MP 21-22

CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE DEFINIE

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Les méthodes ci-dessous permettent d'obtenir une approximation de la valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ en remplaçant f sur $[a, b]$ par une fonction g dont l'intégrale est facilement calculable (et programmable).

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul et σ la subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $\dfrac{b-a}{n}$. En notant $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ on a ainsi

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

et le pas de la subdivision σ est $h = \dfrac{b-a}{n}$.

L'erreur commise sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}], 0 \leqslant k \leqslant n-1$, est

$$e_k = \int_{[x_k, x_{k+1}]} (f - g)$$

et l'incertitude absolue sur $[a, b]$ majorée par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |e_k|$.

I. Méthode des rectangles

La fonction g est la fonction en escalier définie sur $[a, b]$ par

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_i, x_{i+1}[, \; g(t) = f(x_i) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b)$$

Ainsi

$$\int_{[a,b]} g = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

et l'erreur commise sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}], 0 \leqslant k \leqslant n-1$

$$e_k = \int_{[x_k, x_{k+1}]} (f - f(x_k))$$

Effectuons le calcul d'incertitude absolue en supposant f de classe C^1 sur $[a, b]$ et notons $M_1(f) = \sup\limits_{[a,b]} |f'|$.

On a alors

$$|e_k| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\, dx \leqslant M_1(f) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\, dx$$

c'est-à-dire

$$|e_k| \leqslant \frac{1}{2}\, (x_{k+1} - x_k)^2\; M_1(f)$$

L'incertitude absolue de la méthode des rectangles vérifie alors

$$\boxed{\left| \int_{[a,b]} (f - g) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2\, n}\; M_1(f)}$$

Remarque I.1 *Cette inégalité prouve que la méthode est exacte lorsque f est une fonction constante.*

Considérons la fonction f définie sur $[a, b]$ par $\forall x \in [a, b],\; f(x) = x$. On a dans ce cas

$$e_k = \int_{[x_k, x_{k+1}]} (f - f(x_k)) = \frac{1}{2}\left(x_{k+1}^2 - x_k^2\right) - x_k\,(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\,(x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{(b-a)^2}{2\, n^2}$$

puis

$$\int_{[a,b]} (f - g) = \frac{(b-a)^2}{2\, n}$$

ce qui prouve (puisque $M_1(f) = 1$) que l'inégalité précédente ne peut pas être améliorée.

II. Méthode des rectangles médians

Cette méthode est aussi appelée méthode du point milieu.

La fonction g est la fonction en escalier définie sur $[a,b]$ par

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_i, x_{i+1}[,\ g(t) = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b)$$

et ainsi

$$\int_{[a,b]} g = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$$

En supposant f dérivable, l'aire du rectangle médian s'appuyant sur le segment $[x_k, x_{k+1}], 0 \leqslant k \leqslant n-1$, est aussi l'aire du trapèze dont l'un des côtés est la tangente au graphe de f au point

$$\left(x_k + \frac{h}{2}, f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right)$$

On remarque que la concavité de f fournit le sens de l'approximation.

L'erreur commise sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}], 0 \leqslant k \leqslant n-1$, est

$$e_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - f'\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\left(x - x_k - \frac{h}{2}\right)\right) dx$$

Effectuons le calcul d'incertitude absolue en supposant f de classe C^2 sur $[a,b]$ et notons $M_2(f) = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$. On a alors

$$|e_k| \leqslant M_2(f) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2}\left(x - x_k - \frac{h}{2}\right)^2 dx$$

c'est-à-dire

$$|e_k| \leqslant \frac{h^3}{24} M_2(f)$$

L'incertitude absolue de la méthode des rectangles médians vérifie alors

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} (f-g)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24\, n^2}\ M_2(f)}$$

Exercice 1 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, et $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[\alpha, \beta]$. Montrer que pour tout élément x de $[\alpha, \beta]$, il existe $c \in]\alpha, \beta[$ tel que

$$f(x) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 f''(c)$$

Lorsque x est différent de $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ on peut considérer la fonction auxiliaire $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [\alpha, \beta],\ \varphi(t) = f(t) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{A}{2}\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

où la constante A est choisie de sorte que l'on ait $\varphi(x) = 0$. Utiliser ce résultat pour retrouver la majoration d'incertitude absolue de la méthode des rectangles médians.

Exercice 2 Montrer que l'inégalité précédente ne peut pas être améliorée en utilisant la fonction f définie sur $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) = x^2$$

Remarque II.1 *(sans fondement mathématique rigoureux !)*
En "interprétant" l'exercice précédent, à x_k fixé, en supposant $f''(x_k) \neq 0$, lorsque h est "petit", une bonne approximation de e_k est $\dfrac{h^3}{24} f''(x_k)$.

III. Méthode des trapèzes

La fonction g est la fonction continue affine par morceaux sur $[a,b]$ définie par

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ g(x_i) = f(x_i) \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!],\ g_{|[x_{i-1},x_i]} \text{ est affine}$$

Ainsi

$$\int_{[a,b]} g = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}\,(f(x_k)+f(x_{k+1})) = \frac{h}{2}\,(f(a)+f(b)) + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

On remarque que la concavité de f fournit le sens de l'approximation.

