \mathbb{C} -dérivable en tout point de $\mathcal{B}_o(0, R)$, et :

$$\forall Z \in \mathcal{B}_o(0, R), S'(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}Z^n.$$

Démonstration. (i) Soit $r \in [0, \rho(\sum a_n z^n)[$. Soit $r' \in]r, \rho(\sum a_n z^n)[$. Alors :

$$(n+1)|a_{n+1}|r^n = \frac{n+1}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_{n+1}|r'^{n+1} = o(|a_{n+1}|r'^{n+1}).$$

Or $\sum a_{n+1}r'^{n+1}$ converge absolument car $r' < \rho(\sum a_n z^n)$; donc $\sum (n+1)a_{n+1}r^n$ converge absolument, d'où $r \leq \rho(\sum (n+1)a_{n+1}z^n)$. Ceci montre que $\rho(\sum a_n z^n) \leq \rho(\sum (n+1)a_{n+1}z^n)$. Montrer l'autre inégalité. (ii) Soit $Z_0 \in \mathcal{B}_o(0, R)$, $h \in \mathbb{C}$ t.q. $(Z_0 + h) \in \mathcal{B}_o(0, R) \setminus \{Z_0\}$. Montrer d'abord :

$$\frac{S(Z_0 + h) - S(Z_0)}{(Z_0 + h) - Z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} (Z_0 + h)^j Z_0^{n-1-j}.$$

Soit alors $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_f(Z_0, r) \subset \mathcal{B}_o(0, R)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n : h \in \mathcal{B}_f(0, r) \mapsto a_n \sum_{j=0}^{n-1} (Z_0 + h)^j Z_0^{n-1-j}.$$

P_n est \mathcal{C}^0 (car polynomiale) sur $\mathcal{B}_f(0, r)$. On a vu que $\sum P_n$ converge simplement. Montrons que la convergence est normale :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{B}_f(0, r), |P_n(h)| &\leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} (|Z_0| + r)^j (|Z_0| + r)^{n-1-j} \\ &= n |a_n| (|Z_0| + r)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|P_n\|_{\infty} \leq n |a_n| (|Z_0| + r)^{n-1}.$$

Or $|Z_0| + r < R = \rho(\sum a_n z^n) = \rho(\sum (n+1)a_{n+1}z^n)$ d'après le (i), donc $\sum n |a_n| (|Z_0| + r)^{n-1}$ converge, d'où $\sum P_n$ converge normalement. D'après le théorème 17.25, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{S(Z_0 + h) - S(Z_0)}{(Z_0 + h) - Z_0} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N P_n(h) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \sum_{n=1}^N P_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n Z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Chapitre 21

L'Exponentielle Complexe

I Définition

Proposition 21.1. $\rho\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$.

Définition 21.2 (Exponentielle). *On définit :*

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} . \end{cases}$$

Proposition 21.3. $\exp \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Proposition 21.4. \exp est \mathbb{C} -dérivable en tout point de \mathbb{C} et :

$$\exp' = \exp .$$

Proposition 21.5.

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2) .$$

Corollaire 21.6. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times) .

Proposition 21.7.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) .$$

Définition 21.8 (Cosinus et sinus). *On définit :*

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} . \end{cases}$$

Proposition 21.9.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (i)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (ii)$$

Proposition 21.10. *cos et sin sont \mathbb{C} -dérivables et :*

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos.$$

Proposition 21.11. $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$

Définition 21.12 (Cosinus et sinus hyperboliques). *On définit :*

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{sh} : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \end{cases}.$$

Proposition 21.13.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (i)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (ii)$$

Proposition 21.14. *ch et sh sont \mathbb{C} -dérivables et :*

$$\text{ch}' = \text{sh} \quad \text{et} \quad \text{sh}' = \text{ch}.$$

Proposition 21.15.

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \text{ch}(iz),$$

$$(ii) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = -i \text{sh}(iz).$$

II Exponentielle réelle

Définition 21.16 (Logarithme). $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection. On posera $\ln = \exp^{-1}$.

Théorème 21.17.

$$(i) \quad \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ est un isomorphisme de groupes de } (\mathbb{R}, +) \text{ dans } (\mathbb{R}_+^*, \times).$$

(ii) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un homéomorphisme.

(iii) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme, i.e. \exp et \exp^{-1} sont \mathcal{C}^∞ .

Notation 21.18 (e). On pose $e = \exp(1)$.

Proposition 21.19. $e \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ t.q. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{p}{q}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} \right)^q = \frac{n+2}{n!(n+1)^2}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{n+2}{n!(n+1)^2}.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n < p \cdot \frac{n!}{q} \leq A_n + \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

En choisissant $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 \geq q$ et $\frac{n_0+2}{(n_0+1)^2} < 1$, il vient $A_{n_0} < p \cdot \frac{n_0!}{q} < A_{n_0} + 1$. C'est absurde car $p \cdot \frac{n_0!}{q} \in \mathbb{N}$. \square

Notation 21.20. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$a^z = \exp(z \ln(a)).$$

Avec cette notation, on a $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

III Exponentielle des imaginaires purs

Notation 21.21. On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Proposition 21.22.

- (i) \mathbb{U} est compact et connexe par arcs (car c'est la sphère unité de \mathbb{C}).
- (ii) (\mathbb{U}, \times) est un groupe.

Proposition 21.23. $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$.

Définition 21.24 (π). On considère $\mathcal{A} = \{\theta \in \mathbb{R}_+, \cos(\theta) = 0\}$. Alors \mathcal{A} possède un plus petit élément, noté $\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. \cos est \mathcal{C}^0 , et $\cos(0) = 1 > 0$. En utilisant la proposition 3.14, montrer que $\cos(2) < 0$. En déduire avec le théorème des valeurs intermédiaires que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Et \mathcal{A} est minoré par 0 donc $\inf \mathcal{A}$ existe. Or \mathcal{A} est fermé car $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+ \cap \cos^{-1}(\{0\})$, donc $\min \mathcal{A}$ existe. \square

Proposition 21.25.

- (i) $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$,
- (ii) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,
- (iii) $e^{i\pi} = -1$,
- (iv) $e^{2i\pi} = 1$.

Démonstration. (i) Revenir à la définition de \cos et \sin . (ii) Par définition de π et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\cos \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or $\sin' = \cos$ donc $\sin \nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Et $\sin(0) = 0$, donc $\sin(\frac{\pi}{2}) \geq 0$. Or $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$, donc $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. \square

Théorème 21.26. *On considère :*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \\ \theta \longmapsto e^{i\theta} \end{cases}.$$

Alors φ est un morphisme de groupes surjectif et $\text{Ker } \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

IV Autour de l'argument

Lemme 21.27. *L'application*

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (\rho, z) \longmapsto \rho z \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Proposition 21.28. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes surjectif et $\text{Ker } \exp = 2i\pi\mathbb{Z}$.

Vocabulaire 21.29 (Argument). $z \in \mathbb{C}$. On appelle argument de z tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z| e^{i\theta}$.

Vocabulaire 21.30 (Détermination continue de l'argument). On appelle détermination continue de l'argument tout couple (Ω, α) t.q. Ω est un ouvert connexe par arcs de \mathbb{C}^* et $\alpha \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ avec :

$$\forall z \in \Omega, z = |z| e^{i\alpha(z)}.$$

Théorème 21.31 (Théorème du relèvement angulaire). I intervalle de \mathbb{R} .

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U}), \exists \vartheta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \forall t \in I, \varphi(t) = e^{i\vartheta(t)}.$$

Chapitre 22

Développements en Séries Entières

Notation 22.1. Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Généralités

Définition 22.2 (Développement en série entière). $A \subset \mathbb{K}$, $\omega \in A$, $f \in \mathbb{C}^A$.

- (i) On dit que f est développable en série entière en ω sur A tout entier lorsque :

$$\exists a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall z \in A, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \omega)^n.$$

- (ii) On dit que f est développable en série entière autour de ω lorsque :

$$\exists V \in \mathcal{V}(\omega), \exists a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall z \in A \cap V, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \omega)^n.$$

Vocabulaire 22.3. $A \subset \mathbb{K}$, $\omega \in \overset{\circ}{A}$, $f \in \mathbb{C}^A$. On appelle développement en série entière de f autour de ω toute série entière $\sum a_n(z - \omega)^n$, avec $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, t.q. il existe $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r) \subset A$ et :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(\omega, r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \omega)^n.$$

Exemple 22.4. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, \exp est développable en série entière en ω sur \mathbb{C} tout entier, et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^\omega}{n!} (z - \omega)^n.$$

Proposition 22.5. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On note $R_a = \rho(\sum a_n z^n)$, $R_b = \rho(\sum b_n z^n)$. On suppose que :

$$\exists r \in]0, \min(R_a, R_b)], \forall x \in]-r, r[, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Alors $a = b$.

Démonstration. Poser

$$A : x \in]-r, r[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad B : x \in]-r, r[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Montrer que A et B sont \mathcal{C}^∞ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{B^{(n)}(0)}{n!}.$$

En déduire $a = b$. □

Corollaire 22.6. $A \subset \mathbb{K}$, $\omega \in \mathring{A}$, $f \in \mathbb{C}^A$. Si f admet un développement en série entière autour de ω , alors il est unique.

Proposition 22.7. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On note $R_a = \rho(\sum a_n z^n)$, $R_b = \rho(\sum b_n z^n)$. On suppose que :

$$\exists w \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, |w_p| < \min(R_a, R_b) \\ w_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_p^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w_p^n \end{cases}.$$

Alors $a = b$.

Proposition 22.8. $A \subset \mathbb{K}$, $\omega \in \mathring{A}$. On pose :

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathbb{C}^A, f \text{ est développable en série entière en } \omega \text{ sur } A \text{ tout entier}\},$$

$$\mathcal{L} = \{f \in \mathbb{C}^A, f \text{ est développable en série entière autour de } \omega\}.$$

Alors :

- (i) \mathcal{G} et \mathcal{L} sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^A .
- (ii) $\{f|_{\mathring{A}}, f \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathring{A}, \mathbb{C})$.
- (iii) \mathcal{L} est stable par produit.

II Composition des développements en séries entières

Proposition 22.9. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho(\sum a_n z^n)$ et on pose :

$$f : z \in \mathcal{B}_o(0, R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit $\omega \in \mathcal{B}_o(0, R)$; on note $r = R - |\omega| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors f est développable en série entière autour de ω sur $\mathcal{B}_o(\omega, r)$ tout entier.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{B}_o(0, r)$. Comme $|\omega + h| < R$:

$$f(\omega + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\omega + h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} \omega^{n-k} h^k.$$

On définit :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (n, k) \mapsto \begin{cases} a_n \binom{n}{k} \omega^{n-k} h^k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \end{cases}.$$

On a :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} |u(n, k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|\omega| + |h|)^n < +\infty,$$

car $|\omega| + |h| < R$. Donc $(u(n, k))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Ainsi :

$$f(\omega + h) = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} u(n, k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n, k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} \omega^{n-k} \right) h^k.$$

Donc f est développable en série entière autour de ω . □

Théorème 22.10. Ω, \mathcal{U} ouverts de \mathbb{C} , $\omega \in \Omega$, $f \in \mathcal{U}^{\Omega}$, $g \in \mathcal{C}^{\mathcal{U}}$. On suppose :

- (i) f est développable en série entière autour de ω ,
- (ii) g est développable en série entière autour de $f(\omega)$.

Alors $(g \circ f)$ est développable en série entière autour de ω .

Démonstration. Par translation, se ramener à $\omega = f(\omega) = (g \circ f)(\omega) = 0$.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$, $(r, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ t.q. $\mathcal{B}_o(0, r) \subset \Omega$ et $\mathcal{B}_o(0, R) \subset \mathcal{U}$ et :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r), f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \forall Z \in \mathcal{B}_o(0, R), g(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z^n.$$

Quitte à diminuer r , on peut supposer $f(\mathcal{B}_o(0, r)) \subset \mathcal{B}_o(0, R)$ (par continuité de f en 0). Soit $z \in \mathcal{B}_o(0, r)$. Alors :

$$(g \circ f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k \\ i_1 + \dots + i_n = k}} b_n a_{i_1} \cdots a_{i_n} z^k.$$

On note $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (b_n a_{i_1} \cdots a_{i_n} z^k)_{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, n \leq k, i_1 + \dots + i_n = k}$. Montrons que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable. Comme $\rho(\sum a_n z^n) > 0$ et $\rho(\sum b_n z^n) > 0$, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $(A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \alpha A^n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq \beta B^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} |u_\lambda| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k \\ i_1 + \dots + i_n = k}} |b_n| \cdot |a_{i_1}| \cdots |a_{i_n}| \cdot |z|^k \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta B^n \alpha^n \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k \\ i_1 + \dots + i_n = k}} (A|z|)^k \\ &= \beta \sum_{n=1}^{\infty} (B\alpha)^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} (A|z|)^j \right)^n \quad \text{en supposant } |z| < \frac{1}{A} \\ &= \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B\alpha A|z|}{1 - A|z|} \right)^n < +\infty \quad \text{en supposant } \frac{B\alpha A|z|}{1 - A|z|} < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\rho \leq \min(r, \frac{1}{A})$ t.q. $\forall x \in [0, \rho[$, $\frac{B\alpha Ax}{1 - Ax} < 1$, alors pour $z \in \mathcal{B}_o(0, \rho)$, la famille $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable. Donc :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, \rho), (g \circ f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k \\ i_1 + \dots + i_n = k}} b_n a_{i_1} \cdots a_{i_n} \right) z^k.$$

Donc $(g \circ f)$ est développable en série entière autour de 0. \square

III Développement en séries entières des fractions rationnelles

Proposition 22.11. *Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère $f_p : z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mapsto \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$. Alors f_p est développable en série entière autour de 0, et :*

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, 1), \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Démonstration. Noter que $\forall z \in \mathcal{B}_o(0, 1)$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. En déduire le résultat, soit en utilisant la \mathbb{C} -dérivation, soit par récurrence en utilisant des produits de Cauchy. \square

Application 22.12. $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Alors la somme de $\sum P(n)z^n$ est une fraction rationnelle, que l'on peut calculer explicitement.

Démonstration. Avant tout, $\rho(\sum P(n)z^n) = 1$. Soit $d \geq \deg P$. Remarquer que $((X+k) \cdots (X+1))_{k \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$. Soit donc $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ t.q. $P = \sum_{k=0}^d a_k (X+k) \cdots (X+1)$. On a, pour $z \in \mathcal{B}_o(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^d a_k (n+k) \cdots (n+1) \right) z^n \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \cdots (n+1) z^n \\ &= \sum_{k=0}^d a_k k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \sum_{k=0}^d \frac{a_k k!}{(1-z)^{k+1}}. \end{aligned}$$

\square

Théorème 22.13. $F \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}[X]$. On pose Z l'ensemble des pôles de F et on suppose $0 \notin Z$. On pose :

$$r = \min_{\omega \in Z} |\omega| > 0.$$

Alors F est développable en série entière en 0 sur $\mathcal{B}_o(0, r)$ tout entier.

Démonstration. Par linéarité des développements en séries entières, il suffit de montrer que tout polynôme et que toute fonction de la forme $z \mapsto \frac{1}{(z-\omega)^j}$, où $\omega \in Z$ et $j \in \mathbb{N}^*$, sont développables en séries entières en 0 sur $\mathcal{B}_o(0, r)$ tout entier. \square

IV Cas des fonctions de la variable réelle

Proposition 22.14. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho(\sum a_n z^n)$ et on pose :

$$f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}.$$

Alors f est C^{∞} et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

De plus, la convergence est normale sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Proposition 22.15. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho(\sum a_n z^n)$ et on pose :

$$f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}.$$

Alors l'application

$$F : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

Exemple 22.16. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction $x \in]-1, 1[\mapsto (1+x)^{\alpha} \in \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0 sur $]-1, 1[$ tout entier. Et :

$$\forall x \in]-1, 1[, (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Démonstration. On pose $\varphi_{\alpha} : x \in]-1, 1[\mapsto (1+x)^{\alpha} \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, (1+x)\varphi'_{\alpha}(x) = \alpha\varphi_{\alpha}(x).$$

Poser $h : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ et montrer que h est solution de la même équation différentielle que φ_{α} , et que $h(0) = \varphi_{\alpha}(0)$, d'où $h = \varphi_{\alpha}$. \square

Exemple 22.17. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $R = \rho(\sum a_n z^n)$ et on pose :

$$f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}.$$

Alors $(\exp \circ f)$ est développable en série entière autour de 0.

Démonstration. Noter que :

$$(\exp \circ f)' = f' \cdot (\exp \circ f).$$

On définit $b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $b_0 = (\exp \circ f)(0)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n b_k (n-k+1) a_{n-k+1}.$$

Il faut d'abord montrer que $\rho(\sum b_n z^n) > 0$. Pour cela, on va utiliser la *méthode des séries majorantes*. Soit d'abord $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \alpha A^n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |b_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} b_k (n-k) a_{n-k} \right| \leq \alpha \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \frac{n-k}{n} A^{n-k}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{|b_n|}{A^n} \leq \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{A^k} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{A^k}.$$

Définir alors $\gamma \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $\gamma_0 = \frac{|b_0|}{A^0}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n = \alpha(1+\alpha)^{n-1} \gamma_0$, et en déduire :

$$\frac{|b_n|}{A^n} \leq \gamma_n = \mathcal{O}((1+\alpha)^n).$$

Donc $|b_n| = \mathcal{O}((A(\alpha+1))^n)$. Soit alors $\rho = \min\left(R, \frac{1}{A(\alpha+1)}\right)$. On pose :

$$S : x \in]-\rho, \rho[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Montrer que S est solution de la même équation différentielle que $(\exp \circ f)$, que $S(0) = (\exp \circ f)(0)$, d'où $(\exp \circ f)|_{]-\rho, \rho[} = S$. \square

V Utilisation des formules de Taylor

Proposition 22.18. *I intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f \in \mathbb{C}^I$. On suppose que f est développable en série entière autour de x_0 : il existe $(a, b) \in I^2$, avec $a < x_0 < b$, et $\alpha \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$\forall x \in]a, b[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n.$$

Alors $f|_{]a,b[}$ est \mathcal{C}^∞ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Vocabulaire 22.19 (Série de Taylor). I intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$. On appelle série de Taylor de f en x_0 la série de fonctions $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

Proposition 22.20. I intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$. On note $R = \rho\left(\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} z^n\right)$. S'équivalent :

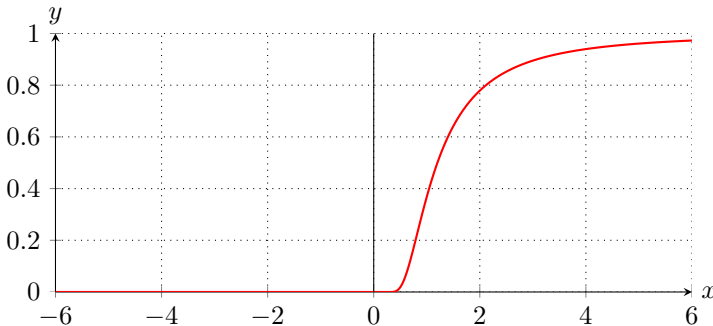
- (i) f est développable en série entière autour de x_0 .
- (ii) $R > 0$ et il existe $r \in]0, R]$ t.q. $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$ et :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Exemple 22.21 (Résine \mathcal{C}^∞). On considère :

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Alors ψ est \mathcal{C}^∞ , mais ψ n'est pas développable en série entière autour de 0.



Résine \mathcal{C}^∞

Démonstration. En reprenant la démonstration de l'exemple 2.9, montrer que ψ est \mathcal{C}^∞ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \psi^{(n)}(0) = 0$. En déduire que la série de Taylor de ψ en 0 est identiquement nulle, donc ψ n'est pas développable en série entière autour de 0. \square

Exemple 22.22. \tan est développable en série entière en 0 sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ tout entier.

Démonstration. On peut restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2} [$ car \tan est impaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\mathcal{H}(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}_+[X], \forall x \in [0, \frac{\pi}{2} [, \tan^{(n)}(x) = (P_n \circ \tan)(x).$$

Montrer par récurrence que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2} [, \tan^{(n)}(x) \geq 0$. Écrire alors la formule de Taylor avec reste intégral (proposition 2.14) :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2} [, \forall n \in \mathbb{N}, \tan x = \sum_{k=0}^n \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \tan^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}.$$

Comme les dérivées de \tan sont toutes positives, on a :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2} [, \forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) \leq \tan x.$$

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2} [$ fixé ; soit $y \in]x, \frac{\pi}{2} [$. Alors, en utilisant la croissance de $\tan^{(n+1)}$ (car $\tan^{(n+2)} \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2} [$), on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_0^1 \frac{x^n}{n!} (1-u)^n \tan^{(n+1)}(ux) x du \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(ux) du \\ &\leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \frac{y^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(uy) du \\ &= \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \tan y \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2} [, \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Généraliser cette formule à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ en utilisant le fait que \tan est impaire. \square

VI Théorème de convergence radiale d'Abel

Théorème 22.23 (Théorème de convergence radiale d'Abel). $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Alors $\rho(\sum a_n z^n) \geq 1$, donc on définit à bon droit :

$$f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Et on a :

$$\lim_{1^-} f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. On commence par effectuer une *transformation d'Abel* :

$$\forall x \in [0, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r_n - r_{n+1}) x^n = r_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r_n (x^n - x^{n-1})}_{\varphi(x)}.$$

Reste à montrer que $\lim_{1^-} \varphi = 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N, |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, |\varphi(x)| &\leq \left| \sum_{n=1}^N r_n (x^n - x^{n-1}) \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} (x^{n-1} - x^n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{n=1}^N r_n (x^n - x^{n-1}) \right|. \end{aligned}$$

Or $x \mapsto \sum_{n=1}^N r_n (x^n - x^{n-1})$ est continue (car polynomiale) et s'annule en 1. Donc il existe $\eta \in]0, 1[$ t.q. $\forall x \in]1 - \eta, 1[, \left| \sum_{n=1}^N r_n (x^n - x^{n-1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall x \in]1 - \eta, 1[, |\varphi(x)| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{1^-} \varphi = 0$ et $\lim_{1^-} f = r_0$. \square

Corollaire 22.24. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $R = \rho(\sum a_n z^n) \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit :

$$f : z \in \mathcal{B}_o(0, R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| = R$. Si $\sum a_n \omega^n$ converge, alors :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \omega \\ z \in [0, \omega[}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n.$$

Proposition 22.25. $(a, b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On note c le produit de Cauchy de a et b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j.$$

On suppose que $\sum a_n, \sum b_n$ et $\sum c_n$ sont convergentes. Alors :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Démonstration. Passer par les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ (dont les rayons sont ≥ 1), et utiliser la proposition 20.18 puis le théorème 22.23. \square

Vocabulaire 22.26 (Procédé sommatoire). *On appelle procédé sommatoire la donnée de :*

(i) E sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum a_n \text{ converge} \implies a \in E,$$

(ii) $P \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ t.q.

$$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum a_n \text{ converge} \implies P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Exemple 22.27. *Deux exemples de procédés sommatoires :*

(i) Procédé de Cesàro :

$$E_C = \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge au sens de Cesàro} \right\},$$

$$P_C : a \in E_C \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k a_j.$$

(ii) Procédé d'Abel :

$$E_A = \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \rho \left(\sum a_n z^n \right) \geq 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ existe dans } \mathbb{C} \right\},$$

$$P_A : a \in E_A \longmapsto \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in [0,1[}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

VII Transmutation des o

Proposition 22.28. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $b \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose :

- (i) $\rho(\sum b_n z^n) = +\infty$,
- (ii) b ne stationne pas en 0,
- (iii) $a_n = o(b_n)$.

Alors $\rho(\sum a_n z^n) = +\infty$, donc on définit à bon droit :

$$A : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad B : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Alors :

$$A(x) = o_{+\infty}(B(x)).$$

Démonstration. Montrer d'abord que $\forall N \in \mathbb{N}$, $x^N = o_{+\infty}(B(x))$. En déduire le résultat. \square

VIII Expression intégrale des coefficients

Proposition 22.29. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $R = \rho(\sum a_n z^n) > 0$ et on définit :

$$f : z \in \mathcal{B}_o(0, R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, R[, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Démonstration. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0, R[$. On considère $g : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}$. Noter que :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], g(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}.$$

Montrer que la convergence est uniforme, donc on peut intégrer sous le signe somme :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta} \right) d\theta = \sum_{p=0}^{\infty} \left(a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta} d\theta \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (a_p r^p \cdot 2\pi \delta_{np}) = 2\pi r^n a_n. \end{aligned}$$

\square

Chapitre 23

Groupes

I Rappels

I.1 Morphismes de groupes

Définition 23.1 (Morphisme de groupes). (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes. On dit que $\phi : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes lorsque

$$\forall (x, y) \in G^2, \phi(x \cdot y) = \phi(x) \circ \phi(y).$$

Proposition 23.2. (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes. $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. G' et H' des sous-groupes de G et H respectivement. Alors :

- (i) $\phi(G')$ est un sous-groupe de H .
- (ii) $\phi^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

Définition 23.3 (Noyau). (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H . $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. On définit

$$\text{Ker } \phi = \phi^{-1}(\{e_H\}).$$

D'après la proposition 23.2, $\text{Ker } \phi$ est un sous-groupe de G .

Proposition 23.4. (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H . $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

$$\text{Ker } \phi = \{e_G\} \iff \phi \text{ est injective.}$$

Vocabulaire 23.5. (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes. $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

- (i) ϕ est dit isomorphisme si ϕ est bijectif.
- (ii) ϕ est dit endomorphisme si $G = H$.
- (iii) ϕ est dit automorphisme si ϕ est un endomorphisme bijectif.

Vocabulaire 23.6. (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes. On dit que G et H sont isomorphes, et on note $G \simeq H$, lorsqu'il existe un isomorphisme $G \rightarrow H$.

I.2 Théorème de Lagrange

Théorème 23.7 (Théorème de Lagrange). (G, \cdot) un groupe fini. H un sous-groupe de G . Alors le cardinal de H divise le cardinal de G .

Démonstration. On définit sur G la relation \mathcal{R}_H par :

$$\forall (x, y) \in G^2, x\mathcal{R}_H y \iff xy^{-1} \in H.$$

\mathcal{R}_H est une relation d'équivalence. On note G/\mathcal{R}_H l'ensemble des classes d'équivalence. On vérifie que chaque classe d'équivalence est en bijection avec H . Donc :

$$|G| = \sum_{\gamma \in G/\mathcal{R}_H} |\gamma| = \sum_{\gamma \in G/\mathcal{R}_H} |H| = |H| \cdot |G/\mathcal{R}_H|.$$

□

I.3 Groupes engendrés

Définition 23.8 (Groupe engendré par une partie). (G, \cdot) un groupe. $A \subset G$. On appelle groupe engendré par A , noté $\langle A \rangle$, le plus petit sous-groupe de G contenant A .

Proposition 23.9. (G, \cdot) un groupe. $A \subset G$. Alors :

$$\langle A \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_s^{\varepsilon_s}, s \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_s) \in A^s, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{-1, 1\}^s\}.$$

Corollaire 23.10. (G, \cdot) un groupe. $A \subset G$. Si A est dénombrable, alors $\langle A \rangle$ est dénombrable.

Proposition 23.11. (G, \cdot) un groupe. $A \subset G$. Si les éléments de A commutent deux à deux, alors $\langle A \rangle$ est un sous-groupe commutatif de G .

Démonstration. Pour $B \subset G$, on note $\gamma(B) = \{x \in G, \forall b \in B, xb = bx\}$. Il est clair que, pour tout $B \subset G$, $\gamma(B)$ est un sous-groupe de G . On a ici $A \subset \gamma(A)$, donc $\langle A \rangle \subset \gamma(A)$. Autrement dit, $A \subset \gamma(\langle A \rangle)$. Donc $\langle A \rangle \subset \gamma(\langle A \rangle)$, ce qui signifie que $\langle A \rangle$ est commutatif. □

Vocabulaire 23.12 (Groupe monogène). (G, \cdot) un groupe. On dit que G est monogène lorsqu'il existe $g \in G$ t.q. $G = \langle g \rangle$. g est alors dit générateur de G . On dit de plus que G est cyclique si G est monogène fini.

II Groupes quotients

Définition 23.13 (Quotient). (G, \cdot) un groupe commutatif. H un sous-groupe de G . On définit sur G la relation \mathcal{R}_H par :

$$\forall (x, y) \in G^2, x \mathcal{R}_H y \iff xy^{-1} \in H.$$

\mathcal{R}_H est une relation d'équivalence. Pour $x \in G$, on note \bar{x} la classe d'équivalence de x . Et on définit :

$$G/H = \{\bar{x}, x \in G\}.$$

Proposition 23.14. (G, \cdot) un groupe commutatif. H un sous-groupe de G . Il existe une unique LCI $\hat{\cdot}$ sur G/H t.q.

- (i) $(G/H, \hat{\cdot})$ est un groupe,
- (ii) L'application $\left| \begin{array}{l} G \longrightarrow G/H \\ x \longmapsto \bar{x} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

Par la suite, G/H sera muni de $\hat{\cdot}$, que l'on notera simplement \cdot .

Proposition 23.15. (G, \cdot) et (H, \circ) deux groupes. $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. On suppose que G est commutatif. Alors :

$$\varphi(G) \simeq G / \text{Ker } \varphi.$$

III Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 23.16 (Ordre d'un élément). (G, \cdot) un groupe, $x \in G$. On définit l'ordre de x par :

$$\omega(x) = |\langle x \rangle| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Proposition 23.17. (G, \cdot) un groupe, $x \in G$. On considère le morphisme de groupes suivant :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow G \\ n \longmapsto x^n \end{array} \right.$$

- (i) Si $\omega(x) = +\infty$, alors φ est injectif donc :

$$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

- (ii) Si $m = \omega(x) < +\infty$, alors $\text{Ker } \varphi = m\mathbb{Z}$ donc :

$$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Corollaire 23.18. Soit (G, \cdot) un groupe monogène.

- (i) Si G est infini, alors $G \simeq \mathbb{Z}$.
- (ii) Si $m = |G| \in \mathbb{N}$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Proposition 23.19. (G, \cdot) un groupe, $x \in G$ d'ordre fini. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (x^n = e \iff \omega(x) \mid n).$$

Proposition 23.20. (G, \cdot) un groupe, $(x, y) \in G^2$. On suppose :

- (i) $xy = yx$,
- (ii) $\omega(x) < +\infty$ et $\omega(y) < +\infty$.

Alors $\omega(xy) < +\infty$ et :

$$\omega(xy) \mid (\omega(x) \vee \omega(y)).$$

Proposition 23.21. (G, \cdot) un groupe, $(x, y) \in G^2$. On suppose :

- (i) $xy = yx$,
- (ii) $\omega(x) < +\infty$ et $\omega(y) < +\infty$,
- (iii) $\omega(x) \wedge \omega(y) = 1$.

Alors $\omega(xy) < +\infty$ et :

$$\omega(xy) = (\omega(x) \vee \omega(y)).$$

Proposition 23.22. Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Proposition 23.23. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est cyclique ssi $m \wedge n = 1$.

IV Groupe symétrique

IV.1 Universalité de \mathfrak{S}_n

Proposition 23.24. Si X est un ensemble de cardinal n , alors $\mathfrak{S}_X \simeq \mathfrak{S}_n$.

Proposition 23.25. (G, \cdot) un groupe de cardinal n . Alors G se plonge dans \mathfrak{S}_n , i.e. il existe un morphisme de groupes injectif de G dans \mathfrak{S}_n .

Démonstration. Pour $g \in G$, on pose $\hat{g} : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gx \end{cases}$. Alors l'application $\begin{cases} G \longrightarrow \mathfrak{S}_G \\ g \longmapsto \hat{g} \end{cases}$ est un morphisme de groupes injectif de G dans \mathfrak{S}_G , ce qui permet de conclure car $\mathfrak{S}_G \simeq \mathfrak{S}_n$. □

IV.2 Cycles et transpositions

Théorème 23.26. *Toute permutation s'écrit de manière unique à l'ordre près comme produit de cycles à supports disjoints.*

Proposition 23.27. *Soit c_1, \dots, c_p des cycles à supports disjoints de \mathfrak{S}_n de longueurs respectives ℓ_1, \dots, ℓ_p . Alors :*

$$\omega(c_1 \cdots c_p) = \bigvee_{i=1}^p \ell_i.$$

Lemme 23.28. *Tout cycle est produit (non unique) de transpositions.*

Théorème 23.29. *Toute permutation est produit (non unique) de transpositions.*

IV.3 Signature

Lemme 23.30. *Le produit d'un nombre impair de transpositions n'est jamais égal à id.*

Proposition 23.31. *Soit $\tau_1, \dots, \tau_p, \tau'_1, \dots, \tau'_q$ des transpositions de \mathfrak{S}_n t.q. $\tau_1 \cdots \tau_p = \tau'_1 \cdots \tau'_q$. Alors $p \equiv q \pmod{2}$.*

Définition 23.32 (Signature). *On définit $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ par, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ où p est un entier tel qu'il existe des transpositions τ_1, \dots, τ_p t.q. $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_p$.*

Proposition 23.33. *$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes, et ε est surjectif dès que $n \geq 2$.*

Définition 23.34 (Groupe alterné). *On définit :*

$$\mathfrak{A}_n = \text{Ker } \varepsilon = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

\mathfrak{A}_n est un sous-groupe de \mathfrak{S}_n , dit groupe alterné, et :

$$\forall n \geq 2, |\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}.$$

Proposition 23.35. *Les seuls morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ sont 1 et ε .*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme. *Première étape :* toutes les transpositions ont la même image. Soit τ et τ' deux transpositions. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ t.q. $\tau' = \sigma \tau \sigma^{-1}$. En déduire $\varphi(\tau') = \varphi(\tau)$. *Deuxième étape :* l'image d'une transposition est -1 ou 1 . Soit τ une transposition. On a $\varphi(\tau)^2 = 1$ donc $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$. *Conclusion :* si l'image des transpositions est -1 , alors $\varphi = \varepsilon$, sinon $\varphi = 1$. \square

V Conjugaison dans un groupe

V.1 Généralités

Définition 23.36 (Conjugaison). (G, \cdot) un groupe, $(a, b) \in G^2$. On dit que a et b sont conjugués dans G lorsque :

$$\exists g \in G, a = gbg^{-1}.$$

“Être conjugués” est une relation d’équivalence. Les classes d’équivalence sont appelées classes de conjugaison.

Notation 23.37. Si (G, \cdot) est un groupe, on note $\text{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G (muni de \circ).

Proposition 23.38. (G, \cdot) un groupe. Pour $g \in G$, on pose :

$$\varphi_g : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gxg^{-1} \end{cases}.$$

φ_g est un automorphisme de G , dit automorphisme intérieur. Et on définit :

$$\Phi : \begin{cases} G \longrightarrow \text{Aut}(G) \\ g \longmapsto \varphi_g \end{cases}.$$

Alors Φ est un morphisme de groupes, avec $\text{Ker } \Phi = Z(G)$. On note de plus $\text{Int}(G) = \Phi(G)$.

V.2 Conjugaison dans \mathfrak{S}_n

Lemme 23.39. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(a_1 a_2 \cdots a_s)$ un cycle de \mathfrak{S}_n . Alors :

$$\sigma \circ (a_1 a_2 \cdots a_s) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_s)).$$

Définition 23.40 (Type d’une permutation). $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit c_1, \dots, c_p des cycles à supports disjoints de \mathfrak{S}_n de longueurs respectives ℓ_1, \dots, ℓ_p avec $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_p$ et t.q. $\sigma = c_1 \cdots c_p$. Le type de σ est alors le p -uplet (ℓ_1, \dots, ℓ_p) .

Proposition 23.41. Deux permutations de \mathfrak{S}_n sont conjuguées ssi elles ont le même type.

Lemme 23.42. Si $\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ avec $n \neq 6$, alors l’image de toute transposition par ψ est une transposition.

Démonstration. On remarque d'abord que l'image d'une classe de conjugaison par ψ est une classe de conjugaison. De plus, ψ conserve l'ordre : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \omega(\psi(\sigma)) = \omega(\sigma)$. Pour $i \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$, on note :

$$\mathcal{C}_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma \text{ est produit de } i \text{ transpositions à supports disjoints}\}.$$

Les \mathcal{C}_i sont les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n contenant les permutations d'ordre 2. Donc il existe $j \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$ t.q. $\psi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_j$. On a alors $\mathfrak{S}_n = \psi(\mathfrak{S}_n) = \psi(\langle \mathcal{C}_1 \rangle) = \langle \psi(\mathcal{C}_1) \rangle = \langle \mathcal{C}_j \rangle$, donc j est impair (sinon on aurait $\mathfrak{S}_n = \langle \mathcal{C}_j \rangle \subset \mathfrak{A}_n$). Or, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket, |\mathcal{C}_i| = \frac{n!}{2^i(n-2i)!i!}.$$

Ici on a $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_j|$, donc :

$$2^{j-1} = \frac{(n-2)!}{(n-2j)!j!} = \binom{n-j}{j}(n-2) \cdots (n-j+1).$$

On suppose par l'absurde $j > 1$. Dans ce cas, $j \geq 3$ (car j est impair), donc $n \geq 6$ (car $j \leq \frac{n}{2}$), d'où $n \geq 7$ (car $n \neq 6$). Alors $(n-2) \cdots (n-j+1) \mid 2^{j-1}$, donc $(n-2)$ est une puissance de 2 supérieure à 4. Si $j \geq 4$, alors $(n-3)$ est aussi une puissance de 2, ce qui est impossible. Donc $j = 3$, d'où $24 = (n-2) \cdots (n-5)$. C'est impossible pour $n \neq 6$. Ainsi, $j = 1$ et $\psi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$: l'image de toute transposition est une transposition. \square

Lemme 23.43. $(a, b, c, d) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, avec $a \neq b$ et $c \neq d$. Alors les transpositions (ab) et (cd) commutent ssi $\{a, b\} \cap \{c, d\}$ n'est pas un singleton.

Proposition 23.44. Si $n \neq 6$, $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \text{Int}(\mathfrak{S}_n)$.

Démonstration. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on notera $\varphi_\tau : \sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \tau\sigma\tau^{-1} \in \mathfrak{S}_n$. On peut de plus supposer $n \geq 3$. Soit $\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. On sait que l'image de toute transposition par ψ est une transposition. Comme (12) et (13) ne commutent pas, leurs images par ψ ne commutent pas et on peut poser $(ab) = \psi((12))$ et $(ac) = \psi((13))$, avec $b \neq c$. Soit $s \in \mathfrak{S}_n$ t.q. $s(a) = 1, s(b) = 2$ et $s(c) = 3$. Quitte à remplacer ψ par $\varphi_s \circ \psi$, on peut supposer :

$$\psi((12)) = (12) \quad \text{et} \quad \psi((13)) = (13).$$

Si $n = 3$, on a $\psi = \text{id} \in \text{Int}(\mathfrak{S}_n)$. On suppose donc $n \geq 4$. Soit $i \in \llbracket 4, n \rrbracket$. $(1i)$ ne commute pas avec (12) donc $\psi((1i))$ est de la forme $(1j)$ ou $(2j)$, pour $j \in \llbracket 4, n \rrbracket$. De même, $(1i)$ ne commute pas avec (13) donc $\psi((1i))$ est de la forme $(1j)$ ou $(3j)$. En déduire que $\psi((1i)) = (1j)$, pour $j \in \llbracket 4, n \rrbracket$. Soit alors $\varrho \in \mathfrak{S}_n$ t.q.

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \psi((1i)) = (1\varrho(i)).$$

Ainsi, ψ et φ_ϱ coïncident sur $\{(1i), i \in \llbracket 2, n \rrbracket\}$ qui engendre \mathfrak{S}_n , donc $\psi = \varphi_\varrho \in \text{Int}(\mathfrak{S}_n)$. \square

Chapitre 24

Anneaux

I Généralités

Définition 24.1 (Anneau). Soit \mathbb{A} un ensemble, $+$ et \times deux LCI sur \mathbb{A} . On dit que $(\mathbb{A}, +, \times)$ est un anneau lorsque :

- (i) $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe commutatif de neutre noté $0_{\mathbb{A}}$.
- (ii) \times est associative et distributive par rapport à $+$.
- (iii) \times admet un neutre noté $1_{\mathbb{A}}$ dans \mathbb{A} .

Si de plus \times est commutative, \mathbb{A} est dit anneau commutatif. Si $1_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{A}}$, alors $\mathbb{A} = \{0_{\mathbb{A}}\}$ et on dit que \mathbb{A} est l'anneau nul.

Proposition 24.2 (Formule du multinôme). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau, $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{A}^p$. On suppose que x_1, \dots, x_p commutent deux à deux. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (x_1 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_p = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!} x_1^{k_1} \times \dots \times x_p^{k_p}.$$

Notation 24.3. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. On pose :

$$\mathbb{A}^* = \{a \in \mathbb{A}, \exists b \in \mathbb{A}, a \times b = b \times a = 1_{\mathbb{A}}\}.$$

Proposition 24.4. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. Alors (\mathbb{A}^*, \times) est un groupe.

Définition 24.5 (Anneau intègre). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit que \mathbb{A} est intègre lorsque :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, a \times b = 0_{\mathbb{A}} \implies a = 0_{\mathbb{A}} \text{ ou } b = 0_{\mathbb{A}}.$$

Définition 24.6 (Corps). Soit \mathbb{K} un ensemble, $+$ et \times deux LCI sur \mathbb{K} . On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps lorsque :

- (i) $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif non nul.
- (ii) $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Proposition 24.7. Tout corps est intègre.

Définition 24.8 (Sous-anneau). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. On appelle sous-anneau de $(\mathbb{A}, +, \times)$ tout $B \subset A$ t.q. :

- (i) B est un sous-groupe de $(\mathbb{A}, +)$,
- (ii) B est stable par \times ,
- (iii) $1_{\mathbb{A}} \in B$.

Proposition 24.9. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. Si B est un sous-anneau de $(\mathbb{A}, +, \times)$, alors $(B, +|_B, \times|_B)$ est un anneau (mais la réciproque est fausse).

Exemple 24.10. On considère $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $(B, +, \times)$ est un anneau, mais B n'est pas un sous-anneau de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

Proposition 24.11. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. Si B est un sous-anneau de $(\mathbb{A}, +, \times)$, alors :

$$B^* \subset \mathbb{A}^* \cap B.$$

Définition 24.12 (Morphisme d'anneaux ou de corps). $(\mathbb{A}, +, \times)$ et $(\mathbb{B}, +, \times)$ deux anneaux (ou corps). On dit que $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est un morphisme d'anneaux (ou de corps) lorsque :

- (i) $\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, \phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$,
- (ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$,
- (iii) $\phi(1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{B}}$.

Proposition 24.13. $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps, $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau non nul. Si $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{A}$ est un morphisme d'anneaux, alors ϕ est injectif.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Alors $\phi(x)\phi(x^{-1}) = 1_{\mathbb{A}}$, donc $\phi(x) \neq 0$, donc $x \notin \text{Ker } \phi$. Ainsi, $\text{Ker } \phi = \{0\}$. \square

II L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 24.14 (Multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). On a construit le groupe commutatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ comme groupe quotient. On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de \times définie par :

$$\times : \left| \begin{array}{l} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto \overline{xy} \end{array} \right.$$

Alors $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau et l'application $\left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \longmapsto \bar{x} \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux.

