MP*4 - Préparation à l'oral 2022 - Version complète

Jour 1 : algèbre (algèbre linéaire)

1. Mines 322. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre $A^2 = 0$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$.

2. Mines 310. Soit $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Mines 313. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k).$$

4. Mines 320. 1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\bigcap_{\ell \in A} \ker \ell = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
2) Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible.

5. Centrale 551. X 200. Soient $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $\mathrm{Com}(A)^T A = \det(A)\, I_n$.
2) Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de A.
3) Résoudre $\mathrm{Com}(A) = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Traiter le cas $n = 2$.
4) (X) Traiter le cas où l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$: on notera S^* les matrices non nulles vérifiant $\mathrm{Com}(A) = A$. On montrera qu'il s'agit d'un groupe pour la multiplication des matrices. On trouvera $A_0 \in S^*$ tel que $\det A_0 = e^{\frac{2i\pi}{n-2}}$ et on exprimera les matrices solutions à l'aide de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AA^\top = I_n$ et $\det A = 1$.

6. ENS Lyon 35 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.
1) Montrer que φ_A est nilpotent si A est nilpotente.
2) Montrer que φ_A est diagonalisable si A est diagonalisable.
3) Montrer que φ_A est trigonalisable si A est trigonalisable.

7. X 206. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $C(A)$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, $C'(A)$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tout élément de $C(A)$. Montrer que $C'(A) = \mathbb{R}[A]$.

8. ENS Ulm 37. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $H = [A, B] = AB - BA$ soit de rang majoré par 1. Montrer que A et B sont cotrigonalisables (Ind : pourquoi peut-on supposer 0 valeur propre de A ? Montrer que $\ker A$ ou $\mathrm{Im}\, A$ est stable par B).

9. X 197b. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\det(A + tB) = \det(A) + t \det(B)$. Que peut-on dire de A et B ? (traiter d'abord le cas A ou B inversible puis dans le cas A et B non inversibles, on montrera l'existence de deux sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ tel que $A(V) \subset W$ et $B(V) \subset W$ avec $\dim W < \dim V$).

Jour 2 : analyse (suites et séries de fonctions)

10. Mines 448 Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un segment S de $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur S vers une fonction f. Montrer que $(\min(f_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers $\min(f)$ et $(\max(f_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers $\max(f)$. Étudier la réciproque.

11. Mines 462. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante et nulle en 0.
1) Montrer qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n f\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + nx}$, on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$, alors f soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3) On suppose f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$. Montrer que g est dérivable en 0.

12. Mines 478. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ continue et strictement décroissante. On suppose que $f(0) = 1$, que f est intégrable en $+\infty$ et que $\dfrac{1}{1-f}$ n'est pas intégrable en 0. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^n \mathrm{d}t$.
1) Montrer que I_n est bien définie et que $I_n \to 0$.
2) Montrer que la série de terme général I_n diverge.
3) Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

13. **Centrale 600.** On note R le rayon de convergence de $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1) Calculer $\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t$, pour $0 \leqslant r < R$.

2) Soit $r \in]0,R[$. On veut montrer : $\forall z \in B_o(0,r)\,,\ f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer la formule dans le cas $f : z \mapsto z^n$.

b. Montrer la formule dans le cas $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

3) Soit f continue sur $B_o(0,R)$. On suppose que :
$\forall r \in]0,R[\,,\ \forall z \in B_o(0,r)\,,\ f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f est développable en série entiére.

---

14. **X 260.**Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,\pi]$, on pose $f_n(t)=a_n\sin(nt)$.

1) Soit $t \in]0,\pi[$. Trouver une constante $C>0$ dépendant uniquement de t telle que, si p et q sont dans $\mathbb{N}$ avec $p<q$, alors $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k \sin(kt)\right| \leqslant C a_p$.

2) On suppose que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$.

3) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ si et seulement si $na_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (pour la réciproque on coupera si besoin le reste à un entier N_t dépendant de t et pour le sens direct, on considèrera une tranche entre $n+1$ et $2n$).

---

15. **ENS 99 (Théorème de Borel)** On admet qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1/2,1/2]$ età 0 en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. Soit $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)=a_n$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $g_n : x \longmapsto \dfrac{a_n}{n!}x^n\varphi(x)$ et $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{{\lambda_n}^n} g_n(\lambda_n x)$, avec $\lambda_n \geqslant 1$ à fixer. Soit $h=\sum f_n$. Montrer qu'on peut choisir les $(\lambda_n)_n$ pour que h convienne.

---

16. **ENS Saclay 109.**

1) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ et calculer la valeur commune.

On pose pour $t\in\mathbb{R}^+$, $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\mathrm{d}x$.

2) Montrer que F est continue. Étudier la limite de F en $+\infty$.

3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $F'(t)$ pour $t>0$.

4) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

---

17. **X 262.** Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\,x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série entiére.

2) Donner un équivalent de f en 1^-.

3) Déterminer la limite de f en -1^+ (on partira sur $(1-x)f(x)$ et on calculera $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(1-1/n)$ pour trouver finalement $\dfrac{1}{2}\ln(\pi/2)$).

Jour 3 : Probabilités

---

18. **Centrale 621.**

1) On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise d'une boule jusqu'à ce que les boules restant dans l'urne soient toutes de la même couleur. Soit X_n le nombre de boules restant après ces tirages. Donner la loi de X_n (on regardera le processus en partant de la fin, au bout de $2n$ tirages), puis son espérance et un équivalent de cette espérance.