Effectuons le calcul d'incertitude absolue en supposant f de classe C^2 sur $[a,b]$ et notons $M_2(f) = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Notons $m_k = x_k + \dfrac{h}{2} = \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$ et considérons la fonction $\varphi_k : \left[0,+\dfrac{h}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \left[0,+\frac{h}{2}\right],\ \varphi_k(t) = \int_{m_k-t}^{m_k+t} f(x)\,dx - t\,(f(m_k+t)+f(m_k-t))$$

La fonction φ_k est de classe C^2 sur $[x_k,x_{k+1}]$ et $e_k = \varphi_k\left(\dfrac{h}{2}\right)$. On a

$$\forall t \in \left[0,+\frac{h}{2}\right],\ \varphi_k'(t) = -t\,(f'(m_k+t)-f'(m_k-t))$$

et par conséquent

$$\forall t \in \left[0,+\frac{h}{2}\right],\ |\varphi_k'(t)| \leqslant 2\,t^2\,M_2(f)$$

On obtient ainsi

$$\left|\varphi_k\left(\frac{h}{2}\right) - \varphi_k(0)\right| \leqslant \frac{h^3}{12} M_2(f) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |e_k| \leqslant \frac{h^3}{12} M_2(f)$$

L'incertitude absolue de la méthode des trapèzes vérifie alors

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} (f-g)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\ M_2(f)}$$

Exercice 3 Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, et $f : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$. On considère la fonction $g : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ affine vérifiant $g(\alpha) = f(\alpha)$ et $g(\beta) = f(\beta)$.
Montrer que pour tout élément x de $[\alpha,\beta]$, il existe $c \in]\alpha,\beta[$ tel que

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)\,(\beta-x)\,f''(c)$$

Utiliser ce résultat pour retrouver la majoration d'incertitude absolue de la méthode des trapèzes.

Exercice 4 Montrer que l'inégalité précédente ne peut pas être améliorée en utilisant la fonction f définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = x^2$$

Remarque III.1 *(sans fondement mathématique rigoureux !)*
En "interprétant" l'exercice précédent, à x_k fixé, en supposant $f''(x_k) \neq 0$, lorsque h est "petit", une bonne approximation de e_k est $-\dfrac{h^3}{12}\,f''(x_k)$.

IV. Méthode de Simpson

On s'inspire des deux remarques pour construire cette méthode puisque

$$\text{Simpson} = \frac{1}{3}\ (\text{trapèze} +\ 2\ \text{médian}).$$

On approxime ainsi $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ par

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6}\ \left(f(x_k) + 4\,f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + f(x_{k+1})\right)$$

La fonction g correspondante est la fonction continue sur $[a,b]$, dont la restriction à chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est la fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 interpolant f en x_k, x_{k+1} et $x_k + \dfrac{h}{2}$.

Effectuons le calcul d'incertitude absolue en supposant f de classe C^4 sur $[a,b]$ et notons $M_4(f) = \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(4)}\right|$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour évaluer e_k posons $m_k = x_k + \dfrac{h}{2}$ et considérons la fonction $\varphi_k : \left[0\,,+\dfrac{h}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \left[0\,,+\frac{h}{2}\right],\ \varphi_k(t) = \int_{m_k-t}^{m_k+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}\ (f(m_k - t) + 4\,f(m_k) + f(m_k + t))$$

Avec ces notations $e_k = \varphi_k\left(\dfrac{h}{2}\right)$.

φ est de classe C^4 sur $\left[0\,,+\dfrac{h}{2}\right]$ et on a $\forall t \in \left[0\,,+\dfrac{h}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(t) &= \frac{2}{3}\ (f(m_k - t) - 2\,f(m_k) + f(m_k + t)) - \frac{t}{3}\ (f'(m_k + t) - f'(m_k - t)) \\
\varphi_k''(t) &= \frac{1}{3}\ (f'(m_k + t) - f'(m_k - t)) - \frac{t}{3}\ (f''(m_k + t) + f''(m_k - t)) \\
\varphi_k^{(3)}(t) &= -\frac{t}{3}\ \left(f^{(3)}(m_k + t) - f^{(3)}(m_k - t)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(0) = 0$, $\varphi_k''(0) = 0$ et d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall t \in \left[0\,,+\frac{h}{2}\right],\ \left|\varphi_k^{(3)}(t)\right| \leqslant \frac{2\,t^2}{3}\ M_4(f)$$

et alors

$$\forall t \in \left[0\,,+\frac{h}{2}\right],\ |\varphi_k(t)| \leqslant \frac{t^5}{90}\ M_4(f)$$

Par conséquent

$$|e_k| \leqslant \frac{h^5}{2880}\ M_4(f)$$

L'incertitude absolue de la méthode de Simpson vérifie alors

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} (f-g)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}\ M_4(f)}$$

Remarque IV.1 *Il s'agit d'une méthode dont l'incertitude est meilleure que "prévu". Ceci est dû au fait que la relation*

$$\int_\alpha^\beta P(t)\,dt = \frac{\beta-\alpha}{6}\left(P(\alpha)+4\,P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+P(\beta)\right)$$

reste valable lorsque $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
On peut alors utiliser la fonction g *continue sur* $[a,b]$, *dont la restriction à chaque intervalle* $[x_k, x_{k+1}]$ *est la fonction polynôme de degré inférieur ou égal à* 3 *interpolant* f *en* x_k, x_{k+1} *et* $x_k + \dfrac{h}{2}$ *et telle que* $g'\left(x_k+\dfrac{h}{2}\right) = f'\left(x_k+\dfrac{h}{2}\right)$.

Exercice 5 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe C^4 sur $[\alpha,\beta]$. On note g la fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 interpolant f en α, β et $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et telle que $g'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (existence et unicité en exercice).
Montrer que pour tout élément x de $[\alpha,\beta]$, il existe $c \in]\alpha,\beta[$ tel que

$$f(x)-g(x) = -\frac{1}{4!}\,(x-\alpha)\,(\beta-x)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 f^{(4)}(c)$$

Utiliser cette relation pour retrouver la majoration d'incertitude absolue de la méthode de Simpson.

Exercice 6 Montrer que l'inégalité précédente ne peut pas être améliorée en utilisant la fonction f définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = x^4$$