Proposition 24.15. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. L'ensemble $\mathbb{A}_0 = \langle 1_{\mathbb{A}} \rangle$ (le sous-groupe engendré par $1_{\mathbb{A}}$ dans $(\mathbb{A}, +)$) est un sous-anneau de $(\mathbb{A}, +, \times)$, dit anneau premier de \mathbb{A} .

- (i) Si \mathbb{A}_0 est infini, alors $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{Z}$ (en tant qu'anneau).
- (ii) Si $|\mathbb{A}_0| = n$, alors $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (en tant qu'anneau).

Proposition 24.16. $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$. S'équivalent :

- (i) $m \wedge n = 1$.
- (ii) \bar{m} engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
- (iii) $\bar{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Corollaire 24.17. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps ssi n est premier.

Définition 24.18 (Indicatrice d'Euler). On définit :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \longmapsto |\{m \in \llbracket 1, n \rrbracket, m \wedge n = 1\}| \end{array} \right.$$

Proposition 24.19. $n \in \mathbb{N}^*$.

- (i) $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(n)$.
- (ii) Si (G, \cdot) est un groupe cyclique de cardinal n , alors G admet $\varphi(n)$ générateurs.

Vocabulaire 24.20 (Fonctions multiplicatives). $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

- (i) On dit que ψ est multiplicative lorsque :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \wedge n = 1 \implies \psi(mn) = \psi(m)\psi(n).$$

- (ii) On dit que ψ est totalement multiplicative lorsque :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \psi(mn) = \psi(m)\psi(n).$$

Lemme 24.21. $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $s_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $s_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les surjections canoniques. Si $m \mid n$, alors il existe une unique application $s_{n,m} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ t.q.

$$s_m = s_{n,m} \circ s_n.$$

De plus, $s_{n,m}$ est un morphisme surjectif d'anneaux.

Théorème 24.22 (Théorème des restes chinois). $(n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Si n_1, \dots, n_s sont premiers entre eux deux à deux, alors :

$$\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_s)\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}).$$

Plus précisément, en notant $N = n_1 \cdots n_s$, on pose :

$$T : \begin{cases} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}) \\ \gamma \longmapsto (s_{N,n_1}(\gamma), \dots, s_{N,n_s}(\gamma)) \end{cases}$$

Alors T est un morphisme d'anneaux, et T est un isomorphisme ssi n_1, \dots, n_s sont premiers entre eux deux à deux.

Corollaire 24.23. φ est multiplicative.

Démonstration. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \wedge n = 1$. Alors $\varphi(mn) = |(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*| \cdot |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(m)\varphi(n)$. \square

Corollaire 24.24.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = n \prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Démonstration. Montrer que $\forall p \in \mathbb{P}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, puis conclure en utilisant le fait que φ est multiplicative. \square

Proposition 24.25.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Démonstration. Poser $A = \left\{\frac{k}{n}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\right\}$ et, pour $d \mid n$:

$$A_d = \left\{x \in A, \exists q \in \mathbb{N}^*, q \wedge d = 1 \text{ et } x = \frac{q}{d}\right\}.$$

Montrer que $A = \bigsqcup_{d|n} A_d$ et en déduire le résultat. \square

Proposition 24.26. (G, \cdot) un groupe. On suppose que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, G a au plus un sous-groupe de cardinal d . Alors G est cyclique.

Démonstration. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on pose $B(d) = \{x \in G, \omega(x) = d\}$. On a $\forall d \in \mathbb{N}^*, |B(d)| \in \{0, \varphi(d)\}$. Donc :

$$n = |G| = \left| \bigsqcup_{d|n} B(d) \right| = \sum_{\substack{d|n \\ B(d) \neq \emptyset}} \varphi(d) \leq \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Par conséquent $\sum_{\substack{d|n \\ B(d) \neq \emptyset}} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Donc, pour tout $d \mid n$, $B(d) \neq \emptyset$.

En particulier $B(n) \neq \emptyset$ donc G est cyclique. \square

Proposition 24.27. $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Alors tout sous-groupe fini de (\mathbb{K}^*, \times) est cyclique.

Démonstration. Soit G un sous-groupe fini de (\mathbb{K}^*, \times) . On note $n = |G|$. Tout élément de G est racine du polynôme $X^n - 1$, qui a au plus n racines, donc :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in G} (X - \omega).$$

Ceci montre que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, (\mathbb{K}^*, \times) admet au plus un sous-groupe de cardinal d (ce sous-groupe étant l'ensemble des racines de $X^d - 1$). Ainsi, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, G admet au plus un sous-groupe de cardinal d . D'après la proposition 24.26, G est cyclique. \square

Corollaire 24.28. $p \in \mathbb{P}$.

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}.$$

III Caractéristique d'un corps

Définition 24.29 (Caractéristique). $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. On considère $1_{\mathbb{K}}$ comme élément du groupe $(\mathbb{K}, +)$.

- (i) Si $1_{\mathbb{K}}$ est d'ordre infini, on dit que \mathbb{K} est de caractéristique nulle.
- (ii) Si $1_{\mathbb{K}}$ est d'ordre fini, alors $\omega(1_{\mathbb{K}})$ est un nombre premier appelé caractéristique de \mathbb{K} et noté $\text{car } \mathbb{K}$.

Définition 24.30 (Corps premier). $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. On appelle corps premier de \mathbb{K} , noté \mathbb{K}_0 , le plus petit sous-corps de \mathbb{K} (au sens de l'inclusion).

Proposition 24.31. $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps.

- (i) Si $\text{car } \mathbb{K} = 0$, alors $\mathbb{K}_0 \simeq \mathbb{Q}$.
- (ii) Si $\text{car } \mathbb{K} = p$, alors $\mathbb{K}_0 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Vocabulaire 24.32 (Nombre primaire). On dit que $n \in \mathbb{N}^*$ est un nombre primaire lorsqu'il existe $p \in \mathbb{P}$ et $\nu \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n = p^\nu$.

Proposition 24.33. Le cardinal d'un corps fini est un nombre primaire.

Démonstration. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps fini. Munir \mathbb{K} d'une structure de \mathbb{K}_0 -espace vectoriel par restriction de \times à $\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}$. Comme \mathbb{K} est fini, il est de caractéristique finie, et de dimension finie en tant que \mathbb{K}_0 -espace vectoriel. En notant $p = \text{car } \mathbb{K}$ et $d = \dim \mathbb{K}$, on a alors $|\mathbb{K}| = p^d$. \square

Proposition 24.34. Si q est un nombre primaire, alors il existe un unique corps de cardinal q (à isomorphisme près), et ce corps est noté \mathbb{F}_q .

IV Idéaux

Définition 24.35 (Idéal). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On appelle idéal de \mathbb{A} tout $\mathfrak{I} \subset \mathbb{A}$ t.q.

- (i) \mathfrak{I} est un sous-groupe de $(\mathbb{A}, +)$,
- (ii) \mathfrak{I} est absorbant, i.e. $\forall (a, x) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{I}, ax \in \mathfrak{I}$.

Proposition 24.36. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. \mathfrak{I} un idéal de \mathbb{A} . S'équivalent :

- (i) $\mathfrak{I} = \mathbb{A}$,
- (ii) $1_{\mathbb{A}} \in \mathfrak{I}$,
- (iii) $\mathfrak{I} \cap \mathbb{A}^* \neq \emptyset$.

Proposition 24.37. Toute intersection d'idéaux est un idéal.

Définition 24.38 (Idéal engendré par une partie). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif, $\Omega \subset \mathbb{A}$. On notera $\langle \Omega \rangle$ le plus petit idéal de \mathbb{A} contenant Ω .

Proposition 24.39. $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif.

- (i) $\forall \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{A}), \langle \Omega \rangle = \{a_1\omega_1 + \dots + a_s\omega_s, s \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{A}^s, \omega \in \Omega^s\}$.
- (ii) $\forall (g_1, \dots, g_r) \in \mathbb{A}^r, \langle g_1, \dots, g_r \rangle = g_1\mathbb{A} + \dots + g_r\mathbb{A}$.
- (iii) $\forall x \in \mathbb{A}, \langle x \rangle = x\mathbb{A}$.

Définition 24.40 (Idéal principal). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit que l'idéal $\mathfrak{I} \subset \mathbb{A}$ est principal lorsque :

$$\exists x \in \mathbb{A}, \mathfrak{I} = \langle x \rangle.$$

Définition 24.41 (Anneau principal). On dit que l'anneau intègre $(\mathbb{A}, +, \times)$ est principal lorsque tout idéal de \mathbb{A} est principal.

V Corps des fractions d'un anneau intègre

Notation 24.42. $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Pour $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, on note $\frac{x}{y} = xy^{-1}$.

Définition 24.43 (Corps des fractions). $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau intègre. On munit $\mathbb{A} \times (\mathbb{A} \setminus \{0\})$ d'une relation binaire \mathcal{R} définie par :

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{A} \times (\mathbb{A} \setminus \{0\}))^2, (a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc.$$

\mathcal{R} est une relation d'équivalence ; on note \mathbb{K} l'ensemble des classes d'équivalence et $s : \mathbb{A} \times (\mathbb{A} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{K}$ la surjection canonique. Alors on peut munir \mathbb{K} de $+$ et \times t.q.

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{A} \times (\mathbb{A} \setminus \{0\}))^2, \begin{cases} s(a, b) + s(c, d) = s(ad + bc, bd) \\ s(a, b) \times s(c, d) = s(ac, bd) \end{cases}.$$

$(\mathbb{K}, +, \times)$ est alors un corps, dit corps des fractions de \mathbb{A} . Et l'application

$$j : \begin{cases} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K} \\ a \longmapsto s(a, 1_{\mathbb{A}}) \end{cases}$$

est un morphisme injectif d'anneaux, ce qui permet d'identifier $a \in \mathbb{A}$ à $j(a)$ et de considérer que $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$.

Chapitre 25

Polynômes

I Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif

Notation 25.1. Dans toute cette section, $(\mathbb{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Définition 25.2 (Polynômes). On définit :

$$\mathbb{A}[X] = \{a \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}, a \text{ stationne en } 0\}.$$

On munit $\mathbb{A}[X]$ de $+$ et \times définies par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{A}[X]^2, \begin{cases} a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ a \times b = (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}.$$

Alors $(\mathbb{A}[X], +, \times)$ est un anneau. Et l'application

$$j : \begin{cases} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}[X] \\ a \longmapsto (\delta_{n0} \cdot a)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

est un morphisme injectif d'anneaux, ce qui permet d'identifier $a \in \mathbb{A}$ à $j(a)$ et de considérer que $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}[X]$.

Notation 25.3. On pose $X = (\delta_{n1} \cdot 1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 25.4. $P \in \mathbb{A}[X] \setminus \{0\}$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{A}^{d+1}$, avec $a_d \neq 0$, t.q.

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

De plus, cette écriture est unique.

Définition 25.5 (Degré). $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{A}[X] \setminus \{0\}$ avec $a_d \neq 0$. On note $\deg P = d$. On définit de plus $\deg 0 = -\infty$. Et on pose, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{A}_m[X] = \{P \in \mathbb{A}[X], \deg P \leq m\}.$$

Proposition 25.6. *Si \mathbb{A} est intègre, alors :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{A}[X]^2, \deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

Corollaire 25.7. *Si \mathbb{A} est intègre, alors $\mathbb{A}[X]$ est intègre.*

Définition 25.8 (Racines d'un polynôme). $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{A}[X]$, $\omega \in \mathbb{A}$. On définit :

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^d a_k \omega^k \in \mathbb{A}.$$

On dit que ω est une racine de P lorsque $P(\omega) = 0$.

Proposition 25.9. $P \in \mathbb{A}[X]$, $\omega \in \mathbb{A}$. Alors :

$$P(\omega) = 0 \iff (X - \omega) \mid P.$$

Proposition 25.10. $P \in \mathbb{A}[X] \setminus \{0\}$. Si \mathbb{A} est intègre, alors P a au plus $\deg P$ racines.

II Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Notation 25.11. Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.

Proposition 25.12. $\mathbb{K}[X]$ est principal, et tout idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ possède un unique générateur unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1).

Démonstration. Soit \mathfrak{J} un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. Soit $P \in \mathfrak{J} \setminus \{0\}$ unitaire tel que :

$$\deg P = \min_{Q \in \mathfrak{J} \setminus \{0\}} \deg Q.$$

Montrons que $\mathfrak{J} = \langle P \rangle$. (⊃) Clair. (⊂) Soit $A \in \mathfrak{J}$. On effectue la division euclidienne de A par P :

$$A = BP + R, \quad (B, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{\deg P - 1}[X].$$

On a $R = A - BP \in \mathfrak{J}$, or $\deg R < \deg P$, donc par définition de P , $R = 0$. Ainsi, $A = BP \in \langle P \rangle$. □

Définition 25.13 (PGCD). $(A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{K}[X]^s$. Si $\exists i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $A_i \neq 0$, alors on appelle PGCD de A_1, \dots, A_s , noté $A_1 \wedge \dots \wedge A_s$, l'unique générateur unitaire de $\langle A_1, \dots, A_s \rangle$. Si $A_1 = \dots = A_s = 0$, alors on pose $A_1 \wedge \dots \wedge A_s = 0$.

Proposition 25.14. $(A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{K}[X]^s$, $D \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$D = \bigwedge_{i=1}^s A_i \iff [\forall M \in \mathbb{K}[X], (\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, M \mid A_i) \Leftrightarrow M \mid D].$$

Proposition 25.15 (Égalité de Bézout). $(A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{K}[X]^s$. Alors il existe $(U_1, \dots, U_s) \in \mathbb{K}[X]^s$ t.q.

$$\sum_{i=1}^s U_i A_i = \bigwedge_{i=1}^s A_i.$$

Définition 25.16 (Polynômes premiers entre eux). $(P_1, \dots, P_s) \in \mathbb{K}[X]^s$.

(i) *S'équivalent :*

(a) $\langle P_1, \dots, P_s \rangle = \mathbb{K}[X]$.

(b) $\bigwedge_{i=1}^s P_i = 1$.

(c) $\exists (U_1, \dots, U_s) \in \mathbb{K}[X]^s$, $\sum_{i=1}^s U_i P_i = 1$.

(d) $\bigcap_{i=1}^s \{Q \in \mathbb{K}[X], Q \mid P_i\} = \mathbb{K}^*$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que P_1, \dots, P_s sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(ii) On dit que P_1, \dots, P_s sont premiers entre eux deux à deux lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, s \rrbracket^2, i \neq j \implies P_i \wedge P_j = 1.$$

Proposition 25.17. $(P_1, \dots, P_s) \in \mathbb{K}[X]^s$, $s \geq 2$. Si P_1, \dots, P_s sont premiers entre eux deux à deux, alors P_1, \dots, P_s sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Lemme 25.18 (Lemme de Gauss). $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$.

(i) Si $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$.

(ii) Si $A \wedge B = 1$, $A \mid C$ et $B \mid C$, alors $AB \mid C$.

(iii) Si $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$, alors $A \wedge BC = 1$.

Démonstration. (i) Soit $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $AU + BV = 1$, soit $M \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $BC = MA$. Alors $C = A(UC + VM)$, donc $A \mid C$. (ii) et (iii) Idem. \square

III Polynômes irréductibles

Définition 25.19 (Polynôme irréductible). $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible lorsque :

- (i) $\deg P \geq 1$,
- (ii) $\forall (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, P = QR \implies Q \in \mathbb{K}_0[X] \text{ ou } R \in \mathbb{K}_0[X]$.

Proposition 25.20. *Tout polynôme non constant s'écrit comme produit de polynômes irréductibles.*

Proposition 25.21. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Si P est irréductible, alors $P \mid Q$ ou $P \wedge Q = 1$.

Corollaire 25.22. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Si P et Q sont irréductibles et distincts, alors $P \wedge Q = 1$.

Théorème 25.23. *Tout polynôme non constant s'écrit de manière unique comme produit d'une constante et de polynômes irréductibles unitaires.*

Proposition 25.24. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. S'équivalent :

- (i) $P \wedge Q = 1$.
- (ii) $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, PU + QV = 1$.
- (iii) P et Q n'ont aucun diviseur irréductible en commun.

IV Corps algébriquement clos

Définition 25.25 (Polynôme scindé). $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé lorsque P est produit d'une constante non nulle et de polynômes du premier degré.

Définition 25.26 (Corps algébriquement clos). S'équivalent :

- (i) *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ est scindé.*
- (ii) *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$ possède une racine.*
- (iii) *Pour tout $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$, $P(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.*
- (iv) *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.*

Si tel est le cas, on dit que \mathbb{K} est algébriquement clos.

Théorème 25.27 (Théorème de d'Alembert-Gauss). \mathbb{C} est algébriquement clos.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$. On suppose par l'absurde que P ne s'annule pas. *Première étape.* Soit $R \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R \implies |P(z)| \geq |P(0)|$. Comme $\mathcal{B}_f(0, R)$ est un compact, soit $\omega \in \mathcal{B}_f(0, R)$ t.q. $|P(\omega)| = \min_{z \in \mathcal{B}_f(0, R)} |P(z)|$ (d'après le théorème 14.22). Alors :

$$|P(\omega)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| > 0.$$

Deuxième étape. On pose $Q = \frac{P(X+\omega)}{P(\omega)}$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}, |Q(z)| \geq 1 = Q(0)$. On pose ensuite :

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{Q(z)} \in \mathbb{C}.$$

D'après le théorème 22.10, f est développable en série entière autour de 0 : il existe $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit $\rho \in]0, r[$. D'après la proposition 22.29, on a :

$$\begin{aligned} 1 = f(0) = a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(\rho e^{i\theta})) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(0)| d\theta = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans ce qui précède, toutes les inégalités sont des égalités, d'où on déduit :

$$\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r), f(z) = 1.$$

Donc $\forall z \in \mathcal{B}_o(0, r), Q(z) = 1$, d'où $Q = 1$. C'est absurde, car Q est non constant. \square

Proposition 25.28. $P = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_1[X]$ unitaire. On pose :

$$R = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| X^k.$$

Alors :

- (i) R possède une unique racine r dans \mathbb{R}_+^* .
- (ii) Si z est une racine de P dans \mathbb{C} , alors $|z| \leq r$.

Démonstration. On pose :

$$\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x - \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_k|}{x^{d-1-k}} \in \mathbb{R}.$$

(i) $\varphi \nearrow \nearrow$, et $\lim_{0+} \varphi = -\infty$, $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$, donc $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection et s'annule en un unique point r . Le résultat est alors immédiat car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $R(x) = x^{d-1}\varphi(x)$. (ii) Soit z une racine de P dans \mathbb{C} . On peut supposer $z \neq 0$. On a alors :

$$|z| = \left| \frac{1}{z^{d-1}} \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_k|}{|z|^{d-1-k}}.$$

Donc $\varphi(|z|) \leq 0 = \varphi(r)$. Comme $\varphi \nearrow \nearrow$, $|z| \leq r$. □

V Radiographie des polynômes

Notation 25.29. Dans cette section, \mathbb{L} est un surcorps de \mathbb{K} .

Proposition 25.30. $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, P_1, \dots, P_s des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ t.q.

$$P = \lambda \prod_{i=1}^s P_i.$$

Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, soit $\Pi_{i,1}, \dots, \Pi_{i,\nu_i}$ des irréductibles de $\mathbb{L}[X]$ t.q.

$$P_i = \prod_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{i,j}.$$

Alors l'écriture

$$P = \lambda \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{i,j}$$

est la décomposition en polynômes irréductibles de P sur $\mathbb{L}[X]$.

Proposition 25.31. Les irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont les $(X - \omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$.

Lemme 25.32. $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$(\exists M \in \mathbb{L}[X], Q = PM) \implies (\exists \widetilde{M} \in \mathbb{K}[X], Q = P\widetilde{M}).$$

Autrement dit, si $P \mid Q$ au sens de $\mathbb{L}[X]$, alors $P \mid Q$ au sens de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 25.33. Les irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- (i) Les $(X - a)$, $a \in \mathbb{R}$,
- (ii) Les $(X^2 - 2bX + c)$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, $b^2 < c$.

Démonstration. Il est clair que ces polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, soit P un irréductible unitaire de $\mathbb{R}[X]$. On peut supposer $\deg P \geq 2$. Ainsi, P n'a pas de racine dans \mathbb{R} . Soit ω une racine de P dans \mathbb{C} (d'après le théorème 25.27). Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(\bar{\omega}) = \overline{P(\omega)} = 0$, donc $\bar{\omega}$ est aussi racine de P . Ainsi, $(X - \omega) \mid P$ et $(X - \bar{\omega}) \mid P$. Or $\omega \notin \mathbb{R}$ donc $(X - \omega) \wedge (X - \bar{\omega}) = 1$, d'où $(X^2 - 2X\Re(\omega) + |\omega|^2) = (X - \omega)(X - \bar{\omega}) \mid P$ au sens de $\mathbb{C}[X]$ donc au sens de $\mathbb{R}[X]$ (d'après le lemme 25.32). Or P est irréductible et unitaire, donc :

$$P = X^2 - 2X\Re(\omega) + |\omega|^2.$$

□

VI Polynômes à coefficients rationnels

VI.1 Polynômes cyclotomiques

Définition 25.34 (Polynômes cyclotomiques). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme cyclotomique par :*

$$\Phi_n = \prod_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \wedge n = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

Proposition 25.35. $\forall n \in \mathbb{N}^*, X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$.

Proposition 25.36. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Par récurrence forte sur n , en utilisant la division euclidienne de $(X^n - 1)$ par $\prod_{\substack{d \mid n \\ d < n}} \Phi_d$ dans $\mathbb{Z}[X]$. □

VI.2 Polynômes à coefficients entiers

Notation 25.37. *On définit la réduction modulo p : pour $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on pose $\bar{A} = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k X^k \in \mathbb{F}_p[X]$, où \bar{a}_k est la classe d'équivalence de a_k dans \mathbb{F}_p .*

Proposition 25.38. *L'application $\left| \begin{array}{c} \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ A \longmapsto \bar{A} \end{array} \right|$ est un morphisme d'anneaux.*

Définition 25.39 (Contenu). *Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. On définit le contenu de P par :*

$$\mathcal{C}(P) = \bigwedge_{k=0}^n a_k.$$

Vocabulaire 25.40 (Polynômes primitifs). $P \in \mathbb{Z}[X]$. Si $\mathcal{C}(P) = 1$, P est dit primitif.

Lemme 25.41. $\forall (P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$, $\mathcal{C}(PQ) = \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q)$.

Démonstration. Écrire $P = \mathcal{C}(P)\tilde{P}$, $Q = \mathcal{C}(Q)\tilde{Q}$, où \tilde{P} et \tilde{Q} sont des polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$. On a alors $PQ = \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q)\tilde{P}\tilde{Q}$. Supposer alors par l'absurde $\tilde{P}\tilde{Q}$ non primitif. Dans ce cas, il existe $p \in \mathbb{P}$ t.q. $p \mid \mathcal{C}(\tilde{P}\tilde{Q})$.

Alors $\tilde{P} \times \tilde{Q} = \tilde{P}\tilde{Q} = 0_{\mathbb{F}_p[X]}$. Or \mathbb{F}_p est un corps donc $\mathbb{F}_p[X]$ est intègre d'où $\tilde{P} = 0_{\mathbb{F}_p[X]}$ ou $\tilde{Q} = 0_{\mathbb{F}_p[X]}$. C'est une contradiction car \tilde{P} et \tilde{Q} sont primitifs. Ainsi $\tilde{P}\tilde{Q}$ est primitif et $\mathcal{C}(PQ) = \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q)$. \square

Proposition 25.42. $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}_0[X]$. Soit $(Q_1, \dots, Q_s) \in \mathbb{Q}[X]^s$ t.q.

$$P = Q_1 \cdots Q_s.$$

Alors il existe $(m_1, \dots, m_s) \in (\mathbb{Q}^*)^s$ t.q.

$$P = (m_1 Q_1) \cdots (m_s Q_s) \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, (m_i Q_i) \in \mathbb{Z}[X].$$

Démonstration. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, soit d_i un dénominateur commun à tous les coefficients de Q_i : $d_i Q_i \in \mathbb{Z}[X]$. On note alors $n_i = \mathcal{C}(d_i Q_i)$, et $\hat{Q}_i = \frac{d_i}{n_i} Q_i$ (donc $\mathcal{C}(\hat{Q}_i) = 1$). On a ainsi :

$$P = \frac{n_1 \cdots n_s}{d_1 \cdots d_s} \hat{Q}_1 \cdots \hat{Q}_s.$$

Or, avec le lemme 25.41, on obtient $\frac{n_1 \cdots n_s}{d_1 \cdots d_s} = \mathcal{C}(P)$. Donc :

$$P = \mathcal{C}(P) \hat{Q}_1 \cdots \hat{Q}_s \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \hat{Q}_i \in \mathbb{Z}[X].$$

\square

VII Dérivation formelle

VII.1 Généralités

Définition 25.43 (Dérivation formelle). On définit :

$$D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ \sum_{k=0}^d a_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} X^k \end{cases}.$$

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on notera $P' = D(P)$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)} = D^k(P)$.

Proposition 25.44.

- (i) $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$.
- (ii) $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, D(PQ) = P \cdot D(Q) + Q \cdot D(P)$.

Proposition 25.45.

- (i) Si $\text{car } \mathbb{K} = 0$, alors $\text{Ker } D = \mathbb{K}_0[X]$.
- (ii) Si $\text{car } \mathbb{K} = p \in \mathbb{P}$, alors $\text{Ker } D = \text{Vect}(X^{np}, n \in \mathbb{N})$.

Proposition 25.46 (Formule de Taylor formelle). $P \in \mathbb{K}_d[X], a \in \mathbb{K}$. On suppose $\text{car } \mathbb{K} = 0$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

VII.2 Multiplicité des racines

Définition 25.47 (Multiplicité d'une racine). $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, a \in \mathbb{K}, \omega \in \mathbb{N}$.

- (i) On dit que a est racine d'ordre ω de P lorsque :

$$(X - a)^\omega \mid P \text{ et } (X - a)^{\omega+1} \nmid P.$$

- (ii) On dit que a est racine d'ordre au moins ω de P lorsque $(X - a)^\omega \mid P$.
- (iii) On dit que a est racine multiple de P lorsque a est racine d'ordre au moins 2 de P .

Proposition 25.48. $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, a \in \mathbb{K}, \omega \in \mathbb{N}$. Alors a est racine d'ordre ω de P ssi

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(\omega)}(a) = 0 \neq P^{(\omega+1)}(a).$$

Définition 25.49 (Polynôme scindé). $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

- (i) On dit que P est scindé lorsque P est produit d'une constante non nulle et de polynômes du premier degré.
- (ii) On dit que P est simplement scindé lorsque P est scindé et que toutes les racines de P sont simples (i.e. d'ordre 1).

Proposition 25.50. $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que \mathbb{K} est algébriquement clos. Alors P est simplement scindé ssi $P \wedge P' = 1$.

Proposition 25.51. $Q \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Q}_0[X]$ unitaire. D'après le théorème 25.27, Q est scindé sur \mathbb{C} : il existe $(z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{C}^s$ deux à deux distincts, $(m_1, \dots, m_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ t.q.

$$Q = \prod_{i=1}^s (X - z_i)^{m_i}.$$

Alors :

$$\prod_{i=1}^s (X - z_i) \in \mathbb{Q}[X].$$

Démonstration. Montrer que $Q \wedge Q' = \prod_{i=1}^s (X - z_i)^{m_i-1}$. Or $Q \wedge Q' \in \mathbb{Q}[X]$. Donc $\prod_{i=1}^s (X - z_i) = \frac{Q}{Q \wedge Q'} \in \mathbb{Q}[X]$. \square

Corollaire 25.52. $P \in \mathbb{Q}[X]$. Si P est irréductible sur \mathbb{Q} , alors les racines de P dans \mathbb{C} sont simples.

Chapitre 26

Espaces Vectoriels

Notation 26.1. Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.

I Généralités

Définition 26.2 (Espace vectoriel). E un ensemble, $+$ une LCI sur E , \cdot une LCE $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel lorsque :

- (i) $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- (ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \end{cases}$
- (iii) $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Les éléments de E sont dits vecteurs, les éléments de \mathbb{K} sont dits scalaires.

Définition 26.3 (Combinaison linéaire). E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in E^I$. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i \in I}$ tout vecteur $x \in E$ t.q.

$$\exists J \in \mathcal{P}_f(I), \exists \lambda \in \mathbb{K}^J, x = \sum_{j \in J} \lambda_j u_j.$$

Définition 26.4 (Espace engendré). E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in E^I$. L'ensemble des combinaisons linéaires des $(u_i)_{i \in I}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les $(u_i)_{i \in I}$. Il est appelé espace engendré par les $(u_i)_{i \in I}$ et noté $\text{Vect}((u_i)_{i \in I})$.

Définition 26.5 (Famille libre ou génératrice). E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in E^I$.

(i) On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est libre lorsque :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \forall \lambda \in \mathbb{K}^J, \left(\sum_{j \in J} \lambda_j u_j = 0 \implies \forall j \in J, \lambda_j = 0 \right).$$

(ii) On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice lorsque :

$$E = \text{Vect}((u_i)_{i \in I}).$$

Définition 26.6 (Espace engendré par une partie, partie libre ou génératrice). E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $\mathcal{A} \subset E$.

(i) On note $\text{Vect}(\mathcal{A}) = \text{Vect}((a)_{a \in \mathcal{A}})$.

(ii) On dit que \mathcal{A} est libre (resp. génératrice) lorsque $(a)_{a \in \mathcal{A}}$ est libre (resp. génératrice).

Remarque 26.7. E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in E^I$. On note $U = \{u_i, i \in I\}$.

(i) $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice ssi U est génératrice.

(ii) $(u_i)_{i \in I}$ est libre ssi U est libre et l'application $i \in I \mapsto u_i \in U$ est injective.

Définition 26.8 (Base). E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $\mathcal{B} \subset E$, $\epsilon \in E^I$. On dit que \mathcal{B} (resp. $(\epsilon_i)_{i \in I}$) est une base de E lorsque \mathcal{B} (resp. $(\epsilon_i)_{i \in I}$) est libre et génératrice.

Théorème 26.9. E un \mathbb{K} -espace vectoriel admettant une partie génératrice finie. Alors E possède une base finie ; de plus, toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E , et noté $\dim E$.

Théorème 26.10. E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors, en admettant l'axiome du choix, E possède une base ; de plus, toutes les bases de E sont équipotentes.

Théorème 26.11. E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie d . Alors :

$$E \simeq \mathbb{K}^d.$$

Théorème 26.12 (Théorème de la base incomplète). E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $(\mathcal{L}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}(E)^2$. On suppose que \mathcal{L} est libre et \mathcal{G} est génératrice. Alors il existe $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ t.q. $\mathcal{L} \sqcup \mathcal{G}_0$ est une base de E .

II Applications linéaires

Théorème 26.13 (Théorème du rang). E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors :

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u.$$

De plus, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E t.q. (e_1, \dots, e_s) est une base de $\text{Ker } u$, alors $(u(e_{s+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im } u$.

Remarque 26.14. On a un résultat analogue pour les groupes. Soit G, H deux groupes, $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Si G est fini, alors :

$$|G| = |\text{Ker } \varphi| \cdot |\varphi(G)|.$$

Proposition 26.15. E un \mathbb{K} -espace vectoriel. F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Appliquer le théorème 26.13 à l'application linéaire

$$s : \begin{cases} F \times G \longrightarrow F + G \\ (f, g) \longmapsto f + g \end{cases}.$$

□

Proposition 26.16. E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie d et on pose (e_1, \dots, e_d) une base de E . Alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_d) \in F^d, \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, f(e_i) = u_i.$$

En particulier :

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq F^{\dim E}.$$

Proposition 26.17. E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(E, G)$. S'équivalent :

- (i) $\exists \delta \in G^F, \psi = \delta \circ \varphi$.
- (ii) $\exists d \in \mathcal{L}(F, G), \psi = d \circ \varphi$.
- (iii) $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$.

Proposition 26.18. E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E, G)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. S'équivalent :

- (i) $\exists \tau \in \mathcal{L}(E, F), f = g \circ \tau$.
- (ii) $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.

Proposition 26.19. E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. $u \in E^s, v \in F^s$. On pose :

$$\Lambda_u = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{K}^s, \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i = 0 \right\},$$

$$M_v = \left\{ (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{K}^s, \sum_{i=1}^s \mu_i v_i = 0 \right\}.$$

S'équivalent :

- (i) $\exists \chi \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \chi(u_i) = v_i.$
- (ii) $\Lambda_u \subset M_v.$

III Sommes directes

III.1 Sous-espaces supplémentaires

Définition 26.20 (Somme directe). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E . S'équivalent :*

- (i) $F \cap G = \{0\}.$
- (ii) $\forall x \in (F + G), \exists! (f, g) \in F \times G, x = f + g.$
- (iii) $L'application\ linéaire \left\{ \begin{array}{l} F \times G \longrightarrow F + G \\ (f, g) \longmapsto f + g \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme.}$

On dit alors que F et G sont en somme directe, et l'espace $F + G$ est noté $F \oplus G$.

Vocabulaire 26.21 (Sous-espaces supplémentaires). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Si $E = F \oplus G$, alors on dit que F et G sont supplémentaires, ou que G est un supplémentaire de F .*

Proposition 26.22. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :*

- (i) $F + G = E.$
- (ii) $F \cap G = \{0\}.$
- (iii) $\dim F + \dim G = \dim E.$

Si ces conditions sont satisfaites, alors $E = F \oplus G$.

Proposition 26.23. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.*

III.2 Projections et projecteurs

Définition 26.24 (Projecteur). *$p \in \mathcal{L}(E)$ est dit projecteur de E lorsque $p \circ p = p$.*

Définition 26.25 (Projection). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. On a alors $\forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$. On appelle projection sur F parallèlement à G l'application*

$$\pi_{F,G} : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto x_F \end{array} \right.$$

Proposition 26.26. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. Alors :*

- (i) $\pi_{F,G} \in \mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{L}(E)$,
- (ii) $\text{Ker } \pi_{F,G} = G$ et $\text{Im } \pi_{F,G} = F$,
- (iii) $\pi_{F,G}$ est un projecteur.

Proposition 26.27. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel. $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors :*

- (i) $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$,
- (ii) $p = \pi_{\text{Im } p, \text{Ker } p}$.

Proposition 26.28. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F, G, G' trois sous-espaces vectoriels de E . Alors :*

$$F \oplus G = F \oplus G' \implies G \simeq G'.$$

Démonstration. Se placer dans $F \oplus G$ et poser $p = \pi_{G', F|_G} \in \mathcal{L}(G, G')$ et $p' = \pi_{G, F|_{G'}} \in \mathcal{L}(G', G)$. Montrer que $p \circ p' = \text{id}_{G'}$ et $p' \circ p = \text{id}_G$. Donc p et p' sont des isomorphismes. \square

III.3 Sommes directes d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels

Définition 26.29 (Somme directe de n sous-espaces vectoriels). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n n sous-espaces vectoriels de E . On dit que F_1, \dots, F_n sont en somme directe lorsque :*

$$\forall x \in \sum_{i=1}^n F_i, \exists! (f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = \sum_{i=1}^n f_i.$$

L'espace $\sum_{i=1}^n F_i$ est alors noté $\bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Proposition 26.30. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n n sous-espaces vectoriels de E . Si F_1, \dots, F_n sont en somme directe, alors :*

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies F_i \cap F_j = \{0\}.$$

Proposition 26.31. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n n sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . F_1, \dots, F_n sont en somme directe ssi*

$$\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

Proposition 26.32. *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, E_1, \dots, E_n n sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Alors :*

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(E_i, F).$$

Proposition 26.33. *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, F_1, \dots, F_n n sous-espaces vectoriels de F t.q. $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i$. Alors :*

$$\mathcal{L}(E, F) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}(E, F_i).$$

Définition 26.34 (Somme directe quelconque). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . On dit que les $(F_i)_{i \in I}$ sont en somme directe lorsque toute sous-famille finie de $(F_i)_{i \in I}$ est en somme directe. On note alors :*

$$\bigoplus_{i \in I} E_i = \bigcup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \bigoplus_{j \in J} E_j.$$

Chapitre 27

Matrices

I Calcul matriciel

Notation 27.1. Dans toute cette section, $(\mathbb{A}, +, \times)$ est un anneau.

Définition 27.2 (Matrice). $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit :

$$\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

Les éléments de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A})$ sont appelés matrices $n \times p$. Soit $M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A})$.

(i) Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $M_{ij} = M(i, j)$. On note alors :

$$M = (M_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{np} \end{pmatrix}.$$

(ii) Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $\mathfrak{C}_j(M) = \begin{pmatrix} M_{1j} \\ \vdots \\ M_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{A})$. On note alors :

$$M = [\mathfrak{C}_1(M) \quad \cdots \quad \mathfrak{C}_p(M)].$$

(iii) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathfrak{L}_i(M) = (M_{i1} \quad \cdots \quad M_{ip}) \in \mathbb{M}_{1,p}(\mathbb{A})$. On note alors :

$$M = \begin{bmatrix} \mathfrak{L}_1(M) \\ \vdots \\ \mathfrak{L}_n(M) \end{bmatrix}.$$

On définit de plus $\mathbb{M}_n(\mathbb{A}) = \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{A})$.

Définition 27.3 (Produit matriciel). $M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A})$, $N \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{A})$. On définit :

$$MN = \left(\sum_{k=1}^p M_{ik} N_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathbb{M}_{n,q}(\mathbb{A}).$$

Définition 27.4 (Matrices élémentaires). $(u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On définit :

$$E^{uv} = (\delta_{iu} \delta_{jv})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A}).$$

Proposition 27.5. On se place dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{A})$. Alors :

$$\forall (a, b, \alpha, \beta) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, E^{ab} E^{\alpha\beta} = \delta_{b\alpha} E^{a\beta}.$$

Application 27.6. Si \mathbb{A} est commutatif, alors :

$$Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{A})) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{A}\}.$$

Démonstration. (\supset) Clair. (\subset) Soit $M \in Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{A}))$. Alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M E^{ij} = E^{ij} M.$$

En particulier :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies M_{ij} = (M E^{j1})_{i1} = (E^{j1} M)_{i1} = 0.$$

De même :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_{ii} = (M E^{i1})_{i1} = (E^{i1} M)_{i1} = M_{11}.$$

Donc $M = M_{11} I_n$. □

Proposition 27.7.

$$\forall M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{A}), M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} M_{ij} E^{ij}.$$

II Représentations en tous genres

Notation 27.8. Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.

Définition 27.9 (Matrice d'un vecteur). E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on définit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Remarque 27.10. On identifiera $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à \mathbb{K}^n .

Proposition 27.11. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E . Alors l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels.*

Définition 27.12 (Matrice d'une application linéaire). *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p, n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta}(f) = [\mathcal{M}_{\beta}(f(e_1)) \quad \cdots \quad \mathcal{M}_{\beta}(f(e_p))] \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Proposition 27.13. *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p, n , \mathcal{B} une base de E , β une base de F .*

- (i) *L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels.*
- (ii) *$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E, \mathcal{M}_{\beta}(f(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\beta}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.*

Proposition 27.14. *E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

Notation 27.15. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{B} une base de E . Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.*

Proposition 27.16. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E . Alors l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres.*

Application 27.17. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors :*

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{\lambda \text{id}_E, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

III Changement de base

Définition 27.18 (Matrice de passage). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E . On pose :*

$$P = [\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1) \quad \cdots \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_n)] = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{id}_E) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}).$$

P est dite matrice de passage de \mathcal{B} à β . On dit que \mathcal{B} est l'ancienne base et β la nouvelle base.

Proposition 27.19. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. \mathcal{B}, β deux bases de E. On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à β . Alors :*

$$\forall x \in E, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = P\mathcal{M}_{\beta}(x).$$

Proposition 27.20. *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, β, β' deux bases de F. On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et Π la matrice de passage de β à β' . Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \beta'}(f) = \Pi^{-1} \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \beta}(f) \times P.$$

IV Rangs

Définition 27.21 (Rang d'une application linéaire, d'un système de vecteurs). *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.*

- (i) *Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$.*
- (ii) *Pour $(v_1, \dots, v_s) \in E^s$, on définit $\text{rg } (v_1, \dots, v_s) = \dim \text{Vect } (v_1, \dots, v_s)$.*

Proposition 27.22. *E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.*

$$\text{rg } (\psi \circ \varphi) \leq \min (\text{rg } \psi, \text{rg } \varphi).$$

Proposition 27.23. *E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.*

- (i) *Si φ est surjective, alors $\text{rg } (\psi \circ \varphi) = \text{rg } \psi$.*
- (ii) *Si ψ est injective, alors $\text{rg } (\psi \circ \varphi) = \text{rg } \varphi$.*

Définition 27.24 (Rang d'une matrice). *Pour $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit :*

$$\text{rg } A = \text{rg } (\mathfrak{C}_1(A), \dots, \mathfrak{C}_p(A)).$$

Proposition 27.25. *E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives \mathcal{B}, β . Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \text{rg } f = \text{rg } (\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \beta}(f)).$$

Proposition 27.26. *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\text{rg } A = r \iff \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}), A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

Définition 27.27 (Matrices équivalentes). *$(A, B) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. S'équivalent :*

- (i) *$\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}), A = PBQ$.*

(ii) $\text{rg } A = \text{rg } B$.

Si tel est le cas, on dit que A et B sont équivalentes.

Corollaire 27.28. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg } A = \text{rg } {}^t A.$$

Corollaire 27.29. $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg } A = \text{rg } (\mathfrak{C}_1(A), \dots, \mathfrak{C}_p(A)) = \text{rg } (\mathfrak{L}_1(A), \dots, \mathfrak{L}_n(A)).$$

Proposition 27.30. \mathbb{L} un surcorps de \mathbb{K} . $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg}_{\mathbb{L}}(A) = \text{rg}_{\mathbb{K}}(A),$$

où $\text{rg}_{\mathbb{L}}(A)$ (resp. $\text{rg}_{\mathbb{K}}(A)$) désigne le rang de A comme élément de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{L})$ (resp. $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Corollaire 27.31. \mathbb{L} un surcorps de \mathbb{K} . $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{K}} &= \{X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = B\}, \\ \mathcal{S}_{\mathbb{L}} &= \{X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{L}), AX = B\}. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}} \neq \emptyset$ ssi $\mathcal{S}_{\mathbb{L}} \neq \emptyset$.

V Déterminants

V.1 Applications n -linéaires

Définition 27.32 (Application bilinéaire alternée ou antisymétrique). E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. $f : E^2 \rightarrow F$ une forme bilinéaire.

(i) f est dite alternée lorsque

$$\forall x \in E, f(x, x) = 0.$$

(ii) f est dite antisymétrique lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = -f(y, x).$$

Proposition 27.33. E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. $f : E^2 \rightarrow F$ une forme bilinéaire.

(i) f est alternée $\implies f$ est antisymétrique.