2) *Problème des allumettes de Banach.* On considère maintenant deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable. On s'arrête si l'urne choisie est vide. Soit Y_n le nombre de boules restant à ce moment dans l'autre urne. Donner la loi de Y_n et un équivalent de son espérance en suivant les étapes suivantes :

a. $\mathrm{P}(Y_n = k) = \binom{2n-k-1}{n-1} \frac{1}{2^{2n-k-1}}$.

b. $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{2n-l}{n} \frac{1}{2^{2n-l}} = 1$.

c. $\mathrm{E}(Y_n) = \dfrac{2n}{4^n} \dbinom{2n}{n} \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.

---

19. Mines 516. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que $\mathrm{Var}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

---

20. Mines 518. On lance une pièce équilibrée et on appelle X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première séquence « pile-face ». Déterminer l'espérance de X.

---

21. Mines 520. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1) Donner la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} X_k$.

2) Évaluer $\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \left(X_k \geqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} X_i\right)\right)$.

---

22. X 273. 1) Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Montrer, si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, que $\mathrm{P}(X \geqslant \mathrm{E}(X) + \lambda) \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X) + \lambda^2}$.

2) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant un moment d'ordre 2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(X_n) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_n) \leqslant 1$. On pose $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \leqslant 1\}$. Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

---

23. ENS Lyon 138. Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit $p(\lambda)$ la probabilité que toutes les solutions de $Ay'' + By' + Cy = 0$ s'annulent une infinité de fois. Montrer que $p(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

---

24. ENS Saclay 145. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit enfin $N = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}^*\ ;\ S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1) Donner un équivalent de $\mathrm{P}(S_{2n} = 0)$. En déduire $\mathrm{E}(N)$.

2) Montrer que N est presque sûrement égale à $+\infty$ (Etablir que $\mathrm{P}(N = n+1) = \mathrm{P}(N = n)\,\mathrm{P}(T < +\infty)$ où T désigne le temps d'attente du premier retour à 0.

---

25. X 283. Soit un entier $N > 5$. Soient $X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose que X_1 est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On définit une variable aléatoire f à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ par $f(\omega)[\overline{n}] = \overline{n + X_n(\omega)}$ pour tout $n \in [\![1, N]\!]$ et toute issue ω. Déterminer la probabilité pour que f soit une permutation ayant au moins trois orbites.

Jour 4 : algèbre (algèbre bilinéaire)

---

26. Centrale 566. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $x_1, ..., x_p$ des vecteurs unitaires de E. On note, pour $i \in]\!]1; p[\![$, σ_i la symétrie orthogonale par rapport à H_i, l'orthogonal de x_i. On pose $G = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_p \rangle$ le sous-groupe engendré par les σ_i.

1) Montrer l'équivalence entre $\displaystyle\bigcap_{f\in G} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$ et $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p) = E$.

2) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note σ_x la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal de x. Soit $\Delta = \{x \in E\ ;\ \|x\| = 1,\ \exists i \in \{1, \ldots, p\},\ f \in G,\ \sigma_x = f\sigma_i f^{-1}\}$. Montrer que Δ est stable par G.

---

27. Mines 370. 1) Soit $M \in \mathcal{M}_{,n,m}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\left(MM^T\right) \geq 0$.

2) Soient $m \in \{1, ..., n\}$ et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des parties de $\{1, ..., m\}$. On note, pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, $a_{i,j} = \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j)$. Montrer que $\det\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \geqslant 0$.

---

28. Mines 377. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

---

29. Mines 381. 1) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une matrice B. Que peut-on dire de B ?

2) On suppose de plus que $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}| \leqslant d\sqrt{\mathrm{rg}(B)}$.

---

30. **X 221.** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

31. **X 218.** 1) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de $C_d \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \ \ |P(0)| \leqslant C_d \int_{-1}^{1} |P(x)| \mathrm{d}x.$$

2) Que peut-on dire de C_d lorsque $d \to +\infty$?
3) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de $K_d \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$\forall P \in \mathbb{R}_d[X]$, $|P(0)| \leqslant K_d \left(\int_{-1}^{1} |P(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$. Donner une minoration asymptotique de K_d, en utilisant $(1-x^2)^q$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $L_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left((1-x^2)^n \right)$.
4) Montrer que $(L_n)_{n \geqslant 0}$ est orthogonale pour le produit scalaire donné par $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$.
5) En déduire une expression de K_d.

---

32. **ENS 49.** Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & B \end{pmatrix}$. Montrer que M est positive si et seulement si B et $A - C^T B^{-1} C$ sont positives.

---

33. **ENS Saclay 44.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $A^T A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ à valeurs propres positives.
On note $\mu_r \geqslant \mu_{r-1} \geqslant \cdots \geqslant \mu_1 > 0$ ses valeurs propres strictement positives comptées avec multiplicité. Pour $k \in [\![1, r]\!]$, on pose $\sigma_k = \sqrt{\mu_k}$.
2) On suppose que $m = n$. Montrer qu'il existe deux matrices $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = U \Sigma V^T$, où $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a pour coefficients diagonaux $\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0$, et tous ses coefficients hors-diagonale nuls.
3) Cas général : $m \neq n$. Montrer qu'il existe deux matrices $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = U \Sigma V^T$, où $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a pour coefficients diagonaux $\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0$, et tous ses coefficients hors-diagonale nuls. Une telle décomposition est-elle unique ? Donner une interprétation de ce résultat appelé *décomposition en valeurs singulières de* A.

