# Séries entières, le retour

## 24 janvier 2019

## 1 Séries entières

#### 1.1 PC

Soit  $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$  bornée telle que  $u_n + \frac{u_{3n}}{3} \to 1$  quand  $n \to +\infty$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général  $u_n z^n$ .

#### 1.2

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  avec;  $a_n = (2 + \sqrt{3})^n$  puis  $a_n = d((2 + \sqrt{3})^n, \mathbf{Z})$ .

### 1.3

Soit  $a_n$  une suite réelle strictement positive, telle que : la série  $\sum a_n$  diverge; la suite  $\frac{a_n}{A_n}$  tend vers 0. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .

#### 1.4

Etudier la série entière  $\sum \frac{z^n}{n sin(n\pi\sqrt{3})}$ . Rayon de convergence, convergence sur le bord du disque de convergence.

## 2 Fonctions série entière

#### 2.1

On note  $Q_m$  la n-ième somme partielle de la série exponentielle. Soit P un polynôme réel tel que, pour tout x réel positif, on ait  $P(x) < e^x$ . Montrer qu'il existe un m tel que, pour tout x réel positif, on ait  $Q_m(x) > P(x)$ .

#### 2.2

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière vérifiant  $a_0 = 0$ ,  $a_1 \neq 0$ ,  $\sum n|a_n|$  converge et  $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ . Montrer que le rayon de convergence de cette série est  $\geq 1$  et que sa somme f est injective sur D(0,1).

D-1 gek 2 U pm-1 k 8 pm-1 k 8

#### Une sorte de Cesaro. 2.3

a) Principe de Weierstrass : Soit  $a_{n,k}$  une suite double complexe telle que, pour tout  $k, n \rightarrow a_{n,k}$  converge vers un nombre  $b_k$  et soit bornée par un nombre positif  $\alpha_k$ . On suppose de plus que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  converge. Montrer que la suite des sommes  $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$  tend vers  $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ .

b)Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1 de somme f, et  $b_n$  une suite complexe telle que  $\forall n, b_n \neq 0$  et  $\lim \frac{b_{n-1}}{b_n} = \beta$  avec  $|\beta| < 1$ . On considère  $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$ ; montrer que  $\lim \frac{c_n}{b_n} = f(\beta)$ .

#### 2.4

Donner un DA à deux termes, lorsque x tend vers 1-0, de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln nx^n$ .

#### 3 DSE et sommes

### 3.1

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions :  $\sinh x \sin x$ ,  $\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}(a) \frac{1+x}{1-x})$ oleniser purs integer

3.2

Soit  $\mu \in ]0,1[$ . On pose  $I_{\mu}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\mu^2t^2)}}$ . Donner un équivalent de  $I_{\mu}$ lorsque  $\mu$  tend vers 1.

#### 3.3

Soit K un sous-corps de C. Soit  $F \in K(X)$  une fraction rationnelle sans pôles en 0. Montrer que F est développable en série entière, puis que les coefficients du développement en série entière de F sont dans K.

3.4 Sommer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n!}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - 2n}{n!} z^n$ ,  $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n^2 + n}$ .

3.5

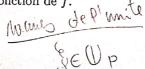
Convergence et somme

 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} S_n$   $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} S_n$ 

où  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ .

### 3.6

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence R > 0 et de somme f. On donne des entiers  $p \ge 2$  et  $1 \le k \le p-1$  Déterminer, pour |z| < R,  $\sum a_n z^{pn+k}$ 



en fonction de f.

Notice de f white  $f \in \mathbb{Q}$  p  $f(3^{2}, g(3^{3})) = \sum_{i=1}^{n} A_{i} p_{i} p_{i}$   $f \in \mathbb{Q}$  p  $f \in \mathbb{Q}$  p f