(ii) Si $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$, alors f est alternée $\iff f$ est antisymétrique.

Définition 27.34 (Application n -linéaire alternée). E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. $f : E^n \rightarrow F$ une forme n -linéaire. On dit que f est alternée lorsque :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Proposition 27.35. E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. $f : E^n \rightarrow F$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n).$$

Notation 27.36. E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . On pose :

$$\Lambda(E) = \{f : E^n \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ est } n\text{-linéaire et alternée}\}.$$

Proposition 27.37. E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $\Lambda(E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 27.38. E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . $f \in \Lambda(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

Corollaire 27.39. E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. \mathcal{B} une base de E . On considère :

$$\Phi : \begin{cases} \Lambda(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto f(\mathcal{B}) \end{cases}.$$

Alors Φ est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels.

V.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 27.40 (Déterminant d'une famille de vecteurs). E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . \mathcal{B} une base de E . On définit $\det_{\mathcal{B}} \in \Lambda(E)$ comme l'unique forme n -linéaire alternée sur E t.q. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Proposition 27.41. E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition 27.42. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :*

- (i) $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot \det_{\mathcal{B}'}$.
- (ii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = (\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}))^{-1}$.

Proposition 27.43. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n. \mathcal{B} une base de E. $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Alors la famille (u_1, \dots, u_n) est libre ssi*

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0.$$

Proposition 27.44. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n. \mathcal{B} une base de E. Alors l'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est polynomiale.*

Corollaire 27.45. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n. On pose :*

$$V = \{(u_1, \dots, u_n) \in E^n, (u_1, \dots, u_n) \text{ est liée}\}.$$

Alors V est une variété algébrique de E^n .

Proposition 27.46. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E, alors :*

$$\det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}'} f(\mathcal{B}').$$

V.3 Déterminant d'une application linéaire

Définition 27.47 (Déterminant d'une application linéaire). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. \mathcal{B} une base de E. On définit :*

$$\det : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B}) \end{cases}$$

det ne dépend pas de \mathcal{B} .

Proposition 27.48. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n. Alors :*

- (i) $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(g \circ f) = (\det g)(\det f)$.
- (ii) $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.
- (iii) $\forall f \in \mathcal{L}(E), \det f \neq 0 \iff f \in GL(E)$.

Proposition 27.49. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $\det : GL(E) \rightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes.*

Définition 27.50 ($SL(E)$). *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On définit :*

$$SL(E) = \text{Ker } \det = \{f \in GL(E), \det f = 1\}.$$

$SL(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

V.4 Déterminant d'une matrice

Définition 27.51 (Déterminant d'une matrice). *Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :*

$$\det A = \det (\mathfrak{C}_1(A), \dots, \mathfrak{C}_n(A)),$$

où \mathcal{C} est la base canonique de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 27.52.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n A_{\sigma(j)j}.$$

Proposition 27.53. *E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. \mathcal{B} une base de E. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \det f = \det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f).$$

VI Mineurs

Définition 27.54 (Mineurs). *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, $J = \{j_1, \dots, j_s\}$, avec $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq p$. On définit :*

$$A_{IJ} = (A_{i_k j_\ell})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq \ell \leq s}} \in \mathbb{M}_{r,s}(\mathbb{K}).$$

Si $|I| = |J| = k$, on note de plus $\mu_{IJ}(A) = \det A_{IJ}$. On dit que $\mu_{IJ}(A)$ est un mineur d'ordre k de A .

Lemme 27.55. *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $r \in \llbracket 1, \min(n, p) \rrbracket$. Si tous les mineurs d'ordre r de A sont nuls, alors tous les mineurs d'ordre $(r+1)$ de A sont nuls.*

Théorème 27.56 (Théorème des mineurs). *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose :*

$$R(A) = \max \{k \in \llbracket 0, \min(n, p) \rrbracket, A \text{ possède un mineur non nul d'ordre } k\},$$

en considérant que tout déterminant d'ordre 0 est égal à 1. Alors :

$$\text{rg } A = R(A).$$

Application 27.57. *Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$\Omega(r) = \{M \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \text{rg } M \geq r\}.$$

Alors $\Omega(r)$ est un ouvert de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

VII Produit par blocs

Notation 27.58 (Matrices blocs). Pour $(i, j) \in \llbracket 1, a \rrbracket \times \llbracket 1, b \rrbracket$, soit $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$. On note alors

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1} & \cdots & A_{ab} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{np}(\mathbb{K}),$$

où $n = \sum_{i=1}^a n_i$, $p = \sum_{j=1}^b p_j$.

Proposition 27.59. Soit $A = (A_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (B_{ij}) \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices écrites sous forme de blocs.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1} & \cdots & A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{b1} & \cdots & B_{bc} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^b A_{1k} B_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^b A_{1k} B_{kc} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^b A_{ak} B_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^b A_{ak} B_{kc} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 27.60. Soit $A = (A_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{t-1,t} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{tt} \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^t \det A_{ii}.$$

VIII Décomposition LU des matrices carrées inversibles

Notation 27.61. On définit :

$$\Lambda_n(\mathbb{K}) = \left\{ L \in GL_n(\mathbb{K}), L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{n1} & \cdots & L_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\Upsilon_n(\mathbb{K}) = \left\{ U \in GL_n(\mathbb{K}), U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & U_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix} \right\}.$$

Proposition 27.62. $\Lambda_n(\mathbb{K})$ et $\Upsilon_n(\mathbb{K})$ sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$.

Vocabulaire 27.63 (Décomposition LU). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A possède une décomposition LU lorsque :

$$\exists (L, U) \in \Lambda_n(\mathbb{K}) \times \Upsilon_n(\mathbb{K}), A = LU.$$

Définition 27.64 (Mineurs principaux). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $\mu_i(A) = \mu_{\llbracket 1, i \rrbracket, \llbracket 1, i \rrbracket}(A)$. $\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)$ sont appelés mineurs principaux de A .

Lemme 27.65. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède une décomposition LU , alors elle est unique.

Lemme 27.66. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède une décomposition LU , alors les mineurs principaux de A sont tous non nuls.

Théorème 27.67. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Si les mineurs principaux de A sont tous non nuls, alors :

- (i) $A \in GL_n(\mathbb{K})$.
- (ii) A possède une unique décomposition LU .

Démonstration. (i) Appliquer le théorème 27.56. (ii) Par récurrence sur n . Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons le acquis pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons le pour $(n + 1)$. Soit donc $A \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ t.q. les mineurs principaux de A sont tous non nuls. On pose $A' = A_{\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket}$. Les mineurs principaux de A' sont

tous non nuls, donc il existe $(L', U') \in \Lambda_n(\mathbb{K}) \times \Upsilon_n(\mathbb{K})$ t.q. $A' = L'U'$. Soit $B \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $w \in \mathbb{K}$ t.q. $A = \begin{bmatrix} A' & C \\ B & w \end{bmatrix}$. Montrer alors que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A' & C \\ B & w \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} L' & 0 \\ BU'^{-1} & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} U' & L'^{-1}C \\ 0 & z \end{bmatrix}}_U,$$

avec $z = w - BA'^{-1}C$. Reste à prouver que $z \neq 0$. En effet, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $L \in \Lambda_n(\mathbb{K}) \subset GL_n(\mathbb{K})$, donc $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $z \neq 0$. Ainsi, $U \in \Upsilon_n(\mathbb{K})$, et la récurrence se propage. \square

Chapitre 28

Dualité

Notation 28.1. Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps et $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

I Hyperplans

I.1 Notion de codimension

Proposition 28.2. F, G, G' trois sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$F \oplus G = F \oplus G' \implies G \simeq G'.$$

Démonstration. Voir la proposition 26.28. □

Corollaire 28.3. F un sous-espace vectoriel de E . Si F admet un supplémentaire de dimension finie δ dans E , alors tous les supplémentaires de F sont de dimension finie δ .

Définition 28.4 (Codimension). F un sous-espace vectoriel de E . Si F admet un supplémentaire G de dimension finie, on appelle codimension de F , notée $\text{codim } F$, la dimension de G .

Proposition 28.5. F un sous-espace vectoriel de E . Si E est de dimension finie, alors :

$$\text{codim } F = \dim E - \dim F.$$

I.2 Hyperplans

Notation 28.6. On note $\mathcal{G}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E .

Définition 28.7 (Hyperplan). H un sous-espace vectoriel de E . S'équivalent :

- (i) $\text{codim } H = 1$.
- (ii) $\exists u \in E \setminus \{0\}, E = H \oplus \text{Vect}(u)$.
- (iii) H est un élément maximal de l'espace ordonné $(\mathcal{G}(E) \setminus \{E\}, \subset)$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que H est un hyperplan de E .

Proposition 28.8. H un hyperplan de E . Alors :

$$\forall u \in E \setminus H, E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Lemme 28.9. H un hyperplan de E , F un sous-espace vectoriel de E . Alors $F \subset H$ ou $F \cap H$ est un hyperplan de F .

Lemme 28.10. H un hyperplan de E , F un sous-espace vectoriel de E de codimension finie. Alors $F \subset H$ ou $\text{codim}(F \cap H) = 1 + \text{codim } F$.

Proposition 28.11. H_1, \dots, H_s s hyperplans de E . Alors :

$$\text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^s H_i \right) \leq s.$$

Démonstration. Par récurrence sur s en utilisant le lemme 28.10. □

Proposition 28.12. F un sous-espace vectoriel de E de codimension s . Alors il existe s hyperplans H_1, \dots, H_s t.q.

$$F = \bigcap_{i=1}^s H_i.$$

II Formes linéaires

Définition 28.13 (Formes linéaires). On note :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).$$

Les éléments de E^* sont appelés formes linéaires.

Proposition 28.14. On suppose que E est de dimension finie n , et on pose \mathcal{B} une base de E . Alors l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B},1} : E^* \rightarrow \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

Corollaire 28.15. Si E est de dimension finie, alors :

$$\dim E^* = \dim E.$$

Proposition 28.16. *H un sous-espace vectoriel de E . S'équivalent :*

- (i) H est un hyperplan de E .
- (ii) $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}, H = \text{Ker } \varphi$.

Corollaire 28.17. $\varphi \in E^* \setminus \{0\}, a \in \mathbb{K}$. Alors $\varphi^{-1}(\{a\})$ est un hyperplan affine de direction $\text{Ker } \varphi$.

Lemme 28.18. $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Alors :

$$\{\psi \in E^*, \text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi\} = \{\lambda \varphi, \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$$

Démonstration. (\supset) Clair. (\subset) Soit $\psi \in E^*$ t.q. $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi$. Soit $u \in E \setminus \text{Ker } \varphi$. Montrer que $\psi = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \varphi$. \square

Notation 28.19. On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des hyperplans de E et $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E .

Proposition 28.20. L'application
$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{H}(E) \longrightarrow \mathcal{D}(E^*) \\ H \longmapsto \{\psi \in E^*, \text{Ker } \psi \supset H\} \end{array} \right.$$
 est une bijection.

Théorème 28.21 (Théorème fondamental de la dualité). $(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^{p+1}$. S'équivalent :

- (i) $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
- (ii) $\text{Ker } \psi \supset \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair. (ii) \Rightarrow (i) Récurrence sur p . $\mathcal{H}(p)$: Pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel E et pour tout $(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^{p+1}$, $\text{Ker } \psi \supset \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \Rightarrow \psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. $\mathcal{H}(1)$ est vraie d'après le lemme 28.18. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\mathcal{H}(p)$ soit vraie. Soit $(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_{p+1}) \in (E^*)^{p+2}$ t.q. $\text{Ker } \psi \supset \bigcap_{i=1}^{p+1} \text{Ker } \varphi_i$. On pose $H = \text{Ker } \varphi_{p+1}$. Pour $\vartheta \in E^*$, on notera $\hat{\vartheta} = \vartheta|_H \in H^*$. On a alors :

$$\text{Ker } \hat{\psi} \supset \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \hat{\varphi}_i.$$

D'après $\mathcal{H}(p)$, on dispose de $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ t.q. $\hat{\psi} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \hat{\varphi}_i$. On note $\delta = \psi - \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$. On a $\text{Ker } \delta \supset H = \text{Ker } \varphi_{p+1}$. D'après $\mathcal{H}(1)$, il existe $\lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ t.q. $\delta = \lambda_{p+1} \varphi_{p+1}$, d'où $\psi = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})$. Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie et la récurrence se propage. \square

Théorème 28.22. $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$. Alors :

$$\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \right).$$

Démonstration. Soit F un supplémentaire de $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i$ dans E (F existe car $\text{codim}(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i) \leq p$ d'après la proposition 28.11). En notant $\Phi = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, poser :

$$\alpha : \begin{cases} \Phi \longrightarrow F^* \\ \psi \longmapsto \psi|_F \end{cases}.$$

Montrer que α est un isomorphisme et en déduire $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \dim \Phi = \dim F^* = \dim F = \text{codim}(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i)$. \square

III Bases duales et préduales

Proposition 28.23. *Si E est de dimension finie, alors :*

$$\dim E^* = \dim E.$$

Notation 28.24. *On note $E^{**} = (E^*)^*$.*

Proposition 28.25. *On suppose que E est de dimension finie. On considère :*

$$\Psi : \begin{cases} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto \begin{cases} E^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{cases} \end{cases}.$$

Alors Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 28.26 (Base duale). *On suppose que E est de dimension d . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E . On pose $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*) \in (E^*)^d$ t.q.*

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Alors \mathcal{B}^ est une base de E^* , dite base duale de \mathcal{B} .*

Démonstration. $\text{rg}(e_1^*, \dots, e_d^*) = \text{codim}\left(\bigcap_{i=1}^d \text{Ker } e_i^*\right) = d$. \square

Proposition 28.27. *On suppose que E est de dimension d . On considère (e_1, \dots, e_d) une base de E .*

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^d e_i^*(x) \cdot e_i. \quad (\text{i})$$

$$\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^d \varphi(e_i) \cdot e_i^*. \quad (\text{ii})$$

Définition 28.28 (Base préduale). *On suppose que E est de dimension finie. On considère β une base de E^* . Alors il existe une unique base \mathcal{B} de E t.q. $\mathcal{B}^* = \beta$. La base \mathcal{B} est dite base préduale de β .*

Proposition 28.29. *On suppose que E est de dimension finie. On considère \mathcal{B} une base de E . Alors :*

$$\forall \varphi \in E^*, \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = {}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B},1}(\varphi)).$$

IV Systèmes de formes linéaires

Proposition 28.30. *On suppose que E est de dimension finie d . On considère $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$, et on pose :*

$$\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{cases}.$$

On a $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^p)$. Et :

- (i) $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre $\iff \Phi$ est surjectif.
- (ii) $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est génératrice $\iff \Phi$ est injectif.

Remarque 28.31. *On reprend les hypothèses de la proposition 28.30. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E et \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{K}^p . On a alors :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_1(e_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_p(e_1) & \cdots & \varphi_p(e_d) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{codim} \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \right) &= \text{codim Ker } \Phi = \text{rg } \Phi = \text{rg } \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi) \\ &= \text{rg } {}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi)) = \text{rg } (\varphi_1, \dots, \varphi_p). \end{aligned}$$

Ceci fournit ainsi une autre démonstration du théorème 28.22, en ajoutant l'hypothèse que E est de dimension finie.

V Systèmes linéaires

Notation 28.32. *Pour $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on note $\Sigma_{A,B}$ le système linéaire $AX = B$ et :*

$$\mathcal{S}_{A,B} = \{X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = B\}.$$

Vocabulaire 28.33 (Rang d'un système linéaire). *Pour $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on appelle rang du système linéaire $\Sigma_{A,B}$ le rang de A .*

Lemme 28.34. *Pour $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_{A,0}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p , et :*

$$\text{codim } \mathcal{S}_{A,0} = \text{rg } A.$$

Proposition 28.35. *$A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $\mathcal{S}_{A,B} = \emptyset$ ou $\mathcal{S}_{A,B}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_{A,0}$ et de dimension $(p - \text{rg } A)$.*

Chapitre 29

Algèbres

Notation 29.1. Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.

I Généralités

Définition 29.2 (Algèbre). \mathcal{A} un ensemble, $+$ et \times deux LCI sur \mathcal{A} , \cdot une LCE $\mathbb{K} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. On dit que $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre lorsque :

- (i) $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel,
- (ii) $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau,
- (iii) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A}, (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$.

Si de plus \times est commutative, \mathcal{A} est dite algèbre commutative.

Exemple 29.3.

- (i) $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre.
- (ii) $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{K} -algèbre, pour E \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (iii) $(M_d(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre, pour $d \in \mathbb{N}^*$.
- (iv) $(\mathbb{L}, +, \times, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre, pour \mathbb{L} surcorps de \mathbb{K} .

Définition 29.4 (Sous-algèbre). $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une \mathbb{K} -algèbre. On appelle sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ tout $B \subset \mathcal{A}$ t.q.

- (i) B est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, \cdot)$,
- (ii) B est un sous-anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$.

Lemme 29.5. $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une \mathbb{K} -algèbre. Une intersection quelconque de sous-algèbres de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$.

Définition 29.6 (Sous-algèbre engendrée par une partie). $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une \mathbb{K} -algèbre. $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$. Alors l'ensemble des sous-algèbres de $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ contenant \mathcal{U} possède un plus petit élément, noté $\langle \mathcal{U} \rangle$.

Proposition 29.7. $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une \mathbb{K} -algèbre. $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$. Alors :

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \text{Vect}(\{x_1 \cdots x_n, n \in \mathbb{N}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}^n\}).$$

Définition 29.8 (Morphisme d'algèbres). $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$, $(\mathcal{B}, +, \cdot, \times)$ deux \mathbb{K} -algèbres. On appelle morphisme d'algèbres toute application $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ t.q.

- (i) φ est linéaire,
- (ii) φ est un morphisme d'anneaux.

Proposition 29.9. L'image directe (resp. réciproque) d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre.

II Polynômes et algèbres

Notation 29.10. Dans la suite du chapitre, $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre.

Lemme 29.11. $a \in \mathcal{A}$. Alors il existe un unique morphisme de \mathbb{K} -algèbres $\varphi_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{A}$ t.q.

$$\varphi_a(X) = a.$$

On a alors :

$$\forall (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \varphi_a \left(\sum_{k=0}^n p_k X^k \right) = \sum_{k=0}^n p_k a^k.$$

Notation 29.12.

- (i) Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathcal{A}$, on pose $P(a) = \varphi_a(P)$.
- (ii) Pour $a \in \mathcal{A}$, on pose :

$$\mathbb{K}[a] = \text{Im } \varphi_a = \{P(a), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Proposition 29.13. $a \in \mathcal{A}$.

- (i) $\mathbb{K}[a] = \langle a \rangle$.
- (ii) L'algèbre $\mathbb{K}[a]$ est commutative.

III Polynôme minimal

Définition 29.14 (Idéal annulateur). *Pour $a \in \mathcal{A}$, on pose :*

$$\mathfrak{J}_a = \text{Ker } \varphi_a = \{P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0\}.$$

\mathfrak{J}_a est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, appelé idéal annulateur de a .

Définition 29.15 (Polynôme minimal). $a \in \mathcal{A}$. Si $\mathfrak{J}_a \neq \{0\}$, on note $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$, dit polynôme minimal de a , l'unique générateur unitaire de \mathfrak{J}_a .

Proposition 29.16. $a \in \mathcal{A}$.

- (i) Si $\mathfrak{J}_a = \{0\}$, alors $\varphi_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[a]$ est un isomorphisme. Ainsi, en tant que \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{A} est de dimension infinie.
- (ii) Si $\mathfrak{J}_a \neq \{0\}$, alors en notant $d = \deg \mu_a$, on a $\dim \mathbb{K}[a] = d$, et $(1, a, \dots, a^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.

IV Algébriques et transcendants

Notation 29.17. Dans cette section, \mathbb{L} est un surcorps de \mathbb{K} .

Définition 29.18 (Algébriques et transcendants). $a \in \mathbb{L}$. On considère $\mathfrak{J}_a = \{P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0\}$.

- (i) Si $\mathfrak{J}_a = \{0\}$, on dit que a est transcendant sur \mathbb{K} .
- (ii) Si $\mathfrak{J}_a \neq \{0\}$, on dit que a est algébrique sur \mathbb{K} .

Proposition 29.19. $a \in \mathbb{L}$. S'équivalent :

- (i) a est transcendant sur \mathbb{K} .
- (ii) $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{L} .
- (iii) $\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, P(a) \neq 0$.

Proposition 29.20. Il existe des réels transcendants sur \mathbb{Q} .

Démonstration. Montrer que l'ensemble des algébriques sur \mathbb{Q} est dénombrable, alors que \mathbb{R} n'est pas dénombrable (voir proposition 6.22). \square

Proposition 29.21. $a \in \mathbb{L}$. Si a est algébrique sur \mathbb{K} , alors μ_a est un irréductible de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 29.22. $a \in \mathbb{L}$. S'équivalent :

- (i) a est algébrique sur \mathbb{K} .
- (ii) $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille liée du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{L} .
- (iii) $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie (comme \mathbb{K} -espace vectoriel).

(iv) $\mathbb{K}[a]$ est un sous-corps de \mathbb{L} .

Démonstration. (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) Conséquence de la proposition 29.16. (iii) \Rightarrow (iv) $\mathbb{K}[a]$ est un sous-anneau de \mathbb{L} , il suffit donc de montrer que $\mathbb{K}[a]^* = \mathbb{K}[a] \setminus \{0\}$. Soit $b \in \mathbb{K}[a] \setminus \{0\}$. On considère :

$$\theta_b : \begin{cases} \mathbb{K}[a] \longrightarrow \mathbb{K}[a] \\ x \longmapsto bx \end{cases}.$$

θ_b est \mathbb{K} -linéaire et injective. Or $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie, donc θ_b est un isomorphisme. En particulier, $\exists x \in \mathbb{K}[a], bx = 1$. Donc $b \in \mathbb{K}[a]^*$. (iv) \Rightarrow (i) Si $a = 0$, alors a est bien algébrique. Sinon, comme $\mathbb{K}[a]$ est un corps, $a^{-1} \in \mathbb{K}[a]$. Soit donc $P \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $P(a) = a^{-1}$. Vérifier alors que $(XP - 1)(a) = 0$, avec $(XP - 1) \neq 0$. Donc a est algébrique. \square

Lemme 29.23. Soit E un \mathbb{L} -espace vectoriel. Alors :

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \cdot \dim_{\mathbb{L}} E,$$

où compris si les dimensions sont infinies, avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

Théorème 29.24. On considère :

$$\mathfrak{A} = \{a \in \mathbb{L}, a \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}.$$

Alors \mathfrak{A} est un sous-corps de \mathbb{L} .

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathfrak{A}^2$. Montrer que $(\mathbb{K}[a])[b]$ est de dimension finie comme \mathbb{K} -espace vectoriel. Or :

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[a + b] \subset (\mathbb{K}[a])[b] \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[a \times b] \subset (\mathbb{K}[a])[b].$$

Donc $\mathbb{K}[a + b]$ et $\mathbb{K}[a \times b]$ sont de dimension finie, donc $(a + b)$ et $(a \times b)$ sont algébriques. Ainsi, \mathfrak{A} est stable par $+$ et \times . De plus, \mathfrak{A} est stable par passage à l'inverse et contient 1. C'est donc un corps. \square

Proposition 29.25. On note $\mathfrak{A} = \{a \in \mathbb{C}, a \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}\}$. Alors :

- (i) \mathfrak{A} est un sous-corps de \mathbb{C} .
- (ii) \mathfrak{A} est dénombrable.
- (iii) \mathfrak{A} est algébriquement clos.

Démonstration. (iii) Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathfrak{A}[X] \setminus \mathfrak{A}_0[X]$. On pose $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, puis, pour $n \in \llbracket 0, d \rrbracket$:

$$\mathbb{K}_{n+1} = \mathbb{K}_n[a_n].$$

Par récurrence sur n , on montre que \mathbb{K}_n est un corps et qu'il est de dimension finie comme \mathbb{Q} -espace vectoriel. On considère alors $\omega \in \mathbb{C}$ une racine de P (d'après le théorème 25.27). ω est algébrique sur \mathbb{K}_{d+1} (car $P(\omega) = 0$ et $P \in (\mathbb{K}_{d+1})[X]$). Donc :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\omega] \leq \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_{d+1}[\omega] = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_{d+1} \cdot \dim_{\mathbb{K}_{d+1}} \mathbb{K}_{d+1}[\omega] < +\infty.$$

Donc $\omega \in \mathfrak{A}$. Ainsi, P admet une racine dans \mathfrak{A} . Donc \mathfrak{A} est algébriquement clos. \square

V Adjonction de racines

Vocabulaire 29.26 (Corps de rupture, corps de décomposition).

- (i) $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. On appelle corps de rupture de P tout surcorps \mathbb{L} de \mathbb{K} tel que P possède une racine sur \mathbb{L} .
- (ii) $P \in \mathbb{K}[X]$. On appelle corps de décomposition de P tout surcorps \mathbb{L} de \mathbb{K} tel que P est scindé dans $\mathbb{L}[X]$.

Proposition 29.27. $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Alors P admet un corps de rupture.

Démonstration. Poser $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/\langle P \rangle$, où $\langle P \rangle$ est l'idéal engendré par P dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que \mathbb{L} est un surcorps de \mathbb{K} et que $P(\overline{X}) = \overline{0}$ dans \mathbb{L} . \square

Proposition 29.28. $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P admet un corps de décomposition.

Démonstration. Par récurrence sur le degré. \square

Chapitre 30

Polynômes d'Endomorphismes

Notation 30.1. Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps et $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

I Lemme des noyaux

Lemme 30.2 (Lemme des noyaux). $f \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$. Si $P_1 \wedge P_2 = 1$, alors :

$$\text{Ker} (P_1 P_2) (f) = \text{Ker} P_1(f) \oplus \text{Ker} P_2(f).$$

(ii) $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$. Si P_1, \dots, P_n sont premiers entre eux deux à deux, alors :

$$\text{Ker} \left[\left(\prod_{i=1}^n P_i \right) (f) \right] = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker} P_i(f).$$

Démonstration. (i) En appliquant l'égalité de Bézout, obtenir l'existence de $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $UP_1 + VP_2 = 1$. En déduire :

$$\forall x \in \text{Ker}(P_1 P_2)(f), \underbrace{[U(f) \circ P_1(f)](x)}_{x_1} + \underbrace{[V(f) \circ P_2(f)](x)}_{x_2} = x.$$

Montrer que $x_1 \in \text{Ker} P_2(f)$, $x_2 \in \text{Ker} P_1(f)$ et en déduire que $\text{Ker} (P_1 P_2) (f) = \text{Ker} P_1(f) + \text{Ker} P_2(f)$. Montrer ensuite que $\text{Ker} P_1(f) \cap \text{Ker} P_2(f) = \{0\}$. (ii) Par récurrence. \square

II Valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 30.3 (Éléments propres d'un endomorphisme). $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E).$$

- (i) Si $E_\lambda(f) \neq \{0\}$, on dit que λ est une valeur propre de f .
- (ii) Si $x \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$, on dit que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .
- (iii) $E_\lambda(f)$ est le sous-espace propre de f associé à λ .

On note de plus $\text{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f .

Proposition 30.4. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les $(E_\lambda(f))_{\lambda \in \mathbb{K}}$ sont en somme directe.

Corollaire 30.5. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors f a au plus $(\dim E)$ valeurs propres distinctes.

Proposition 30.6. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $(u_1, \dots, u_s) \in (E \setminus \{0\})^s$ est un système de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes, alors (u_1, \dots, u_s) est libre.

III Suites à récurrence linéaire

Vocabulaire 30.7 (Suite à récurrence linéaire). $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est une suite à récurrence linéaire lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\beta_0, \dots, \beta_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u_{n+k}.$$

Proposition 30.8. $(\beta_0, \dots, \beta_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$. On pose :

$$\mathcal{E} = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} = \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u_{n+k} \right\}.$$

Alors l'application $\left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}^d \\ u \longmapsto (u_0, \dots, u_{d-1}) \end{array} \right.$ est un isomorphisme. Ainsi :

$$\dim \mathcal{E} = d.$$

Notation 30.9.

- (i) Pour $P = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, on pose :

$$\mathcal{E}(P) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} p_k u_{n+k} = 0 \right\}.$$

(ii) On pose $\sigma : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u \longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$.

Proposition 30.10. $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ et σ est surjectif. De plus :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \mathcal{E}(P) = \text{Ker } P(\sigma).$$

Lemme 30.11. $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P_1, \dots, P_s sont des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux distincts, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ t.q. $P = P_1^{\alpha_1} \cdots P_s^{\alpha_s}$, alors :

$$\mathcal{E}(P) = \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{E}(P_i^{\alpha_i}).$$

Lemme 30.12. $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose $\text{car } \mathbb{K} = 0$.

(i) Si $\lambda = 0$, alors :

$$\mathcal{E}(X^\alpha) = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u \text{ stationne en } 0 \text{ à partir du rang } \alpha\}.$$

(ii) Si $\lambda \neq 0$, alors :

$$\mathcal{E}((X - \lambda)^\alpha) = \{(R(n)\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}, R \in \mathbb{K}_{\alpha-1}[X]\}.$$

Théorème 30.13. $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $\text{car } \mathbb{K} = 0$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ des éléments de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ deux à deux distincts, $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ t.q.

$$P = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_s)^{\alpha_s}.$$

Alors, pour $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$u \in \mathcal{E}(P) \iff \exists (Q_1, \dots, Q_s) \in \mathbb{K}_{\alpha_1-1}[X] \times \cdots \times \mathbb{K}_{\alpha_s-1}[X],$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{i=1}^s Q_i(n) \lambda_i^n.$$

Autrement dit, $\left((n^j \lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 0 \leq j < \alpha_i}}$ est une base de $\mathcal{E}(P)$.

IV Matrices semblables

Notation 30.14. Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 30.15 (Matrices semblables). $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que B est semblable à A lorsque :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A = PBP^{-1}.$$

On note alors $A \approx B$. Et \approx est une relation d'équivalence.

Proposition 30.16. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont semblables, alors A et B sont équivalentes.

Proposition 30.17. On définit :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K})) \\ P \longmapsto \varphi_P : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto PMP^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

où $\text{Aut}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ est le groupe des automorphismes d'algèbres de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) Pour $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $A \approx B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A = \varphi_P(B)$.
- (ii) Φ est un morphisme de groupes.
- (iii) $\text{Ker } \Phi = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Proposition 30.18. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, avec $n = \dim E$. Alors $A \approx B$ ssi il existe $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Proposition 30.19. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\Pi \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$A \approx B \implies \Pi(A) \approx \Pi(B).$$

V Trace

Définition 30.20 (Trace d'une matrice). On définit :

$$\text{tr} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ A \longmapsto \sum_{i=1}^n A_{ii} \end{array} \right. .$$

Proposition 30.21.

- (i) $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.
- (ii) $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- (iii) $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $A \approx B \implies \text{tr } A = \text{tr } B$.

Proposition 30.22. On définit :

$$T : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ B \longmapsto \tau_B : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ A \longmapsto \text{tr}(AB) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors T est un isomorphisme.

Définition 30.23 (Trace d'un endomorphisme). \mathcal{B} une base de E . On définit :

$$\text{tr} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \text{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) \end{array} \right. .$$

tr ne dépend pas de \mathcal{B} .

Proposition 30.24.

- (i) $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathbb{K})$.
- (ii) $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$.

Proposition 30.25. On définit :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathbb{K}) \\ g \longmapsto \psi_g : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \text{tr}(f \circ g) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est un isomorphisme.

VI Valeurs propres d'une matrice

Définition 30.26 (Éléments propres d'une matrice). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$.

- (i) Si $\exists X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, AX = \lambda X$, on dit que λ est une valeur propre de A .
- (ii) Si $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ avec $AX = \lambda X$, on dit que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

On note de plus $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

Proposition 30.27. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}, \Pi \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est valeur propre de A , alors $\Pi(\lambda)$ est valeur propre de $\Pi(A)$.

Proposition 30.28. $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit \mathcal{B} une base de E . Alors les valeurs propres de f sont les valeurs propres de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. De plus, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ envoie les vecteurs propres de f sur les vecteurs propres de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Corollaire 30.29. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A \approx B$, alors A et B ont les mêmes valeurs propres.

Proposition 30.30. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A a au plus n valeurs propres.

VII Polynôme caractéristique

Définition 30.31 (Polynôme caractéristique d'une matrice). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X],$$

où $(A - XI_n)$ est vu comme élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K}(X))$. χ_A est appelé polynôme caractéristique de A .

Proposition 30.32. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\deg \chi_A = n$, et on connaît certains coefficients de χ_A :

$$\chi_A = (-1)^n [X^n - (\operatorname{tr} A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\det A)].$$

Proposition 30.33. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \approx B \implies \chi_A = \chi_B.$$

Définition 30.34 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme). \mathcal{B} une base de E . Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit :

$$\chi_f = \chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)}.$$

χ_f ne dépend pas de \mathcal{B} .

Proposition 30.35. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \lambda \text{ est racine de } \chi_f.$$

Corollaire 30.36. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f a au plus $(\dim E)$ valeurs propres distinctes.

VIII Endomorphismes cycliques

Notation 30.37. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$. On note :

$$\mathbb{K}[f] \cdot u = \{\varphi(u), \varphi \in \mathbb{K}[f]\} = \{(P(f))(u), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Proposition 30.38. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$. Alors :

- (i) $\mathbb{K}[f] \cdot u = \operatorname{Vect}(f^k(u), k \in \mathbb{N})$.
- (ii) $\mathbb{K}[f] \cdot u$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant u et stable par f .

Notation 30.39. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$. On note :

$$\mathfrak{I}_{f,u} = \{P \in \mathbb{K}[X], (P(f))(u) = 0\}.$$

$\mathfrak{I}_{f,u}$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. Son unique générateur unitaire est noté $\mu_{f,u}$.

Proposition 30.40. $f \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$.

- (i) $\mu_{f,u} \mid \mu_f$.
- (ii) $(u, f(u), \dots, f^{\delta-1}(u))$ est une base de $\mathbb{K}[f] \cdot u$, où $\delta = \deg \mu_{f,u}$.
- (iii) $\dim(\mathbb{K}[f] \cdot u) = \deg \mu_{f,u}$.

Définition 30.41 (Endomorphisme cyclique). $f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :

- (i) $\exists u \in E$, $E = \mathbb{K}[f] \cdot u$.
- (ii) $\exists u \in E$, $(u, f(u), \dots, f^{d-1}(u))$ est libre, où $d = \dim E$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que (E, f) est cyclique.

Lemme 30.42. On considère :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),$$

avec $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. M est dite matrice de Frobenius. Et on a :

$$\chi_M = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).$$

Lemme 30.43. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si (E, f) est cyclique, alors :

$$\chi_f(f) = 0.$$

Démonstration. Soit $u \in E$ t.q. $\mathcal{B} = (u, f(u), \dots, f^{d-1}(u))$ est une base de E , où $d = \dim E$. On pose $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ t.q.

$$f^d(u) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k f^k(u) = 0.$$

Montrer alors que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice de Frobenius, et en déduire avec le lemme 30.42 que :

$$\chi_f = (-1)^d \left(X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \right).$$

On a ainsi $(\chi_f(f))(u) = 0$. Soit alors $v \in E$. Comme $E = \mathbb{K}[f] \cdot u$, il existe $\Pi \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = (\Pi(f))(u)$. En déduire alors que $(\chi_f(f))(v) = 0$, puis que $\chi_f(f) = 0$. □

IX Théorème de Cayley-Hamilton

Lemme 30.44. $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f . On note $\tilde{f} \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par f sur F . Alors :

$$\chi_{\tilde{f}} \mid \chi_f.$$

Démonstration. Soit G un supplémentaire de F dans E . Soit β_F et β_G des bases respectives de F et G . En notant $\beta = \beta_F \cup \beta_G$, on a :

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\beta_F}(\tilde{f}) & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\chi_f = \chi_{\tilde{f}} \cdot \chi_B$. □

Théorème 30.45 (Théorème de Cayley-Hamilton). $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\chi_f(f) = 0.$$

Démonstration. Soit $u \in E \setminus \{0\}$. On pose $F = \mathbb{K}[f] \cdot u$. F est stable par f ; on pose donc $\tilde{f} \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par f sur F . Alors (F, \tilde{f}) est cyclique, donc d'après le lemme 30.43, on a $\chi_{\tilde{f}}(\tilde{f}) = 0$. Or d'après le lemme 30.44, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\chi_f = R\chi_{\tilde{f}}$. Ainsi

$$(\chi_f(f))(u) = \left(R(\tilde{f}) \circ \chi_{\tilde{f}}(\tilde{f}) \right)(u) = 0.$$

Donc $\forall u \in E$, $(\chi_f(f))(u) = 0$. □

Corollaire 30.46. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mu_f \mid \chi_f.$$

En particulier, $\deg \mu_f \leq \dim E$.

Corollaire 30.47. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- (i) $\chi_A(A) = 0$.
- (ii) $\mu_A \mid \chi_A$.
- (iii) $\deg \mu_A \leq n$.

Application 30.48. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent et on note $\nu = \min \{k \in \mathbb{N}, f^k = 0\}$. Alors $\nu \leq \dim E$.

Démonstration. Remarquer que $\mu_f = X^\nu$, et appliquer le fait que $\deg \mu_f \leq \dim E$. □

Chapitre 31

Réduction des Endomorphismes

Notation 31.1. Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps et $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

I Matrices diagonales

Définition 31.2 (Matrices diagonales). Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on note :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}).$$

On note de plus :

$$\mathfrak{D}_n(\mathbb{K}) = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

Les éléments de $\mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ sont dits matrices diagonales.

Proposition 31.3.

- (i) $\mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.
- (ii) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $\left. \begin{array}{c} \mathfrak{D}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ D \longmapsto D_{ii} \end{array} \right\} \text{ est un morphisme d'algèbres.}$
- (iii) Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

(iv) Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\chi_{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X).$$

II Diagonalisation

II.1 Diagonalisation des endomorphismes

Définition 31.4 (Endomorphisme diagonalisable). $f \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

- (i) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f .
- (ii) Il existe β base de E t.q. $\mathcal{M}_\beta(f) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$.
- (iii) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de f , alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}(f).$$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que f est diagonalisable.

Proposition 31.5. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable et on note β une base de E t.q. $\mathcal{M}_\beta(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X).$$

En particulier, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de f .

Proposition 31.6. $f \in \mathcal{L}(E)$.

- (i) f diagonalisable $\implies \chi_f$ scindé.
- (ii) f diagonalisable $\iff \chi_f$ simplement scindé.

Proposition 31.7. $f \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

- (i) f est diagonalisable.
- (ii) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\dim E_{\lambda_i}(f) \geq \omega_i$.
- (iii) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\dim E_{\lambda_i}(f) = \omega_i$.
- (iv) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\bigcirc_{i=1}^s (f - \lambda_i \text{id}) = 0$.
- (v) f annule un polynôme simplement scindé.
- (vi) μ_f est simplement scindé.

Proposition 31.8. $f \in \mathcal{L}(E)$, F sous-espace vectoriel de E stable par f . On suppose que f est diagonalisable. Alors :

- (i) L 'induit de f sur F est diagonalisable.
- (ii) F possède un supplémentaire stable par f .

Démonstration. (i) Comme f est diagonalisable, soit P un polynôme simplement scindé annulant f . En notant \tilde{f} l'induit de f sur F , montrer que $P(\tilde{f}) = 0$, donc \tilde{f} est diagonalisable. (ii) Soit $\beta_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ une base de F . Soit \mathcal{B} une base de E constituée de vecteurs propres de f (car f est diagonalisable). On complète β_F en une base $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E avec des vecteurs de \mathcal{B} . On considère alors :

$$G = \text{Vect}(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_n).$$

Alors $E = F \oplus G$ et G est stable par f . □

II.2 Diagonalisation des matrices

Définition 31.9 (Matrice diagonalisable). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable lorsque A est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 31.10. $f \in \mathcal{L}(E)$. \mathcal{B} base de E . Alors f est diagonalisable ssi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.

Proposition 31.11. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) A diagonalisable $\implies \chi_A$ scindé.
- (ii) A diagonalisable $\iff \chi_A$ simplement scindé.

Proposition 31.12. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. S'équivalent :

- (i) A est diagonalisable.
- (ii) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\text{rg}(A - \omega_i I_n) \leq n - \omega_i$.
- (iii) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\text{rg}(A - \omega_i I_n) = n - \omega_i$.
- (iv) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ et $\prod_{i=1}^s (A - \lambda_i I_n) = 0$.
- (v) A annule un polynôme simplement scindé.
- (vi) μ_A est simplement scindé.

III Applications de la diagonalisation

Proposition 31.13. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de f . Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on pose p_i la projection sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} E_{\lambda_j}(f)$. Alors :

- (i) $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, p_i \in \mathbb{K}[f]$.
- (ii) $\mathbb{K}[f] = \text{Vect}(p_1, \dots, p_s)$.

Démonstration. (i) Soit $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$. Poser $\Pi_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, et montrer que $p_i = \Pi_i(f)$. (ii) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$Q(f) = \sum_{i=1}^s Q(\lambda_i) p_i.$$

□

Lemme 31.14. $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Si $f \circ g = g \circ f$, alors chaque sous-espace propre de f est stable par g .

Définition 31.15 (Commutant d'un endomorphisme). Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}.$$

Proposition 31.16. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- (i) $\mathbb{K}[f] \subset \Gamma(f)$,
- (ii) $\Gamma(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Lemme 31.17. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable, et on pose $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}.$$

Alors :

$$\dim \Gamma(f) = \sum_{i=1}^s \omega_i^2.$$

Démonstration. Montrer :

$$\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)\} \simeq \prod_{i=1}^s \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f)).$$

$$\text{Donc } \dim \Gamma(f) = \sum_{i=1}^s \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^s (\dim E_{\lambda_i}(f))^2 = \sum_{i=1}^s \omega_i^2.$$

□

Proposition 31.18. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable. S'équivalent :

- (i) χ_f est simplement scindé.
- (ii) $\chi_f = \mu_f$.
- (iii) $\dim \mathbb{K}[f] = \dim E$.
- (iv) $\dim \Gamma(f) = \dim E$.
- (v) $\mathbb{K}[f] = \Gamma(f)$.

Proposition 31.19. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$. On suppose que χ_f est simplement scindé, et on écrit :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. Alors :

$$|\{\varphi \in \mathcal{L}(E), \Pi(\varphi) = f\}| = \prod_{i=1}^n |\Pi^{-1}(\{\lambda_i\})|.$$

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base de E diagonalisant f (car χ_f est simplement scindé). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\Pi(\varphi) = f$. Alors φ commute avec f , donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ commute avec $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. En déduire que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$. Donc $\varphi = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, avec $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$. Et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_i \in \Pi^{-1}(\{\lambda_i\})$. L'inclusion réciproque étant claire, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\{\varphi \in \mathcal{L}(E), \Pi(\varphi) = f\}) \\ = \left\{ \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Pi^{-1}(\{\lambda_1\}) \times \dots \times \Pi^{-1}(\{\lambda_n\}) \right\}. \end{aligned}$$

□

Proposition 31.20. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de f . Alors les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont les $\bigoplus_{i=1}^s G_i$, où G_i est un sous-espace vectoriel de $E_{\lambda_i}(f)$, pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$.