Jour 5 : analyse (calcul différentiel et équations différentielles)

---

34. **Mines 497.** Étudier la continuité et la différentiabilité à l'origine de

$$f : (x, y) \mapsto \max \left(\frac{x^4 y}{|x| + y^2}, \frac{y^4 x}{|y| + x^2} \right).$$

---

35. **Mines 503.** Soient E un espace euclidien, $\| \ \|$ la norme de cet espace, $\varphi \in E^*$, f la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)\, e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

---

36. **Mines 502.** Montrer que les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

sont les applications de la forme $f(x, y) = g\left(\dfrac{x}{1 + y^2} \right)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^1.

---

37. **X 266.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = (1 + x^2) y$. On pourra introduire les opérateurs $A : f \mapsto -f' + \mathrm{Id} \times f$ et $B : f \mapsto f' + \mathrm{Id} \times f$.

---

38. **X 268.** oit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que q' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $q(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Montrer que les solutions de $y'' + (q+1) y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

---

39. **ENS Lyon 127.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et de limite $+\infty$ en ∞. On suppose f strictement convexe, c'est-à-dire que $f((1-t)x + ty) < (1-t) f(x) + t f(y)$ pour tous x, y distincts dans $\mathbb{R}^n$ et tout $t \in]0, 1[$.
1) Montrer que f admet un minimum en un unique point, que l'on notera x^*.
2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère une fonction $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $x(0) = x_0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, \ x'(t) = -\nabla f(x(t))$. Montrer que x tend vers x^* en $+\infty$.
3) On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial_i \partial_j f(y)\, x_i x_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Montrer alors que pour tout $t \geqslant 0$, $f(x(t)) - f(x^*) \leqslant e^{-2\alpha t}(f(x_0) - f(x^*))$.

---

40. **ENS Lyon 118.** Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $y'' = (x^3 + kx)y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer que l'ensemble des zéros de y est majoré et non minoré.

---

41. **Centrale 614.** Soit $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[,\ \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha > 0$.

Soit $u \in \mathcal{C}^2([1,+\infty[,\mathbb{R})$ bornée et solution de l'equation différentielle $u'' - \dfrac{f'}{f}u' - \dfrac{u}{f^2} = 0$. On posera $h = \dfrac{u'}{f}$.

1) Montrer que $u'(x) = O(1/x)$ lorsque $x \to +\infty$.

2) Montrer que u tend vers 0 en $+\infty$.

Jour 6 : probabilités

---

42. **Centrale 631.** On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ et l'on admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma = 1$.

1) Montrer que l'intégrale est bien définie.

Soit $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

2) Soit p entier impair. Montrer que $\mathrm{E}\left(S_n^p\right) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^p\gamma(t)\mathrm{d}t = 0$.

3) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On veut montrer que $\mathrm{E}\left(Q(S_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} Q\gamma$.

On notera $M_n(t)$ pour cela la série génératrice exponentielle des $E(S_n^p)$ et

a. Vérifier que $M_n(t) = \mathrm{E}\left(e^{tS_n}\right) = \left(\mathrm{ch}\, t/\sqrt{n}\right)^n$.

b. Expliciter $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_n(e^{it})e^{-ipt}\mathrm{d}t$.

c. En déduire une expression intégrale des $A_p = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(S_n^p)$.

d. Prouver que $A_{2p} = (2p-1)A_{2p-2}$ pour $p \geqslant 1$.

e. Conclure. Interprétation ?

---

43. **Mines 508.** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On extrait simultanément p boules d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Soit X la variable aléatoire donnant le maximum des numéros tirés. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

---

44. **Mines 528.** Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On effectue des tirages. Aprés chaque tirage, on enlève les boules qui ont un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1) Calculer $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{E}(X_2)$.

2) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{E}(X_k)$.

3) Déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(X_n)$.

---

45. **Mines 529.** Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre 2.

1) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $X \leqslant \lambda\mathbf{E}(X) + X\mathbf{1}_{x\geqslant\lambda\mathbf{E}(X)}$.

2) On suppose que $\mathrm{E}(X^2) > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(X \geqslant \lambda\mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\lambda)^2\dfrac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

---

46. **X 279.** Soit $d \geqslant 1$ entier. Pour toute partie $A = \{a_1,\ldots,a_d\}$ de $[\![1,d]\!]$, avec $a_1 < \cdots < a_p$, et toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $M^A = (m_{a_k,a_\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p}$.

1) Montrer, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'égalité

$$\det(I_d + M) = \sum_{A\subset[\![1,d]\!]} \det(M^A).$$

Dans la suite, on se donne une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{P}([\![1,d]\!])$. On suppose qu'il existe $K \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ telle que, pour toute partie A de $[\![1,d]\!]$, on ait $\mathrm{P}(A \subset X) = \det(K^A)$.

2) Soient $f : [\![1,d]\!] \to \mathbb{R}$ et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $f(1),\ldots,f(d)$. Montrer que

$$\mathrm{E}\left(\prod_{i\in X}(1+f(i))\right) = \det(I_d + DK).$$

3) Montrer que le spectre de K est inclus dans $[0,1]$.

4) Montrer que $|X|$ suit la loi de la somme de d variables de Bernoulli indépendantes dont les paramètres respectifs sont les valeurs propres de K.

---

47. **X 284.** Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que f_n ait pour ensemble de départ $\mathbb{R}^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ f_{n+m}(U_1,\dots,U_{m+n})\leqslant f_n(U_1,\dots,U_n)+f_m(U_{n+1},\dots,U_{n+m}).$$

On pose enfin $X_n=f_n(U_1,\dots,U_n)$, et on suppose que X_n possède un moment d'ordre 2.

1) Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\mathbf{E}(X_n)$ converge vers un réel ℓ.

