Centrale MP 2021

529

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

Sq (i). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Sq $\sum \|u_n\|$ CV.

Mq $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon>0$. $\sum \|u_n\|$ CV donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq n_0, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\begin{cases} n \geq n_0 \\ p \geq n_0 \end{cases}$.

SPG $n > p$. $S_n - S_p = \sum_{k=p+1}^{n} u_k$.

$\|S_n - S_p\| \leq \sum_{k=p+1}^{n} \|u_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$.

d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i).

On Sq (ii). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Mq u CV.

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,p \geq N, \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$.

$1>0$ donc $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \geq N, \|u_n - u_p\| \leq 1$. Fixons N_0.

$S := \max\{\|u_0\|, \dots, \|u_{N_0}\|+1\}$. S est un majorant de $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$.

(Δ) On sq que φ a une val d'adh.

Soit φ une extrac, $v \in E$ tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} n \geq n_0 \\ p \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$.

$\forall n \geq n_0, \varphi(n) \geq n_0$ donc $\forall n \geq n_0, \|u_n - u_{\varphi(n)}\| \leq \varepsilon$

puis $u_p - u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(Δ) Or, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$.

Mq $\exists \varphi$ une extraction tq

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \| u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)} \| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Construction de φ :

$n = 0$:

$1 > 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, p \geq n_0, \ \|u_n - u_p\| \leq 1$.

$\varphi(0) = n_0$.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ ..... n_1 puis $\forall n, p \geq n_1, \ \|u_n - u_p\| \leq \frac{1}{2}$.

$\varphi(1) = \max(\varphi(0)+1, n_1)$.

On suppose construits $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

tq $\varphi(n_0) < \dots < \varphi(n)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \| u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)} \| \leq \frac{1}{2^k}$.

Construisons $\varphi(n+1)$: $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall k, p \geq N, \ \|u_k - u_p\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$\varphi(n+1) = \max(\varphi(n)+1, N).$$

Puis $\| u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)} \| \leq \frac{1}{2^n}$. $\forall k \geq \varphi(n+1), \ \| u_k - u_{\varphi(n+1)} \| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

$\sum \| u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)} \|$ CV donc d'après (Δ)

Puis $\sum u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$ CV

donc $u_{\varphi(n)}$ CV puis u_n CV..