IV Matrices triangulaires

Définition 31.21 (Matrice triangulaire). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i > j \implies A_{ij} = 0$ (resp. $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i < j \implies A_{ij} = 0$). On note $\mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$ (resp. $\mathfrak{T}_n^i(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

Proposition 31.22.

- (i) $\mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.
- (ii) $\mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E^{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n)$.
- (iii) $\dim \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (iv) $\forall A \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K}), A^{-1} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$.

Proposition 31.23. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \Phi_P : \begin{cases} \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto PMP^{-1} \end{cases}.$$

Alors Φ_P est un isomorphisme d'algèbres.

V Trigonalisation

V.1 Généralités

Définition 31.24 (Endomorphisme trigonalisable). $f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :

- (i) Il existe β^+ base de E t.q. $\mathcal{M}_{\beta^+}(f) \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$.
- (ii) Il existe β^- base de E t.q. $\mathcal{M}_{\beta^-}(f) \in \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{K})$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que f est trigonalisable.

Définition 31.25 (Matrice trigonalisable). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. S'équivalent :

- (i) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
- (ii) A est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que A est trigonalisable.

Proposition 31.26. $f \in \mathcal{L}(E)$. \mathcal{B} base de E . Alors f est trigonalisable ssi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est trigonalisable.

V.2 Drapeaux

Définition 31.27 (Drapeau). On appelle drapeau de E toute suite $\mathcal{F} = (E_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-espaces vectoriels de E t.q.

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E.$$

Proposition 31.28. $\mathcal{F} = (E_i)_{0 \leq i \leq n}$ un drapeau de E . Alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim E_i = i.$$

Proposition 31.29. $\mathcal{F} = (E_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E . Alors \mathcal{F} est un drapeau de E ssi il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E t.q.

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, E_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Si tel est le cas, on dit que \mathcal{B} est une base adaptée à \mathcal{F} .

Vocabulaire 31.30 (Drapeau stable par un endomorphisme). $\mathcal{F} = (E_i)_{0 \leq i \leq n}$ un drapeau de E . $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que \mathcal{F} est stable par f lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(E_i) \subset E_i.$$

Proposition 31.31. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable ssi il existe un drapeau de E stable par f .

VI Polynômes scindés et trigonalisation

VI.1 Endomorphismes transposés

Définition 31.32 (Endomorphisme transposé). $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$${}^t f : \begin{cases} E^* \longrightarrow E^* \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f \end{cases}.$$

On a ${}^t f \in \mathcal{L}(E^*)$.

Proposition 31.33. $f \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} base de E , dont on note \mathcal{B}^* la base duale. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)).$$

Lemme 31.34. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f annule un polynôme scindé. Alors il existe un hyperplan de E stable par f .

Démonstration. Soit $\Pi \in \mathbb{K}[X]$ scindé annulant f . Pour $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\text{Ker } \varphi) &\subset \text{Ker } \varphi \iff \text{Ker } (\varphi \circ f) \supset \text{Ker } \varphi \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \varphi \circ f = \lambda \varphi \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, {}^t f(\varphi) = \lambda \varphi \\ &\iff \varphi \text{ est un vecteur propre de } {}^t f. \end{aligned}$$

Montrer que $\Pi({}^t f) = {}^t(\Pi(f)) = 0$. En déduire que ${}^t f$ admet un vecteur propre $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ (pour cela, écrire $\Pi = \prod_{i=1}^s (X - \zeta_i)$ et montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ t.q. $({}^t f - \zeta_i \text{id}) \notin GL(E^*)$). Ainsi, $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan stable par f . \square

VI.2 Endomorphismes trigonalisables et polynômes scindés

Lemme 31.35. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est trigonalisable, alors f annule un polynôme scindé.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E t.q.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}).$$

Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $E_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Et on considère :

$$\Pi = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = (-1)^n \chi_f.$$

Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(f - \lambda_i \text{id})(E_i) \subset E_{i-1}$, en déduire que $\Pi(f) = 0$. \square

Remarque 31.36. La démonstration du lemme 31.35 redémontre le théorème de Cayley-Hamilton (théorème 30.45) dans le cas particulier des endomorphismes trigonalisables.

Théorème 31.37. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable ssi f annule un polynôme scindé.

Démonstration (Première méthode). (\Rightarrow) Voir lemme 31.35. (\Leftarrow) On procède par récurrence sur $\dim E$. Le résultat est vrai lorsque $\dim E = 1$. Soit $n \geq 2$ t.q. le résultat est vrai dans tout espace de dimension $(n-1)$. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , soit $f \in \mathcal{L}(E)$ annulant un polynôme scindé $\Pi = \prod_{i=1}^s (X - \zeta_i) \in \mathbb{K}[X]$. *Première étape.* Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ t.q. $(f - \zeta_i \text{id}) \notin GL(E)$ et en déduire que ζ_i est une valeur propre de f . Soit e_1 un vecteur propre associé à ζ_i . *Deuxième étape.* On complète (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \zeta_i & Y \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

où $Y \in \mathbb{M}_{1, n-1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\Pi(A) = 0$. Ainsi, selon la version matricielle de l'hypothèse de récurrence, A est trigonalisable. Soit donc $P \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et $T \in \mathfrak{T}_{n-1}^s(\mathbb{K})$ t.q. $A = PTP^{-1}$. Alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{P}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_i & Y \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}}_{\tilde{P}} = \begin{bmatrix} \zeta_i & Y \\ 0 & T \end{bmatrix} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}).$$

Donc f est trigonalisable et la récurrence se propage. \square

Démonstration (Deuxième méthode). Par récurrence sur $\dim E$ avec le lemme 31.34. \square

Corollaire 31.38. *Si \mathbb{K} est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.*

Corollaire 31.39. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

Démonstration. Soit \mathbb{L} un corps de décomposition de μ_A (qui existe d'après la proposition 29.28). Alors μ_A est scindé sur \mathbb{L} et $\mu_A(A) = 0$. Donc en considérant A comme élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{L})$, A est trigonalisable. Or, d'après la remarque 31.36, le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour les matrices trigonalisables. Donc $\chi_A(A) = 0$ (dans \mathbb{L} , donc dans \mathbb{K}). \square

Corollaire 31.40. $f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :

- (i) f est trigonalisable.
- (ii) χ_f est scindé.
- (iii) μ_f est scindé.

Corollaire 31.41. $f \in \mathcal{L}(E)$, F sous-espace vectoriel de E stable par f . Si f est trigonalisable, alors l'induit de f sur F est trigonalisable.

Chapitre 32

Compléments sur la Réduction

Notation 32.1. Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps et $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

I \mathbb{R} et \mathbb{C}

Lemme 32.2. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$. S'équivalent :

- (i) $A \approx B$ au sens de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), A = PBP^{-1}$.
- (ii) $A \approx B$ au sens de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), A = PBP^{-1}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair (car $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$). (ii) \Rightarrow (i) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $A = PBP^{-1}$. Soit $(Q, R) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$ t.q. $P = Q + iR$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A(Q + tR) = (Q + tR)B.$$

On pose $\Pi = \det(Q + XR) \in \mathbb{R}[X]$. On a $\Pi(i) \neq 0$ donc $\Pi \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Soit donc $t_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\Pi(t_0) \neq 0$. Alors $(Q + t_0R) \in GL_n(\mathbb{R})$ et :

$$A = (Q + t_0R)B(Q + t_0R)^{-1}.$$

□

Application 32.3. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $A^2 + I_n = 0$. Alors :

- (i) A n'a pas de valeur propre réelle.
- (ii) n est pair.

$$(iii) \quad A \approx \tilde{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}, \text{ où } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. (i) On a $\mu_A \mid (X^2 + 1)$ donc toute valeur propre de A est racine de $(X^2 + 1)$, qui n'a pas de racine réelle. (ii) χ_A n'a pas de racine réelle donc $n = \deg \chi_A$ est pair. (iii) A annule $(X + i)(X - i)$ donc A est \mathbb{C} -diagonalisable, de valeurs propres i et $-i$. Donc il existe $s \in \llbracket 0, n \rrbracket$ t.q.

$$A \approx D_s = \begin{bmatrix} iI_s & 0 \\ 0 & -iI_{n-s} \end{bmatrix}.$$

On a $i(2s - n) = \text{tr } D_s = \text{tr } A \in \mathbb{R}$ donc $s = \frac{n}{2}$ et $A \approx D_{n/2}$. Or $\tilde{R} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\tilde{R}^2 + I_n = 0$, donc selon le raisonnement précédent, $\tilde{R} \approx D_{n/2}$. Donc $A \approx \tilde{R}$ au sens de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ donc au sens de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (d'après le lemme 32.2). \square

Proposition 32.4. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f et de dimension 1 ou 2.

Démonstration. On cherche $x \in E \setminus \{0\}$ t.q. $f^2(x) \in \text{Vect}(x, f(x))$. Autrement dit, on cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ t.q. $\text{Ker } P(f) \neq \{0\}$. Or, on a $\deg \mu_f \geq 1$. Soit donc P un facteur irréductible de μ_f : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\mu_f = PQ$. Si $P(f)$ était inversible, Q annulerait f avec $0 \leq \deg Q < \deg \mu_f$: c'est impossible. Donc $\text{Ker } P(f) \neq \{0\}$ et $\deg P \in \{1, 2\}$ car P est un irréductible de $\mathbb{R}[X]$. \square

II Codiagonalisation

Définition 32.5 (Endomorphismes codiagonalisables). $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$. On dit que les éléments de \mathcal{A} sont codiagonalisables lorsqu'il existe β base de E t.q.

$$\forall f \in \mathcal{A}, \mathcal{M}_\beta(f) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K}).$$

Théorème 32.6. $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$. Alors les éléments de \mathcal{A} sont codiagonalisables ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\forall f \in \mathcal{A}, f$ est diagonalisable,
- (ii) $\forall (f, g) \in \mathcal{A}^2, f \circ g = g \circ f$.

Démonstration. (\Rightarrow) Clair (deux matrices diagonales commutent). (\Leftarrow) On procède par récurrence sur $\dim E$. Le résultat est vrai lorsque $\dim E = 1$. Soit

$n \geq 2$ t.q. le résultat est vrai dans tout espace de dimension $< n$. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant (i) et (ii). *Premier cas* : $\mathcal{A} \subset \text{Vect}(id)$. Alors toute base convient. *Second cas* : $\mathcal{A} \not\subset \text{Vect}(id)$. Soit alors $h \in \mathcal{A} \setminus \text{Vect}(id)$. h est diagonalisable ; soit $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres distinctes. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et $g \in \mathcal{A}$, $E_{\lambda_i}(h)$ est stable par g car $g \circ h = h \circ g$; on note donc g_i l'induit de g sur $E_{\lambda_i}(h)$. On pose de plus :

$$\mathcal{A}_i = \{g_i, g \in \mathcal{A}\}.$$

On a $\dim E_{\lambda_i}(h) < \dim E$ (car $h \notin \text{Vect}(id)$), donc par hypothèse de récurrence, il existe β_i base de $E_{\lambda_i}(h)$ codiagonalisant les éléments de \mathcal{A}_i . Poser alors $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_s$ et montrer que β codiagonalise les éléments de \mathcal{A} . \square

Application 32.7. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$\mu_A \wedge \mu_C = 1 \implies \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On suppose que $\mu_A \wedge \mu_C = 1$. Pour $P \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on considère $M(P) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_p \end{bmatrix}$. On a $M(P) \in GL_{n+p}(\mathbb{K})$ et $M(P)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_p \end{bmatrix}$. Et :

$$M(P) \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} M(P)^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ PA - CP + B & C \end{bmatrix}.$$

Il suffit donc de trouver $P \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ t.q. $PA - CP = -B$. On considère donc l'endomorphisme :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ P \longmapsto PA - CP \end{cases}.$$

On va montrer que Φ est un isomorphisme. Soit $P \in \text{Ker } \Phi$. Alors $PA = CP$. On en déduit alors $\forall \Pi \in \mathbb{K}[X]$, $P\Pi(A) = \Pi(C)P$. En particulier, $P\mu_C(A) = 0$. Or $\mu_A \wedge \mu_C = 1$ donc il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $U\mu_A + V\mu_C = 1$. Donc $V(A)\mu_C(A) = I_n$, d'où $\mu_C(A) \in GL_n(\mathbb{K})$, donc $P = 0$. Ainsi, $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ donc Φ est injective donc bijective, donc $\exists P \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $PA - CP = -B$. \square

III Sous-espaces caractéristiques

Définition 32.8 (Sous-espaces caractéristiques). $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on note :

$$\begin{aligned} F_\lambda(f) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \text{Ker} \left((f - \lambda id)^k \right) \\ &= \text{Ker} \left((f - \lambda id)^{\dim E} \right) \\ &= \text{Ker} \left((f - \lambda id)^\omega \right), \end{aligned}$$

où ω est l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_f . On dit que $F_\lambda(f)$ est le sous-espace caractéristique de f associé à λ .

Proposition 32.9. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable. Alors :

- (i) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} F_\lambda(f)$,
- (ii) $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \{0\} \subsetneq E_\lambda(f) \subset F_\lambda(f)$,
- (iii) f est diagonalisable $\iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f), E_\lambda(f) = F_\lambda(f)$.

Proposition 32.10. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable. Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Alors $F_\lambda(f)$ est stable par f , et l'induit \tilde{f} de f sur $F_\lambda(f)$ est de la forme :

$$\tilde{f} = \lambda \text{id} + \nu,$$

où $\nu \in \mathcal{L}(F_\lambda(f))$ est un endomorphisme nilpotent.

Proposition 32.11. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \dim F_{\lambda_i}(f) = \omega_i.$$

Démonstration. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, l'induit f_i de f sur $F_{\lambda_i}(f)$ est de la forme $f_i = \lambda_i \text{id} + \nu_i$, où $\nu_i \in \mathcal{L}(F_{\lambda_i}(f))$ est nilpotent (selon la proposition 32.10). Donc $\chi_{\nu_i} = (-X)^{\dim F_{\lambda_i}(f)}$, d'où $\chi_{f_i} = (\lambda_i - X)^{\dim F_{\lambda_i}(f)}$. Ainsi :

$$\prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i} = \chi_f = \prod_{i=1}^s \chi_{f_i} = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\dim F_{\lambda_i}(f)}.$$

Il vient $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \dim F_{\lambda_i}(f) = \omega_i$. □

Proposition 32.12. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note p_i la projection sur $F_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq i}} F_{\lambda_j}(f)$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, p_i \in \mathbb{K}[f].$$

Démonstration. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i}$, avec $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Soit $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$. Soit $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

$$U(X - \lambda_i)^{\omega_i} + V \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{\omega_j} = 1.$$

Poser $\Pi_i = 1 - U(X - \lambda_i)^{\omega_i}$ et montrer que $p_i = \Pi_i(f)$. □

Proposition 32.13. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}(f)$. *S'équivalent :*

- (i) $E_\lambda(f) = F_\lambda(f)$.
- (ii) $E_\lambda(f)$ possède un supplémentaire stable par f .
- (iii) L'ordre de multiplicité de λ comme racine de μ_f est égal à 1.

Démonstration. (iii) \Rightarrow (ii) Si λ est racine simple de μ_f , alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\mu_f = (X - \lambda)Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. D'après le lemme des noyaux, on a :

$$E = \text{Ker } \mu_f(f) = \text{Ker } ((X - \lambda)(f)) \oplus \text{Ker } Q(f) = E_\lambda(f) \oplus \text{Ker } Q(f).$$

Donc $\text{Ker } Q(f)$ est un supplémentaire de $E_\lambda(f)$ stable par f . (ii) \Rightarrow (i) On suppose que $E_\lambda(f)$ possède un supplémentaire G stable par f . Comme $E_\lambda(f) \subset F_\lambda(f)$, il suffit de prouver que $F_\lambda(f) \subset E_\lambda(f)$. Soit donc $x \in F_\lambda(f)$. Il existe $(y, z) \in E_\lambda(f) \times G$ t.q. $x = y + z$. De plus, en notant $n = \dim E$, on a :

$$0 = (f - \lambda \text{id})^n(x) = (f - \lambda \text{id})^n(y) + (f - \lambda \text{id})^n(z) = (f - \lambda \text{id})^n(z).$$

Or λ n'est pas valeur propre de l'induit f_G de f sur G car $G \cap E_\lambda(f) = \{0\}$. Ainsi, $z = 0$, donc $x = y \in E_\lambda(f)$. (i) \Rightarrow (ii) On suppose que $E_\lambda(f) = F_\lambda(f)$. Soit $\omega \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\chi_f = (X - \lambda)^\omega H$ avec $H(\lambda) \neq 0$. Selon le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker } \chi_f(f) = \text{Ker } ((X - \lambda)^\omega(f)) \oplus \text{Ker } H(f) \\ &= F_\lambda(f) \oplus \text{Ker } H(f) = E_\lambda(f) \oplus \text{Ker } H(f). \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } H(f)$ est un supplémentaire de $E_\lambda(f)$ stable par f . (ii) \Rightarrow (iii) On suppose que $E_\lambda(f)$ possède un supplémentaire G stable par f . En notant \tilde{f} et f_G les induits respectifs de f sur $E_\lambda(f)$ et G , on a $G \cap E_\lambda(f) = \{0\}$ donc λ n'est pas valeur propre de f_G donc pas racine de μ_{f_G} . Or :

$$\mu_f \mid \mu_{\tilde{f}} \mu_{f_G} = (X - \lambda) \mu_{f_G}.$$

Donc λ est racine simple de μ_f . □

IV Réduction en dimension 2 dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

Proposition 32.14. $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Alors A est semblable à une et une seule des matrices suivantes :

- (i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \neq \mu$,

$$(ii) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(iii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Proposition 32.15. $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A est semblable à une et une seule des matrices suivantes :

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda \neq \mu,$$

$$(ii) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(iv) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

V Topologie de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

V.1 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ et applications

Proposition 32.16. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. $\text{Sp}(A)$ est fini, soit donc $t \in (\mathbb{K} \setminus \text{Sp}(A))^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$. Alors $A - t_p I_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A - t_p I_n) \in GL_n(\mathbb{K})$.

□

Lemme 32.17. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \approx BA$. En particulier, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Proposition 32.18. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors :

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Démonstration. Première étape : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, le lemme 32.17, et la continuité de la fonction :

$$\Xi : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ M \longmapsto \chi_M \end{cases}.$$

Deuxième étape : \mathbb{K} est infini. On pose $(\delta_0, \dots, \delta_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})^{n+1}$ t.q.

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta_k(P) X^k.$$

Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose ensuite $d_p = \delta_p \circ \Xi$, puis :

$$\gamma_p : \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto d_p((A - tI_n)B) - d_p(B(A - tI_n)) \end{cases}.$$

La fonction γ_p est polynomiale car d_p est polynomiale. Et, d'après le lemme 32.17, on a $\forall t \in \mathbb{K} \setminus \text{Sp}(A), \gamma_p(t) = 0$. Puisque $\mathbb{K} \setminus \text{Sp}(A)$ est infini, il vient $\gamma_p = 0$. D'où $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \gamma_p(0) = 0$, donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. *Troisième étape* : \mathbb{K} est fini. On plonge \mathbb{K} dans un surcorps \mathbb{L} infini (par exemple : $\mathbb{L} = \mathbb{K}(X)$), et on calcule les polynômes caractéristiques dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{L})$. \square

V.2 Topologie des classes de similitude

Notation 32.19. Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on note :

$$\Omega(A) = \{PAP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

Lemme 32.20. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$\overline{\Omega(A)} \cap \mathfrak{D}_n(\mathbb{C}) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, A est trigonalisable (c.f. corollaire 31.38) ; soit donc $T \in \Omega(A) \cap \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{C})$. On pose :

$$D = \text{diag}(1, 2, \dots, n) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer :

$$D^p T D^{-p} = \left(\mathbb{1}_{\llbracket 1, j \rrbracket}(i) \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}^p T_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}.$$

\square

Proposition 32.21. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$\Omega(A) \text{ est fermé} \iff A \text{ est diagonalisable.}$$

Démonstration. (\Rightarrow) Conséquence du lemme 32.20. (\Leftarrow) On suppose A diagonalisable et on écrit :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Soit alors $B \in \Omega(A)^{\mathbb{N}}$ t.q. $B_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\chi_L = \lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_{B_p} = \chi_A.$$

De plus, en notant $\Pi = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)$, on a :

$$\Pi(L) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Pi(B_p) = 0.$$

Ainsi, L est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Donc $L \in \Omega(A)$. \square

Proposition 32.22. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$\Omega(A) \text{ est borné} \iff A \in \text{Vect}(I_n).$$

VI Systèmes dynamiques de matrices ou d'endomorphismes

Proposition 32.23. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\text{car } \mathbb{K} = 0$ et on note $\Pi = X^\delta + \sum_{k=0}^{\delta-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A . Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite $\left((A^p)_{ij} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est à récurrence linéaire :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A^{p+\delta})_{ij} + \sum_{k=0}^{\delta-1} \alpha_k (A^{p+k})_{ij} = 0.$$

Le théorème 30.13 fournit donc la forme de l'expression de $(A^p)_{ij}$ en fonction de p .

Proposition 32.24. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

- (i) $A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0 \iff \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C}), A^p X \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0.$
- (ii) $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge $\iff \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (A^p X)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.
- (iii) $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée $\iff \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (A^p X)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 32.25. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0 \iff \text{Sp}(A) \subset \mathcal{B}_o(0, 1).$$

Démonstration. (\Rightarrow) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, soit $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Alors :

$$\lambda^p X = A^p X \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En déduire (par exemple en choisissant $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ t.q. $X_i \neq 0$) que $\lambda^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc $\lambda \in \mathcal{B}_o(0, 1)$. (\Leftarrow) Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , de base \mathcal{B} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$. \mathbb{C} étant algébriquement clos, on écrit :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - X)^{\omega_i},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont deux à deux distincts et $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. En utilisant la proposition 32.10, montrer que :

$$\forall x \in F_{\lambda_i}(f), f^p(x) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^s F_{\lambda_i}(f)$, il vient $\forall x \in E, f^p(x) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$. En déduire que $f^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$, i.e. $A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$. \square

Proposition 32.26. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel. *S'équivalent :*

- (i) $(f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- (ii) $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathcal{B}_f(0, 1)$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \cap \mathbb{U}, F_{\lambda}(f) = E_{\lambda}(f)$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On vérifie aisément que $|\lambda| \leq 1$. Si $\lambda \in \mathbb{U}$, soit f_{λ} l'induit de f sur $F_{\lambda}(f)$. On sait qu'il existe $\nu_{\lambda} \in \mathcal{L}(F_{\lambda})$ nilpotent t.q.

$$f_{\lambda} = \lambda \mathrm{id} + \nu_{\lambda}.$$

On suppose par l'absurde que $E_{\lambda}(f) \subsetneq F_{\lambda}(f)$. Autrement dit, $\nu_{\lambda} \neq 0$, d'où :

$$\mathrm{Ker} \nu_{\lambda} \subsetneq \mathrm{Ker} \nu_{\lambda}^2.$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{Ker} \nu_{\lambda}^2 \setminus \mathrm{Ker} \nu_{\lambda}, \|f_{\lambda}^p(x)\| &= \|\lambda x + p\nu_{\lambda}(x)\| \\ &\geq p \|\nu_{\lambda}(x)\| - \|x\| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur $F_{\lambda}(f)$. C'est absurde. (ii) \Rightarrow (i) Soit β une base de E adaptée à la somme $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} F_{\lambda}(f)$. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_s \end{bmatrix},$$

où $M_i = \lambda_i I_{\omega_i} + N_i$, avec $\omega_i \in \mathbb{N}^*$ et $N_i \in \mathbb{M}_{\omega_i}(\mathbb{C})$ nilpotente. On a de plus :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \lambda_i \in \mathbb{U} \implies M_i = \lambda_i I_{\omega_i}.$$

En déduire avec la proposition 32.25 que $((\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée, i.e. $(f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée. \square

Proposition 32.27. $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel. S'équivalent :

- (i) $(f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.
- (ii) $\text{Sp}(f) \subset \mathcal{B}_o(0, 1) \cup \{1\}$ et $F_1(f) = E_1(f)$.

VII Commutant d'une matrice

Définition 32.28 (Commutant d'une matrice). Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note :

$$\Gamma(A) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$

Proposition 32.29. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- (i) $\mathbb{K}[A] \subset \Gamma(A)$,
- (ii) $\Gamma(A)$ est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 32.30. $\forall A \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$, $\dim \Gamma(A) \geq n$.

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\Gamma(A) \cap \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \text{Ker } \varphi_{ij}, \quad \text{où } \varphi_{ij} : \begin{cases} \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ M \longmapsto (AM)_{ij} - (MA)_{ij} \end{cases}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dim \Gamma(A) &\geq \dim (\Gamma(A) \cap \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})) = \dim \left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \text{Ker } \varphi_{ij} \right) \\ &= \dim \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K}) - \text{rg}(\varphi_{ij}, 1 \leq i < j \leq n) \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n. \end{aligned}$$

\square

Lemme 32.31. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, A trigonalisable $\implies \dim \Gamma(A) \geq n$.

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q. $PAP^{-1} \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. On considère l'automorphisme d'algèbres :

$$\Phi_P : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto PMP^{-1} \end{cases}.$$

On a :

$$\dim \Gamma(A) = \dim \Phi_P(\Gamma(A)) = \dim \Gamma(\Phi_P(A)) \geq n,$$

d'après le lemme 32.30 car $\Phi_P(A) \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. \square

Proposition 32.32.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \dim \Gamma(A) \geq n.$$

Démonstration. Soit \mathbb{L} un corps de décomposition de μ_A (qui existe d'après la proposition 29.28). Alors μ_A est scindé sur \mathbb{L} et $\mu_A(A) = 0$. Donc en considérant A comme élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{L})$, A est trigonalisable. D'après le lemme 32.31, $\dim \Gamma_{\mathbb{L}}(A) \geq n$. Montrer alors que $\Gamma_{\mathbb{K}}(A)$ et $\Gamma_{\mathbb{L}}(A)$ sont les espaces de solutions d'un même système linéaire à coefficients dans \mathbb{K} , à n^2 équations et n^2 inconnues. Le rang de ce système linéaire est invariant par changement du corps de base, d'où $\dim \Gamma_{\mathbb{K}}(A) = \dim \Gamma_{\mathbb{L}}(A) \geq n$. \square

VIII Décomposition de Dunford

Théorème 32.33 (Décomposition de Dunford). $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est trigonalisable. Alors il existe un unique couple $(d, \nu) \in \mathcal{L}(E)^2$ t.q.

- (i) $f = d + \nu$,
- (ii) d est diagonalisable,
- (iii) ν est nilpotent,
- (iv) $d \circ \nu = \nu \circ d$.

Une telle décomposition est appelée décomposition de Dunford.

Démonstration. *Existence.* On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de f . Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note p_i la projection sur $F_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_{\lambda_j}(f)$. On pose alors :

$$d = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad \nu = f - d.$$

D'après la proposition 32.12, on a $(d, \nu) \in \mathbb{K}[f]^2$, donc $d \circ \nu = \nu \circ d$. d est bien diagonalisable (car $\bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}(d) = \bigoplus_{i=1}^s F_{\lambda_i}(f) = E$). Et ν induit un nilpotent sur chaque $F_{\lambda_i}(f)$, donc ν est nilpotent. *Unicité.* Soit $(d', \nu') \in \mathcal{L}(E)^2$

une décomposition de Dunford de f (on note toujours (d, ν) la décomposition de Dunford donnée dans la preuve de l'existence). On a :

$$d - d' = \nu' - \nu.$$

Or, d' commute avec f , donc avec tout polynôme en f , donc avec d . Ainsi, d'après le théorème 32.6, d et d' sont codiagonalisables. Donc $(d - d')$ est diagonalisable. De plus, ν' commute avec ν (même argument que précédemment). Ainsi, en notant $(\omega, \omega') \in (\mathbb{N}^*)^2$ t.q. $\nu^\omega = \nu'^{\omega'} = 0$, on a :

$$\begin{aligned} (\nu - \nu')^{\omega + \omega'} &= \sum_{k=0}^{\omega} \binom{\omega + \omega'}{k} \nu^k \underbrace{(-\nu')^{\omega' + \omega - k}}_0 \\ &\quad + \sum_{k=\omega+1}^{\omega + \omega'} \binom{\omega + \omega'}{k} \underbrace{\nu^k}_0 (-\nu')^{\omega' + \omega - k} = 0. \end{aligned}$$

Donc $d - d' = \nu' - \nu$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul. \square

IX Matrices nilpotentes

Notation 32.34. On note :

$$\mathcal{N}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), A \text{ est nilpotente}\}.$$

Proposition 32.35. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. S'équivalent :

- (i) $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.
- (ii) $\chi_A = (-X)^n$.
- (iii) $\exists \nu \in \mathbb{N}^*, \mu_A = X^\nu$.

Remarque 32.36. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Si \mathbb{K} est algébriquement clos, alors $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Sp}(A) = \{0\}$.

Proposition 32.37. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A \approx B$, alors $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K}) \iff B \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.

Notation 32.38. Pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_\nu = (\delta_{i+1,j})_{\substack{1 \leq i \leq \nu \\ 1 \leq j \leq \nu}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_\nu(\mathbb{K}).$$

Proposition 32.39. $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. *S'équivalent :*

- (i) $A \approx J_n$.
- (ii) $A^{n-1} \neq 0$.
- (iii) $\text{rg } A = n - 1$.

Lemme 32.40. $\forall (\nu, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\text{rg } J_\nu^k = \max(\nu - k, 0)$.

Théorème 32.41 (Théorème de classification des matrices nilpotentes). $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. *Alors il existe une unique suite $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_s \geq 1$ t.q.*

$$A \approx \begin{bmatrix} J_{\nu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\nu_s} \end{bmatrix}.$$

Chapitre 33

Exponentielle et Systèmes Différentiels Linéaires

Notation 33.1. Dans tout le chapitre, $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre de dimension n , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Normes d'algèbre

Définition 33.2 (Norme d'algèbre). Soit ν une norme sur \mathcal{A} . On dit que ν est une norme d'algèbre lorsque :

- (i) $\nu(1) = 1$,
- (ii) $\forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, \nu(ab) \leq \nu(a)\nu(b)$.

Théorème 33.3. Il existe des normes d'algèbre sur \mathcal{A} .

Démonstration. Pour $a \in \mathcal{A}$, on considère :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ x \longmapsto ax \end{cases}.$$

On a $\forall a \in \mathcal{A}, \varphi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$. Soit alors $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathcal{A} . On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ subordonnée à $\|\cdot\|$, et on pose :

$$\nu : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ a \longmapsto \|\varphi_a\| \end{cases}.$$

Montrer que ν est une norme d'algèbre sur \mathcal{A} . □

Proposition 33.4. *Soit ν une norme d'algèbre sur \mathcal{A} . Alors :*

$$\mathcal{B}_o(1, 1) \subset \mathcal{A}^*,$$

où \mathcal{A}^* est l'ensemble des éléments inversibles de \mathcal{A} .

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{B}_o(0, 1)$. Montrer que la série $\sum h^p$ converge absolument et que :

$$(1 - h) \sum_{p=0}^{\infty} h^p = 1.$$

Donc $(1 - h) \in \mathcal{A}^*$. □

II Exponentielle sur une algèbre de dimension finie

Définition 33.5 (Exponentielle). *On définit :*

$$\exp : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ a \longmapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{p!} . \end{cases}$$

Démonstration. Soit ν une norme d'algèbre sur \mathcal{A} . Pour $a \in \mathcal{A}$, montrer que la série $\sum \frac{a^p}{p!}$ converge absolument donc converge. □

Proposition 33.6. $\exp \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Proposition 33.7. *Si $(\mathcal{B}, +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre de dimension finie et $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme d'algèbres, alors :*

$$\phi \circ \exp_{\mathcal{A}} = \exp_{\mathcal{B}} \circ \phi.$$

Exemple 33.8.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Considérer le morphisme d'algèbres :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ z \longmapsto \begin{pmatrix} \Re(z) & -\Im(z) \\ \Im(z) & \Re(z) \end{pmatrix} . \end{cases}$$

D'après la proposition 33.7, on a :

$$\exp(\Phi(a + ib)) = \Phi(\exp(a + ib)) = e^a \Phi(\cos b + i \sin b).$$

□

Proposition 33.9.

$$\forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, ab = ba \implies \exp(a + b) = \exp(a) \exp(b).$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathcal{A}^2$ t.q. $ab = ba$. Pour $N \in \mathbb{N}$, poser :

$$S_N(a, b) = \left(\sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^N \frac{b^k}{k!} \right) = \sum_{0 \leq p, q \leq N} \left(\frac{a^p}{p!} \cdot \frac{b^q}{q!} \right),$$

$$T_N(a, b) = \sum_{k=0}^N \frac{(a + b)^k}{k!} = \sum_{\substack{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q \leq N}} \left(\frac{a^p}{p!} \cdot \frac{b^q}{q!} \right).$$

Soit alors ν une norme d'algèbre sur \mathcal{A} . Montrer :

$$\begin{aligned} \nu(S_N(a, b) - T_N(a, b)) &= \nu \left(\sum_{\substack{0 \leq p, q \leq N \\ p+q > N}} \left(\frac{a^p}{p!} \cdot \frac{b^q}{q!} \right) \right) \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq N \\ p+q > N}} \left(\frac{\nu(a)^p}{p!} \cdot \frac{\nu(b)^q}{q!} \right) \\ &= S_N(\nu(a), \nu(b)) - T_N(\nu(a), \nu(b)) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{\nu(a)} e^{\nu(b)} - e^{\nu(a) + \nu(b)} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\exp(a) \exp(b) - \exp(a + b) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N(a, b) - T_N(a, b)) = 0$. \square

Corollaire 33.10. $\exp(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$.

Proposition 33.11. Soit $a \in \mathcal{A}$. On considère :

$$\psi_a : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}^* \\ t \longmapsto \exp(ta) \end{cases}.$$

Alors :

- (i) ψ_a est un morphisme de groupes.
- (ii) ψ_a est \mathcal{C}^0 .
- (iii) ψ_a est dérivable, et $\psi'_a = a\psi_a = \psi_a a$.
- (iv) $\psi_a(\mathbb{R}) \subset \mathbb{K}[a]$.

Démonstration. (iv) $\mathbb{K}[a]$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{A} , qui est de dimension finie, donc $\mathbb{K}[a]$ est fermé (c.f. proposition 15.32). Et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_a(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(ta)^k}{k!} \in \overline{\mathbb{K}[a]} = \mathbb{K}[a]$. \square

Proposition 33.12. Soit $a \in \mathcal{A}$ annulant un polynôme simplement scindé $\Pi = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i) \in \mathbb{K}[X]$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts. Soit $P \in \mathbb{K}_{s-1}[X]$ t.q.

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}.$$

Alors :

$$\exp(a) = P(a).$$

Démonstration. On considère :

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ b \longmapsto \varphi_b : \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ x \longmapsto bx \end{array} \right. \right.$$

Φ est un morphisme injectif d'algèbres. Donc $\Pi(\Phi(a)) = \Phi(\Pi(a)) = 0$. Ainsi, $\Phi(a)$ annule un polynôme simplement scindé, donc $\Phi(a)$ est diagonalisable. Soit donc β une base de \mathcal{A} t.q.

$$\mathcal{M}_\beta(\Phi(a)) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

avec $\{\mu_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \subset \{\lambda_i, i \in \llbracket 1, s \rrbracket\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\beta(\Phi(\exp(a))) &= \exp(\mathcal{M}_\beta(\Phi(a))) = \exp(\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)) \\ &= \text{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) = \text{diag}(P(\mu_1), \dots, P(\mu_n)) \\ &= P(\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)) = P(\mathcal{M}_\beta(\Phi(a))) \\ &= \mathcal{M}_\beta(\Phi(P(a))). \end{aligned}$$

Ainsi $\exp(a) = P(a)$. □

III Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

Notation 33.13. Dans la suite du chapitre, $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Proposition 33.14. \mathcal{B} une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(\exp(f)) = \exp(\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)).$$

Proposition 33.15. $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A = PBP^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}.$$

Proposition 33.16. *Soit $T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\exp(T))_{ii} = e^{T_{ii}}.$$

Proposition 33.17. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \det(\exp(A)) > 0$.

Démonstration. $(\det \circ \exp) : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une application continue, et $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc $(\det \circ \exp)(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$ est un intervalle de \mathbb{R}^* . Comme $(\det \circ \exp)(0) = 1$, $(\det \circ \exp)(\mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}_+^*$. \square

Proposition 33.18. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(\exp(A)) = e^{\text{tr } A}.$$

Démonstration. Dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable. Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{C})$ t.q. $A = PTP^{-1}$. Montrer alors :

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = e^{\text{tr } T} = e^{\text{tr } A}.$$

\square

Proposition 33.19. $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f . On note f_F l'induit de f sur F . Alors F est stable par $\exp(f)$ et :

$$\forall x \in F, \exp_{\mathcal{L}(E)}(f) \cdot x = \exp_{\mathcal{L}(F)}(f_F) \cdot x.$$

Proposition 33.20. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \exp({}^t A) = {}^t(\exp(A))$.

IV Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

IV.1 Rappels sur la dérivée

Proposition 33.21. E, F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, $\Lambda \in \mathcal{L}(E, F)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en t_0 , alors $\Lambda \circ f$ est dérivable en t_0 , et :

$$(\Lambda \circ f)'(t_0) = \Lambda(f'(t_0)).$$

Proposition 33.22. E, F, G trois \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, $g : \mathbb{R} \rightarrow F$, $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $t_0 \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en t_0 , alors la fonction $p : t \in \mathbb{R} \mapsto B(f(t), g(t)) \in G$ est dérivable en t_0 , et :

$$p'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

IV.2 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Notation 33.23. Dans la suite du chapitre, $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Vocabulaire 33.24 (Système différentiel linéaire homogène à coefficients constants). $f \in \mathcal{L}(E)$. On note \mathcal{E}_f l'équation $x' = f \circ x$, d'inconnue $x \in E^{\mathbb{R}}$ dérivable. On note :

$$\mathcal{S}_f = \{x \in E^{\mathbb{R}} \text{ dérivable, } \forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = f(x(t))\}.$$

Proposition 33.25. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors \mathcal{S}_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$.

Vocabulaire 33.26 (Problème de Cauchy). $f \in \mathcal{L}(E)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. On appelle problème de Cauchy le système :

$$\mathcal{C}_{f,t_0,x_0} : \begin{cases} x' = f \circ x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

d'inconnue $x \in E^{\mathbb{R}}$ dérivable.

Théorème 33.27. $f \in \mathcal{L}(E)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy \mathcal{C}_{f,t_0,x_0} admet une unique solution donnée par :

$$x : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow E \\ t \longmapsto \exp((t - t_0)f) \cdot x_0 \end{cases}.$$

Proposition 33.28. $f \in \mathcal{L}(E)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{S}_f \longrightarrow E \\ x \longmapsto x(t_0) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier :

$$\mathcal{S}_f \simeq E.$$

Proposition 33.29. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy \mathcal{C}_{A,t_0,X_0} (en identifiant $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à \mathbb{K}^n et $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$) admet une unique solution donnée par :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto \exp((t - t_0)A) X_0 \end{cases}.$$

Proposition 33.30. $(A, R) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $A = PRP^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\mathcal{S}_A = P\mathcal{S}_R.$$

IV.3 Systèmes dynamiques

Proposition 33.31. *On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :*

$$(i) \quad \forall x \in \mathcal{S}_f, x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(f), \Re(\lambda) < 0.$$

Si ces propriétés sont vérifiées, alors pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E :

$$\forall x \in \mathcal{S}_f, \forall r \in \left] 0, -\max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \Re(\lambda) \right[, \|x(t)\| = o_{+\infty}(e^{-rt}). \quad (*)$$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$, soit $u \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$. On pose :

$$x : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow E \\ t \longmapsto e^{t\lambda} u \end{cases}.$$

Alors $x \in \mathcal{S}_f$. Donc $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi $e^{t\Re(\lambda)} = |e^{t\lambda}| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc $\Re(\lambda) < 0$. (ii) \Rightarrow (i) On note $R = -\max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \Re(\lambda) > 0$. On pose F_1, \dots, F_s les sous-espaces caractéristiques de f . Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on munit F_i d'une norme $\|\cdot\|_i$, on note f_i l'induit de f sur F_i et on pose $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\nu_i \in \mathcal{L}(F_i)$ nilpotent t.q. $f_i = \lambda_i \text{id} + \nu_i$. On définit de plus $\|\cdot\|_\infty$ sur E par :

$$\forall (x_1, \dots, x_s) \in F_1 \times \dots \times F_s, \left\| \sum_{i=1}^s x_i \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq s} \|x_i\|_i.$$

Soit alors $x \in \mathcal{S}_f$. En notant $x_0 = x(0)$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \exp(tf) \cdot x_0.$$

On pose $(x_1, \dots, x_s) \in F_1 \times \dots \times F_s$ t.q. $x_0 = \sum_{i=1}^s x_i$. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \|\exp(tf_i) \cdot x_i\|_i &= \|\exp(t\lambda_i \text{id} + t\nu_i) \cdot x_i\|_i = |e^{t\lambda_i}| \cdot \|\exp(t\nu_i) \cdot x_i\|_i \\ &= e^{t\Re(\lambda_i)} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{t^k \nu_i^k(x_i)}{k!} \right\|_i \leq e^{-Rt} \sum_{k=0}^n t^k \frac{\|\nu_i^k(x_i)\|_i}{k!} \\ &= \mathcal{O}_{+\infty}(e^{-Rt} t^n). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|x(t)\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^s \exp(tf_i) \cdot x_i \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq s} \|\exp(tf_i) \cdot x_i\|_i = \mathcal{O}_{+\infty}(e^{-Rt} t^n).$$

Donc $\forall r \in]0, R[$, $\|x(t)\|_\infty = o_{+\infty}(e^{-rt})$ (on obtient $(*)$ par équivalence des normes). \square

Chapitre 34

Intégrales sur un Intervalle Quelconque

Notation 34.1. Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Intégrales convergentes

Définition 34.2 (Intégrale impropre). $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^\omega f$ converge lorsque $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite dans \mathbb{K} quand $x \rightarrow \omega$. On pose alors :

$$\int_a^\omega f = \lim_{\substack{x \rightarrow \omega \\ x \in [a, \omega[}} \int_a^x f.$$

Proposition 34.3. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. On pose :

$$\mathfrak{E}([a, \omega[, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{K}), \int_a^\omega f \text{ converge} \right\}.$$

Alors :

- (i) $\mathfrak{E}([a, \omega[, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{K})$.
- (ii) L'application $\int_a^\omega : \mathfrak{E}([a, \omega[, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire positive.

Proposition 34.4 (Principe de localisation). $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$, $b \in [a, \omega[$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{K})$. Alors $\int_a^\omega f$ converge ssi $\int_b^\omega f$ converge. Si tel est le cas, on a :

$$\int_a^\omega f = \int_a^b f + \int_b^\omega f.$$

Notation 34.5. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{K})$. Si $\int_a^\omega f$ converge, on définit :

$$\int_\omega^a f = - \int_a^\omega f.$$

Proposition 34.6. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $f \in \mathcal{C}^0([a, \omega[, \mathbb{R}_+)$. Si $\int_a^\omega f = 0$, alors $f = 0$.