2) Soit $\varepsilon>0$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n}-\ell\right|\geqslant\varepsilon\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

On admettra qu'étant données deux suites $y\in(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ telles que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,

$$y_{m+n}\leqslant\frac{n^2}{(m+n)^2}y_n+\frac{m^2}{(m+n)^2}y_m+\varepsilon_{m,n}$$

et $\varepsilon_{m,n}$ tend vers 0 quand $m+n$ tend vers $+\infty$, la suite y converge vers 0.

---

48. **ENS Ulm 153.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, ayant un moment d'ordre 2. On suppose qu'il existe $M>0$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{E}(X_n^2)\leqslant M$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
(i) pour toute $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bornée et à dérivée bornée, on a $\mathrm{E}(X_nf(X_n)-f'(X_n))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$;
(ii) pour toute $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bornée, on a $\mathrm{E}(f(X_n))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

---

49. **ENS concours 2017.** 1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $0<\mathrm{E}(X^2)<+\infty$. Montrer que $\mathrm{P}(X>0)\geqslant\dfrac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}$.

Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, on se donne un réel $p_n\in\,]0,1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1,\dots,n$, tel que, si pour tout (i,j) tel que $1\leqslant i<j\leqslant n$, $X_{i,j}$ est la variable indicatrice de l'événement « $\{i,j\}$ est une arête de Γ_n », alors les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n.
On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

2) On suppose que $\dfrac{\ln n}{n}=o(p_n)$. Montrer que $\mathrm{P}(Y_n>0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

3) On suppose que $p_n=o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que $\mathrm{P}(Y_n>0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Jour 7 : algèbre (polynômes et algèbre linéaire)

---

50. **Centrale 545.** Soit $\mathbb{K}$ une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n\geqslant 2$. En notant e son neutre multiplicatif, on assimile $\mathbb{R}e$ à $\mathbb{R}$ et donc e à 1.

1) On fixe a non nul dans $\mathbb{K}$. Montrer que $\phi_a:x\mapsto xa$ est un automorphisme d'espace vectoriel de $\mathbb{K}$. En déduire que a est inversible.

2) On fixe $a\in\mathbb{K}\setminus\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1,a)$ est libre mais pas $(1,a,a^2)$.

3) Montrer que l'on peut trouver $i\in\mathbb{K}$ tel que $i^2=-1$. En déduire que $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

---

51. **Mines 297.** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ pair, $P=1+X+\cdots+X^n$, α une racine de P. Montrer que, pour tout $k\geqslant 1$, α^{2^k} est racine de P. Qu'en est-il pour n impair ?

---

52. **Mines 300** Soit $P=a_0+\cdots+a_nX^n\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P''(x)\,P(x)-P'(x)^2<0$.

2) Soit $k\in\{1,...,n-1\}$, montrer que $a_{k-1}a_{k+1}\leq a_k^2$.

---

53. **Mines 326.** Soit $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $M^{-1}=P(M)$.

---

54. **Mines 327.** On pose $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on note D l'opérateur de dérivation. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme Φ de E dont le carré vaut D.

---

55. **X 1993.** Si $F\in\mathbb{C}(X)$ est non constant, on pose $\Phi_F:R\in\mathbb{C}(X)\mapsto R(F)\in\mathbb{C}(X)$.

1) Soit $F\in\mathbb{C}(X)$ non constant. Montrer que Φ_F est un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.

2) Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est de la forme Φ_F avec F non constant.

3) Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est injectif.

4) Montrer que Φ est un automorphisme d'algèbre si et seulement s'il existe $R\in\mathbb{C}(X)$ tel que $\Phi(R)=X$.

5) Soit $F=\dfrac{P}{Q}$ où $P\wedge Q=1$. On suppose que Φ_F est un automorphisme. Montrer que $\deg(P)\leqslant 1$ et $\deg(Q)\leqslant 1$.

6) Déterminer complètement les automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.

---

56. X 207b. Soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$ tels que $C^n = I_n$ et $C = I_n + pM$. Montrer que $C = I_n$.

---

57. ENS Lyon 12. 1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres complexes algébriques est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Un entier algébrique est un nombre complexe racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

2) Soit $a \in C$. Montrer que a est un entier algébrique, si et seulement si, il existe un sous-espace V du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}(a)$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ engandrant V tel que $a(\mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_n) \subset \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_n$ (utiliser le polynôme caractéristique d'une matrice ad hoc).

3) En déduire que $\mathcal{O}$ l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Donner une autre démontration utilisant les propriétés des expressions symétriques des racines.

4) n appelle unité tout inversible de l'anneau des entiers algébriques. Montrer que, si q est une racine n-ième primitive de 1 et $m \geqslant 2$ un entier premier avec n, alors $\dfrac{q^m - 1}{q - 1}$ est une unité.

5) Montrer qu'un nombre complexe est une unité si et seulement s'il annule un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(0) = \pm 1$.

---

58. ENS Lyon 13. Déterminer les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leqslant 1$.

---

59. ENS Ulm 14. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Jour 8 : analyse (suites, séries, fonctions)

---

60. Centrale 595.
1) Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, avec $T > 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$.
Montre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f - \alpha x$ soit T-périodique.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 1 périodique. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin(\pi t)\right|}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t$.

---

61. Mines 411. Nature des séries de terme général $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ et $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$.

---

62. Mines 416. Pour $s \in]1, +\infty[$, soit $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1) Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $s > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$.

2) Pour $s > 2$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$.

3) BONUS Montrer que pour $s > 1$, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$.