Définition 34.7 (Intégrale doublement impropre). $(u, v) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $u \neq v$, $a \in]u, v[$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(]u, v[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale doublement impropre $\int_u^v f$ converge lorsque les intégrales impropres $\int_u^a f$ et $\int_a^v f$ convergent. Dans ce cas, on définit :

$$\int_u^v f = \int_u^a f + \int_a^v f.$$

Exemple 34.8. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} t^\alpha dt$ diverge.

Définition 34.9 (Intégrale sur un intervalle quelconque). I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. On dit que $\int_I f$ converge lorsque I est un segment ou l'intégrale impropre correspondant à $\int_I f$ converge.

Proposition 34.10. I intervalle non trivial de \mathbb{R} . On pose :

$$\mathfrak{E}(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K}), \int_I f \text{ converge} \right\}.$$

Alors :

- (i) $\mathfrak{E}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$.
- (ii) L'application $\int_I : \mathfrak{E}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire positive.

II Intégrales de fonctions positives

Proposition 34.11. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{R}_+)$. S'équivalent :

- (i) $\int_a^\omega f$ converge.
- (ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, \omega[, \int_a^x f \leq M$.

Remarque 34.12. En vertu du principe de localisation, la proposition 34.11 reste vraie en supposant seulement que $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{R})$ et $f \geq 0$ au voisinage de ω .

Proposition 34.13. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $(f, g) \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{R})^2$. On suppose que :

(i) $\exists b \in [a, \omega[, f|_{[b, \omega[} \geq 0$ et $g|_{[b, \omega[} \geq 0$.

(ii) $f(x) = \mathcal{O}_{\omega^-}(g(x))$.

Alors $\int_a^\omega g$ converge $\implies \int_a^\omega f$ converge.

Corollaire 34.14. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $(f, g) \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{R})^2$. On suppose que :

(i) $\exists b \in [a, \omega[, f|_{[b, \omega[} \geq 0$ et $g|_{[b, \omega[} \geq 0$.

(ii) $f(x) \underset{\omega^-}{\sim} g(x)$.

Alors $\int_a^\omega f$ et $\int_a^\omega g$ sont de même nature.

Notation 34.15. $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{R}_+)$. Comme la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ croît, il existe $L \in \overline{\mathbb{R}}$ t.q. $\int_a^x f \xrightarrow{x \rightarrow \omega^-} L$. On notera $\int_a^\omega f = L$.

Proposition 34.16 (Intégrales de Bertrand). $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \text{ converge } \iff (\alpha, \beta) > (1, 1).$$

Définition 34.17 (Fonction gamma). On définit :

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \in \mathbb{R}.$$

Proposition 34.18.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

(iii) Γ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

(iv) $\Gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

III Intégrales absolument convergentes

Définition 34.19 (Intégrale absolument convergente). I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. On dit que $\int_I f$ est absolument convergente lorsque $\int_I |f|$ converge.

Proposition 34.20. I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I f$ converge absolument, alors $\int_I f$ converge.

Démonstration. On se place dans le cas où $I = [a, \omega]$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.
Il suffit de prouver que :

$$\forall u \in [a, \omega]^{\mathbb{N}}, \left(u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega \right) \Rightarrow \left(\int_a^{u_n} f \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Il suffit donc de prouver que :

$$\forall u \in [a, \omega]^{\mathbb{N}}, \left[\left(u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega \right) \text{ et } u \nearrow \right] \Rightarrow \left(\int_a^{u_n} f \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Soit donc $u \in [a, \omega]^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$ et $u \nearrow$. On peut supposer $u_0 = a$, et on a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^{u_n} f = \sum_{k=1}^n \int_{u_{k-1}}^{u_k} f$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \left| \int_{u_{k-1}}^{u_k} f \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{u_{k-1}}^{u_k} |f| \leq \int_a^{\omega} |f|.$$

Donc $\sum \int_{u_{n-1}}^{u_n} f$ converge absolument donc converge, d'où $(\int_a^{u_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. \square

Vocabulaire 34.21 (Intégrale semi-convergente). *I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I f$ est convergente mais pas absolument convergente, on dit que $\int_I f$ est semi-convergente.*

Proposition 34.22. *I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. S'équivalent :*

- (i) $\int_I f$ converge absolument.
- (ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (a, b) \in I^2, \int_a^b |f| \leq M$.

IV Intégration des relations de Landau

Proposition 34.23. $a \in \mathbb{R}, \omega \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a\}$. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{K}), g \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, \omega[, \mathbb{R})$.
On suppose que $g \geq 0$ au voisinage de ω et $f(x) = o_{\omega-}(g(x))$.

- (i) Si $\int_a^{\omega} g$ converge, alors $\int_a^{\omega} f$ converge et :

$$\int_x^{\omega} f = o_{\omega-} \left(\int_x^{\omega} g \right).$$

- (ii) Si $\int_a^{\omega} g$ diverge, alors :

$$\int_a^x f = o_{\omega-} \left(\int_a^x g \right).$$

Remarque 34.24. La proposition 34.23 reste valable en remplaçant o par \mathcal{O} ou \sim .

Application 34.25.

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Démonstration. On pose $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^2} \in \mathbb{R}$. f est \mathcal{C}^0 et $f(t) = \mathcal{O}_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc $\int_0^{+\infty} f$ converge. Et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt &= \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} \right) d(e^{-t^2}) \\ &= \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt. \end{aligned}$$

Or $\frac{e^{-x^2}}{2x} = o_{+\infty}(e^{-x^2})$ et $e^{-t^2} \geq 0$ donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)$, d'où le résultat. \square

V Espace des fonctions intégrables

Définition 34.26 (Fonction intégrable). I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On dit que f est intégrable lorsque $\int_I f$ converge absolument.

Définition 34.27. I intervalle non trivial de \mathbb{R} . On définit :

- (i) $\mathfrak{E}(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K}), \int_I f \text{ converge}\},$
- (ii) $\Lambda^1(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K}), f \text{ est intégrable}\},$
- (iii) $L^1(I, \mathbb{K}) = \Lambda^1(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}).$

Proposition 34.28. I intervalle non trivial de \mathbb{R} .

- (i) $L^1(I, \mathbb{K}) \subset \Lambda^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{E}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K}).$
- (ii) $\mathfrak{E}(I, \mathbb{K}), \Lambda^1(I, \mathbb{K})$ et $L^1(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K}).$
- (iii) L'application $\int_I : \mathfrak{E}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire positive.

Définition 34.29 (Norme de la convergence en moyenne). I intervalle non trivial de \mathbb{R} . On définit :

$$\|\cdot\|_1 : \left| \begin{array}{l} L^1(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \int_I |f| \end{array} \right.$$

$\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1(I, \mathbb{K})$, dite norme de la convergence en moyenne.

Exemple 34.30. I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $\omega \in I$. On définit :

$$\delta_\omega : \begin{cases} L^1(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto f(\omega) \end{cases}.$$

Alors δ_ω est linéaire, mais pas continue (au sens de $\|\cdot\|_1$).

Exemple 34.31. I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $f \in L^1(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\ell \in L^1(I, \mathbb{K})$.
Alors :

$$\left(f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell \right) \not\Rightarrow \left(f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} \ell \right).$$

Exemple 34.32. I intervalle non trivial de \mathbb{R} . $g \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$ bornée. On définit :

$$\Phi_g : \begin{cases} L^1(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \int_I fg \end{cases}.$$

Alors Φ_g est linéaire et continue (au sens de $\|\cdot\|_1$).

Vocabulaire 34.33 (Fonction à support compact). $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. On dit que f est à support compact lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq M \implies f(x) = 0.$$

Proposition 34.34. On note $\mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$. Alors $\mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (au sens de $\|\cdot\|_1$).

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| \geq n+1 \\ n+1-|x| & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(fg_n) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et que

$$\|f - fg_n\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

Application 34.35. $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\varphi_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto f\left(t + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{K}.$$

Alors $\|\varphi_n - f\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

VI Rappels sur les espaces préhilbertiens

Définition 34.36 (Produit scalaire). *E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.*

- (i) φ est symétrique,
- (ii) φ est bilinéaire,
- (iii) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) > 0$.

On dit alors que (E, φ) est un espace préhilbertien. Si de plus E est de dimension finie, on dit que (E, φ) est un espace euclidien.

Notation 34.37. *Si $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, on définit :*

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{cases}.$$

Proposition 34.38 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors :*

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Démonstration (Première méthode). Soit $(x, y) \in E^2$. On peut supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On considère alors :

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \|tx + y\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + \|y\|^2.$$

f est une fonction polynomiale de degré 2, et $f \geq 0$. Ainsi, en notant Δ le discriminant de f , on a $\Delta \leq 0$. Or :

$$\Delta = 4 \langle x | y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0.$$

□

Démonstration (Deuxième méthode). En se plaçant dans $\text{Vect}(x, y)$, on se ramène au cas où E est de dimension 2. □

Corollaire 34.39. *$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$ est une norme.*

Proposition 34.40. *$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors :*

- (i) $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont positivement liés.}$

VII Espace des fonctions à carré intégrable

Définition 34.41. *I* intervalle non trivial de \mathbb{R} . On définit :

- (i) $L^p(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), f^p \text{ est intégrable}\}$, pour $p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$.
- (ii) $L^\infty(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), f \text{ est bornée}\}$.

En particulier, $L^2(I, \mathbb{K})$ est l'espace des fonctions à carré intégrable.

Proposition 34.42. *I* intervalle non trivial de \mathbb{R} . Alors :

- (i) Pour $p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$, $L^p(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
- (ii) $L^\infty(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Proposition 34.43. *I* intervalle non trivial de \mathbb{R} . Si *I* est borné, alors :

$$L^\infty(I, \mathbb{K}) \subset L^2(I, \mathbb{K}) \subset L^1(I, \mathbb{K}).$$

Notation 34.44. *I* intervalle non trivial de \mathbb{R} . On munit $L^2(I, \mathbb{R})$ d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in L^2(I, \mathbb{R})^2, \langle f | g \rangle = \int_I fg.$$

Définition 34.45 (Norme de la convergence en moyenne quadratique). *I* intervalle non trivial de \mathbb{R} . On définit :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} L^2(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \int_I |f|^2 = \sqrt{\langle f | f \rangle} \end{cases}.$$

$\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L^2(I, \mathbb{R})$, dite norme de la convergence en moyenne quadratique.

Proposition 34.46 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et généralisations). *I* intervalle non trivial de \mathbb{R} . Alors :

- (i) $\forall (f, g) \in L^2(I, \mathbb{R})^2, \left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I f^2} \cdot \sqrt{\int_I g^2}$.
- (ii) $\forall (f, g) \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{R})^2, f^2, g^2 \text{ intégrables} \implies \left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I f^2} \cdot \sqrt{\int_I g^2}$.
- (iii) Soit $w \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{R})$. On pose :

$$\mathfrak{W}(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}), wf^2 \text{ est intégrable}\}.$$

Alors $\mathfrak{W}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et :

$$\forall (f, g) \in \mathfrak{W}(I, \mathbb{R})^2, \left| \int_I wfg \right| \leq \sqrt{\int_I wf^2} \cdot \sqrt{\int_I wg^2}.$$

Chapitre 35

Intégrales : Suites, Séries et Paramètres

Notation 35.1. Dans ce chapitre, I est un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Théorème de convergence dominée

Proposition 35.2. $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} \ell$ sur tout compact,
- (ii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leq M(t)$.

Alors :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$ et $\ell \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$,
- (ii) $\int_I f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_I \ell$,
- (iii) $\int_I |f_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Démonstration. (i) Cela vient du fait que M est intégrable et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq M(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in I, |\ell(t)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(t)| \leq M(t).$$

Cette démonstration de (i) reste valable en supposant seulement $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Soit S un segment inclus dans I t.q. $\int_I M - \varepsilon \leq \int_S M \leq \int_I M$.

On note $\delta(S) = \sup S - \inf S$. On a $\|f_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$; soit donc $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $\|f_n - \ell\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{1+\delta(S)}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \left| \int_I f_n - \int_I \ell \right| &\leq \int_{I \setminus S} |f_n| + \int_{I \setminus S} |\ell| + \int_S |f_n - \ell| \\ &\leq 2 \int_{I \setminus S} M + \delta(S) \|f_n - \ell\|_\infty \\ &\leq 2\varepsilon + \delta(S) \cdot \frac{\varepsilon}{1+\delta(S)} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Il suffit d'appliquer ce qui précède en remplaçant f_n par $|f_n - \ell|$, ℓ par 0 et M par $2M$. \square

Théorème 35.3 (Théorème de convergence dominée). $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

(i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell$,

(ii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leq M(t)$.

L'hypothèse (ii) est appelée hypothèse de domination. Alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$ et $\ell \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$,

(ii) $\int_I f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_I \ell$,

(iii) $\int_I |f_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exemple 35.4. Le théorème est faux sans l'hypothèse de domination : on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ affine par morceaux de subdivision adaptée $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1)$ t.q. $f_n(0) = f_n(\frac{2}{n}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{n}) = n$. Alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} 0$ mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n = 1$.

Application 35.5.

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n : t \in [0, 1[\mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$, et $\varphi : t \in [0, 1[\mapsto \frac{1}{1+t}$. On a :

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \int_{[0,1]} \varphi.$$

Or $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \varphi$; φ et chaque S_n sont \mathcal{C}^0 , et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, 1[$, $|S_n(t)| \leq 1$ (d'après le critère spécifique des séries alternées, c.f. proposition 3.14). Comme

1 est intégrable sur $[0, 1[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\ln 2 = \int_{[0,1[} \varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1[} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

□

Application 35.6. La fonction gamma est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt. \quad (i)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad (ii)$$

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbf{1}_{[0,n]}(t) \cdot t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1} e^{-t} \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \varphi$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq \varphi$. Avec le théorème de convergence dominée, on a :

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $I_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$. Montrer d'abord que $\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x I_n(x)$. En intégrant par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1),$$

et en déduire le résultat. □

II Théorème d'interversion sommes-intégrales

Théorème 35.7 (Théorème d'interversion sommes-intégrales). $u \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $S \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- (i) $\forall t \in I, S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$,
- (iii) $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Alors :

- (i) $S \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$,

- (ii) $\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n,$
- (iii) $\int_I |S| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n|.$

Application 35.8. On définit :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) \, dt.$$

Alors f est développable en série entière en 0 sur \mathbb{R} tout entier.

Démonstration. Justifier d'abord la définition de f . On fixe ensuite $x \in \mathbb{R}$ et on définit $u_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2}$. On a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt.$$

Chaque u_n est intégrable, et la fonction $S : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ est continue. De plus :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)| \, dt \right) &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^N \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2} \right) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) \, dt. \end{aligned}$$

Donc $\sum \left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)| \, dt \right)$ converge. D'après le théorème d'interversion sommes-intégrales, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t) \, dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} \, dt \right) x^{2n}. \end{aligned}$$

□

Théorème 35.9 (Théorème de convergence monotone). $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{R}_+)$. On suppose que :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+),$
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} \geq f_n,$
- (iii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell.$

Alors, au sens de $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \ell.$$

Démonstration. La suite $(\int_I f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît donc $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrons que $\mu = \int_I \ell$. (\leq) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I f_n \leq \int_I \ell$ donc $\mu \leq \int_I \ell$. (\geq) Soit $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$. On a $f_{n|_{[a,b]}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \ell_{|[a,b]}$, les $f_{n|_{[a,b]}}$ sont \mathcal{C}_{pm}^0 et ℓ est \mathcal{C}_{pm}^0 . De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_{n|_{[a,b]}} \leq \ell_{|[a,b]}$, et $\ell_{|[a,b]}$ est intégrable. Par convergence dominée :

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \ell.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f_n \leq \mu$, donc $\int_a^b \ell \leq \mu$. Ainsi :

$$\int_I \ell = \sup_{\substack{(a,b) \in I^2 \\ a < b}} \int_a^b \ell \leq \mu.$$

□

III Continuité d'une intégrale à paramètre

Notation 35.10. Dans la suite, (Λ, d) est un espace métrique.

Notation 35.11. $K : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$.

- (i) Pour $\lambda \in \Lambda$, on définit $K(\lambda, \cdot) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto K(\lambda, t) \end{cases}$.
- (ii) Pour $t \in I$, on définit $K(\cdot, t) : \begin{cases} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto K(\lambda, t) \end{cases}$.

Proposition 35.12. $K : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose :

- (i) $\forall \lambda \in \Lambda$, $K(\lambda, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{K})$,
- (ii) $\forall t \in I$, $K(\cdot, t) \in \mathcal{C}^0(\Lambda, \mathbb{K})$,
- (iii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall (\lambda, t) \in \Lambda \times I$, $|K(\lambda, t)| \leq M(t)$.

On définit alors à bon droit :

$$\Phi : \begin{cases} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \int_I K(\lambda, t) dt \end{cases}.$$

Alors :

$$\Phi \in \mathcal{C}^0(\Lambda, \mathbb{K}).$$

Démonstration. Justifier d'abord $\forall \lambda \in \Lambda, K(\lambda, \cdot) \in \Lambda^1(I, \mathbb{K})$. Montrons maintenant la continuité de Φ . Soit $\lambda_0 \in \Lambda, \mu \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ t.q. $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda_0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n = K(\mu_n, \cdot)$; soit de plus $w = K(\lambda_0, \cdot)$. Alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} w$, les v_n et w sont \mathcal{C}_{pm}^0 et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |v_n(t)| \leq M(t)$. Ainsi, par convergence dominée :

$$\Phi(\mu_n) = \int_I v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_I w = \Phi(\lambda_0).$$

□

Application 35.13. $\Gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $0 < a < b < +\infty$. On va montrer que $\Gamma|_{[a,b]}$ est continue. Pour cela, on définit :

$$\gamma : \begin{cases} [a, b] \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, t) \longmapsto t^{x-1} e^{-t} \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, |\gamma(x, t)| \leq e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1}).$$

En déduire la continuité de $\Gamma|_{[a,b]}$ à l'aide de la proposition 35.12. Ainsi, la restriction de Γ à tout segment est continue, donc Γ est continue. □

IV Dérivation d'une intégrale à paramètre

Notation 35.14. Dans la suite, Λ est un intervalle non trivial de \mathbb{R} .

Notation 35.15. $K : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$. Pour $(\lambda, t) \in \Lambda \times I$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $K(\cdot, t)$ est p fois dérivable en λ , on pose :

$$\frac{\partial^p K}{\partial \lambda^p}(\lambda, t) = (K(\cdot, t))^{(p)}(\lambda).$$

Proposition 35.16. $K : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose :

- (i) $\forall \lambda \in \Lambda$, l'intégrale $\int_I K(\lambda, t) dt$ est convergente,
- (ii) L'application $\frac{\partial K}{\partial \lambda} : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$ est bien définie et continue,
- (iii) $\exists M \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+), \forall (\lambda, t) \in \Lambda \times I, \left| \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda, t) \right| \leq M(t)$.

On définit alors à bon droit :

$$\Phi : \begin{cases} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \int_I K(\lambda, t) dt \end{cases}.$$

Alors Φ est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \Phi'(\lambda) = \int_I \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda, t) dt.$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. On définit :

$$\psi : \begin{cases} \Lambda \times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda, t) \longmapsto \begin{cases} \frac{K(\lambda, t) - K(\lambda_0, t)}{\lambda - \lambda_0} & \text{si } \lambda \neq \lambda_0 \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda_0, t) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \end{cases} \end{cases}.$$

On définit de plus $\Psi : \begin{cases} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \int_I \psi(\lambda, t) dt \end{cases}$. Alors, pour $\lambda \in \Lambda$, $\psi(\lambda, \cdot)$ est \mathcal{C}^0 , pour $t \in I$, $\psi(\cdot, t)$ est \mathcal{C}^0 . Soit $(\lambda, t) \in \Lambda \times I$. Si $\lambda \neq \lambda_0$, on a :

$$|\psi(\lambda, t)| = \frac{\left| \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\mu, t) d\mu \right|}{|\lambda - \lambda_0|} \leq M(t).$$

Et $|\psi(\lambda_0, t)| = \left| \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda_0, t) \right| \leq M(t)$. Ainsi, d'après la proposition 35.12, Ψ est \mathcal{C}^0 . En particulier :

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \lambda \neq \lambda_0}} \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \lambda \neq \lambda_0}} \Psi(\lambda) = \Psi(\lambda_0) = \int_I \frac{\partial K}{\partial \lambda}(\lambda_0, t) dt.$$

□

Proposition 35.17. $K : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N}$. On suppose :

- (i) $\forall \lambda \in \Lambda$, l'intégrale $\int_I K(\lambda, t) dt$ est convergente,
- (ii) $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\frac{\partial^j K}{\partial \lambda^j} : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{K}$ est bien définie et continue,
- (iii) $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\exists M_j \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}_+)$, $\forall (\lambda, t) \in \Lambda \times I$, $\left| \frac{\partial^j K}{\partial \lambda^j}(\lambda, t) \right| \leq M_j(t)$.

On définit alors à bon droit :

$$\Phi : \begin{cases} \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \longmapsto \int_I K(\lambda, t) dt \end{cases}.$$

Alors Φ est de classe \mathcal{C}^p et :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall \lambda \in \Lambda, \Phi^{(j)}(\lambda) = \int_I \frac{\partial^j K}{\partial \lambda^j}(\lambda, t) dt.$$

Application 35.18. $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Chapitre 36

Équations Différentielles Linéaires

Notation 36.1. Dans ce chapitre, I est un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $(E, \|\cdot\|_E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . De plus, $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$.

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

I.1 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy

Vocabulaire 36.2 (Problème de Cauchy). $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. On appelle problème de Cauchy le système :

$$\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0} : \begin{cases} Y' = A(t) \cdot Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases},$$

d'inconnue $Y \in E^I$ dérivable. Ainsi, $Y \in E^I$ est solution de $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$ ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Y est dérivable,
- (ii) $\forall t \in I, Y'(t) = A(t) \cdot Y(t) + B(t)$,
- (iii) $Y(t_0) = Y_0$.

Lemme 36.3. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. Soit $Y \in E^I$. S'équivalent :

- (i) Y est solution de $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$.
 (ii) $Y \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et :

$$\forall t \in I, Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t (A(u) \cdot Y(u) + B(u)) \, du.$$

Lemme 36.4. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$ admet au moins une solution.

Démonstration. On pose :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^0(I, E) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, E) \\ Y \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto Y_0 + \int_{t_0}^t (A(u) \cdot Y(u) + B(u)) \, du \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Il suffit de montrer que Φ admet un point fixe. On définit une suite $Z \in \mathcal{C}^0(I, E)^{\mathbb{N}}$ par :

$$Z_0 : \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto Y_0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \Phi(Z_n).$$

Première étape : $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Soit en effet K un compact de I . On pose $a = \min(K \cup \{t_0\})$ et $b = \max(K \cup \{t_0\})$. Comme $K \subset [a, b]$, il suffit de montrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$. On munit $\mathcal{C}^0([a, b], E)$ de $\|\cdot\|_{[a,b]}^\infty$. On note $M = \sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\hat{Z}_n = Z_n|_{[a,b]}$. Puis on définit $U \in \mathcal{C}^0([a, b], E)^{\mathbb{N}}$ par $U_0 = \hat{Z}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \hat{Z}_n - \hat{Z}_{n-1}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \hat{Z}_n = \sum_{k=0}^n U_k.$$

On cherche à établir la convergence normale de $\sum U_n$. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I, \|U_n(t)\|_E \leq \|U_1\|_{[a,b]}^\infty M^{n-1} \cdot \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|U_n\|_{[a,b]}^\infty \leq \|U_1\|_{[a,b]}^\infty M^{n-1} \cdot \frac{|b-a|^{n-1}}{(n-1)!}$. Donc $\sum U_n$ converge normalement donc uniformément. Donc $(\hat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément. Ainsi, en notant $Y : t \in I \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n(t) \in E$, on a :

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} Y \text{ sur tout compact.}$$

Deuxième étape : Y est solution de $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$. En effet, $Y \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Reste à montrer que $\Phi(Y) = Y$. Soit $t \in I$. On a :

$$\begin{aligned} \|(\Phi(Y))(t) - (\Phi(Z_n))(t)\|_E &= \left\| \int_{t_0}^t A(u) \cdot (Y(u) - Z_n(u)) \, du \right\|_E \\ &\leq |t - t_0| \cdot \left(\sup_{u \in [t_0, t]} \|A(u)\| \right) \cdot \|Y - Z_n\|_{[t_0, t]}^\infty \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall t \in I, (\Phi(Y))(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\Phi(Z_n))(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Z_{n+1}(t) = Y(t).$$

Donc $Y = \Phi(Y)$ et Y est solution de $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$. □

Proposition 36.5. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$ admet une unique solution.

Démonstration. *Existence.* Voir lemme 36.4. *Unicité.* Soit Y, Z deux solutions de $\mathcal{C}_{A,B,t_0,Y_0}$. On pose $D = Y - Z$. On a :

$$\forall t \in I, D(t) = \int_{t_0}^t A(u) \cdot D(u) \, du.$$

Soit $t \in I$. On note $M = \sup_{u \in [t_0, t]} \|A(u)\|$. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [t_0, t], \|D(u)\|_E \leq \|D\|_{[t_0, t]}^\infty M^n \cdot \frac{|u - t_0|^n}{n!}.$$

En déduire que $D = 0$. □

I.2 Autre point de vue : espace des solutions sans condition initiale

Notation 36.6. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On note $\mathcal{E}_{A,B}$ l'équation $Y' = A(t) \cdot Y + B(t)$, d'inconnue $Y \in E^I$ dérivable. On note $\mathcal{S}_{A,B}$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_{A,B}$.

Proposition 36.7. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$.

- (i) $\mathcal{S}_{A,0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
- (ii) $\mathcal{S}_{A,0} \simeq E$.
- (iii) $\mathcal{S}_{A,B}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_{A,0}$.

II Équations différentielles linéaires d'ordre n

Notation 36.8. $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))^n$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On note $\mathcal{E}_{A_0, \dots, A_{n-1}, B}$ l'équation :

$$Y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t) \cdot Y^{(k)} + B(t),$$

d'inconnue $Y \in E^I$ n fois dérivable. On note $\mathcal{S}_{A_0, \dots, A_{n-1}, B}$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_{A_0, \dots, A_{n-1}, B}$.

Théorème 36.9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire). $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))^n$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Alors :

$$\forall (t_0, Y_0, \dots, Y_{n-1}) \in I \times E^n, \exists ! Y \in \mathcal{S}_{A_0, \dots, A_{n-1}, B},$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Y^{(k)}(t_0) = Y_k.$$

Démonstration. On va se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre dans E^n . On définit :

$$\mathcal{A} : \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{L}(E^n) \\ t \longmapsto \left(\begin{array}{c} E^n \longrightarrow E^n \\ (Z_0, \dots, Z_{n-1}) \longmapsto \left(Z_1, \dots, Z_{n-1}, \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k(t) \cdot Z_k \right) \right) \end{array} \right) \end{array} \right\},$$

et $\mathcal{B} : \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow E^n \\ t \longmapsto (0, \dots, 0, B(t)) \end{array} \right\}$. On note \mathcal{R} l'ensemble des solutions de l'équation $Z' = \mathcal{A}(t) \cdot Z + \mathcal{B}(t)$ dans E^n . Alors l'application

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_{A_0, \dots, A_{n-1}, B} \longrightarrow \mathcal{R} \\ Y \longmapsto (Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) \end{array} \right\}$$

est une bijection, ce qui permet de conclure à l'aide de la proposition 36.5. \square

Remarque 36.10. Si $E = \mathbb{K}$, alors la fonction \mathcal{A} de la démonstration ci-dessus correspond à une matrice de Frobenius :

$$\forall t \in I, \forall Z \in \mathbb{K}^n, \mathcal{A}(t) \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{n-2}(t) & A_{n-1}(t) \end{pmatrix} Z.$$

III Résolution des équations d'ordre 1

Notation 36.11. Dans toute la suite, on notera $n = \dim E$. On munit de plus E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

III.1 Wronskien

Vocabulaire 36.12 (Système fondamental de solutions). $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. On appelle système fondamental de solutions de l'équation $\mathcal{E}_{A,0}$ toute base de $\mathcal{S}_{A,0}$.

Définition 36.13 (Wronskien). $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{S}_{A,0}^n$. On appelle wronskien de (Y_1, \dots, Y_n) la fonction :

$$w : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) \end{cases}.$$

Proposition 36.14. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{S}_{A,0}^n$. On note w le wronskien de (Y_1, \dots, Y_n) . S'équivalent :

- (i) (Y_1, \dots, Y_n) est un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{A,0}$.
- (ii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.
- (iii) $\exists t \in I, w(t) \neq 0$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que, pour tout $t \in I$, l'application $\psi_t : \begin{cases} \mathcal{S}_{A,0} \longrightarrow E \\ Y \longmapsto Y(t) \end{cases}$ est un isomorphisme. \square

Lemme 36.15. $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n) = \text{tr } f.$$

Proposition 36.16. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{S}_{A,0}^n$. On note w le wronskien de (Y_1, \dots, Y_n) . Alors w est dérivable et :

$$\forall t \in I, w'(t) = \text{tr } A(t) \cdot w(t).$$

III.2 Méthode de variation des constantes

Proposition 36.17. $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$. (Y_1, \dots, Y_n) un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{A,0}$. $Z \in \mathcal{C}^1(I, E)$. Alors il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^n$ t.q.

$$\forall t \in I, Z(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) Y_i(t).$$

Démonstration. *Existence.* Pour $t \in I$, $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de E , donc il existe $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $Z(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) Y_i(t)$. Reste à montrer que les fonctions $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (E^I)^n$ ainsi définies sont bien \mathcal{C}^1 . On pose $M : t \in I \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall t \in I, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Z(t)) = M(t) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Or $\forall t \in I$, $\det M(t) = w(t) \neq 0$, en notant w le wronskien de (Y_1, \dots, Y_n) . Donc :

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M(t)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Z(t)).$$

En déduire que les λ_i sont \mathcal{C}^1 (en utilisant $M(t)^{-1} = \frac{1}{\det M(t)} {}^t(\text{Com } M(t))$). *Unicité.* Pour tout $t \in I$, $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une base de E , donc le n -uplet $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ est défini de manière unique. \square

Méthode 36.18 (Variation des constantes). $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. (Y_1, \dots, Y_n) un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{A,0}$. La méthode de variation des constantes consiste à chercher les solutions de $\mathcal{E}_{A,B}$ sous la forme $Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^n$. En notant $M : t \in I \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$Z \in \mathcal{S}_{A,B} \iff \sum_{i=1}^n \lambda'_i Y_i = B \iff \forall t \in I, \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{pmatrix} = M(t)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(B(t)).$$

Cela permet de déterminer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ puis Z .

Remarque 36.19. $M \in \mathcal{L}(E)$, $B \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Alors on peut chercher une solution particulière de $\mathcal{E}_{M,B}$ sous la forme :

$$Z : t \in I \mapsto \exp(tM) \cdot \Lambda(t),$$

avec $\Lambda \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Proposition 36.20 (Principe de superposition des solutions). $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $(B_1, \dots, B_s) \in \mathcal{C}^0(I, E)^s$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{K}^s$. On note $B = \sum_{i=1}^s \lambda_i B_i$. Alors :

$$\forall (Y_1, \dots, Y_s) \in \mathcal{S}_{A,B_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{A,B_s}, \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i Y_i \right) \in \mathcal{S}_{A,B}.$$

IV Résolution des équations scalaires d'ordre 2

IV.1 Généralités

Remarque 36.21. $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^3$. On étudie l'équation :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t). \quad (\mathcal{E}_{-b, -a, c})$$

On lui associe l'équation du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Proposition 36.22. $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^3$.

- (i) $\mathcal{S}_{-b, -a, 0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
- (ii) $\mathcal{S}_{-b, -a, 0} \simeq \mathbb{K}^2$.
- (iii) $\mathcal{S}_{-b, -a, c}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_{-b, -a, 0}$.

Proposition 36.23. $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. Pour $t \in I$, on pose :

$$L_t : \begin{cases} \mathcal{S}_{-b, -a, 0} \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad M_t : \begin{cases} \mathcal{S}_{-b, -a, 0} \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto y'(t) \end{cases}.$$

Alors (L_t, M_t) est une base de $\mathcal{L}(\mathcal{S}_{-b, -a, 0}, \mathbb{K})$.

IV.2 Wronskien

Vocabulaire 36.24 (Système fondamental de solutions). $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. On appelle système fondamental de solutions de l'équation $\mathcal{E}_{-b, -a, 0}$ toute base de $\mathcal{S}_{-b, -a, 0}$.

Définition 36.25 (Wronskien). $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. $(y, z) \in \mathcal{S}_{-b, -a, 0}^2$. On appelle wronskien de (y, z) la fonction :

$$w : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Proposition 36.26. $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. $(y, z) \in \mathcal{S}_{-b, -a, 0}^2$. On note w le wronskien de (y, z) . S'équivalent :

- (i) (y, z) est un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{-b, -a, 0}$.

(ii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

(iii) $\exists t \in I, w(t) \neq 0$.

Proposition 36.27. $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. $(y, z) \in \mathcal{S}_{-b, -a, 0}^2$. On note w le wronskien de (y, z) . Alors w est dérivable et :

$$\forall t \in I, w'(t) + a(t) \cdot w(t) = 0.$$

IV.3 Méthode de variation des constantes

Méthode 36.28 (Variation des constantes). $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^3$. (φ, ψ) un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{-b, -a, 0}$. La méthode de variation des constantes consiste à chercher les solutions ζ de $\mathcal{E}_{-b, -a, c}$ t.q.

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \zeta'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix},$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^2$. Cela est possible d'après la proposition 36.17, car $\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right)$ est un système fondamental de solutions de l'équation $\mathcal{E}_{A, 0}$,

où $A : t \in I \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$. Il vient :

$$(i) \quad \zeta = \lambda\varphi + \mu\psi,$$

$$(ii) \quad \zeta' = \lambda\varphi' + \mu\psi'.$$

En calculant ζ' à l'aide de (i) puis en comparant avec (ii), il vient :

$$(iii) \quad 0 = \lambda'\varphi + \mu'\psi.$$

En supposant que $c = \zeta'' + a\zeta' + b\zeta$, et en exprimant ζ, ζ' et ζ'' en fonction de φ et ψ , on obtient :

$$(iv) \quad c = \lambda'\varphi' + \mu'\psi'.$$

D'après (iii) et (iv), on a :

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Donc, en notant w le wronskien de (φ, ψ) :

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(t)} \begin{pmatrix} \psi'(t) & -\psi(t) \\ -\varphi'(t) & \varphi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\psi(t)c(t)}{w(t)} \\ \frac{\varphi(t)c(t)}{w(t)} \end{pmatrix}.$$

Cela permet de déterminer λ et μ puis ζ .

V Résolution des équations scalaires à coefficients constants

Remarque 36.29. $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On étudie l'équation :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b(t). \quad (\mathcal{E}_{-a_0, \dots, -a_{n-1}, b})$$

On lui associe l'équation du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Proposition 36.30. $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. On introduit :

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X].$$

On suppose que P est scindé :

$$P = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\omega_i},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts, et $(\omega_1, \dots, \omega_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$. Alors

$$(t \in I \mapsto t^j e^{\lambda_i t})_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 0 \leq j < \omega_i}}$$

est un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{-a_0, \dots, -a_{n-1}, 0}$ (i.e. une base de $\mathcal{S}_{-a_0, \dots, -a_{n-1}, 0}$).

Exemple 36.31. $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall t \in I, b(t) = t^m e^{\lambda t}.$$

Alors l'équation $\mathcal{E}_{-a_0, \dots, -a_{n-1}, b}$ admet une solution particulière de la forme :

$$y : t \in I \mapsto Q(t) e^{\lambda t},$$

avec $Q \in \mathbb{K}_{m+\omega}[X]$, où ω est l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

VI Inégalité de Grönwall et applications

Proposition 36.32 (Inégalité de Grönwall). $T \in \mathbb{R}_+^*$, $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $u \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}_+)$. On suppose que :

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq A + B \int_0^t u(\tau) \, d\tau.$$

Alors :

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq Ae^{Bt}.$$

Démonstration. On considère :

$$\Phi : \begin{cases} [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto e^{-Bt} \left(A + B \int_0^t u(\tau) \, d\tau \right) \end{cases}.$$

Montrer que $\forall t \in [0, T], \Phi'(t) \leq 0$. Ainsi, $\Phi \searrow$. Donc :

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq A + B \int_0^t u(\tau) \, d\tau = \Phi(t)e^{Bt} \leq \Phi(0)e^{Bt} = Ae^{Bt}.$$

□

Corollaire 36.33. $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(E))$, $Y_0 \in E$. Soit Y une solution du problème de Cauchy suivant :

$$\mathcal{C}_{A,0,0,Y_0} : \begin{cases} Y' = A(t) \cdot Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}.$$

On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|A(t)\| \leq C$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \|Y(t)\|_E \leq \|Y_0\|_E e^{Ct}.$$

Proposition 36.34. $T \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{L}(E))$, $B \in \mathcal{C}^0([0, T], E)$. Pour $U \in E$, on note Y_U l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{C}_{A,B,0,U}$. On pose :

$$F : \begin{cases} E \times [0, T] \longrightarrow E \\ (U, t) \longmapsto Y_U(t) \end{cases}.$$

Alors :

- (i) $\forall U \in E, F(U, \cdot) \in \mathcal{C}^0([0, T], E)$.
- (ii) $\forall t \in [0, T], F(\cdot, t) \in \mathcal{C}^0(E, E)$.
- (iii) $F \in \mathcal{C}^0(E \times [0, T], E)$.

Démonstration. (i) Clair. (ii) On note $C = \sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$. On fixe $t \in [0, T]$. D'après le corollaire 36.33, on a :

$$\forall (U, V) \in E^2, \|F(U, t) - F(V, t)\|_E = \|(Y_U - Y_V)(t)\|_E \leq \|U - V\|_E e^{Ct}.$$

Cela montre que $F(\cdot, t)$ est lipschitzienne donc continue. (iii) Soit $(U_0, t_0) \in E \times [0, T]$. Soit $(V, \tau) \in E^{\mathbb{N}} \times [0, T]^{\mathbb{N}}$ t.q. $(V_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (U_0, t_0)$. Alors :

$$\begin{aligned} \|F(V_n, \tau_n) - F(U_0, t_0)\|_E &\leq \|F(V_n, \tau_n) - F(U_0, \tau_n)\|_E \\ &\quad + \|F(U_0, \tau_n) - F(U_0, t_0)\|_E \\ &\leq \|V_n - U_0\|_E e^{C\tau_n} + \|F(U_0, \tau_n) - F(U_0, t_0)\|_E \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

□

VII Zéros des solutions d'une équation différentielle

Notation 36.35. Pour $f \in \mathbb{R}^I$, on notera $\mathcal{V}(f) = \{t \in I, f(t) = 0\}$.

Proposition 36.36. $(p, q) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_{-q, -p, 0} \setminus \{0\}$:

$$\forall t \in I, \varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0.$$

Alors :

- (i) Pour tout $(A, B) \in I^2$, $\mathcal{V}(\varphi) \cap [A, B]$ est fini.
- (ii) Si I est un segment, alors $\mathcal{V}(\varphi)$ est fini.
- (iii) $\forall \omega \in \mathcal{V}(\varphi)$, $\exists \eta > 0$, $] \omega - \eta, \omega + \eta[\cap \mathcal{V}(\varphi) = \{\omega\}$.
- (iv) Soit $a \in \mathcal{V}(\varphi)$. On suppose que $\mathcal{V}(\varphi) \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$. Alors il existe $b \in \mathcal{V}(\varphi) \cap]a, +\infty[$ t.q. $\mathcal{V}(\varphi) \cap]a, b[= \emptyset$.

Démonstration. (i) Supposons par l'absurde que $\mathcal{V}(\varphi) \cap [A, B]$ est infini. Soit alors $z \in (\mathcal{V}(\varphi) \cap [A, B])^{\mathbb{N}}$ une injection. Comme $\mathcal{V}(\varphi) \cap [A, B]$ est un compact, soit j une extractrice et $\omega \in \mathcal{V}(\varphi) \cap [A, B]$ t.q. $z_{j(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega$. On peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{j(n)} \neq \omega$. Alors :

$$\varphi'(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(z_{j(n)}) - \varphi(\omega)}{z_{j(n)} - \omega} = 0.$$

Donc $\varphi(\omega) = \varphi'(\omega) = 0$. Ainsi, φ a les mêmes conditions initiales en ω que la fonction nulle, et est solution de la même équation différentielle, donc $\varphi = 0$.

C'est absurde. (iii) Soit $\omega \in \mathcal{V}(\varphi)$. Comme $\varphi(\omega) = 0$ et $\varphi \neq 0$, on a $\varphi'(\omega) \neq 0$. Donc :

$$\varphi(x) \underset{\omega}{\sim} (x - \omega) \varphi'(\omega).$$

Or $x \mapsto (x - \omega) \varphi'(\omega)$ ne s'annule qu'en ω . D'où le résultat. \square

Proposition 36.37. $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_{-q,0,0} \setminus \{0\}$:

$$\forall t \in I, \varphi''(t) + q(t)\varphi(t) = 0.$$

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall t \in \mathbb{R}_+, q(t) \geq a$. Alors :

- (i) $\mathcal{V}(\varphi)$ est infini (et non majoré).
- (ii) Il existe une suite $\omega \in \mathcal{V}(\varphi)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante et surjective.
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \omega_{n+1} - \omega_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

Démonstration. (i) Supposons par l'absurde que $\mathcal{V}(\varphi)$ est majoré : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\mathcal{V}(\varphi) \cap [M, +\infty[= \emptyset$. Alors, selon le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi|_{[M, +\infty[}$ garde un signe constant : on peut supposer $\varphi|_{[M, +\infty[} > 0$. Alors :

$$\forall t \in [M, +\infty[, \varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \leq 0.$$

Donc φ est concave. S'il existait $t_0 \in [M, +\infty[$ t.q. $\varphi'(t_0) < 0$, alors on aurait $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) + (t - t_0) \varphi'(t_0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$, ce qui est absurde car $\varphi|_{[M, +\infty[} > 0$. Donc $\varphi'|_{[M, +\infty[} \geq 0$, d'où $\varphi|_{[M, +\infty[} \nearrow$. D'où $\forall t \in [M, +\infty[, \varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \leq -a\varphi(t)$. En intégrant, on obtient $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$: c'est absurde car $\varphi'|_{[M, +\infty[} \geq 0$. (ii) D'après la proposition 36.36, on définit à bon droit :

$$N : \begin{cases} \mathcal{V}(\varphi) \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ x \longmapsto |\mathcal{V}(\varphi) \cap [0, x]| \end{cases}.$$

Montrer que N est strictement croissante et surjective, puis poser $\omega = N^{-1}$. (iii) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose :

$$\psi : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sin(\sqrt{a}(t - \omega_n)).$$

On suppose par l'absurde que $\omega_{n+1} > \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}$. On peut alors supposer que $\varphi|_{[\omega_n, \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}]} > 0$. On définit un *trans-wronskien* :

$$w : t \in \left[\omega_n, \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}} \right] \longmapsto \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t).$$

On a :

$$\forall t \in \left[\omega_n, \omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}} \right], w'(t) = (q(t) - a)\psi(t)\varphi(t) \geq 0.$$

Ainsi, $w \nearrow$. Et on a $w(\omega_n) = 0$ et $w\left(\omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right) = -\sqrt{a}\varphi\left(\omega_n + \frac{\pi}{\sqrt{a}}\right) < 0$. C'est absurde. \square

Proposition 36.38. $(p, q) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2$. Soit (φ, ψ) un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_{-q, -p, 0}$. Alors :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{V}(\varphi)^2, a < b \implies \mathcal{V}(\psi) \cap]a, b[\neq \emptyset.$$

Démonstration. *Première étape.* Soit $(a, b) \in \mathcal{V}(\varphi)^2$, avec $a < b$. On a $\varphi|_{[a, b]} \neq 0$ (sinon on aurait $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, d'où $\varphi = 0$). Soit donc $\omega \in [a, b]$ t.q. $\varphi(\omega) \neq 0$. On pose $a_0 = \max(\mathcal{V}(\varphi) \cap [a, \omega])$ et $b_0 = \min(\mathcal{V}(\varphi) \cap [\omega, b])$. On a $a_0 < b_0$, $\varphi(a_0) = \varphi(b_0) = 0$ et $\forall x \in]a_0, b_0[, \varphi(x) \neq 0$. On peut supposer que $\varphi|_{]a_0, b_0[} > 0$. *Deuxième étape.* Comme $\varphi(a_0) = 0 \neq \varphi'(a_0)$, et $w(a_0) = \varphi(a_0)\psi'(a_0) - \varphi'(a_0)\psi(a_0) \neq 0$ (où w est le wronskien de (φ, ψ)), on a $\psi(a_0) \neq 0$. De même, $\psi(b_0) \neq 0$. *Troisième étape.* On a :

$$w(a_0) = -\varphi'(a_0)\psi(a_0) \quad \text{et} \quad w(b_0) = -\varphi'(b_0)\psi(b_0).$$

Or, comme $\varphi|_{]a_0, b_0[} > 0$, on montre aisément que $\varphi'(a_0) > 0$ et $\varphi'(b_0) < 0$. Et w ne s'annule pas sur $[a_0, b_0]$, donc garde un signe constant : $w(a_0)$ est du même signe que $w(b_0)$. Donc $\psi(a_0)$ n'est pas du même signe que $\psi(b_0)$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, ψ s'annule en au moins un point de $]a_0, b_0[$. \square

Chapitre 37

La Différentielle

Notation 37.1. Dans ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont trois \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle, et Ω est un ouvert de E .

I Définition

Définition 37.2 (Fonction différentiable en un point). $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. On dit que f est différentiable en ω lorsqu'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ t.q.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in (-\omega + \Omega) \setminus \{0\}}} \frac{f(\omega + h) - f(\omega) - L(h)}{\|h\|_E} = 0. \quad (*)$$

Proposition 37.3. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. Si f est différentiable en ω , alors il existe un unique $L \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant (*) : on le notera $df(\omega)$.

Démonstration. Soit $(L, M) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ vérifiant (*). Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r) \subset \Omega$. Alors on a :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathcal{B}_o(0, r) \setminus \{0\}}} (L - M) \left(\frac{h}{\|h\|_E} \right) = 0.$$

Soit $u \in E$. Si $u = 0$, on a bien $(L - M)(u) = 0$. Si $u \neq 0$, on note $J = \left] 0, \frac{r}{\|u\|_E} \right[$, et on a :

$$(L - M)(u) = \|u\|_E \cdot \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in J}} (L - M) \left(\frac{tu}{\|tu\|_E} \right) = 0.$$

Donc $L = M$. □

Vocabulaire 37.4 (Fonction différentiable sur un ouvert). $f : \Omega \rightarrow F$. Si f est différentiable en tout point de Ω , on dit que f est différentiable sur Ω . On a alors une application $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 37.5. I intervalle ouvert de \mathbb{R} . $f : I \rightarrow F$, $\omega \in I$. S'équivalent :

- (i) f est différentiable en ω .
- (ii) f est dérivable en ω .

Si ces conditions sont vérifiées :

$$\forall \omega \in I, df(\omega) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ h \longmapsto hf'(\omega) \end{cases}.$$

Proposition 37.6. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. S'équivalent :

- (i) f est différentiable en ω .
- (ii) Il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\varepsilon \in F^{(-\omega+\Omega)}$ t.q.

$$\forall h \in (-\omega + \Omega), f(\omega + h) = f(\omega) + L(h) + \|h\|_E \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Corollaire 37.7. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. Si f est différentiable en ω , alors f est continue en ω .

Proposition 37.8. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. \mathcal{W} ouvert de E t.q. $\omega \in \mathcal{W} \subset \Omega$. S'équivalent :

- (i) f est différentiable en ω .
- (ii) $f|_{\mathcal{W}}$ est différentiable en ω .

Si ces conditions sont vérifiées, alors $df|_{\mathcal{W}}(\omega) = df(\omega)$.

Proposition 37.9. $f : E \rightarrow F$, $\omega \in E$. E_0 sous-espace vectoriel de E t.q. $\omega \in E_0 \subset E$. Si f est différentiable en ω , alors $f|_{E_0}$ est différentiable en ω et $df|_{E_0}(\omega) = df(\omega)|_{E_0}$.

Proposition 37.10. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. On suppose que $F = F_1 \times \cdots \times F_s$ (où F_1, \dots, F_s sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie non nulle), et on note $(f_1, \dots, f_s) \in F_1^\Omega \times \cdots \times F_s^\Omega$ t.q. $\forall x \in \Omega$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x))$. S'équivalent :

- (i) f est différentiable en ω .
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, f_i est différentiable en ω .

Si ces conditions sont vérifiées, alors :

$$\forall h \in E, df(\omega) \cdot h = (df_1(\omega) \cdot h, \dots, df_s(\omega) \cdot h).$$

Notation 37.11. $f : \Omega \rightarrow F$. On suppose que f est différentiable sur Ω . On dispose donc d'une fonction $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On peut donc, sous réserve d'existence, définir par récurrence $d^n f$, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d^n f = d(d^{n-1} f),$$

avec $d^0 f = f$.

Vocabulaire 37.12 (Fonction de classe C^n). $f : \Omega \rightarrow F$. On dit que f est de classe C^n lorsque $d^n f$ est définie sur Ω et continue.

Définition 37.13 (Jacobien et divergence). $f : \Omega \rightarrow E$, $\omega \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en ω .

(i) On définit le jacobien de f en ω par :

$$(\text{jac } f)(\omega) = \det(df(\omega)).$$

(ii) On définit la divergence de f en ω par :

$$(\text{div } f)(\omega) = \text{tr}(df(\omega)).$$

Lemme 37.14. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On considère :

$$\Psi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ u \longmapsto \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u | x \rangle \end{cases} \end{cases}.$$

Alors Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 37.15 (Gradient). $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On suppose que f est différentiable en ω . Alors l'unique vecteur $u \in E$ t.q. $\forall h \in E$, $df(\omega) \cdot h = \langle u | h \rangle$ est appelé gradient de f en ω et noté $\nabla f(\omega)$. Ainsi :

$$\forall h \in E, df(\omega) \cdot h = \langle \nabla f(\omega) | h \rangle.$$

II Exemples

Exemple 37.16.

(i) $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est différentiable sur E et :

$$\forall \omega \in E, df(\omega) = f.$$

- (ii) $f : E \rightarrow F$ affine. On note $\vec{f} \in \mathcal{L}(E, F)$ la direction de f . Alors f est différentiable sur E et :

$$\forall \omega \in E, df(\omega) = \vec{f}.$$

- (iii) $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire. Alors B est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in E \times F, \forall (h_1, h_2) \in E \times F, \\ [dB(\omega_1, \omega_2)](h_1, h_2) = B(h_1, \omega_2) + B(\omega_1, h_2).$$

Exemple 37.17. $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q. $R = \rho(\sum a_n z^n) > 0$. On définit à bon droit :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_o(0, R) \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

\mathbb{C} est ici considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. Alors f est différentiable sur $\mathcal{B}_o(0, R)$ et :

$$\forall \omega \in \mathcal{B}_o(0, R), \forall h \in \mathbb{C}, df(\omega) \cdot h = f'(\omega)h.$$

Exemple 37.18. On définit :

$$\Phi_p : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto f^p \end{array} \right.$$

Alors Φ_p est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall h \in \mathcal{L}(E), d\Phi_p(f) \cdot h = \sum_{k=0}^{p-1} (f^k \circ h \circ f^{p-1-k}).$$

Exemple 37.19. La fonction $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est différentiable en 0 et :

$$d(\exp)(0) = id_{\mathcal{L}(E)}.$$

Lemme 37.20. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$. Alors :

$$\mathcal{B}_o(id_E, 1) \subset GL(E).$$

Démonstration. Voir proposition 33.4. □

Exemple 37.21. On définit :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} GL(E) \longrightarrow GL(E) \\ u \longmapsto u^{-1} \end{array} \right.$$

Alors Φ est différentiable sur $GL(E)$ et :

$$\forall u \in GL(E), \forall h \in \mathcal{L}(E), d\Phi(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Exemple 37.22. $\nu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une norme. Alors ν n'est pas différentiable en 0.

Démonstration. Supposons par l'absurde que ν est différentiable en 0 et notons $L = d\nu(0)$. Soit $u \in E \setminus \{0\}$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{\nu(tu) - \nu(0) - L(tu)}{\nu(tu)} = \begin{cases} \frac{\nu(u) - L(u)}{\nu(u)} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\nu(u) + L(u)}{\nu(u)} & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Or $\frac{\nu(tu) - \nu(0) - L(tu)}{\nu(tu)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Il vient $\nu(u) - L(u) = \nu(u) + L(u) = 0$. C'est absurde car $u \neq 0$. \square

Exemple 37.23. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\mathfrak{N} : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ la norme euclidienne associée. Alors \mathfrak{N} est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et :

$$\forall u \in E \setminus \{0\}, \forall h \in E, d\mathfrak{N}(u) \cdot h = \frac{\langle u | h \rangle}{\mathfrak{N}(u)}.$$

Autrement dit :

$$\forall u \in E \setminus \{0\}, \nabla \mathfrak{N}(u) = \frac{u}{\mathfrak{N}(u)}.$$

III Composition de fonctions différentiables

Proposition 37.24. \mathcal{U} ouvert de E , \mathcal{V} ouvert de F . $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \rightarrow G$, $\omega \in \mathcal{U}$. On suppose que f est différentiable en ω et que g est différentiable en $f(\omega)$. Alors $(g \circ f)$ est différentiable en ω et :

$$d(g \circ f)(\omega) = dg(f(\omega)) \circ df(\omega).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in F^{(-\omega + \mathcal{U})}$ et $\eta \in G^{(-f(\omega) + \mathcal{V})}$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ et $\lim_0 \eta = 0$ t.q.

$$\begin{aligned} \forall h \in (-\omega + \mathcal{U}), f(\omega + h) &= f(\omega) + df(\omega) \cdot h + \|h\|_E \varepsilon(h), \\ \forall \ell \in (-f(\omega) + \mathcal{V}), g(f(\omega) + \ell) &= g(f(\omega)) + dg(f(\omega)) \cdot \ell + \|\ell\|_F \eta(\ell). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $h \in (-\omega + \mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\omega + h) &= g(f(\omega) + [f(\omega + h) - f(\omega)]) \\ &= (g \circ f)(\omega) + dg(f(\omega)) \cdot [f(\omega + h) - f(\omega)] \\ &\quad + \|f(\omega + h) - f(\omega)\|_F \eta[f(\omega + h) - f(\omega)] \\ &= (g \circ f)(\omega) + (dg(f(\omega)) \circ df(\omega)) \cdot h + \|h\|_E dg(f(\omega)) \cdot \varepsilon(h) \\ &\quad + \|df(\omega) \cdot h + \|h\|_E \varepsilon(h)\|_F \eta[f(\omega + h) - f(\omega)]. \end{aligned}$$

En déduire le résultat. \square

Corollaire 37.25. \mathcal{U} ouvert de E , \mathcal{V} ouvert de F . $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \rightarrow G$. On suppose que f et g sont \mathcal{C}^1 . Alors $(g \circ f)$ est \mathcal{C}^1 .

Démonstration. D'après la proposition 37.24, $(g \circ f)$ est différentiable et :

$$\forall \omega \in \mathcal{U}, d(g \circ f)(\omega) = dg(f(\omega)) \circ df(\omega).$$

Or $\omega \in \mathcal{U} \mapsto dg(f(\omega)) \circ df(\omega) \in \mathcal{L}(E, G)$ est \mathcal{C}^0 car les fonctions suivantes sont \mathcal{C}^0 :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \\ \omega \longmapsto (dg(f(\omega)), df(\omega)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \circ \psi \end{array} \right.$$

□

Corollaire 37.26. \mathcal{U} ouvert de E , \mathcal{V} ouvert de F . $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \rightarrow G$. On suppose que f et g sont \mathcal{C}^p . Alors $(g \circ f)$ est \mathcal{C}^p .

Proposition 37.27. $f, g : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. Si f et g sont différentiables en ω alors $(f + g)$ est différentiable en ω et :

$$d(f + g)(\omega) = df(\omega) + dg(\omega).$$

Proposition 37.28. $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. Si f et g sont différentiables en ω alors (fg) est différentiable en ω et :

$$d(fg)(\omega) = f(\omega) dg(\omega) + g(\omega) df(\omega).$$

Proposition 37.29 (Articulation dérivée-différentielle). I intervalle de \mathbb{R} . $\gamma : I \rightarrow \Omega$, $f : \Omega \rightarrow F$, $t \in I$. On suppose que γ est dérivable en t et que f est différentiable en $\gamma(t)$. Alors $(f \circ \gamma)$ est dérivable en t et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

IV Représentations analytiques

Lemme 37.30. \mathcal{B}_E une base de E . On note $n = \dim E$. Alors en identifiant $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^n , l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme, et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}^{-1}$ sont \mathcal{C}^1 .

Proposition 37.31. $f : \Omega \rightarrow F$. \mathcal{B}_E une base de E , \mathcal{B}_F une base de F . On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On note $\tilde{\Omega} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(\Omega) \subset \mathbb{R}^p$. On pose :

$$\tilde{f} : x \in \tilde{\Omega} \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F} \left(f \left((\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E})^{-1}(x) \right) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega & \xrightarrow{f} & F \\
 \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E} \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F} \\
 \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Et, pour $\omega \in \Omega$, f est différentiable en ω ssi \tilde{f} est différentiable en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(\omega)$.

Exemple 37.32. On considère $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. \det est différentiable sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), d(\det)(A) \cdot H = \text{tr}({}^t(\text{Com } A)H).$$

Ainsi, si on munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle A | B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$, alors :

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \nabla \det(A) = \text{Com } A.$$

Démonstration. Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors l'application $\det_{\mathcal{C}} : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ est n -linéaire. Donc $\det_{\mathcal{C}}$ est différentiable et :

$$\begin{aligned}
 & \forall (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, \forall (h_1, \dots, h_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, \\
 & d\left(\det_{\mathcal{C}}\right)(u_1, \dots, u_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{C}}(u_1, \dots, u_{j-1}, h_j, u_{j+1}, \dots, u_n).
 \end{aligned}$$

On considère alors $\Psi : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^n \\ A \longmapsto (\mathfrak{C}_1(A), \dots, \mathfrak{C}_n(A)) \end{cases}$. Ψ est linéaire donc différentiable et $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), d\Psi(A) = \Psi$. Or $\det = \det_{\mathcal{C}} \circ \Psi$, donc \det est différentiable et, pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 d(\det)(A) \cdot H &= d\left(\det_{\mathcal{C}} \circ \Psi\right)(A) \cdot H = d\left(\det_{\mathcal{C}}\right)(\Psi(A)) \circ d\Psi(A) \cdot H \\
 &= \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}_1(A), \dots, \mathfrak{C}_{j-1}(A), \mathfrak{C}_j(H), \mathfrak{C}_{j+1}(A), \dots, \mathfrak{C}_n(A)) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} H_{ij} \mu_{ij}(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} H_{ij} (\text{Com } A)_{ij} \\
 &= \text{tr}({}^t(\text{Com } A)H),
 \end{aligned}$$

où $\mu_{ij}(A)$ est le mineur de A obtenu en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne. \square

V Inégalité des accroissements finis

Proposition 37.33. \mathcal{U} ouvert connexe par arcs de E . $f : \mathcal{U} \rightarrow F$. S'équivalent :

- (i) f est constante.
- (ii) f est différentiable sur \mathcal{U} et $\forall \omega \in \mathcal{U}$, $df(\omega) = 0$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair. (ii) \Rightarrow (i) Montrons que f est localement constante, i.e. $\forall \omega \in \mathcal{U}$, $\exists V \in \mathcal{V}(\omega)$, $f|_{V \cap \mathcal{U}}$ est constante. Soit donc $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, r) \subset \mathcal{U}$. On va montrer que $f|_{\mathcal{B}_o(\omega, r)}$ est constante. Soit $m \in \mathcal{B}_o(\omega, r)$. On pose :

$$p : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f((1-t)\omega + tm) \end{cases}.$$

Selon l'articulation dérivée-différentielle (c.f. proposition 37.29), p est dérivable et :

$$\forall t \in [0, 1], p'(t) = df((1-t)\omega + tm) \cdot (m - \omega) = 0.$$

Donc $p' = 0$, donc p est constante. En particulier, $f(m) = f(\omega)$. Donc $f|_{\mathcal{B}_o(\omega, r)}$ est constante, et f est localement constante. D'après le théorème 16.24, comme \mathcal{U} est connexe par arcs, f est constante. \square

Théorème 37.34 (Inégalité des accroissements finis). $f : \Omega \rightarrow F$. $(a, b) \in \Omega^2$ t.q. $[a, b] \subset \Omega$. On suppose que :

- (i) f est différentiable en tout point de $[a, b]$,
- (ii) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$\forall \omega \in [a, b], \|df(\omega) \cdot (b - a)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

Démonstration. On considère :

$$p : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f((1-t)a + tb) \end{cases}.$$

Alors, selon l'articulation dérivée-différentielle, p est dérivable et :

$$\forall t \in [0, 1], \|p'(t)\|_F = \|df((1-t)a + tb) \cdot (b - a)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

Selon le théorème 19.5, il vient :

$$\|f(b) - f(a)\|_F = \|p(1) - p(0)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

\square

Corollaire 37.35. $f : \Omega \rightarrow F$. $(a, b) \in \Omega^2$ t.q. $[a, b] \subset \Omega$. On suppose que f est \mathcal{C}^1 et on note :

$$M = \max_{c \in [a, b]} \|df(c)\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E, F)$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Alors :

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

Application 37.36. \mathcal{U} ouvert convexe de E . $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ différentiable sur \mathcal{U} . $\rho \in \mathbb{R}_+$. S'équivalent :

(i) f est ρ -lipschitzienne.

(ii) $\forall \omega \in \mathcal{U}$, $\|df(\omega)\| \leq \rho$,

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E, F)$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Appliquer le corollaire 37.35. (i) \Rightarrow (ii) Soit $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon \in F^{(-\omega + \mathcal{U})}$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ t.q.

$$\forall h \in (-\omega + \mathcal{U}), f(\omega + h) = f(\omega) + df(\omega) \cdot h + \|h\|_E \varepsilon(h).$$

Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_f(\omega, r) \subset \mathcal{U}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathcal{B}_f(0, r), \|df(\omega) \cdot h\|_F &\leq \|f(\omega + h) - f(\omega)\|_F + \|h\|_E \cdot \|\varepsilon(h)\|_F \\ &\leq \|h\|_E (\rho + \|\varepsilon(h)\|_F). \end{aligned}$$

En déduire que $\|df(\omega)\| \leq \rho$. □

Chapitre 38

Dérivées Partielles

Notation 38.1. Dans ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle, et Ω est un ouvert de E .

I Dérivée selon un vecteur

Définition 38.2 (Fonction dérivable selon un vecteur). $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$, $u \in E$. On dit que f possède en ω une dérivée selon le vecteur u lorsque la fonction $t \mapsto \frac{f(\omega + tu) - f(\omega)}{t}$ admet une limite en 0. On pose alors :

$$D_u f(\omega) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(\omega + tu) - f(\omega)}{t}.$$

Proposition 38.3. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f possède en ω une dérivée selon u , alors f possède en ω une dérivée selon (λu) et :

$$D_{\lambda u} f(\omega) = \lambda D_u f(\omega).$$

Proposition 38.4. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. Si f est différentiable en ω , alors f possède en ω une dérivée selon tout vecteur et :

$$\forall u \in E, D_u f(\omega) = df(\omega) \cdot u.$$

Corollaire 38.5. $f : \Omega \rightarrow F$, $\omega \in \Omega$. On munit E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Si f est différentiable en ω , alors f possède une dérivée en ω selon chaque e_i et :

$$\forall h \in E, df(\omega) \cdot h = \sum_{i=1}^n e_i^*(h) D_{e_i} f(\omega).$$

Exemple 38.6. On pose :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Alors :

- (i) f est \mathcal{C}^0 .
- (ii) f est dérivable en 0 selon tout vecteur.
- (iii) f n'est pas différentiable en 0.

Vocabulaire 38.7 (Dérivées partielles). $f : \Omega \rightarrow F$. On munit E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Sous réserve d'existence, les applications $D_{e_1}f, \dots, D_{e_n}f$ sont appelées les dérivées partielles de f relatives à e_1, \dots, e_n .

Théorème 38.8. $f : \Omega \rightarrow F$. On munit E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. S'équivalent :

- (i) f est de classe \mathcal{C}^1 .
- (ii) $D_{e_1}f, \dots, D_{e_n}f$ sont définies et \mathcal{C}^0 .

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair. (ii) \Rightarrow (i) Soit $\omega \in \Omega$. Montrons que f est différentiable en ω . On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |e_i^*(x)|$. Soit $r > 0$ t.q. $\mathcal{B}_f(\omega, r) \subset \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta \in]0, r]$ t.q.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in \mathcal{B}_f(\omega, \eta), \|D_{e_i}f(x) - D_{e_i}f(\omega)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

On définit $L = \sum_{i=1}^n (D_{e_i}f(\omega) \cdot e_i^*) \in \mathcal{L}(E, F)$, et on a, pour $h \in \mathcal{B}_f(0, \eta)$:

$$\begin{aligned} & \|f(\omega + h) - f(\omega) - L(h)\|_F \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \left[f\left(\omega + \sum_{k=1}^i e_k^*(h)e_k\right) - f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h)e_k\right) - e_i^*(h)D_{e_i}f(\omega) \right] \right\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left\| f\left(\omega + \sum_{k=1}^i e_k^*(h)e_k\right) - f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h)e_k\right) - e_i^*(h)D_{e_i}f(\omega) \right\|_F \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_0^{e_i^*(h)} \left[D_{e_i}f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h)e_k + \tau e_i\right) - D_{e_i}f(\omega) \right] d\tau \right\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{e_i^*(h)} \left\| D_{e_i}f\left(\omega + \sum_{k=1}^{i-1} e_k^*(h)e_k + \tau e_i\right) - D_{e_i}f(\omega) \right\|_F d\tau \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{e_i^*(h)} \frac{\varepsilon}{n} d\tau \right| \leq \varepsilon \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en ω et $df(\omega) = \sum_{i=1}^n (D_{e_i}f(\omega) \cdot e_i^*)$. En déduire que df est \mathcal{C}^0 . \square

II Dérivées partielles standards

Notation 38.9. Dans la suite, on suppose que $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n .

Notation 38.10. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Si f possède en ω une dérivée selon le vecteur e_j , on notera :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega) = D_{e_j} f(\omega).$$

Remarque 38.11. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega)$ est la dérivée de $t \mapsto f(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, t, \omega_{j+1}, \dots, \omega_p)$ en ω_j .

Proposition 38.12. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Si f est différentiable en ω , alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\omega), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\omega)$ sont bien définies et :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, df(\omega) \cdot h = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega).$$

Proposition 38.13. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, si $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega)$ est définie, alors $\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\omega), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\omega)$ sont définies et :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\omega), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\omega) \right).$$

Proposition 38.14. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Si f est différentiable en ω , alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(df(\omega)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(\omega) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Cette matrice est appelée matrice jacobienne de f en ω .

Corollaire 38.15. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\omega \in \Omega$. Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Si f est différentiable en ω , alors :

$$(\text{jac } f)(\omega) = \det(df(\omega)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\omega) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(\omega) \end{vmatrix}, \quad (\text{i})$$

$$(\text{div } f)(\omega) = \text{tr}(df(\omega)) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\omega). \quad (\text{ii})$$

Corollaire 38.16. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On munit \mathbb{R}^p de sa structure euclidienne canonique. Si f est différentiable en ω , alors :

$$\nabla f(\omega) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\omega), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\omega) \right).$$

Proposition 38.17. \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^p , \mathcal{V} ouvert de \mathbb{R}^n . $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \mathcal{U}$. On suppose que f est différentiable en ω et que g est différentiable en $f(\omega)$. Alors, selon la proposition 37.24, $(g \circ f)$ est différentiable en ω . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. Alors on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\omega)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\omega) \right),$$

où les $\frac{\partial}{\partial x_j}$ représentent les dérivées partielles dans la base \mathcal{B}_p et les $\frac{\partial}{\partial y_i}$ représentent les dérivées partielles dans la base \mathcal{B}_n .

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(\omega) &= (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, 1} [d(g \circ f)(\omega)])_{1j} = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, 1} [dg(f(\omega)) \circ df(\omega)])_{1j} \\ &= (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n, 1} [dg(f(\omega))] \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n} [df(\omega)])_{1j} \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n, 1} [dg(f(\omega))]_{1i} (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n} [df(\omega)]_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\omega)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\omega) \right). \end{aligned}$$

□

III Intégrales et différentiabilité

Lemme 38.18. (Λ, d) espace métrique. $K \in \mathcal{C}^0(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit :

$$A : \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) \longmapsto \int_x^y K(\lambda, t) dt \end{array} \right.$$

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $A(\cdot, x, y) \in \mathcal{C}^0(\Lambda, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\mu \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ t.q. $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_0$. On pose :

$$J = (\{\lambda_0\} \cup \{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}) \times [x, y].$$

J est un compact. On pose donc $M = \sup_{(\nu, t) \in J} |K(\nu, t)|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n : t \in [x, y] \mapsto K(\mu_n, t)$ et $\psi : t \in [x, y] \mapsto K(\lambda_0, t)$. Alors ψ et les φ_n sont \mathcal{C}^0 , $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} \psi$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [x, y], |\varphi_n(t)| \leq M$. Par convergence dominée (théorème 35.3) :

$$A(\mu_n, x, y) = \int_x^y \varphi_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_x^y \psi(t) dt = A(\lambda_0, x, y).$$

Donc $A(\cdot, x, y)$ est \mathcal{C}^0 en λ_0 . \square

Proposition 38.19. (Λ, d) espace métrique. $K \in \mathcal{C}^0(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit :

$$A : \begin{cases} \Lambda \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) \longmapsto \int_x^y K(\lambda, t) dt \end{cases}.$$

Alors $A \in \mathcal{C}^0(\Lambda \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Démonstration. On définit :

$$L : \begin{cases} \Lambda \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y, r) \longmapsto (y - x)K(\lambda, x + r(y - x)) \end{cases}.$$

On a $L \in \mathcal{C}^0(\Lambda \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Et :

$$\forall (\lambda, x, y) \in \Lambda \times \mathbb{R}^2, A(\lambda, x, y) = \int_x^y K(\lambda, t) dt = \int_0^1 L(\lambda, x, y, r) dr.$$

En appliquant le lemme 38.18 à L (en remplaçant Λ par $\Lambda \times \mathbb{R}^2$), on en déduit la continuité de A . \square

Proposition 38.20. $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit :

$$A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) \longmapsto \int_x^y K(\lambda, t) dt \end{cases}.$$

Alors $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Démonstration. Il est clair que $\frac{\partial A}{\partial x}$ et $\frac{\partial A}{\partial y}$ sont \mathcal{C}^0 . Utiliser la proposition 35.16 et la proposition 38.19 pour montrer que $\frac{\partial A}{\partial \lambda}$ est \mathcal{C}^0 . D'après le théorème 38.8, A est \mathcal{C}^1 . \square

IV Dérivées partielles successives

Notation 38.21. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^k$, on définit par récurrence, sous réserve d'existence :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right).$$

Proposition 38.22. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. S'équivalent :

- (i) f est de classe \mathcal{C}^k .
- (ii) Toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k sont définies et continues.

Théorème 38.23 (Théorème de Fubini). $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $a < b$ et $c < d$. $f \in \mathcal{C}^0([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$. Alors :

- (i) La fonction $x \in [a, b] \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy$ est \mathcal{C}^0 .
- (ii) La fonction $y \in [c, d] \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$ est \mathcal{C}^0 .
- (iii) On a :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Démonstration. (i) et (ii) Utiliser l'uniforme continuité de f (car $[a, b] \times [c, d]$ est un compact). (iii) On pose :

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{et} \quad J = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

On définit de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\iota_n = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f \left(x_k^{(n)}, y_\ell^{(n)} \right),$$

avec $x_k^{(n)} = a + \frac{k}{n}(b-a)$ et $y_\ell^{(n)} = c + \frac{\ell}{n}(d-c)$. On munit \mathbb{R}^2 de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. f étant \mathcal{UC}^0 sur $[a, b] \times [c, d]$, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\begin{aligned} \forall (x, x', y, y') \in [a, b]^2 \times [c, d]^2, \quad \|(x, y) - (x', y')\|_\infty \leq \eta \\ \implies |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{b-a}{N} \leq \eta$ et $\frac{d-c}{N} \leq \eta$. Alors, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
 & |I - \iota_n| \\
 &= \left| \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \left[\int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} \left(\int_{y_{\ell-1}^{(n)}}^{y_\ell^{(n)}} f(x, y) \, dy \right) dx - \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} f(x_k^{(n)}, y_\ell^{(n)}) \right] \right| \\
 &\leq \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} \left(\int_{y_{\ell-1}^{(n)}}^{y_\ell^{(n)}} |f(x, y) - f(x_k^{(n)}, y_\ell^{(n)})| \, dy \right) dx \\
 &\leq (b-a)(d-c) \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Il vient $\iota_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$. De même, $\iota_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J$. Donc $I = J$. \square

Lemme 38.24. $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $a < b$ et $c < d$. $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(u, v) \, dv \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(u, v) \, du \right) dv.$$

Démonstration. Appliquer le théorème fondamental de l'analyse deux fois. \square

Lemme 38.25. $(a, c) \in \mathbb{R}^2$. $\beta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors :

$$\beta(a, c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n^2 \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} \beta(x, y) \, dy \right) dx \right].$$

Lemme 38.26. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Théorème 38.27 (Théorème de Schwarz). $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^k$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Alors :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

V Exemple : expression du laplacien en polaire

Définition 38.28 (Laplacien). $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit le laplacien de f par :

$$\Delta f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\omega) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\omega) \end{cases}.$$

Proposition 38.29. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \longmapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}.$$

Alors g est \mathcal{C}^2 et :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

VI Extrema

Notation 38.30. Dans la suite, on considère à nouveau $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle, et Ω un ouvert de E .

Définition 38.31 (Extremum). X un ensemble non vide, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in X$.

- (i) On dit que f présente un maximum en ω lorsque $\forall x \in X, f(x) \leq f(\omega)$.
- (ii) On dit que f présente un minimum en ω lorsque $\forall x \in X, f(x) \geq f(\omega)$.

Proposition 38.32. X un ensemble non vide, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(X)$ est fini, alors f présente un maximum et un minimum.

Proposition 38.33. (Λ, d) espace métrique, $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. Si Λ est compact et f est continue, alors f présente un maximum et un minimum.

Exemple 38.34. Soit \mathfrak{V} un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension n . Alors :

- (i) \mathfrak{V} admet une base $\beta = (P_1, \dots, P_n)$ t.q. $\deg P_1 < \dots < \deg P_n$.
- (ii) \mathfrak{V} admet une base $\gamma = (Q_1, \dots, Q_n)$ t.q. $\deg Q_1 = \dots = \deg Q_n$.

Démonstration. On note $\mathcal{B}(\mathfrak{V})$ l'ensemble des bases de \mathfrak{V} et on pose :

$$w : \begin{cases} \mathcal{B}(\mathfrak{V}) \longrightarrow \mathbb{N} \\ (H_1, \dots, H_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \deg H_i \end{cases}.$$

Montrer qu'il suffit de choisir $(\beta, \gamma) \in \mathcal{B}(\mathfrak{V})^2$ t.q. $w(\beta) = \min_{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{V})} w(B)$ et $w(\gamma) = \max_{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{V})} w(B)$. □

Définition 38.35 (Extremum local). (Λ, d) espace métrique, $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda$.

- (i) On dit que f présente un maximum local en ω lorsque $\exists V \in \mathcal{V}(\omega), \forall x \in V, f(x) \leq f(\omega)$.

- (ii) On dit que f présente un minimum local en ω lorsque $\exists V \in \mathcal{V}(\omega), \forall x \in V, f(x) \geq f(\omega)$.

Proposition 38.36. I intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in I$. On suppose que :

- (i) f présente un extremum local en ω ,
- (ii) f est dérivable en ω ,
- (iii) $\omega \in \overset{\circ}{I}$.

Alors $f'(\omega) = 0$.

Proposition 38.37. Ω un ouvert de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On suppose que f présente un extremum local en ω . Soit $u \in E$ t.q. f possède en ω une dérivée selon u . Alors :

$$D_u f(\omega) = 0.$$

Corollaire 38.38. Ω un ouvert de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$. On suppose que f présente un extremum local en ω . Si f est différentiable en ω , alors :

$$df(\omega) = 0.$$

Exemple 38.39. $(a_1, \dots, a_s) \in E^s$. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On pose :

$$\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \longmapsto \sum_{i=1}^s \|u - a_i\| \end{cases}.$$

On note $A = \{a_1, \dots, a_s\}$ et $\mathfrak{E}^- = \{u \in E, \varphi(u) = \min_{x \in E} \varphi(x)\}$. Alors :

- (i) φ est convexe.
- (ii) φ est différentiable en tout point de $E \setminus A$ et :

$$\forall u \in E \setminus A, \nabla \varphi(u) = \sum_{i=1}^s \frac{u - a_i}{\|u - a_i\|}.$$

- (iii) \mathfrak{E}^- est un compact convexe non vide de E .
- (iv) On a :

$$\left\{ u \in E \setminus A, \sum_{i=1}^s \frac{u - a_i}{\|u - a_i\|} = 0 \right\} \subset \mathfrak{E}^-.$$

Démonstration. (ii) Voir exemple 37.23. (iii) Voir proposition 38.44. (iv) Voir corollaire 38.47. □

VII Convexité

Définition 38.40 (Partie convexe d'un espace normé). $C \subset E$. S'équivalent :

- (i) $\forall (a, b) \in C^2, [a, b] \subset C$.
- (ii) $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall (\omega_1, \dots, \omega_s) \in C^s, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in (\mathbb{R}_+)^s, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \implies \sum_{i=1}^s \lambda_i \omega_i \in C$.

On dit alors que C est convexe.

Définition 38.41 (Fonction convexe). C une partie convexe de E , $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. S'équivalent :

- (i) $\forall (a, b) \in C^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.
- (ii) $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall (\omega_1, \dots, \omega_s) \in C^s, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in (\mathbb{R}_+)^s, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \implies f(\sum_{i=1}^s \lambda_i \omega_i) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i f(\omega_i)$.

On dit alors que f est convexe.

Remarque 38.42. On peut montrer que si Ω est un ouvert convexe de E , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition 38.43. C une partie convexe de E , $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. S'équivalent :

- (i) f est convexe.
- (ii) $\forall \mathcal{D}$ droite affine de E , $f|_{C \cap \mathcal{D}}$ est convexe.
- (iii) $\forall (a, b) \in C^2, f|_{[a, b]}$ est convexe.

Proposition 38.44. C une partie convexe de E , $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On pose :

$$\mathfrak{E}^- = \{\omega \in C, \forall m \in C, f(\omega) \leq f(m)\}.$$

Alors \mathfrak{E}^- est convexe.

Lemme 38.45. C une partie convexe de E , $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $(a, b) \in C^2$. On pose :

$$p : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f((1-t)a + tb) \end{cases}.$$

Alors p est convexe.

Proposition 38.46. Ω un ouvert convexe de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\omega \in \Omega$. On suppose que pour tout $u \in E$, f possède une dérivée en ω selon u et $D_u f(\omega) = 0$. Alors f présente un minimum global en ω .

Démonstration. Soit $m \in \Omega \setminus \{\omega\}$. On pose :

$$p : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f((1-t)\omega + tm) \end{cases}.$$

Alors p est dérivable et convexe (selon le lemme 38.45). Et, selon l'inégalité des pentes (c.f. proposition 1.19), on a :

$$\forall s \in]0, 1], \quad \frac{p(s) - p(0)}{s - 0} \leq \frac{p(1) - p(0)}{1 - 0} = f(m) - f(\omega).$$

En faisant tendre $s \rightarrow 0$, il vient $f(m) - f(\omega) \geq p'(0) = D_{m-\omega}f(\omega) = 0$. On a donc montré : $\forall m \in \Omega \setminus \{\omega\}$, $f(\omega) \leq f(m)$. \square

Corollaire 38.47. Ω un ouvert convexe de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\omega \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en ω et que $df(\omega) = 0$. Alors f présente un minimum global en ω .

Proposition 38.48. Ω un ouvert convexe de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur Ω . S'équivalent :

- (i) f est convexe.
- (ii) $\forall (x, y) \in \Omega^2$, $f(y) \geq f(x) + df(x) \cdot (y - x)$.
- (iii) $\forall (x, y) \in \Omega^2$, $df(y) \cdot (y - x) \geq df(x) \cdot (y - x)$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Soit $(x, y) \in \Omega^2$. On pose :

$$p : t \in [0, 1] \mapsto f((1 - t)x + ty) - f(x) - t df(x) \cdot (y - x).$$

Alors p est convexe (selon le lemme 38.45) et dérivable, donc $p' \nearrow$. Or $p'(0) = 0$, donc $\forall t \in [0, 1]$, $p'(t) \geq p'(0) = 0$. Donc $p \nearrow$, d'où :

$$f(y) - f(x) - df(x) \cdot (y - x) = p(1) \geq p(0) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Soit $(x, y) \in \Omega^2$. On a :

$$\begin{aligned} df(x) \cdot (y - x) &\leq f(y) - f(x) = -(f(x) - f(y)) \\ &\leq -df(y) \cdot (x - y) = df(y) \cdot (y - x). \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) Soit $(a, b) \in \Omega^2$. On pose :

$$p : t \in [0, 1] \mapsto f((1 - t)a + tb).$$

p est dérivable et :

$$\forall t \in [0, 1], \quad p'(t) = df((1 - t)a + tb) \cdot (b - a).$$

Soit alors $(s, t) \in [0, 1]^2$ avec $s < t$. On a :

$$\begin{aligned} p'(s) &= \frac{1}{t - s} \cdot df((1 - s)a + sb) \cdot ((t - s)(b - a)) \\ &\leq \frac{1}{t - s} \cdot df((1 - t)a + tb) \cdot ((t - s)(b - a)) = p'(t). \end{aligned}$$

Donc $p' \nearrow$, donc p est convexe. En particulier, pour $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) = p(\lambda) \leq (1 - \lambda)p(0) + \lambda p(1) = (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Donc f est convexe. \square

Chapitre 39

Espaces Euclidiens

Notation 39.1. Dans ce chapitre, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n .

I Espaces euclidiens

I.1 Généralités

Proposition 39.2. On considère :

$$\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow E^* \\ u \longmapsto \langle u | \cdot \rangle \end{cases}.$$

Alors Φ est un isomorphisme.

Remarque 39.3. La proposition 39.2 est fausse lorsque E est de dimension infinie. Par contre, l'application $\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) \\ u \longmapsto \langle u | \cdot \rangle \end{cases}$ est injective et conserve la norme. Et Φ est surjective ssi E est de Banach.

Définition 39.4 (Vecteurs orthogonaux). $(x, y) \in E^2$. S'équivalent :

- (i) $\langle x | y \rangle = 0$.
- (ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

On dit alors que x et y sont orthogonaux, et on note $x \perp y$.

Définition 39.5 (Orthogonal d'une partie). $A \subset E$. On pose :

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, x \perp a\} = \{x \in E, \text{Ker}(\langle x | \cdot \rangle) \supset A\}.$$

Proposition 39.6. $A \subset E$.

- (i) A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
- (ii) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
- (iii) $(A^\perp)^\perp \supset \text{Vect}(A)$.

I.2 Orthogonalité et sommes directes

Proposition 39.7. F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

- (i) $E = F \oplus F^\perp$.
- (ii) $(F^\perp)^\perp = F$.

Définition 39.8 (Projection orthogonale). F un sous-espace vectoriel de E . On appelle projection orthogonale sur F , et on note p_F , la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Proposition 39.9. F un sous-espace vectoriel de E , $x \in E$. Alors :

$$\|x - p_F(x)\| = d(x, F).$$

Plus précisément : $\forall f \in F \setminus \{p_F(x)\}$, $\|x - p_F(x)\| < \|x - f\|$.

Proposition 39.10. $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (i.e. $p \circ p = p$). Alors p est une projection orthogonale ssi $\|p\| \leq 1$ (où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$).

Démonstration. (\Rightarrow) Si p est une projection orthogonale, $\forall x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, donc $\|p\| \leq 1$. (\Leftarrow) On suppose que $\|p\| \leq 1$. On note $F = \text{Im } p$, $G = \text{Ker } p$. On a donc $E = F \oplus G$, et p est la projection sur F parallèlement à G . Il suffit donc de montrer que $G = F^\perp$. Soit $(f, g) \in F \times G$. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|f\| = \|p(f + \lambda g)\| \leq \|f + \lambda g\|.$$

On considère donc :

$$\vartheta : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|f + \lambda g\|^2 - \|f\|^2 = \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda \langle f | g \rangle.$$

On a $\vartheta \geq 0$ et $\vartheta(0) = 0$. Il vient $\vartheta'(0) = 0$, i.e. $\langle f | g \rangle = 0$. Donc $f \perp g$. On a montré que F et G sont orthogonaux. On en déduit que $G = F^\perp$. \square

Proposition 39.11. F_1, \dots, F_p p sous-espaces vectoriels de E . On suppose que F_1, \dots, F_p sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \implies (\forall (f_i, f_j) \in F_i \times F_j, f_i \perp f_j).$$

Alors F_1, \dots, F_p sont en somme directe. Et leur somme est alors notée :

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq p}^\perp F_i.$$

I.3 Bases orthonormales

Vocabulaire 39.12 (Famille orthogonale, orthonormale). $u \in E^I$.