---

63. Mines 418. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min\{x, t\} f(t)\mathrm{d}t$.

1) Montrer que u est un endomorphisme de E.
2) Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.

---

64. X 2019. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'^2$ est bornée. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

---

65. X 244. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est à variation bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour toute suite croissante $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de $[0,1]$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \leqslant M$.

1) Montrer que si f est monotone, f est à variation bornée.
2) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est à variation bornée.
3) Exhiber une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.
4) Montrer qu'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si, et seulement si f est différence de deux fonctions croissantes.
5) On suppose f à variation bornée. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que $|f - h| \leqslant \varepsilon$.

---

66. **X 230.** Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+f(x_n)}{2}$. Montrer que $(x_n)_n$ converge.

---

67. **X 236.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\mathrm{ppcm}(a_1,\ldots,a_n)}$?

---

68. **ENS Saclay 81.** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$ et $f(1)=1$. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $|f''(c)|\geqslant 4$.

---

69. **ENS Lyon 76** 1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n)$.

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\sum a_n$ converge.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} < e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Jour 9 : probabilités

---

70. **Centrale 630.** Soit $(X_i)_{i\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
1) Montrer : $\forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, t\leqslant e^{t^2/2}$.
2) Soit $s>0$. Montrer que $\mathrm{P}(S_n\geqslant s)\leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}-ts\right)$. En déduire une majoration de $\mathrm{P}(|S_n|\geqslant s)$. Optimiser cette majoration.
3) Soit $\alpha>1/2$. Montrer que $\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}|S_k|\geqslant k^\alpha\right)=0$.
4) Montrer que la suite (S_n/n) converge presque sûrement vers 0.

---

71. **ENS Ulm 153.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, ayant un moment d'ordre 2. On suppose qu'il existe $M>0$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{E}(X_n^2)\leqslant M$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
(i) pour toute $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bornée et à dérivée bornée, on a $\mathrm{E}(X_nf(X_n)-f'(X_n))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$;
(ii) pour toute $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bornée, on a $\mathrm{E}(f(X_n))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

---

72. **ENS concours 2017.** 1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $0<\mathrm{E}(X^2)<+\infty$. Montrer que $\mathrm{P}(X>0)\geqslant\dfrac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}$.
Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, on se donne un réel $p_n\in\,]0,1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1,\ldots,n$, tel que, si pour tout (i,j) tel que $1\leqslant i<j\leqslant n$, $X_{i,j}$ est la variable indicatrice de l'événement « $\{i,j\}$ est une arête de Γ_n », alors les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n.
On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).
2) On suppose que $\dfrac{\ln n}{n}=o(p_n)$. Montrer que $\mathrm{P}(Y_n>0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
3) On suppose que $p_n=o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que $\mathrm{P}(Y_n>0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

---

73. **ENS Saclay 150** Pour une variable aléatoire X réelle, on considère les propriétés suivantes :
(P_1) $\exists a>0,\ \forall t>0,\ \mathrm{P}(X>t)\leqslant e^{-at^2}$, (P_2) $\exists c>0,\ \forall u>0,\ \mathrm{E}(e^{uX})\leqslant e^{cu^2}$.
1) Soit X une variable de Rademacher. Montrer que X vérifie (P_1) et trouver la meilleure constante a.
2) Montrer $(P_2)\Rightarrow(P_1)$.
3) Montrer que, pour $x\leqslant 1$, $e^x\leqslant 1+x+x^2$.
4) Montrer que, pour X centrée réduite, $(P_1)\Rightarrow(P_2)$. On écrira à cette occasion que

$$\mathrm{E}(e^{uX}1_{uX>1})\leqslant\mathrm{E}\left(u^2X^2e^{uX}1_{uX>1}\right)\leqslant\mathrm{E}\left(u^2X^2e^{(u/b)(bX)}1_{X>0}\right),$$

et on choisira un b ad hoc.

74. **X-ENS Variables aléatoires infiniment divisibles.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $X \sim \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$.

1) Donner un exemple de variable infiniment divisible. Montrer qu'une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ n'est pas infiniment divisible (on considèrera la fonction caractéristique).

2) Soient $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire de Poisson indépendante de $(Y_n)_{n\geqslant 1}$. On pose $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} Y_i$. Montrer que S est infiniment divisible.

3) On suppose dans cette question que G_X peut s'écrire sous la forme $s \mapsto p_0 \exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} b_i s^i\right)$ où p_0 et les b_i sont des éléments de $\mathbb{R}^+$ et $\sum b_i$ converge. Montrer que X est infiniment divisible. Vérifier ensuite que X est de même loi que $S = Y_1 + \cdots + Y_N$ où les Y_n sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendantes de même loi et N une variable aléatoire de Poisson indépendantes des Y_n.

4) On suppose X infiniment divisible. Montrer que $p_0 = P(X = 0) > 0$ puis que G_X est de la forme $s \mapsto p_0 \exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} b_i s^i\right)$ où p_0 et les b_i sont des éléments de $\mathbb{R}^+$ et $\sum b_i$ converge : pour cela on considèrera la limite lorsque k tend vers l'infini de $k\left(\left(\dfrac{G_X(s)}{p_0}\right)^{1/k} - 1\right)$.

---

75. **Mines 525.** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, on pose $A_n = (X_1 < \cdots < X_n)$, $B_{n,k} = (X_1 < \cdots < X_n,\ X_1 = k)$, $u_n = \mathrm{P}(A_n)$, $v_{n,k} = \mathrm{P}(B_{n,k})$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\pi_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(1 - q^j)$.