(i) On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthogonale lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

(ii) On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormale lorsqu'elle est orthogonale et que $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$.

Proposition 39.13. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème 39.14. E possède une base orthonormale.

Démonstration. Par récurrence sur $\dim E$. Vrai pour $\dim E = 0$. Supposons le résultat acquis pour tout espace euclidien de dimension $(d - 1)$. Soit alors E un espace de dimension d . Soit $e_1 \in E \setminus \{0\}$ t.q. $\|e_1\| = 1$. On note $H = \text{Ker}(\langle e_1 | \cdot \rangle)$. H est un hyperplan de E , donc $\dim H = d - 1$, donc par hypothèse de récurrence, H admet une base orthonormale (e_2, \dots, e_d) . Ainsi, (e_1, \dots, e_d) est une base orthonormale de E , et la récurrence se propage. \square

Corollaire 39.15. Tout système orthonormal de vecteurs de E peut être complété en une base orthonormale de E .

Définition 39.16 (Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n). On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}.$$

La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormale de $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Proposition 39.17. (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . On considère :

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow E \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{cases}.$$

Alors Ψ est un isomorphisme, et Ψ conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle x | y \rangle = \langle \Psi(x) | \Psi(y) \rangle.$$

II Endomorphismes orthogonaux

II.1 Structure de $O(E)$

Définition 39.18 (Endomorphismes orthogonaux). $f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :

- (i) $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.
- (ii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

On dit alors que f est un endomorphisme orthogonal. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .

Proposition 39.19. $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Remarque 39.20. Si $f \in E^E$ est tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$, alors on peut montrer que $f \in O(E)$.

Proposition 39.21. $O(E)$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Première étape : $O(E)$ est borné. En effet :

$$\forall f \in O(E), \|f\| = 1.$$

Deuxième étape : $O(E)$ est fermé. En effet, pour $(x, y) \in E^2$, on pose $A_{x,y} = \{f \in \mathcal{L}(E), \langle f(x) \mid f(y) \rangle - \langle x \mid y \rangle = 0\}$. Alors les $A_{x,y}$ sont des fermés (comme image réciproque d'un fermé par une application continue) et :

$$O(E) = \bigcap_{(x,y) \in E^2} A_{x,y}.$$

Donc $O(E)$ est un fermé. Conclusion : $O(E)$ est un fermé borné de $\mathcal{L}(E)$, qui est de dimension finie, donc $O(E)$ est un compact. \square

Définition 39.22 (Symétrie orthogonale). F un sous-espace vectoriel de E . On appelle symétrie orthogonale de base F , et on note σ_F , la symétrie de base F parallèlement à F^\perp .

Proposition 39.23. F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

- (i) $\sigma_F \in O(E)$,
- (ii) $\det \sigma_F = (-1)^{\text{codim } F}$.

Remarque 39.24. F, G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. Alors la symétrie $s_{F,G}$ de base F parallèlement à G est orthogonale ssi $G = F^\perp$.

Proposition 39.25. $\det(O(E)) \subset \{-1, 1\}$ (avec égalité dès que $\dim E \geq 1$).

Démonstration. Notons que $\det : GL(E) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme continu de groupes. Et $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$, donc $\det(O(E))$ est un sous-groupe compact de \mathbb{R}^* . En déduire que $\det(O(E)) \subset \{-1, 1\}$. De plus, lorsque $\dim E \geq 1$, si H est un hyperplan de E , alors $\det \sigma_H = -1$ et $\sigma_H \in O(E)$, d'où $\det(O(E)) = \{-1, 1\}$. \square

Notation 39.26. On définit :

- (i) $SO(E) = \{f \in O(E), \det f = 1\}$,
- (ii) $O^-(E) = \{f \in O(E), \det f = -1\}$.

Proposition 39.27.

- (i) $SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.
- (ii) Pour $s \in O^-(E)$, l'application $\Phi_s : \begin{cases} O(E) \longrightarrow O(E) \\ f \longmapsto s \circ f \end{cases}$ est une bijection et on a $O^-(E) = \Phi_s(SO(E))$ et $SO(E) = \Phi_s(O^-(E))$.

II.2 Endomorphismes orthogonaux et stabilité

Proposition 39.28. F un sous-espace vectoriel de E , $u \in O(E)$. Si $u(F) \subset F$, alors :

$$u(F) = F \quad \text{et} \quad u(F^\perp) = F^\perp.$$

Proposition 39.29. F un sous-espace vectoriel de E , $u \in O(E)$. On suppose que $u(F) \subset F$ et on note u_F et u_{F^\perp} les induits respectifs de u sur F et F^\perp . Alors :

$$u_F \in O(F) \quad \text{et} \quad u_{F^\perp} \in O(F^\perp).$$

Proposition 39.30. F_1, \dots, F_p p sous-espaces vectoriels de E t.q.

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p}^\perp F_i.$$

On pose :

$$\Psi : \begin{cases} \prod_{i=1}^p O(F_i) \longrightarrow O(E) \\ (f_1, \dots, f_p) \longmapsto \bigoplus_{1 \leq i \leq p} f_i \end{cases}.$$

Alors Ψ est un morphisme injectif de groupes, et :

$$\Psi \left(\prod_{i=1}^p O(F_i) \right) = \{f \in O(E), \forall i \in [1, p], f(F_i) \subset F_i\}.$$

III Matrices orthogonales

Proposition 39.31. $u \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

- (i) $u \in O(E)$.
- (ii) u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale.
- (iii) u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale.

Proposition 39.32. $u \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} une base orthonormale de E . *S'équivalent :*

- (i) $u \in O(E)$.
- (ii) ${}^t(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = I_n$.

Définition 39.33 (Matrices orthogonales). *On définit :*

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n\}.$$

Les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ sont appelées matrices orthogonales.

Proposition 39.34. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Proposition 39.35. $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. *Première étape :* $O_n(\mathbb{R})$ est borné. En effet, $\forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \|M\|_{\infty} \leq 1$. *Deuxième étape :* $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. En effet, l'application $\theta : M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est continue et $O_n(\mathbb{R}) = \theta^{-1}(\{I_n\})$. *Conclusion :* $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc $O_n(\mathbb{R})$ est un compact. \square

Proposition 39.36. $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

- (i) $M \in O_n(\mathbb{R})$.
- (ii) ${}^tMM = I_n$.
- (iii) $(\mathfrak{C}_1(M), \dots, \mathfrak{C}_n(M))$ est un système orthonormal de \mathbb{R}^n (muni de sa structure euclidienne canonique).
- (iv) $(\mathfrak{L}_1(M), \dots, \mathfrak{L}_n(M))$ est un système orthonormal de \mathbb{R}^n (muni de sa structure euclidienne canonique).
- (v) $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^tM$.

Proposition 39.37. $\det(O_n(\mathbb{R})) \subset \{-1, 1\}$ (avec égalité dès que $n \geq 1$).

Démonstration. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $1 = \det(I_n) = \det({}^tM) \det(M) = (\det M)^2$, donc $\det M \in \{-1, 1\}$. \square

Notation 39.38. *On définit :*

- (i) $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$,
- (ii) $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = -1\}$.

IV Actions de groupes

Définition 39.39 (Action de groupe). G un groupe, X un ensemble. On appelle action de G sur X toute application $\mathfrak{A} : \begin{cases} G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{cases}$ vérifiant :

- (i) $\forall x \in X, e \cdot x = x$ (e étant le neutre de G),
- (ii) $\forall (g_1, g_2) \in G^2, \forall x \in X, g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$.

Proposition 39.40. G un groupe, X un ensemble. Alors une application $\mathfrak{A} : G \times X \rightarrow X$ est une action de groupe ssi $\sigma : \begin{cases} G \longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g \longmapsto \mathfrak{A}(g, \cdot) \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Définition 39.41 (Orbites). G un groupe, X un ensemble, $\mathfrak{A} : G \times X \rightarrow X$ une action. On définit sur X la relation d'équivalence \mathcal{R} par :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G, g \cdot x = y.$$

L'ensemble des classes d'équivalence pour \mathcal{R} sera noté X/G . Les classes d'équivalence sont appelées orbites.

Définition 39.42 (Espace affine). $(\vec{F}, +, \cdot)$ un espace vectoriel. On dit que (F, \mathfrak{A}) est un espace affine sur \vec{F} lorsque :

- (i) F est un ensemble non vide,
- (ii) $\mathfrak{A} : \begin{cases} \vec{F} \times F \longrightarrow F \\ (\vec{u}, A) \longmapsto A + \vec{u} \end{cases}$ est une action de $(\vec{F}, +)$ sur F ,
- (iii) Pour tout $(A, B) \in F^2$, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \vec{F}$, qui sera noté \overrightarrow{AB} , t.q. $B = A + \vec{u}$.

V Orientation

Notation 39.43. On note $\mathbb{B}(E)$ l'ensemble des bases orthonormales de E (considérées comme n -uplets).

Proposition 39.44. $O(E)$ agit naturellement sur $\mathbb{B}(E)$, avec :

$$\forall f \in O(E), \forall (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{B}(E), f \cdot (e_1, \dots, e_n) = (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Proposition 39.45. $\forall (\beta, \beta') \in \mathbb{B}(E)^2, \exists! f \in O(E), f \cdot \beta = \beta'$.

Proposition 39.46. *On note \mathcal{R} la relation d'équivalence associée à l'action de $SO(E)$ sur $\mathbb{B}(E)$ (obtenue par restriction à partir de l'action de $O(E)$ sur $\mathbb{B}(E)$). Soit $(\beta, \beta') \in \mathbb{B}(E)^2$. S'équivalent :*

- (i) $\beta \mathcal{R} \beta'$.
- (ii) $\exists f \in SO(E), f \cdot \beta = \beta'$.
- (iii) $\det_{\beta}(\beta') = 1$.

On en déduit que $\mathbb{B}(E)/SO(E)$ a exactement deux classes d'équivalence.

Définition 39.47 (Orientation d'un espace euclidien). *Orienter l'espace euclidien E , c'est choisir l'une des deux classes d'équivalence de $\mathbb{B}(E)/SO(E)$, qu'on note $\mathbb{B}^+(E)$. On note de plus $\mathbb{B}^-(E) = \mathbb{B}(E) \setminus \mathbb{B}^+(E)$. Les bases orthonormales de $\mathbb{B}^+(E)$ sont dites directes, celles de $\mathbb{B}^-(E)$ sont dites indirectes.*

Proposition 39.48. *On suppose que E est orienté. Alors :*

- (i) *Les éléments de $SO(E)$ envoient $\mathbb{B}^+(E)$ sur $\mathbb{B}^+(E)$ et $\mathbb{B}^-(E)$ sur $\mathbb{B}^-(E)$.*
- (ii) *Les éléments de $O^-(E)$ envoient $\mathbb{B}^+(E)$ sur $\mathbb{B}^-(E)$ et $\mathbb{B}^-(E)$ sur $\mathbb{B}^+(E)$.*

Proposition 39.49. *On suppose que E est orienté. Soit β, β' deux bases orthonormales directes de E . Alors :*

$$\det_{\beta} = \det_{\beta'}.$$

Définition 39.50 (Produit mixte). *On suppose que E est orienté. On définit le produit mixte de n vecteurs v_1, \dots, v_n de E par*

$$[v_1, \dots, v_n] = \det_{\beta}(v_1, \dots, v_n),$$

où β est n'importe quelle base orthonormale directe de E .

Définition 39.51 (Produit vectoriel). *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Pour $(u, v) \in E^2$, on a $[u, v, \cdot] \in E^*$; ainsi, d'après la proposition 39.2, il existe un unique $w \in E$ t.q. $\forall x \in E, [u, v, x] = \langle w | x \rangle$. Ce vecteur w sera noté $u \wedge v$. On a donc :*

$$\forall (u, v, x) \in E^3, [u, v, x] = \langle (u \wedge v) | x \rangle.$$

Proposition 39.52. *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Soit β une base orthonormale directe de E . Soit $(u, v) \in E^2$. On note :*

$$\mathcal{M}_{\beta}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\beta}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathcal{M}_{\beta}(u \wedge v) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

VI Groupe orthogonal en dimension 2

Proposition 39.53. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note :*

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}).$$

Alors $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.

Corollaire 39.54. *On a les isomorphismes de groupes suivants :*

$$SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}.$$

Corollaire 39.55. *$SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.*

Lemme 39.56. *On suppose que $\dim E = 2$ et que E est orienté. Soit $f \in SO(E)$. Alors :*

$$\forall (\beta, \beta') \in \mathbb{B}^+(E)^2, \mathcal{M}_\beta(f) = \mathcal{M}_{\beta'}(f).$$

Proposition 39.57. *On suppose que $\dim E = 2$ et que E est orienté. Soit $f \in SO(E)$. Alors il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ t.q. $\mathcal{M}_\beta(f) = R(\theta)$. On dit que f est la rotation d'angle θ et on note $f = \rho_\theta$.*

Proposition 39.58.

$$O_2^-(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposition 39.59. *On suppose que $\dim E = 2$. Alors $O^-(E)$ est l'ensemble des symétries orthogonales par rapport à des droites :*

$$O^-(E) = \{\sigma_D, D \text{ droite vectorielle de } E\}.$$

Proposition 39.60. *On suppose que $\dim E = 2$ et que E est orienté. Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ et D, D' deux droites vectorielles de E , on a :*

- (i) $\rho_{\theta'} \circ \rho_\theta = \rho_{\theta'+\theta}$.
- (ii) $\rho_\theta \circ \sigma_D = \sigma_{\rho_{\theta/2}(D)}$.
- (iii) $\sigma_D \circ \rho_\theta = \sigma_{\rho_{-\theta/2}(D)}$.
- (iv) $\sigma_{D'} \circ \sigma_D = \rho_{2\varphi}$, où $\varphi = \widehat{(D, D')}$.

VII Réduction des endomorphismes orthogonaux

VII.1 Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux

Lemme 39.61. $f \in O(E)$.

- (i) $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.
- (ii) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors $f(F) = F$, $f(F^\perp) = F^\perp$, et les induits respectifs f_F et f_{F^\perp} de f sur F et F^\perp sont orthogonaux.
- (iii) Si $E \neq \{0\}$, alors f admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Démonstration. Voir propositions 39.28, 39.29 et 32.4. □

Théorème 39.62 (Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux). $f \in O(E)$. Alors il existe β base orthonormale de E , $(p, q, s) \in \mathbb{N}^3$, $0 < \theta_1 \leq \dots \leq \theta_s < \pi$ t.q.

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_s) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -I_q \end{bmatrix}.$$

$p, q, s, \theta_1, \dots, \theta_s$ ainsi définis sont uniques (mais pas β).

VII.2 Applications

Lemme 39.63. $SO(E)$ est connexe par arcs.

Proposition 39.64. $O(E)$ a exactement deux composantes connexes par arcs : $SO(E)$ et $O^-(E)$.

Corollaire 39.65. $\mathbb{B}(E)$ (muni de la topologie induite de E^n) a exactement deux composantes connexes par arcs : $\mathbb{B}^+(E)$ et $\mathbb{B}^-(E)$.

Proposition 39.66. $O(E)$ est engendré par l'ensemble des symétries hyperplanes.

Proposition 39.67. On note :

$$O_n(\mathbb{Q}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \cap O_n(\mathbb{R}).$$

Alors $O_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on note $s_U = \sigma_{\text{Vect}(U)^\perp} \in O(\mathbb{R}^n)$ (i.e. la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(U)^\perp$). Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^n . Montrer que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_U) = I_n - 2 \frac{U^t U}{\|U\|^2} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Cette écriture montre que, si $U \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_U) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_U) \in O_n(\mathbb{Q})$. Soit alors $A \in O_n(\mathbb{R})$. Selon la proposition 39.66, il existe H_1, \dots, H_p hyperplans de \mathbb{R}^n t.q.

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\sigma_{H_1}) \times \dots \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\sigma_{H_p}) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_{U_1}) \times \dots \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_{U_p}),$$

avec $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^p$. Or $\mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ est dense dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donc pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe une suite $V^{(i)} \in (\mathbb{Q}^n \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ t.q. $V_N^{(i)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} U_i$. Poser alors, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$B_N = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_{V_N^{(1)}}) \times \dots \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s_{V_N^{(p)}}) \in O_n(\mathbb{Q}).$$

Ainsi, $B_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} A$. □

Corollaire 39.68. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

Alors $S_n \cap \mathbb{Q}^{n+1}$ est dense dans S_n .

Démonstration. Soit $x \in S_n$. On complète x en une base orthonormale $\beta = (x, x_2, \dots, x_{n+1})$ de \mathbb{R}^{n+1} (muni de sa structure euclidienne canonique). On note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , et $P = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\beta) \in O_{n+1}(\mathbb{R})$. On a $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x) = P\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(e_1)$. Comme $P \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_{n+1}(\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ t.q. $Q_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} P$ (selon la proposition 39.67). Ainsi :

$$Q_N \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(e_1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} P \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(e_1) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x),$$

et $\forall N \in \mathbb{N}$, $Q_N \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(e_1) \in S_n \cap \mathbb{Q}^{n+1}$. □

Proposition 39.69. $f \in O(E)$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $m_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f^k$. Alors :

$$m_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} p_{E_1}(f),$$

où $p_{E_1}(f)$ est le projecteur orthogonal sur $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

VIII Réduction orientée des endomorphismes orthogonaux directs en dimension 3

Proposition 39.70. *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Soit $f \in SO(E) \setminus \{id_E\}$. Alors il existe $\beta = (u, v, w)$ base orthonormale directe de E et $\theta \in]0, 2\pi[$ t.q.*

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R(\theta) \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

On dit alors que f est la rotation d'angle θ autour de u , et on note $f = \rho_{u,\theta}$.

Proposition 39.71. *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Soit $u \in E$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors :*

$$\|\rho_{u,\theta} - id_E\| = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|.$$

Méthode 39.72. *On suppose que $\dim E = 3$ et que E est orienté. Soit $f \in SO(E) \setminus \{id_E\}$. On sait qu'il existe $u \in E$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ t.q. $f = \rho_{u,\theta}$.*

- (i) *Déterminer u revient à trouver les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1, i.e. résoudre le système linéaire $f(x) = x$.*
- (ii) *Pour déterminer θ , on peut remarquer que :*

$$\text{tr } f = 1 + 2 \cos \theta.$$

Ceci permet de déterminer θ au signe près. Et on a de plus :

$$\forall x \in E \setminus \text{Vect}(u), [u, x, f(x)] \text{ a le signe de } \sin \theta.$$

IX Procédé de Gram-Schmidt

IX.1 Point de vue vectoriel

Théorème 39.73 (Procédé de Gram-Schmidt). *(u_1, \dots, u_p) une famille libre de E . Alors il existe une unique famille orthogonale (v_1, \dots, v_p) t.q*

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (v_i - u_i) \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}).$$

On dit que (v_1, \dots, v_p) est l'orthogonalisation de Gram-Schmidt de (u_1, \dots, u_p) .

Démonstration. Pour $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on notera $F_i = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i)$. *Existence.* On pose, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$v_i = p_{F_{i-1}^\perp}(u_i) = u_i - p_{F_{i-1}}(u_i).$$

Vérifier que (v_1, \dots, v_p) convient. *Unicité.* Soit (w_1, \dots, w_p) ayant les mêmes qualités que (v_1, \dots, v_p) . Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i)$. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a donc $w_i \in F_{i-1}^\perp$. Et $u_i = (u_i - w_i) + w_i$; comme $(u_i - w_i) \in F_{i-1}$, il vient $w_i = p_{F_{i-1}^\perp}(u_i) = v_i$. \square

Remarque 39.74. On définit L_p l'ensemble des familles libres de p vecteurs de E , Ω_p l'ensemble des familles libres orthogonales de p vecteurs de E . Alors le procédé de Gram-Schmidt définit une application $\Gamma : L_p \rightarrow \Omega_p$. Comme l'orthogonalisé de Gram-Schmidt s'obtient à l'aide d'opérations de corps exclusivement, Γ est une fraction rationnelle. En particulier, Γ est continue.

Vocabulaire 39.75 (Orthonormalisé de Gram-Schmidt). (u_1, \dots, u_p) une famille libre de E , dont on note (v_1, \dots, v_p) l'orthogonalisé de Gram-Schmidt. On dit alors que le système $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_p}{\|v_p\|}\right)$ est l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de (u_1, \dots, u_p) .

Proposition 39.76. (u_1, \dots, u_p) une famille libre de E . Alors l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de (u_1, \dots, u_p) est l'unique famille $(w_1, \dots, w_p) \in E^p$ t.q.

- (i) (w_1, \dots, w_p) est un système orthonormal,
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $w_i \in (\mathbb{R}_+^*) u_i + \text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1})$.

Autrement dit, dans l'espace $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de passage de la base (u_1, \dots, u_p) à la base (w_1, \dots, w_p) est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Application 39.77. $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est trigonalisable, alors il existe une base orthonormale β de E t.q. $\mathcal{M}_\beta(f) \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R})$.

Proposition 39.78 (Inégalité de Hadamard). On suppose que E est orienté. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Alors :

$$|[u_1, \dots, u_n]| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|.$$

Démonstration. L'inégalité est clairement vérifiée si (u_1, \dots, u_n) est liée. On suppose donc que (u_1, \dots, u_n) est libre et on note (v_1, \dots, v_n) son orthogonalisé de Gram-Schmidt. Soit β une base orthonormale directe de E :

$$\begin{aligned} |[u_1, \dots, u_n]| &= \left| \det_\beta(u) \right| = \left| \det_\beta(v) \right| \cdot \left| \det_v(u) \right| = \left| \det_\beta(v) \right| \\ &= \|v_1\| \cdots \|v_n\| \cdot \left| \det_\beta \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right) \right| = \|v_1\| \cdots \|v_n\| \\ &\leq \|u_1\| \cdots \|u_n\|, \end{aligned}$$

car $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|v_i\| = \left\| p_{\text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1})^\perp}(u_i) \right\| \leq \|u_i\|$. \square

IX.2 Point de vue matriciel

Notation 39.79. *On note :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_n^{s+}(\mathbb{R}) &= \{T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R}), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_{ii} \in \mathbb{R}_+\} \\ \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R}) &= \{T \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R}), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_{ii} \in \mathbb{R}_+^*\}.\end{aligned}$$

Proposition 39.80 (Procédé de Gram-Schmidt).

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (\Omega, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R}), A = \Omega T.$$

Proposition 39.81. *On considère :*

$$\Theta : \left\{ \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, T) \longmapsto \Omega T \end{array} \right.$$

Alors Θ est un homéomorphisme.

Démonstration. Θ est bijective selon la proposition 39.80, et il est clair que Θ est \mathcal{C}^0 . Montrons que Θ^{-1} est \mathcal{C}^0 . Soit donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ t.q. $B_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$. On note $(U, T) = \Theta^{-1}(A)$ et $(V_p, S_p) = \Theta^{-1}(B_p)$, pour $p \in \mathbb{N}$. Soit W une valeur d'adhérence de V dans $O_n(\mathbb{R})$ (qui est compact) et j une extraction associée. On a alors :

$$S_{j(p)} = {}^tV_{j(p)} (V_{j(p)} S_{j(p)}) = {}^tV_{j(p)} B_{j(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} {}^tWUT.$$

On a ${}^tWUT \in GL_n(\mathbb{R})$. Et ${}^tWUT \in \mathfrak{T}_n^{s+}(\mathbb{R})$ (car $\mathfrak{T}_n^{s+}(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$). Donc ${}^tWUT \in \mathfrak{T}_n^{s++}(\mathbb{R})$. Donc $\Theta({}^tWU, T) = \Theta(I_n, {}^tWUT)$, d'où ${}^tWU = I_n$ et $W = U$. On a montré que U est la seule valeur d'adhérence de V . Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un compact, on a $V_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} U$ (c.f. théorème 14.31).

On en déduit aisément que $S_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} T$, ce qui prouve que Θ^{-1} est \mathcal{C}^0 . \square

Chapitre 40

Endomorphismes Autoadjoints

Notation 40.1. Dans ce chapitre, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n .

I Adjoint d'un endomorphisme

Définition 40.2 (Adjoint d'un endomorphisme). $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme u^* , appelé adjoint de u , t.q.

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle.$$

Proposition 40.3. $u \in \mathcal{L}(E)$. Si β est une base orthonormale de E , alors :

$$\mathcal{M}_\beta(u^*) = {}^t(\mathcal{M}_\beta(u)).$$

Proposition 40.4. On note :

$$\mathcal{A} : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{T} : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto {}^tM \end{cases}.$$

Si β est une base orthonormale, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{L}(E) \\ \mathcal{M}_\beta \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_\beta \\ \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Corollaire 40.5. On considère l'application $\mathcal{A} : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{cases}$. On a :

- (i) \mathcal{A} est linéaire.
- (ii) $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = id_{\mathcal{L}(E)}$.
- (iii) $\forall u \in \mathcal{L}(E), \begin{cases} \operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u \\ \operatorname{tr} u^* = \operatorname{tr} u \\ \det u^* = \det u \end{cases}$.

Proposition 40.6. $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

Proposition 40.7. $u \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :

- (i) $u \in O(E)$.
- (ii) $u^* \circ u = id_E$.
- (iii) $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = u^*$.

Lemme 40.8. $x \in E$.

$$\|x\| = \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} \langle x \mid y \rangle.$$

Autrement dit, $\| \langle x \mid \cdot \rangle \| = \|x\|$, où $\| \cdot \|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ subordonnée à $\| \cdot \|$ et $| \cdot |$.

Proposition 40.9. $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\| \|u^*\| \| = \| \|u\| \|,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\| \cdot \|$.

II Endomorphismes autoadjoints

Définition 40.10 (Endomorphisme autoadjoint). On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint lorsque $u^* = u$. On notera :

$$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), u^* = u\} = \operatorname{Ker} (\mathcal{A} - id_{\mathcal{L}(E)}),$$

avec $\mathcal{A} : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{cases}$.

Proposition 40.11. $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit β une base orthonormale de E . S'équivalent :

- (i) $u \in \mathcal{S}(E)$.
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle$.
- (iii) ${}^t(\mathcal{M}_\beta(u)) = \mathcal{M}_\beta(u)$.

Notation 40.12. On note :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), {}^tM = M\}.$$

Proposition 40.13. β une base orthonormale de E . Alors :

- (i) $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- (iii) $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta(\mathcal{S}(E))$.
- (iv) $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 40.14. F, G deux sous-espaces vectoriels de E t.q. $E = F \oplus G$. Alors la projection $\pi_{F,G}$ sur F parallèlement à G est autoadjointe ssi $G = F^\perp$.

III Théorème spectral

Lemme 40.15. $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormale diagonalisant u . Alors $u \in \mathcal{S}(E)$.

Lemme 40.16. $u \in \mathcal{S}(E)$.

- (i) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est stable par u , et les induits respectifs u_F et u_{F^\perp} de u sur F et F^\perp sont autoadjoints.
- (ii) Si $E \neq \{0\}$, alors u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Lemme 40.17. On suppose que $\dim E = 2$. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors il existe une base orthonormale diagonalisant u .

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E . On écrit $M = \mathcal{M}_\beta(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Il suffit de trouver $P \in SO_2(\mathbb{R})$ t.q. $PMP^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R})$. Autrement dit, il suffit de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $R(\theta)MR(\theta)^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R})$. Or, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} R(\theta)MR(\theta)^{-1} &\in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R}) \\ \iff \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} &\in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R}) \\ \iff b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a - c) \cos \theta \sin \theta &= 0 \\ \iff b \cos(2\theta) + \frac{a - c}{2} \sin(2\theta) &= 0 \\ \iff \langle r(\theta) \mid y \rangle &= 0, \end{aligned}$$

avec $r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a-c}{2} \end{pmatrix}$. Choisissons donc $\omega \in \text{Vect}(y)^\perp \setminus \{0\}$ (c'est possible car $\dim \text{Vect}(y)^\perp = \text{codim Vect}(y) \geq 1$). Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $\frac{\omega}{\|\omega\|} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix} = r(\theta)$. Et on a alors $R(\theta)MR(\theta)^{-1} \in \mathfrak{D}_2(\mathbb{R})$. \square

Théorème 40.18 (Théorème spectral). $u \in \mathcal{L}(E)$. *S'équivalent :*

- (i) $u \in \mathcal{S}(E)$.
- (ii) *Il existe une base orthonormale diagonalisant u .*

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Voir lemme 40.15. (i) \Rightarrow (ii) Par récurrence sur $\dim E$ en utilisant les lemmes 40.16 et 40.17. \square

Corollaire 40.19. $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}(E)$ ssi

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u)}^{\perp} E_{\lambda}(u),$$

où $E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Application 40.20. $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors :

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u)} |\lambda|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

IV Forme matricielle du théorème spectral

Vocabulaire 40.21 (Matrices orthogonalement semblables). Soit $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que A et B sont orthogonalement semblables lorsque :

$$\exists \Omega \in O_n(\mathbb{R}), A = {}^t\Omega B \Omega.$$

Théorème 40.22 (Théorème spectral). $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

- (i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) $\exists (\Omega, D) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{D}_n(\mathbb{R}), A = {}^t\Omega D \Omega$.
- (iii) *A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.*

Notation 40.23. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Dans ce paragraphe, on notera :

$$\Gamma(A) = \{\Omega A {}^t\Omega, \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}.$$

Lemme 40.24. $f \in \mathcal{S}(E)$. Alors il existe $x \in E$ t.q. $\|x\| = 1$ et :

$$\langle f(x) \mid x \rangle = \frac{\operatorname{tr} f}{n},$$

où $n = \dim E$.

Démonstration. On peut supposer $\dim E \geq 2$. f est autoadjoint donc diagonalisable : soit $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f . On note $\Sigma = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ et :

$$r : x \in \Sigma \longmapsto \langle f(x) \mid x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Σ est connexe par arcs (c.f. proposition 16.14) et r est \mathcal{C}^0 , donc $r(\Sigma)$ est un intervalle. Or $\lambda_1 \in r(\Sigma)$, $\lambda_n \in r(\Sigma)$, donc :

$$\frac{\operatorname{tr} f}{n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \in [\lambda_1, \lambda_n] \subset r(\Sigma).$$

□

Proposition 40.25. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- (i) $\Gamma(A)$ est un compact de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) $\Gamma(A)$ contient des matrices diagonales.
- (iii) $\Gamma(A)$ contient des matrices à diagonale constante.

Démonstration. (iii) Par récurrence sur n . Le résultat est vrai pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ t.q. le résultat est vrai au rang $(n - 1)$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit E un espace euclidien de dimension n , β une base orthonormale de E , et $f \in \mathcal{S}(E)$ t.q. $A = \mathcal{M}_\beta(f)$. Selon le lemme 40.24, il existe $e_n \in E$ avec $\|e_n\| = 1$ t.q. $\langle f(e_n) \mid e_n \rangle = \frac{\operatorname{tr} A}{n}$. On note alors $F = \operatorname{Vect}(e_n)^\perp$. Soit \mathcal{B}_F une base orthonormale de F , et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup \{e_n\}$. Donc :

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{bmatrix} \hat{A} & X \\ {}^tX & \frac{\operatorname{tr} A}{n} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car \mathcal{B} est orthonormale. Donc $\hat{A} \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$. Donc il existe $\hat{Q} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ t.q. ${}^t\hat{Q}\hat{A}\hat{Q}$ est à diagonale constante, de termes diagonaux $\frac{1}{n-1} \operatorname{tr} ({}^t\hat{Q}\hat{A}\hat{Q}) = \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} \hat{A} = \frac{\operatorname{tr} A}{n}$. On pose alors :

$$Q = \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors ${}^tQ\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)Q$ est à diagonale constante, et la récurrence se propage. □

Proposition 40.26. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On considère :

$$\begin{aligned}\alpha : M \in \Gamma(A) &\longmapsto \sum_{i=1}^n M_{ii} = \operatorname{tr} M, \\ \beta : M \in \Gamma(A) &\longmapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}^2 = \operatorname{tr} ({}^t M M), \\ \gamma : M \in \Gamma(A) &\longmapsto \sum_{i=1}^n M_{ii}^2.\end{aligned}$$

Alors :

- (i) $\forall M \in \Gamma(A), \alpha(M) = \operatorname{tr} A,$
- (ii) $\forall M \in \Gamma(A), \beta(M) = \operatorname{tr} ({}^t A A),$
- (iii) $\min_{M \in \Gamma(A)} \gamma(M) = \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{n}$ et $\max_{M \in \Gamma(A)} \gamma(M) = \operatorname{tr} ({}^t A A).$

Chapitre 41

Compléments sur les Endomorphismes Autoadjoints

Notation 41.1. Dans ce chapitre, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n .

I Codiagonalisation des endomorphismes autoadjoints

Proposition 41.2. $(f, g) \in \mathcal{S}(E)^2$. Alors :

$$(g \circ f) \in \mathcal{S}(E) \iff g \circ f = f \circ g.$$

Théorème 41.3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(E)$. S'équivalent :

- (i) Les éléments de \mathcal{A} commutent deux à deux.
- (ii) Il existe une base orthonormale diagonalisant tous les éléments de \mathcal{A} .

Démonstration. Même principe que le théorème 32.6. □

Corollaire 41.4. $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. S'équivalent :

- (i) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, AB = BA$.
- (ii) $\exists \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{A}, {}^t\Omega A \Omega \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$.

II Quotient de Rayleigh

Définition 41.5 (Quotient de Rayleigh). $f \in \mathcal{S}(E)$. On définit le quotient de Rayleigh de f par :

$$r : x \in \Sigma \mapsto \langle f(x) | x \rangle \in \mathbb{R},$$

où $\Sigma = \{x \in E, \|x\| = 1\}$.

Proposition 41.6. $f \in \mathcal{S}(E)$. On note r le quotient de Rayleigh de f . Comme Σ est compact et r est C^0 , r présente un maximum et un minimum, qui sont tous deux atteints en un vecteur propre de f .

Démonstration. On suppose que $\dim E \geq 2$ (sinon le résultat reste vrai). Soit $u \in \Sigma$ t.q. $r(u) = \max_{x \in \Sigma} r(x)$. Soit $w \in \Sigma$ t.q. $w \perp u$. On pose :

$$v : \theta \in \mathbb{R} \mapsto (\cos \theta) u + (\sin \theta) w \in \Sigma \quad \text{et} \quad \varrho = r \circ v.$$

ϱ présente un maximum en 0. Or, ϱ est dérivable et :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \varrho'(\theta) = \sin(2\theta) (r(w) - r(u)) + 2 \cos(2\theta) \langle w | f(u) \rangle.$$

Donc $2 \langle w | f(u) \rangle = \varrho'(0) = 0$. Donc $w \perp f(u)$. Ceci montre que :

$$\forall x \in \text{Vect}(u)^\perp, f(u) \perp x.$$

Autrement dit, $\text{Vect}(u)^\perp \subset \text{Vect}(f(u))^\perp$, d'où $\text{Vect}(f(u)) \subset \text{Vect}(u)$. Donc $f(u) \in \text{Vect}(u)$, i.e. u est un vecteur propre de f . Le raisonnement est identique pour le minimum. \square

Corollaire 41.7. $f \in \mathcal{S}(E)$. Alors :

$$\min_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle = \min \text{Sp}(f) \quad \text{et} \quad \max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle = \max \text{Sp}(f).$$

III Autoadjoints positifs et définis positifs

Définition 41.8 (Autoadjoint positif). $f \in \mathcal{S}(E)$. S'équivalent :

- (i) $\forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle \geq 0$.
- (ii) $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

On dit alors que f est positif. On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des autoadjoints positifs de E .

Proposition 41.9. $\mathcal{S}^+(E)$ est un convexe fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 41.10. $\mathcal{S}^+(E)$ est un cône convexe, i.e.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathcal{S}^+(E), (\lambda f) \in \mathcal{S}^+(E).$$

Définition 41.11 (Autoadjectif défini positif). $f \in \mathcal{S}(E)$. S'équivalent :

- (i) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle f(x) | x \rangle > 0$.
- (ii) $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On dit alors que f est défini positif. On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des autoadjooints définis positifs de E .

Proposition 41.12. $\mathcal{S}^{++}(E) \subset \mathcal{S}^+(E) \subset \mathcal{S}(E)$.

Proposition 41.13. $\mathcal{S}^{++}(E)$ est un ouvert convexe de $\mathcal{S}(E)$.

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{S}^{++}(E)$ est convexe ; montrons que c'est un ouvert de $\mathcal{S}(E)$. Soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$. On pose :

$$\rho = \min_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle > 0.$$

On munit $\mathcal{S}(E)$ de $\|\cdot\|$ (restriction de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$). Montrer alors que $\mathcal{B}_o(f, \rho) \subset \mathcal{S}^{++}(E)$. \square

Proposition 41.14. On se place dans $\mathcal{S}(E)$. Alors :

$$\mathcal{S}^+(E) = \overline{\mathcal{S}^{++}(E)} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^{++}(E) = \overbrace{\mathcal{S}^+(E)}^{\circ}.$$

Lemme 41.15. $\forall f \in \mathcal{L}(E), (f^* \circ f) \in \mathcal{S}^+(E)$.

Proposition 41.16. $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\|f\| = \sqrt{\max \text{Sp}(f^* \circ f)},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

IV Théorème min-max

Notation 41.17. Pour $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\mathcal{G}_d(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d .

Notation 41.18. $f \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1(f) \leq \dots \leq \lambda_n(f)$ t.q.

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (\lambda_i(f) - X).$$

Théorème 41.19 (Théorème min-max). $f \in \mathcal{S}(E)$. Alors :

$$\forall d \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_d(f) = \min_{F \in \mathcal{G}_d(E)} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle.$$

Démonstration. Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E t.q.

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \text{diag}(\lambda_1(f), \dots, \lambda_n(f)).$$

(\geq) Soit $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $F_0 = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \mathcal{G}_d(E)$. On note f_{F_0} l'induit de f sur F_0 . On a $f_{F_0} \in \mathcal{S}(F_0)$, donc d'après le corollaire 41.7 :

$$\lambda_d(f) = \max \text{Sp}(f_{F_0}) = \max_{\substack{x \in F_0 \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle \geq \inf_{F \in \mathcal{G}_d(E)} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle.$$

(\leq) Soit $F \in \mathcal{G}_d(E)$. On pose $G_0 = \text{Vect}(\varepsilon_d, \dots, \varepsilon_n) \in \mathcal{G}_{n-d+1}(E)$. On a :

$$\dim(F \cap G_0) = \dim F + \dim G_0 - \dim(F + G_0) \geq d + (n - d + 1) - n = 1.$$

Soit donc $u \in (F \cap G_0) \setminus \{0\}$ avec $\|u\| = 1$. Ainsi, en notant f_{G_0} l'induit de f sur G_0 , on a $f_{G_0} \in \mathcal{S}(G_0)$, donc d'après le corollaire 41.7 :

$$\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x) | x \rangle \geq \langle f(u) | u \rangle \geq \min_{\substack{y \in G_0 \\ \|y\|=1}} \langle f(y) | y \rangle = \min \text{Sp}(f_{G_0}) = \lambda_d(f).$$

Il suffit alors de passer à l'inf sur F . □

Lemme 41.20. (X, d) un espace métrique, $f \in (\mathbb{R}^X)^\Lambda$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que :

- (i) $\forall \lambda \in \Lambda$, f_λ est ρ -lipschitzienne,
- (ii) $\forall x \in X$, $\sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) < +\infty$.

Alors la fonction

$$M : x \in X \mapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \in \mathbb{R}$$

est ρ -lipschitzienne.

Remarque 41.21. Le lemme 41.20 reste valable en remplaçant sup par inf.

Application 41.22. Pour $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on s'intéresse à la fonction

$$\lambda_d : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathbb{R}$$

(c.f. notation 41.18). On munit $\mathcal{S}(E)$ de $\|\cdot\|$ (restriction de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$). Alors λ_d est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Appliquer le théorème 41.19, puis appliquer deux fois le lemme 41.20. □

V Matrices symétriques positives et définies positives

Définition 41.23. On définit :

- (i) $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0\}$,
- (ii) $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0\}$.

Proposition 41.24. Si β est une base orthonormale de E , alors :

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta(\mathcal{S}^+(E)) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta(\mathcal{S}^{++}(E)).$$

Corollaire 41.25. On a :

- (i) $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+\}$,
- (ii) $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*\}$.

Lemme 41.26. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det A > 0$.

Théorème 41.27. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. S'équivalent :

- (i) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- (ii) Les mineurs principaux de A sont tous strictement positifs.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Montrer que toutes les sous-matrices carrées de A correspondant à des mineurs principaux sont symétriques définies positives, et conclure à l'aide du lemme 41.26. (ii) \Rightarrow (i) D'après le théorème 27.67, A possède une décomposition LU :

$$A = LU, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L \in \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{R}) \\ U \in \mathfrak{T}_n^s(\mathbb{R}) \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_{ii} = 1 \end{cases}.$$

On a alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, U_{11} \cdots U_{ii} = \mu_i(U) = \mu_i(A) > 0$, où $\mu_i(M)$ désigne le mineur principal d'ordre i de la matrice M . On en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, U_{ii} > 0.$$

On pose alors $D = \text{diag}(U_{11}, \dots, U_{nn})$, puis $L' = D^{-1}U$. Ainsi :

$$LU = A = {}^tA = {}^t(LDL') = {}^tL' (D^tL).$$

Par unicité de la décomposition LU, il vient $L = {}^tL'$. Donc $A = LD^tL$. En déduire $\forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$. \square

Lemme 41.28. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 41.29. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

- (i) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- (ii) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), A = {}^tPP$.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Clair. (i) \Rightarrow (ii) D'après le théorème 40.18, il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ t.q. $A = \Omega \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^t\Omega$. On pose alors $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Ainsi :

$$A = \Omega (\Delta^2) {}^t\Omega = {}^t(\Omega \Delta {}^t\Omega) (\Omega \Delta {}^t\Omega),$$

d'où le résultat car $(\Omega \Delta {}^t\Omega) \in GL_n(\mathbb{R})$. □

Corollaire 41.30. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *S'équivalent :*

- (i) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- (ii) $\forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$.
- (iii) $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- (iv) *Les mineurs principaux de A sont tous strictement positifs.*
- (v) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), A = {}^tPP$.

Proposition 41.31. *L'application*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{T}_n^{i++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto {}^tAA \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme, où $\mathfrak{T}_n^{i++}(\mathbb{R}) = \{T \in \mathfrak{T}_n^i(\mathbb{R}), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_{ii} \in \mathbb{R}_+^\}$.*

Corollaire 41.32.

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \sim \mathfrak{T}_n^{i++}(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times (\mathbb{R}_+^*)^n \sim \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

où \sim désigne la relation d'homéomorphisme.

Remarque 41.33. *On peut montrer que si F est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{U} est un ouvert convexe non vide de F , alors $\mathcal{U} \sim F$. On retrouve ainsi le résultat du corollaire 41.32.*

VI Décomposition polaire

Lemme 41.34. *On considère :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{S}^+(E) \longrightarrow \mathcal{S}^+(E) \\ f \longmapsto f^2 \end{array} \right.$$

- (i) Φ est bijective.
- (ii) $\Phi(\mathcal{S}^{++}(E)) = \mathcal{S}^{++}(E)$.
- (iii) Φ est un homéomorphisme.