1) Calculer $\mathrm{P}(X_1 = X_2)$ et $\mathrm{P}(X_1 < X_2)$.

2) Montrer, pour $n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = pq^{k-1} \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$.

3) En déduire que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}}(pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier que l'on précisera.

4) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{\pi_n} p^{\beta_n} q^{\gamma_n}$ où β_n et γ_n sont des entiers que l'on précisera. Donner enfin un équivalent de u_n.

---

76. **Mines 519.**Dans un jeu, deux joueurs s'affrontent indéfiniment dans une succession de parties indépendantes. Le joueur A (resp. B) a la probabilité p (resp. $q = 1 - p$) de gagner une partie. On note a_{2n} la probabilité pour qu'aprés $2n$ parties A et B aient gagné autant de parties.

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} x^n$.

1) Déterminer a_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Déterminer le rayon de convergence de f. La série $\sum a_{2n}$ est-elle convergente ?

3) Exprimer $A(x)$.

4) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais égalité au cours du jeu ?

Jour 10 : algèbre (algèbre générale)

---

77. **Mines 291.** Montrer que 2021 a un multiple dont tous les chiffres en base 10 valent 1.

---

78. **Mines 294.** Soit G un groupe cyclique de cardinal n. Quel est le nombre de sous-groupes de G ?

---

79. **Mines 295.** Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

---

80. **X 172.** A quelle condition une permutation de $[\![1, n]\!]$ est-elle un carré ?

---

81. **X 177 et 168.** Soit p un nombre premier impair. On suppose connus les carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1) Déterminer les carrés dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

2) Dénombrer les carrés de l'anneau $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$.

---

82. **X 169.**

1) Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, résoudre $x^2 = 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$.
2) Pour quels $\alpha \in \mathbb{N}^*$ le groupe $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?

---

83. **ENS Lyon 2.** Soit φ l'indicatrice d'Euler.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.
2) Existe-t-il $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) \geqslant Cn$?

---

84. **ENS Lyon 11.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives n-ièmes de l'unité.

---

85. **ENS 9.** Un anneau intégre A est dit euclidien s'il existe une fonction $N : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(a, b) \in A\times(A\backslash\{0\})$, il existe un couple $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et si $r \neq 0$ alors $N(r) < N(b)$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, défini comme $\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, est euclidien.
2) Énoncer un théorème d'existence et d'unicitéde décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
3) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, le cardinal de $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 :\ a^2 + b^2 = R^2\}$ est dominé par R^ε quand R tend vers $+\infty$.

---

86. **ENS Lyon 3.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^3 = x^2 + 1$.

---

87. **ENS Lyon 2019.** 1) Soit α un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (p, q) de $\mathbb{Z} \times [\![1, n]\!]$ tel que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qn}$.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré. On note $\mathbb{Z}[d] = \{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et on pose $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

2) Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tel que $\{x \in \mathbb{Z}[d] : N(x) = 1\} = \{\varepsilon\omega^k \mid \varepsilon \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$.
3) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{Z}[d] :\ |N(x)| \leqslant C\}$ soit infini.
4) En déduire que $\omega \neq \pm 1$. Conclusion ?

Jour 11 : analyse (topologie)

---

88. **Centrale 580.**

1) Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?
2) Soit B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(B) \subset B$. On pose $u_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{0\leq k\leq p-1} u^k$. On pose enfin $A = \displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}} u_p(B)$.
3) Montrer que $A = \{x \in B,\ u(x) = x\}$. 4) Montrer que A n'est pas vide.

---

89. **Mines 387.** Soit $E = \big\{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\big\}$.
Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1) Montrer que N est une norme sur E.
2) On fixe $f \in E$ et on pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g.
3) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant a\, N(f)$.
4) Les normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

---

90. **Mines 389.** Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$. On note $H = \{f \in E \mid \displaystyle\int_0^{1/2} f = 0\}$.
Déterminer $H^\perp$.

---

91. **X 224.** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel strict de E, et λ une forme linéaire sur F vérifiant $\forall x \in F,\ |\lambda(x)| \leqslant \|x\|$.

1) Montrer que pour tous x, z dans F et pour tout y dans E, $\lambda(x) - \|x - y\| \leqslant \|y + z\| - \lambda(z)$.
2) Montrer que l'on peut prolonger λ en une forme linéaire $\overline{\lambda}$ sur E telle que :
$\forall x \in E,\ |\overline{\lambda}(x)| \leqslant \|x\|$ (*théorème de Hann-Banach*).

---

92. **X 225.** 1) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $[0, 1]$ telle que, pour toute partie finie J de I, on ait $\displaystyle\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

2) Soit $\mathcal{I}$ un idéal de l'anneau $C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathcal{I} \neq C([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $\forall f \in \mathcal{I}, f(x) = 0$.

---

93. **Ulm 59** On dit qu'uune fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ est ouverte si l'image d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$. Caractériser ces fonctions

---

94. **Ulm 60** Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : K \to K$ telle que $\forall (x,y) \in K^2,\ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y)$. Montrer que f est une isométrie, puis que f est bijective.

---

95. **Ulm 66.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à une matrice associe son polynôme minimal.

---

96. **ENS Saclay 67.** Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} |\lambda|$ et $\|\!|A|\!\| = \max\{\|Ax\| \ ; \ x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\| = 1\}$.

1) Montrer que $\|\!| \ |\!\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que $\|\!| \ |\!\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $\| \ \|$. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|\!|AB|\!\| \leqslant \|\!|A|\!\| \times \|\!|B|\!\|$.

2) Montrer que $\rho(A) \leqslant \|\!|A|\!\|$.

3) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{C}^n$ pour laquelle $\|\!|A|\!\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

4) Montrer qu'il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :

(i) il existe sur $\mathbb{C}^n$ une norme $\| \ \|$ telle que pour la norme subordonnée $\|\!|A|\!\| < 1$;

(ii) $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;

(iii) il existe M semblable à A telle que $\|\!|M|\!\|_\infty < 1$ avec $\|\!| \ |\!\|_\infty$ la norme subordonnée à $\| \ \|_\infty$.

5) Montrer que pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lim\limits_{k \to \infty} N(A^k)^{1/k} = \rho(A)$.

Jour 12 : probabilités

---

97. **ENS.**Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant la loi de X. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n \ln n}\right)$ converge en probabilité vers la constante 1 (on procèdera à une troncature en considérant $X_i^N = X_i.1_{X_i < N}$ avec N à choisir).

On retiendra la tecnhique de la troncature utile pour se ramener à espérance finie.

---

98. **X-ENS Loi uniforme divisible sur $[\![1, n]\!]$.** Soit $n \geqslant 2$.

1) On suppose que $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1} = P(X)Q(X)$ où P, Q sont deux polynômes réels unitaires à coefficients positifs ou nuls. Montrer que les coefficients de P et Q sont dans $\{0, 1\}$.

2) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires Y, Z définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, non presque sûres, indépendantes, telles que $X \sim Y + Z$ si et seulement si n n'est pas premier.

---

99. **ENS Ulm 152.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X_{i,j}^n)_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires vérifiant $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{E}(e^{\lambda X_{i,j}^n}) \leqslant e^{\lambda^2}$. Soit $M^n = (M_{i,j}^n)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice aléatoire symétrique telle que, si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $M_{i,j}^n = X_{i,j}^n$.

1) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathrm{P}\left(\langle M^n v, v\rangle \geqslant \alpha\sqrt{n}\right) \leqslant e^{-n\alpha^2/8}$$

2) Montrer que l'on peut trouver un nombre fini de points constituant un ensemble Λ_n contenu dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ tels les points de Λ_n sont distants de plus de $1/4$ et tout point de la sphère est à une distance de moins de $1/4$ de Λ_n. Majorer le cardinal de Λ_n.

3) On note $\lambda_n(M^n)$ la plus grande valeur propre de M^n. Montrer que si $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour n assez grand,

$$\mathrm{P}(\lambda_n(M_n) \geqslant \alpha\sqrt{n}) \leqslant 2e^{-n\beta}.$$

---

100. **ENS Lyon 144.** Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Soit T la variable aléatoire égale à $+\infty$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \leqslant 0$, et à $\min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n > 0\}$ sinon.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{P}(S_{2n} \neq 0) = 2P(S_{2n} > 0) = \mathrm{P}(T \leqslant 2n - 1).$$

2) Déterminer la loi de T.

Jour 13 : divers

101. X-ENS. Suites équiréparties, critère de Weyl. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, on pose

$$X_n(a,b) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b]\}.$$

1) Prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\dfrac{X_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout couple (a,b) ;

(ii) pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \ ;$$

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0.$

Une suite qui vérifie ces conditions est dite *équirépartie dans* $[0,1]$.

2) Préciser les valeurs d'adhérence d'une suite équirépartie dans $[0,1]$.

3) Soit α un irrationnel. Montrer que la suite $(n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor)_{n\geqslant 0}$ est équirépartie.

4) Etudier l'équirépartition de $(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$, de $(\ln n \lfloor \ln n \rfloor)$.

---

102. X 218. 1) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de $C_d \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X],\ \ |P(0)| \leqslant C_d \int_{-1}^{1} |P(x)|\mathrm{d}x.$$

2) Que peut-on dire de C_d lorsque $d \to +\infty$?

3) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de $K_d \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall P \in \mathbb{R}_d[X]$, $|P(0)| \leqslant K_d \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} |P(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$. Donner une minoration asymptotique de K_d, en utilisant $(1-x^2)^q$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $L_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x^2)^n\right)$.

4) Montrer que $(L_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale pour le produit scalaire donné par $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$.

5) En déduire une expression de K_d.

---

103. Soit φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que si M appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $\varphi(M)$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1) Donner des exemples de tels endomorphismes.

2) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\varphi(M)$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour cela, on prouvera que si $\mathrm{rg}\, M < n$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda M$ est inversible.

3) Montrer que $\mathrm{rg}\,\varphi(M) \geqslant \mathrm{rg}\, M$. Pour cela, on prouvera que si $\mathrm{rg}\, M = r$, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $Q - \lambda M$ soit non inversible pour r valeurs de λ exactement.

4) Montrer que φ conserve le rang.

---

104. Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations autonomes. Soit U_0 un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle solution (I,x) du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$

$$x' = f(x) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0,$$

un couple où I est un intervalle d'intérieur non vide contenant t_0 et $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant pour tout $t \in I$, $x'(t) = f(x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.

1) Montrer que à l'aide du lemme de Gromwall que si (I,x) et $(J,\tilde{x})$ sont des solutions du même problème de Cauchy $(\mathcal{P})$, elles coïncident sur $I \cap J$ tout entier.