Notation 41.35. Pour $g \in \mathcal{S}^+(E)$, on notera \sqrt{g} l'unique élément de $\mathcal{S}^+(E)$ t.q.

$$g = (\sqrt{g})^2.$$

Théorème 41.36 (Décomposition polaire).

$$\forall f \in GL(E), \exists! (\omega, s) \in O(E) \times \mathcal{S}^{++}(E), f = \omega \circ s.$$

Cette écriture est appelée décomposition polaire de f .

Démonstration. Soit $f \in GL(E)$. *Unicité.* Soit $(\omega, s) \in O(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ t.q. $f = \omega \circ s$. Alors :

$$f^* \circ f = (\omega \circ s)^* \circ (\omega \circ s) = s \circ \omega^* \circ \omega \circ s = s^2.$$

Et $(f^* \circ f) \in \mathcal{S}^{++}(E)$, donc $s = \sqrt{f^* \circ f} \in \mathcal{S}^{++}(E)$. On a alors $\omega = f \circ s^{-1}$. *Existence.* On pose $s = \sqrt{f^* \circ f} \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $\omega = f \circ s^{-1}$. On a bien $f = \omega \circ s$; reste à prouver que $\omega \in O(E)$. En effet :

$$\omega^* \circ \omega = (f \circ s^{-1})^* \circ (f \circ s^{-1}) = s^{-1} \circ f^* \circ f \circ s^{-1} = s^{-1} \circ s^2 \circ s^{-1} = id_E.$$

□

Proposition 41.37. On pose :

$$\mathfrak{P} : \begin{cases} O(E) \times \mathcal{S}^{++}(E) \longrightarrow GL(E) \\ (\omega, s) \longmapsto \omega \circ s \end{cases}.$$

Alors \mathfrak{P} est un homéomorphisme.

Démonstration. Même principe que la proposition 39.81. □

Corollaire 41.38. Selon le corollaire 41.32 et la proposition 41.37, on a :

$$GL_n(\mathbb{R}) \sim O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sim SO_n(\mathbb{R}) \times \{0, 1\} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

où \sim désigne la relation d'homéomorphisme.

Théorème 41.39 (Décomposition polaire).

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = \Omega S.$$

Cette écriture est appelée décomposition polaire de A .

Lemme 41.40. $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Voir proposition 32.16. □

Proposition 41.41.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), A = \Omega S.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Selon le lemme 41.40, il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ t.q. $B_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$. Or, selon le théorème 41.39, pour $p \in \mathbb{N}$, il existe $(U_p, T_p) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ t.q. $B_p = U_p T_p$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, soit alors $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et j une extraction t.q. $U_{j(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \Omega$. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^t\Omega A &= \lim_{p \rightarrow +\infty} ({}^tU_{j(p)} B_{j(p)}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} ({}^tU_{j(p)} U_{j(p)} T_{j(p)}) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} T_{j(p)} \in \overline{\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $(\Omega, {}^t\Omega A) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ convient. □

Application 41.42. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|$. On note :

$$B = \{f \in \mathcal{L}(E), \|\|f\|\| \leq 1\}.$$

Alors :

$$B = \text{Conv}(O(E)),$$

où $\text{Conv}(O(E))$ est l'enveloppe convexe de $O(E)$, i.e. le plus petit convexe de $\mathcal{L}(E)$ contenant $O(E)$.

Démonstration. (\supset) $B \supset O(E)$ et B est convexe donc $B \supset \text{Conv}(O(E))$. (\subset) Soit $f \in B$. Selon la proposition 41.41, soit $(\omega, s) \in O(E) \times \mathcal{S}^+(E)$ t.q. $f = \omega \circ s$. On a alors :

$$\|\|s\|\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|s(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\omega(s(x))\|}{\|x\|} = \|\|\omega \circ s\|\| = \|\|f\|\| \leq 1.$$

Soit alors β une base orthonormale de E , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ t.q. $\mathcal{M}_\beta(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $\|\|s\|\| \leq 1$, on a :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \subset [-1, 1]^n \subset \text{Conv}(\{-1, 1\}^n).$$

Donc il existe une fonction $\alpha : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ t.q.

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \alpha(\varepsilon) \cdot (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \quad \text{et} \quad 1 = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \alpha(\varepsilon).$$

Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, on pose $\delta_\varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\mathcal{M}_\beta(\delta_\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On a alors $\delta_\varepsilon \in \mathcal{S}(E) \cap O(E)$. Ainsi :

$$f = \omega \circ s = \omega \circ \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \alpha(\varepsilon) \delta_\varepsilon \right) = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \alpha(\varepsilon) (\omega \circ \delta_\varepsilon) \in \text{Conv}(O(E)).$$

□

VII Forme ultime du théorème spectral

Théorème 41.43. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(P, \Delta) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$ t.q.

$$A = {}^t P P \quad \text{et} \quad B = {}^t P \Delta P.$$

Démonstration. Selon la proposition 41.29, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ t.q. $A = {}^t Q Q$. Autrement dit, ${}^t Q^{-1} A Q^{-1} = I_n$. On définit alors :

$$S = {}^t Q^{-1} B Q^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Comme $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Pi \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$ t.q. $S = {}^t \Pi \Delta \Pi$. Donc :

$$A = {}^t Q Q = {}^t (\Pi Q) (\Pi Q) \quad \text{et} \quad B = {}^t Q S Q = {}^t (\Pi Q) \Delta (\Pi Q).$$

□

Notation 41.44. On définit \preccurlyeq sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2, A \preccurlyeq B \iff (\forall X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \leqslant {}^t X B X).$$

\preccurlyeq est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 41.45. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A \succcurlyeq 0\}$.

Proposition 41.46. $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Alors :

$$0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B \implies 0 \leqslant \det A \leqslant \det B.$$

Démonstration. Supposons $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B$. *Premier cas :* $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ t.q. ${}^t X B X = 0$. Alors ${}^t X A X \leqslant {}^t X B X = 0$, donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $0 = \det A = \det B$. *Second cas :* $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors selon le théorème 41.43, il existe $(P, \Delta) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{D}_n(\mathbb{R})$ t.q.

$$A = {}^t P \Delta P \quad \text{et} \quad B = {}^t P P.$$

En utilisant le fait que $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B$, montrer que $0 \preccurlyeq \Delta \preccurlyeq I_n$, puis en déduire que $0 \leqslant \det \Delta \leqslant 1$. Ainsi :

$$0 \leqslant \underbrace{(\det P)^2 \det \Delta}_{\det A} \leqslant \underbrace{(\det P)^2}_{\det B}.$$

□

VIII Matrices antisymétriques

Définition 41.47. On définit :

- (i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), {}^tM = -M\}$,
- (ii) $\mathcal{A}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E), f^* = -f\}$.

Proposition 41.48. β une base orthonormale de E . Alors :

- (i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- (iii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_\beta(\mathcal{A}(E))$.
- (iv) $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}(E) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Définition 41.49 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$). On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}({}^tAB) \end{cases}.$$

La base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale de $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Proposition 41.50. On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$. Si A et B sont orthogonalement semblables, alors :

$$\|A\| = \|B\|.$$

Proposition 41.51. On munit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Alors :

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 41.52. $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Utiliser le théorème 39.62. □

Lemme 41.53. $\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \text{Sp}_\mathbb{R}(A) \subset \{0\}$.

Remarque 41.54. Toute matrice non nulle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est non diagonalisable. De plus, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est de dimension maximale parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété.

Lemme 41.55. $u \in \mathcal{A}(E)$.

- (i) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est stable par u , et les induits respectifs u_F et u_{F^\perp} de u sur F et F^\perp sont anti-symétriques.
- (ii) Si $E \neq \{0\}$, alors u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Notation 41.56. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $K(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 41.57 (Théorème de réduction des endomorphismes antisymétriques). $f \in \mathcal{A}(E)$. Alors il existe β base orthonormale de E , $s \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_s$ t.q.

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{bmatrix} K(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & K(\alpha_s) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

De plus, $s, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ ainsi définis sont uniques.

IX Déterminant de Gram

Définition 41.58 (Matrice de Gram). Pour $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, on définit la matrice de Gram de (u_1, \dots, u_p) par :

$$G(u_1, \dots, u_p) = (\langle u_i | u_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R}).$$

On définit de plus le déterminant de Gram de (u_1, \dots, u_p) par :

$$\gamma(u_1, \dots, u_p) = \det G(u_1, \dots, u_p).$$

Lemme 41.59. $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Alors :

$$\forall X \in \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R}), {}^t X G(u_1, \dots, u_p) X = \left\| \sum_{i=1}^p X_i u_i \right\|^2.$$

Proposition 41.60. $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

- (i) $G(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
- (ii) $G(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}) \iff (u_1, \dots, u_p)$ est libre.
- (iii) $\gamma(u_1, \dots, u_p) \geq 0$, avec égalité ssi (u_1, \dots, u_p) est liée.

Lemme 41.61. $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, $(v_1, \dots, v_q) \in E^q$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ t.q. $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $v_j = \sum_{i=1}^p P_{ij} u_i$. Alors :

$$G(v_1, \dots, v_q) = {}^t P G(u_1, \dots, u_p) P.$$

Lemme 41.62. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in E^m$ un système orthonormal. On note $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$. Alors :

$$\forall z \in E, d(z, F)^2 = \gamma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, z).$$

Proposition 41.63. $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ un système libre. On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$. Alors :

$$\forall z \in E, d(z, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x_1, \dots, x_m, z)}{\gamma(x_1, \dots, x_m)}}.$$

Chapitre 42

Espaces Préhilbertiens Réels

Notation 42.1. Dans ce chapitre, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

I Généralités

Proposition 42.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Proposition 42.3 (Identité de polarisation).

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right).$$

Proposition 42.4 (Identité du parallélogramme).

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

II Projection sur un compact convexe

Proposition 42.5. K un compact convexe non vide de E . Alors :

$$\forall m \in E, \exists ! k \in K, \|m - k\| = d(m, K).$$

Notation 42.6. K un compact convexe non vide de E . On définit $\pi_K : E \rightarrow K$ t.q.

$$\forall m \in E, \|m - \pi_K(m)\| = d(m, K).$$

Lemme 42.7. *K un compact convexe non vide de E . Alors l'application $m \in E \mapsto d(m, K) \in \mathbb{R}_+$ est continue car 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Voir proposition 13.24. □

Proposition 42.8. *K un compact convexe non vide de E . Alors :*

$$\pi_K \in \mathcal{C}^0(E, K).$$

Démonstration. Voir proposition 14.32. □

Remarque 42.9. *Si F est un fermé convexe non vide de E t.q. $\text{Vect}(F)$ est de dimension finie, alors les résultats ci-dessus restent valables en remplaçant K par F .*

Proposition 42.10. *K un compact convexe non vide de E . $a \in E$. Alors $\pi_K(a)$ est l'unique élément de K vérifiant :*

$$\forall q \in K, \langle a - \pi_K(a) \mid q - \pi_K(a) \rangle \leq 0.$$

Proposition 42.11. *K un compact convexe non vide de E . Alors π_K est 1-lipschitzienne.*

III Formes linéaires

Proposition 42.12. *On considère :*

$$\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{L}_C(E, \mathbb{R}) \\ u \longmapsto \langle u \mid \cdot \rangle \end{cases}.$$

Alors Φ est injective et conserve la norme. Et Φ est surjective ssi E est de Banach.

Exemple 42.13. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2, \langle f \mid g \rangle = \int_0^1 fg$. Alors l'application*

$$\delta : f \in E \mapsto f(1) \in \mathbb{R}$$

est linéaire mais pas continue.

Exemple 42.14. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2, \langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^1 fg$. Alors l'application*

$$\alpha : f \in E \mapsto \int_0^1 f \in \mathbb{R}$$

est linéaire et continue, mais :

$$\alpha \notin \{ \langle u \mid \cdot \rangle, u \in E \}.$$

IV Orthogonalité

Définition 42.15 (Vecteurs orthogonaux). $(x, y) \in E^2$. S'équivalent :

- (i) $\langle x | y \rangle = 0$.
- (ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

On dit alors que x et y sont orthogonaux, et on note $x \perp y$.

Définition 42.16 (Orthogonal d'une partie). $A \subset E$. On pose :

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, x \perp a\} = \{x \in E, \text{Ker}(\langle x | \cdot \rangle) \supset A\}.$$

Proposition 42.17.

- (i) $A \subset E$. Alors $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
- (ii) F un sous-espace vectoriel de E . Alors $F^\perp = \overline{F}^\perp$.

Proposition 42.18. F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$F \subset \overline{F} \subset (F^\perp)^\perp.$$

Corollaire 42.19. F un sous-espace vectoriel de E . Si $F = (F^\perp)^\perp$, alors F est fermé.

Proposition 42.20. F un sous-espace vectoriel de E . Alors $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Exemple 42.21. On se place dans $E = \ell^2(\mathbb{N})$ (c.f. définition 4.5), muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $e_p = (\delta_{np})_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Et on pose :

$$F = \text{Vect}(e_p, p \in \mathbb{N}) = \{u \in E, u \text{ stationne en } 0\}.$$

Alors :

$$F \subsetneq \overline{F} = E.$$

Exemple 42.22. On se place dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f g$. On note :

$$F = \{f \in E, f_{|[-1, 0]} = 0\}.$$

Alors :

- (i) $F^\perp = \{f \in E, f_{|[0, 1]} = 0\}$.
- (ii) F et F^\perp sont fermés.
- (iii) $F \oplus F^\perp = \{f \in E, f(0) = 0\} \subsetneq E$.
- (iv) $F \oplus F^\perp$ n'est pas fermé.

V Projections orthogonales

Proposition 42.23. *F un sous-espace vectoriel de E , $x \in F \oplus F^\perp$. Soit $(p, q) \in F \times F^\perp$ t.q. $x = p + q$. Alors :*

$$\|x - p\| = d(x, F).$$

Plus précisément : $\forall f \in F \setminus \{p\}$, $\|x - p\| < \|x - f\|$.

Proposition 42.24. *F un sous-espace vectoriel de E , $x \in E$. S'équivalent :*

- (i) $x \in F \oplus F^\perp$.
- (ii) $\exists p \in F, \forall f \in F, \|x - p\| \leq \|x - f\|$.

Exemple 42.25. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que :

$$\forall A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, \mathbb{P}(A) > 0.$$

On note \mathfrak{M}_2 l'ensemble des variables aléatoires discrètes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ admettant un moment d'ordre 2. On se place dans l'espace vectoriel \mathfrak{M}_2 , qu'on munit du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathfrak{M}_2)^2, \langle X | Y \rangle = E(XY).$$

Alors :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_2, V(X) = \|X - E(X)\|^2 = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|X - \lambda\|^2.$$

Proposition 42.26. *F un sous-espace vectoriel de E .*

- (i) *Si $E = F \oplus F^\perp$, alors F est fermé.*
- (ii) *Si $E = F \oplus F^\perp$, alors $E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$.*

Proposition 42.27. *F un sous-espace vectoriel de E . Si F est de dimension finie, alors :*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Comme F est de dimension finie, montrer avec le corollaire 15.26 que $d(x, F)$ est réalisée puis conclure avec la proposition 42.24. \square

Définition 42.28 (Projection orthogonale). *F un sous-espace vectoriel de E t.q. $E = F \oplus F^\perp$. On appelle alors projection orthogonale sur F , et on note p_F , la projection sur F parallèlement à F^\perp .*

VI Familles orthonormales

Vocabulaire 42.29 (Famille orthogonale, orthonormale). $u \in E^I$.

(i) On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthogonale lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies u_i \perp u_j.$$

(ii) On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormale lorsqu'elle est orthogonale et que $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$.

Proposition 42.30. Si E est de dimension infinie, alors E admet une famille orthonormale $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. E étant de dimension infinie, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de E . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $(\varepsilon_0^{(n)}, \dots, \varepsilon_n^{(n)})$ l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de (u_0, \dots, u_n) (dans l'espace euclidien $\text{Vect}(u_0, \dots, u_n)$). Notons que, pour $(k, p, q) \in \mathbb{N}^3$ avec $p \geq k$ et $q \geq k$, on a $\varepsilon_k^{(p)} = \varepsilon_k^{(q)}$ par unicité dans le procédé de Gram-Schmidt. Ainsi, $(\varepsilon_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convient. \square

Proposition 42.31. On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E . On note $F_n = \text{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. F_n étant de dimension finie, la projection orthogonale p_{F_n} est bien définie, et :

$$\forall x \in E, p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^n \langle \varepsilon_k \mid x \rangle \varepsilon_k.$$

Proposition 42.32 (Inégalité de Bessel). On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E . Alors :

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \langle \varepsilon_k \mid x \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Corollaire 42.33. On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E . Alors :

$$\forall x \in E, \langle \varepsilon_n \mid x \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Proposition 42.34. On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E . On note $F_n = \text{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, et on pose :

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \text{Vect}(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}).$$

Soit $x \in E$. S'équivalent :

- (i) $x \in \overline{G}$.
- (ii) $p_{F_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
- (iii) $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varepsilon_n | x \rangle^2$.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) Clair. (i) \Rightarrow (ii) Montrons premièrement que $d(x, F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, G)$. Soit en effet $\varepsilon > 0$. Soit $g \in G$ t.q. $d(x, G) \leq \|x - g\| \leq d(x, G) + \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $g \in F_{n_0}$. Alors $g \in \bigcap_{n \geq n_0} F_n$, donc $\forall n \geq n_0$, $d(x, F_n) \leq \|x - g\| \leq d(x, G) + \varepsilon$, d'où :

$$\forall n \geq n_0, d(x, G) \leq d(x, F_n) \leq d(x, G) + \varepsilon.$$

Donc $d(x, F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, G)$. Ainsi, comme $x \in \overline{G}$:

$$\|x - p_{F_n}(x)\| = d(x, F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, G) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Clair avec la proposition 42.31. (iii) \Rightarrow (ii) On a :

$$\|x - p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle \varepsilon_k | x \rangle^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Proposition 42.35 (Identité de Parseval). *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E . Alors :*

$$\forall x \in E, \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varepsilon_n | x \rangle^2 \leq \|x\|^2,$$

avec égalité ssi $x \in \overline{\text{Vect}(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})}$.

Proposition 42.36. *On suppose que E est de dimension infinie, et on note $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E . Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

- (i) *Si $\sum a_n \varepsilon_n$ converge, alors $\sum a_n^2$ converge.*
- (ii) *Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \langle \varepsilon_n | x \rangle$.*

Exemple 42.37. *On se place dans $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u \text{ stationne en } 0\}$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $e_p = (\delta_{np})_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Alors $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge mais $\sum \frac{e_n}{n+1}$ diverge au sens de E .*

VII Espaces séparables et familles totales

Définition 42.38 (Espace séparable). *On dit qu'un espace métrique (X, d) est séparable lorsqu'il existe $D \subset X$ dénombrable et dense dans X .*

Proposition 42.39. *Toute partie d'un espace métrique séparable est séparable.*

Proposition 42.40. *Tout \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie est séparable (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).*

Proposition 42.41. *Soit (F, ν) un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension infinie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). S'équivalent :*

- (i) (F, ν) est séparable.
- (ii) Il existe une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $F = \overline{\text{Vect}(u_n, n \in \mathbb{N})}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Clair. (ii) \Rightarrow (i) On note Δ une partie dénombrable et dense de \mathbb{K} ($\Delta = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\Delta = \mathbb{Q}[i]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Et on pose :

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Delta u_0 + \cdots + \Delta u_n).$$

Montrer que D est dénombrable et dense dans F . □

Proposition 42.42. *Soit (F, ν) un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension infinie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). S'équivalent :*

- (i) (F, ν) est séparable.
- (ii) Il existe une famille libre $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $F = \overline{\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})}$.

Proposition 42.43. *On suppose que E est de dimension infinie. S'équivalent :*

- (i) $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est séparable.
- (ii) Il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $E = \overline{\text{Vect}(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})}$.

Proposition 42.44. *On suppose que E est séparable et de dimension infinie. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E t.q. $E = \overline{\text{Vect}(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})}$. On considère :*

$$\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto (\langle \varepsilon_n | x \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

(c.f. définition 4.5). Alors Φ est linéaire, injective et conserve le produit scalaire (donc la norme).

Exemple 42.45. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors $C^0([a, b], \mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire usuel) est séparable.

Démonstration. Selon la proposition 12.23, $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable. En déduire le résultat en utilisant le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme hilbertienne $\|\cdot\|_2$. \square

Vocabulaire 42.46 (Famille totale). *On appelle famille totale de E toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E t.q.*

$$E = \overline{\text{Vect}(u_i, i \in I)}.$$

Exemple 42.47. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\gamma_n : t \in [a, b] \mapsto t^n \in \mathbb{R}$. Alors la famille $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire usuel).

Proposition 42.48. $(u_i)_{i \in I}$ une famille totale de E . On considère :

$$\Psi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^I \\ x \longmapsto (\langle u_i | x \rangle)_{i \in I} \end{cases}.$$

Ψ est linéaire et injective.

VIII Polynômes orthogonaux

Notation 42.49. Dans ce paragraphe, I est un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $w \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_+^*)$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(t \in I \mapsto w(t)t^n)$ est intégrable.

Notation 42.50. On pose :

$$E_w = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}), wf^2 \text{ est intégrable}\}.$$

Proposition 42.51.

- (i) E_w est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
- (ii) $E_w \supset \mathbb{R}[X]$ (on identifie $\mathbb{R}[X]$ à $\{(t \in I \mapsto P(t)), P \in \mathbb{R}[X]\}$)

Notation 42.52. On munit E_w du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in (E_w)^2, \langle f | g \rangle = \int_I wf g.$$

Notation 42.53. $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de E_w , on note donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son orthogonalisé de Gram-Schmidt.

Proposition 42.54. $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire.

(iii) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n \implies P_m \perp P_n$.

Proposition 42.55. Si $I = \mathbb{R}$ et w est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a la parité de n .

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = (-1)^n P_n(-X)$. Utiliser la proposition 42.54 pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = P_n$. \square

Proposition 42.56. Si I est un segment, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale.

Démonstration. Utiliser le théorème 17.18 et le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme hilbertienne. \square

Proposition 42.57.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, P_{n+2} = (X - a_n) P_{n+1} + b_n P_n.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $H = P_{n+2} - X P_{n+1}$. On a $H \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Et :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle H | Q \rangle = \langle P_{n+2} | Q \rangle - \langle X P_{n+1} | Q \rangle = -\langle P_{n+1} | X Q \rangle = 0,$$

car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$. Ainsi, $H \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect}(P_n, P_{n+1})$. \square

Proposition 42.58. $n \in \mathbb{N}$.

(i) P_n est simplement scindé.

(ii) Les racines de P_n sont dans \mathring{I} .

Démonstration. On note $\inf I < \zeta_1 < \dots < \zeta_s < \sup I$ les racines distinctes de P_n de multiplicité impaire dans \mathring{I} . Il existe donc $T \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ ne changeant pas de signe sur \mathring{I} t.q.

$$P_n = T \prod_{i=1}^s (X - \zeta_i).$$

On note $\Pi = \prod_{i=1}^s (X - \zeta_i)$ et on suppose par l'absurde que $P_n \neq \Pi$. Alors $\Pi \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \text{Vect}(P_n)^\perp$. Donc :

$$0 = \langle \Pi | P_n \rangle = \langle \Pi | T\Pi \rangle = \int_I w T \Pi^2.$$

Or $w T \Pi^2$ ne change pas de signe sur I , et est \mathcal{C}^0 , donc $w T \Pi^2 = 0$. C'est absurde. Donc $P_n = \Pi$. \square

IX Séries de Fourier

Notation 42.59. On se place dans l'espace $E = C^0([0, \pi], \mathbb{R})$.

(i) On munit E du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f g.$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme hilbertienne associée.

(ii) On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, \pi]} |f(t)|.$$

Proposition 42.60.

$$\forall f \in E, \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_2$.

Notation 42.61. On note $\mathcal{P} = \{(t \in [0, \pi] \mapsto P(t)), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Proposition 42.62. \mathcal{P} est dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Notation 42.63. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\gamma_n : t \in [0, \pi] \mapsto \cos(nt) \in \mathbb{R}.$$

Proposition 42.64. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\gamma_n\|_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $\varepsilon_n = \frac{\gamma_n}{\|\gamma_n\|_2}$. Ainsi, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Lemme 42.65. On se place dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(i) $\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ est une sous-algèbre de E .

(ii) $\overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$ est une sous-algèbre de E .

Lemme 42.66. On se place dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. On pose :

$$u : t \in [0, \pi] \mapsto t \in \mathbb{R}.$$

Alors $u \in \overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$.

Démonstration. Notons que \arccos est développable en série entière en 0 sur $] -1, 1[$ tout entier ; soit donc $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall x \in] -1, 1[, \arccos x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Comme \arccos est \mathcal{UC}^0 sur $[-1, 1]$, soit $\eta > 0$ t.q.

$$\forall t \in [0, \pi] , \left| \arccos(\cos t) - \arccos\left(\frac{\cos t}{1+\eta}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\rho(\sum \beta_n z^n) \geq 1 > \frac{1}{1+\eta}$, soit $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{1+\eta}, \frac{1}{1+\eta} \right] , \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n |x|^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \pi] , \left| u(t) - \sum_{n=0}^N \beta_n \frac{\gamma_1^n(t)}{(1+\eta)^n} \right| \\ = \left| \arccos(\cos t) - \arccos\left(\frac{\cos t}{1+\eta}\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\cos t}{1+\eta}\right)^n \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or $\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ est une algèbre, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1^n \in \text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$. Ainsi, $u \in \overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$. \square

Proposition 42.67. $\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$, donc dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Démonstration. On se place dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$. Avec les notations du lemme 42.66, on a $u \in \overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$, donc comme $\overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$ est une sous-algèbre de E , $\mathcal{P} = \mathbb{R}[u] \subset \overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$. Ainsi $E = \mathcal{P} \subset \overline{\text{Vect}(\gamma_n, n \in \mathbb{N})}$. \square

Corollaire 42.68. $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Application 42.69.

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Démonstration. On pose $u : t \in [0, \pi] \mapsto t \in \mathbb{R}$. Selon l'identité de Parseval (proposition 42.35), on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varepsilon_n | u \rangle^2 = \langle \gamma_0 | u \rangle^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \gamma_n | u \rangle^2.$$

Cette égalité fournit $\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right)^2$. Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

On en déduit le résultat en écrivant $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16} \zeta(4) + \frac{\pi^4}{96}$. \square

Proposition 42.70. *$f \in E$. On suppose que $\sum |\langle \varepsilon_n | f \rangle|$ converge. Alors :*

$$\sum_{n=0}^N \langle \varepsilon_n | f \rangle \varepsilon_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{u} f.$$

Démonstration. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\varepsilon_n\|_{\infty} = \sqrt{2}$, la série $\sum \langle \varepsilon_n | f \rangle \varepsilon_n$ converge normalement donc uniformément vers $\ell \in E$. Comme $\|\cdot\|_{\infty}$ est plus fine que $\|\cdot\|_2$, $\sum \langle \varepsilon_n | f \rangle \varepsilon_n$ converge vers ℓ au sens de $\|\cdot\|_2$. Or $\sum \langle \varepsilon_n | f \rangle \varepsilon_n$ converge vers f au sens de $\|\cdot\|_2$ car $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale et totale. Donc $\ell = f$. \square

X Polynômes de Laguerre

Notation 42.71. On note $w : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t} \in \mathbb{R}$. On se place dans l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), wf^2 \text{ est intégrable}\}$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f | g \rangle = \int_0^{\infty} wfg$.

Proposition 42.72. *En identifiant $\mathbb{R}[X]$ à $\{(t \in I \mapsto P(t)), P \in \mathbb{R}[X]\}$, on a $\mathbb{R}[X] \subset E$.*

Définition 42.73 (Polynômes de Laguerre). *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :*

$$L_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-X)^k}{k!} \in \mathbb{R}[X].$$

Proposition 42.74.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, L_n(x) = \frac{e^x}{n!} (wX^n)^{(n)}(x).$$

Proposition 42.75. $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E .

Démonstration. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $p \leq n$. En intégrant par parties p fois, on a :

$$\langle X^p | L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^p (wX^n)^{(n)}(t) dt = \frac{1}{n!} (-1)^p \int_0^{\infty} p! (wX^n)^{(n-p)}(t) dt.$$

Si $p < n$, il vient $\langle X^p \mid L_n \rangle = 0$. On en déduit $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$, ce qui montre que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. Pour $p = n$, on a :

$$\langle X^n \mid L_n \rangle = (-1)^n n!.$$

On en déduit $\|L_n\| = 1$. □

Proposition 42.76. $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}(L_n, n \in \mathbb{N})$.

Notation 42.77. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note :

$$\varphi_\alpha : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-\alpha t} \in \mathbb{R}.$$

Pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, on a $\varphi_\alpha \in E$.

Lemme 42.78. $\forall \alpha \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\varphi_\alpha \in \overline{\mathbb{R}[X]}$.

Démonstration. Soit $\alpha \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$. Selon l'identité de Parseval (proposition 42.35), il suffit de montrer que $\|\varphi_\alpha\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle L_n \mid \varphi_\alpha \rangle^2$. On a $\|\varphi_\alpha\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1}$. Et, en intégrant par parties n fois :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \langle L_n \mid \varphi_\alpha \rangle &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\alpha t} (wX^n)^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n \int_0^\infty (-\alpha)^n e^{-\alpha t} e^{-t} t^n dt \\ &= \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^n. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat. □

Lemme 42.79. $g \in E$. Si g admet une limite finie en $+\infty$, alors $g \in \text{Vect}(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$h : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longmapsto \begin{cases} g(-\ln s) & \text{si } s \in]0, 1] \\ \lim_{+\infty} g & \text{si } s = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$h \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ donc il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\|h - P\|_{[0,1]}^\infty \leq \varepsilon$. On pose alors $\psi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto P(e^{-t}) \in \mathbb{R}$. On a $\psi \in \text{Vect}(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$. Et :

$$\begin{aligned} \|g - \psi\|_2^2 &= \int_0^\infty e^{-t} (g(t) - \psi(t))^2 dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} (h(e^{-t}) - P(e^{-t}))^2 dt \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

□

Proposition 42.80. $\overline{\mathbb{R}[X]} \supset \{g \in E, g \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$.

Chapitre 43

Compléments sur la Différentielle

Notation 43.1. Dans ce chapitre, E et F sont deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie non nulle.

I Vecteurs tangents

Définition 43.2 (Vecteur tangent). $S \subset E$, $\omega \in S$. On appelle vecteur tangent à S en ω tout $u \in E$ t.q. il existe $r > 0$ et $\gamma : [-r, +r] \rightarrow S$ dérivable t.q.

$$\gamma(0) = \omega \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = u.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à S en ω est noté $T_S(\omega)$.

Proposition 43.3. $S \subset E$, $\omega \in S$. Alors :

- (i) $0 \in T_S(\omega)$,
- (ii) $\mathbb{R}T_S(\omega) = T_S(\omega)$.

Proposition 43.4. $S \subset E$, $\omega \in S$. \mathcal{U} ouvert de E contenant S , $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow F$ différentiable. Alors :

$$T_{\varphi(S)}(\varphi(\omega)) \supset d\varphi(\omega) \cdot T_S(\omega).$$

Démonstration. Soit $u \in T_S(\omega)$. Soit $r > 0$, $\gamma : [-r, +r] \rightarrow S$ dérivable t.q. $\gamma(0) = \omega$ et $\gamma'(0) = u$. On considère $\delta = \varphi \circ \gamma$. Alors $\delta([-r, +r]) \subset \varphi(S)$, δ est dérivable, $\delta(0) = \varphi(\omega)$ et $\delta'(0) = d\varphi(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = d\varphi(\omega) \cdot u$. Ainsi, $(d\varphi(\omega) \cdot u) \in T_{\varphi(S)}(\varphi(\omega))$. \square

Corollaire 43.5. I intervalle non trivial de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable, $t \in I$. Alors :

$$T_{f(I)}(f(t)) \supset \mathbb{R}f'(t).$$

Exemple 43.6. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note :

$$\Sigma = \{x \in E, \|x\| = 1\}.$$

Alors :

$$\forall \omega \in \Sigma, T_{\Sigma}(\omega) = \{\omega\}^{\perp}.$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Sigma$. (\subset) Soit $u \in T_{\Sigma}(\omega)$. Soit $r > 0$ et $\gamma : [-r, +r] \rightarrow \Sigma$ dérivable t.q. $\gamma(0) = \omega$ et $\gamma'(0) = u$. On a :

$$\forall t \in [-r, +r], \langle \gamma(t) | \gamma(t) \rangle = 1 \quad \text{donc} \quad \forall t \in [-r, +r], 2 \langle \gamma'(t) | \gamma(t) \rangle = 0.$$

En particulier, $\langle u | \omega \rangle = \langle \gamma'(0) | \gamma(0) \rangle = 0$. (\supset) Soit $u \in \{\omega\}^{\perp}$. On peut supposer $u \neq 0$ et poser $\varepsilon = \frac{u}{\|u\|}$. On considère alors :

$$\gamma : \begin{cases} [-1, +1] \longrightarrow \Sigma \\ \theta \longmapsto (\cos \theta) \omega + (\sin \theta) \varepsilon \end{cases}.$$

Alors γ est dérivable, $\gamma(0) = \omega$ et $\gamma'(0) = \varepsilon$. Donc $u = \|u\| \cdot \varepsilon \in T_{\Sigma}(\omega)$. \square

Exemple 43.7. On se place dans $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall P \in O_n(\mathbb{R}), T_{O_n(\mathbb{R})}(P) = P\mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. (\subset) Soit $U \in T_{O_n(\mathbb{R})}(P)$. Soit $r > 0$ et $\gamma : [-r, +r] \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ dérivable t.q. $\gamma(0) = P$ et $\gamma'(0) = U$. On a $\forall t \in [-r, +r], {}^t\gamma(t)\gamma(t) = I_n$, donc $\forall t \in [-r, +r], {}^t\gamma'(t)\gamma(t) + {}^t\gamma(t)\gamma'(t) = 0$. En particulier, ${}^tUP + {}^tPU = 0$, i.e. ${}^tPU = -({}^tPU)$. Donc ${}^tPU \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, d'où $U \in P\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. (\supset) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On considère :

$$\gamma : \begin{cases} [-1, +1] \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto P \exp(tA) \end{cases}.$$

γ est bien définie selon la proposition 41.52. Et γ est dérivable, $\gamma(0) = P$ et $\gamma'(0) = PA$. Donc $PA \in T_{O_n(\mathbb{R})}(P)$. \square

II Extrema

Proposition 43.8. $S \subset E$, $\omega \in S$. \mathcal{U} ouvert de E contenant S , $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si $\varphi|_S$ présente un maximum local en ω , alors :

$$\forall u \in T_S(\omega), d\varphi(\omega) \cdot u = 0.$$

Application 43.9. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note $\Sigma = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. Soit \mathcal{U} un ouvert de E contenant Σ , soit $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Σ étant un compact de E , soit $\omega \in \Sigma$ t.q.

$$\varphi(\omega) = \max_{x \in \Sigma} \varphi(x).$$

Alors :

$$\nabla \varphi(\omega) \in \text{Vect}(\omega).$$

Corollaire 43.10. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On note $\Sigma = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\omega \in E$ t.q.

$$\|f(\omega)\|^2 = \max_{x \in \Sigma} \|f(x)\|^2.$$

Alors $(f^* \circ f)(\omega) \in \text{Vect}(\omega)$, i.e. ω est un vecteur propre de $(f^* \circ f)$.

Exemple 43.11. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note :

$$\Delta_{a,b} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}.$$

Alors

$$\inf_{f \in \Delta_{a,b}} \int_0^1 f'^2$$

est atteint en une unique fonction de $\Delta_{a,b}$, qui est affine.

Démonstration. *Unicité.* Soit $f \in \Delta_{a,b}$ réalisant le minimum (s'il existe). On note $E = \Delta_{0,0}$. On a :

$$\forall g \in E, \forall t \in \mathbb{R}, t^2 \int_0^1 g'^2 + 2t \int_0^1 f'g' = \int_0^1 (f + tg)^{2'} - \int_0^1 f'^2 \geq 0.$$

Ainsi, $\forall g \in E, \int_0^1 f'g' = 0$. En intégrant par parties, il vient :

$$\forall g \in E, \int_0^1 f''g = 0.$$

On suppose alors par l'absurde que $f'' \neq 0$. Par continuité de f'' , on peut supposer qu'il existe $0 < u < v < 1$ t.q. $\forall t \in [u, v], f''(t) > 0$. On considère alors :

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

ψ est \mathcal{C}^∞ (c.f. exemple 22.21). On pose $g : t \in [0, 1] \mapsto \psi(t - u)\psi(v - t)$. Alors $g \in E$ et $\forall t \in]u, v[, g(t) > 0$. Ainsi $0 = \int_0^1 f''g = \int_u^v f''g > 0$. C'est absurde. Donc $f'' = 0$ et f est affine. Donc :

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = (1 - t)a + tb.$$

Existence. Montrer que f affine convient. □

III Surfaces de niveau

Définition 43.12 (Surface de niveau). Ω un ouvert de E , $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note :

$$S_\alpha(f) = \{\omega \in \Omega, f(\omega) = \alpha\}.$$

Proposition 43.13. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit Ω un ouvert de E , $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega \in S_\alpha(f)$. Alors :

$$T_{S_\alpha(f)}(\omega) \subset \{\nabla f(\omega)\}^\perp.$$

Exemple 43.14. On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ t.q.

$$\forall \omega \in E, \|\nabla f(\omega)\| \geq 1.$$

Alors :

$$\exists m \in \mathcal{B}_f(0, 1), f(m) \geq f(0) + 1.$$

Démonstration (Première méthode). Si f est \mathcal{C}^2 , on admet qu'il existe un unique $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ dérivable t.q.

$$\gamma(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, 1], \gamma'(t) = \frac{\nabla f(\gamma(t))}{\|\nabla f(\gamma(t))\|}.$$

On a alors $\|\gamma(1)\| = \left\| \int_0^1 \gamma'(\tau) d\tau \right\| \leq \int_0^1 \|\gamma'(\tau)\| d\tau = 1$, donc $\gamma(1) \in \mathcal{B}_f(0, 1)$. Et on montre que $f(\gamma(1)) \geq f(0) + 1$. \square

Démonstration (Deuxième méthode). On peut supposer que $f(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit $(x_0^n, \dots, x_n^n) \in E^n$ par :

$$x_0^n = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_{k+1}^n = x_k^n + \frac{1}{n} \cdot \frac{\nabla f(x_k^n)}{\|\nabla f(x_k^n)\|}.$$

On montre que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k^n \in \mathcal{B}_f(0, \frac{k}{n})$. Ainsi, $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathcal{B}_f(0, 1)$, qui est compact. Donc il existe $\ell \in \mathcal{B}_f(0, 1)$ et j une extraction t.q. $x_{j(n)}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Minorons alors $f(x_n^n)$. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(x_n^n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}^n) - f(x_k^n)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \int_0^1 \left\langle \nabla f \left(x_k^n + \frac{t}{n} \cdot \frac{\nabla f(x_k^n)}{\|\nabla f(x_k^n)\|} \right) \mid \frac{\nabla f(x_k^n)}{\|\nabla f(x_k^n)\|} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{B}_f(0, 1)^2, \|u - v\| \leq \eta \implies \left\langle \nabla f(v) \mid \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|} \right\rangle \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{1}{N} \leq \eta$. Alors :

$$\forall n \geq N, f(x_n^n) \geq 1 - \varepsilon.$$

Donc $f(\ell) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{j(n)}^{j(n)}) \geq 1$. □

IV Points critiques

Proposition 43.15. Ω un ouvert de E , $f : \Omega \rightarrow F$ différentiable. Alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \operatorname{rg} df(\omega) \leq \min(\dim E, \dim F).$$

Définition 43.16 (Point critique). Ω un ouvert de E , $f : \Omega \rightarrow F$ différentiable. On dit que $\omega \in \Omega$ est un point critique de f lorsque :

$$\operatorname{rg} df(\omega) < \min(\dim E, \dim F).$$

Exemple 43.17.

- (i) Ω un ouvert de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Alors $\omega \in \Omega$ est un point critique de f ssi $df(\omega) = 0$.
- (ii) I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $g : I \rightarrow F$ dérivable. Alors $t \in I$ est un point critique de g ssi $g'(t) = 0$.

Lemme 43.18. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $\forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AH) = 0$. Alors $A = 0$.

Exemple 43.19. $p \in \mathbb{N}^*$. On considère :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longmapsto \operatorname{tr}(M^p) \end{cases}.$$

Alors :

- (i) φ est différentiable sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall (M, H) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2, d\varphi(M) \cdot H = p \operatorname{tr}(M^{p-1}H).$$

- (ii) Les points critiques de φ sont les $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $M^{p-1} = 0$.

V Théorème d'injectivité locale

Théorème 43.20 (Théorème d'injectivité locale). Ω un ouvert de E , $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$. Soit $\omega \in \Omega$ t.q. $df(\omega) \in GL(E)$ (i.e. ω n'est pas un point critique de f). Alors il existe V ouvert de E t.q.

- (i) $\omega \in V \subset \Omega$,
- (ii) $f|_V$ est injective.

Démonstration. *Première étape :* $df(\omega) = id_E$. On munit E d'une norme $\|\cdot\|$ et on munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Soit $\rho > 0$ t.q. $\mathcal{B}_o(\omega, \rho) \subset \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathcal{B}_o(\omega, \rho)^2, \quad & \| (f(y) - f(x)) - (y - x) \| \\ &= \left\| \int_0^1 [df((1-t)x + ty) - id_E] \cdot (y - x) dt \right\| \\ &\leq \|y - x\| \int_0^1 \|df((1-t)x + ty) - id_E\| dt. \end{aligned}$$

f étant \mathcal{C}^1 , soit $r \in]0, \rho]$ t.q.

$$\forall a \in \mathcal{B}_o(\omega, r), \quad \|df(a) - id_E\| \leq \frac{1}{2}.$$

On note $V = \mathcal{B}_o(\omega, r)$. Alors :

$$\forall (x, y) \in V^2, \quad \| (f(y) - f(x)) - (y - x) \| \leq \frac{1}{2} \|y - x\|.$$

On en déduit que $\forall (x, y) \in V^2, \|f(y) - f(x)\| \geq \frac{1}{2} \|y - x\|$, donc $f|_V$ est injective. *Deuxième étape :* $df(\omega) \in GL(E)$. On pose alors :

$$g = (df(\omega))^{-1} \circ f.$$

$g \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$ et $dg(\omega) = id_E$. Selon la première étape, il existe V ouvert de E t.q. $\omega \in V \subset \Omega$ et $g|_V$ est injective. Ainsi, $f|_V = df(\omega) \circ g|_V$ est injective. \square

Exemple 43.21. On considère :

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} (x + x^2) \sin\left(\frac{1}{x^{26}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Alors :

- (i) f est dérivable sur \mathbb{R} (mais pas \mathcal{C}^1 en 0).
- (ii) $\forall r > 0$, $f|_{[-r, +r]}$ n'est pas injective.