2) Montrer que si I est un intervalle d'intérieur non vide contenant t_0, $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, (I,x) est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ si et seulement si,

$$\forall t \in I,\ \ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

3)a. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $[x_0 - \beta, x_0 + \beta] \subset U_0$ et pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \longrightarrow [x_0 - \beta, x_0 + \beta] \subset U_0$, la fonction

$$F(x) : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

est à valeurs dans $[x_0-\beta, x_0+\beta]$.

b. On considère la fonction constante X_0 égale à x_0 sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, et $X_{n+1}=F(X_n)$. Montrer que $\sum(X_{n+1}-X_n)$ converge normalement. En déduire l'existence d'une solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ définie sur un intervalle dont t_0 est un point intérieur.

4) On appelle solution maximale de $(\mathcal{P})$ toute solution qu'on ne peut pas prolonger en une solution de $(\mathcal{P})$. Montrer que $(\mathcal{P})$ admet une unique solution maximale (I_{max}, X_{max}) et vérifier de plus que I_{max} est un intervalle ouvert et que toute solution de $(\mathcal{P})$ est une restriction de cette solution maximale.

5) Soit $x_0 \in I_0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Relier les solutions maximales de $x'=f(x)$ portant sur les conditions $x(0)=x_0$ et $x(t_0)=x_0$.

6) Que dire que la solution maximale de $x'=f(x)$ avec $x(0)=x_0$ si $f(x_0)=0$?

7) Montrer que si $I_0=\mathbb{R}$ et f est bornée, alors toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On peut renplacer U_0 intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par U_0 ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, on peut considérer alors les solutions de $x'=-\nabla x$.

---

105. **X 283.** Soit un entier $N>5$. Soient $X_1,\ldots,X_N$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose que X_1 est à valeurs dans $\{1,2,3\}$. On définit une variable aléatoire f à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ par $f(\omega)[\overline{n}]=\overline{n+X_n(\omega)}$ pour tout $n\in [\![1,N]\!]$ et toute issue ω. Déterminer la probabilité pour que f soit une permutation ayant au moins trois orbites.

---

106. **X 197b.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que, pour tout $t\in\mathbb{C}$, $\det(A+tB)=\det(A)+t\det(B)$. Que peut-on dire de A et B ? (traiter d'abord le cas A ou B inversible puis dans le cas A et B non inversibles, on montrera l'existence de deux sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ tel que $A(V)\subset W$ et $B(V)\subset W$ avec $\dim W < \dim V$).

---

107. **Le théorème de l'inversion locale.** On désigne par k et n deux entiers non nuls et par U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\!|\ \|\!|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

I. Théorème de l'inversion locale : un cas particulier. On suppose que $0\in U$. Soit $f: U\longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0)=0$ et $\mathrm{d}f_0=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. On considère la fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi: x\in U\longmapsto x-f(x)\in\mathbb{R}^n$.

1) Justifier l'existence de $r>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ avec $\|x\|\leqslant r$, on a $\|\!|\mathrm{d}\varphi_x\|\!|\leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{d}f_x\in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

2) Démontrer que pour tout $x\in\overline{B}(0,r)$, $\|\varphi(x)\|\leqslant \dfrac{r}{2}$.

3) On fixe $y\in\mathbb{R}^n$ avec $\|y\|\leqslant\dfrac{r}{2}$ et on considère l'application

$$g_y : \begin{array}{ccc} \overline{B}(0,r) & \longrightarrow & \overline{B}(0,r) \\ x & \longmapsto & \varphi(x)+y \end{array}$$

a. Démontrer que g_y est bien définie et $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne.

b. En déduire que g_y possède un unique point fixe.

4) On pose $V=f^{<-1>}\left(B\left(0,\dfrac{r}{2}\right)\right)\cap B(0,r)$. Montrer que V est un ouvert, puis que $\tilde{f}: x\in V\longmapsto f(x)\in B\left(0,\dfrac{r}{2}\right)$ est bien définie.

5) Vérifier que $\tilde{f}$ est bijective.

6) Vérifier que si $x,x'\in\overline{B}(0,r)$, $\|x-x'\|\leqslant 2\|f(x)-f(x')\|$. En déduire que $\tilde{f}^{-1}$ est continue.

7) Justifier l'existence de $M\geqslant 0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ avec $\|x\|\leqslant r$, on a $\|\!|(\mathrm{d}f_x)^{-1}\|\!|\leqslant M$.

8) Montrer que si $y,y_0\in B\left(0,\dfrac{r}{2}\right)$ et $x=\tilde{f}^{-1}(y)$, $x_0=\tilde{f}^{-1}(y_0)$, on a

$$\left\|\tilde{f}^{-1}(y)-\tilde{f}^{-1}(y_0)-(\mathrm{d}_{x_0}f)^{-1}(y-y_0)\right\|\leqslant M\,\|f(x)-f(x_0)-\mathrm{d}f_{x_0}(x-x_0)\|\,.$$

9) Conclure que $\tilde{f}$ établit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $B\left(0,\dfrac{r}{2}\right)$.

II. Théorème de l'inversion locale : le cas général. Soit $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a\in U$ tel que $u=\mathrm{d}f_a\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. On considère $F: x\in(-a)+U\longmapsto u^{-1}(f(x+a)-f(a))$.

10) En appliquant le résultat de la première partie à F, vérifier l'existence de deux ouverts V et W de $\mathbb{R}^n$ avec $a\in V\subset U$ et $f(a)\in W$ tels que f induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\tilde{f}$ de V sur W.

11) Vérifier que si f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k\geqslant 2$, alors $\tilde{f}$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

III. Le théorème de l'inversion globale. Soit $f: U\longrightarrow\mathbb{R}^n$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$ et injective. De plus, on suppose que $\mathrm{d}f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ pour tout $a\in U$. Montrer qu'alors, $f(U)$ est un ouvert et que f établit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.