ÉCOLE POLYTECHNIQUE — CONCOURS D'ADMISSION 2013

FILIÈRE MP

Épreuves orales de Mathématiques

L'épreuve orale de mathématiques de la filière MP dure 50 minutes. Sur un ou deux thèmes proposés par l'examinateur, l'épreuve orale a pour but d'instaurer un dialogue avec le candidat, permettant une évaluation de ses connaissances et de sa capacité à les combiner et à les mettre en œuvre, comme cela est décrit dans les objectifs du programme officiel. À l'exception des questions de cours et des questions qui en sont très proches, on n'attend pas du candidat qu'il réponde complètement et directement à la question posée, mais qu'il s'approprie le sujet en explorant selon les thèmes, des cas particuliers, en introduisant des hypothèses supplémentaires, en proposant des résultats intermédiaires, démarche à laquelle participera l'examinateur.

Un sujet d'oral exploite donc un thème et n'est pas nécessairement présenté comme un exercice écrit devant lequel le candidat est seul. Pour conserver cette spécificité, nous n'avons en général pas tenté de reconstruire a posteriori des exercices écrits, mais nous présentons des *thèmes* avec quelques *commentaires*.

Thème 1 : Déterminer toutes les applications $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall t,\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(tx) = g(t)f(x)$.

Commentaire : On commence par observer que si f est non nulle, f et g sont proportionnelles. On montre ensuite que f est C^∞ et est solution d'une équation différentielle simple.

Thème 2 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Démontrer que $\max_{[0,1]} |f''| \geq 4$.

Commentaire : Taylor.

Thème 3 : Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel r_n tel que le disque ouvert de centre le point $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ et de rayon r_n contienne exactement n points à coordonnées entières.

Prolongements :

Peut-on remplacer le point $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ par un point à coordonnées rationnelles ?

Donner un équivalent du rayon r_n.

Étendre la question à la dimension 3.

Commentaire : On utilise que $\sqrt{2}$ est irrationnel pour établir que les distances à $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ de deux éléments distincts de $\mathbb{Z}^2$ sont distinctes. Pour r_n, on observe que la réunion des carrés de côté 1 centrés en des points à coordonnées entières à l'intérieur du disque de rayon r_n contient le disque de rayon $r_n - \frac{1}{\sqrt{2}}$, et est contenue dans le disque de rayon $r_n + \frac{1}{\sqrt{2}}$. La comparaison des aires des ces trois domaines conduit au résultat. Pour la dimension 3, on peut prendre le point $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ et faire véréifier (ou admettre) que les éléments $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Thème 4 : Soit V un espace vectoriel. Un endomorphisme s de V est appelé pseudo-réflexion si le rang de $Id - s$ est 1.
1) Montrer qu'il existe $l \in V^*$ et $v \in V$ tels que $\forall x \in V, s(x) = x - l(x)v$.
2) Soit G un sous-groupe de $GL(V)$ contenant une pseudo-réflexion et tel que les seuls sous-espaces de V stables par tous les éléments de G sont $\{0\}$ et V.
a) Montrer que l'ensemble des endomorphismes de V commutant à tous les éléments de G est l'ensemble des homothéties.
b) On suppose V de dimension finie. Soit B une forme bilinéaire non nulle telle que : $\forall x, y \in V$, $\forall g \in G$, $B(g(x), g(y)) = B(x, y)$.
i) Montrer que B est non dégénérée.
ii) Soit B' une autre forme bilinéaire invariante par G. Montrer que B' est proportionnelle à B.
iii) Montrer que B est symétrique ou antisymétrique.

Commentaire : La question 1) s'obtient en prenant pour v un vecteur engendrant l'image de $Id - s$. La question suivante exploite le fait que si des endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre : le fait de commuter avec s assure alors l'existence d'une valeur propre, et le sous-espace propre associé est alors stable par G. On observe aussi que le noyau (à gauche ou à droite) d'une forme bilinéaire invariante est un sous-espace stable. Toute forme bilinéaire peut s'exprimer à partir d'une forme bilinéaire non dégénérée via un endomorphisme, et si les deux formes sont invariantes l'endomorphisme doit commuter à tout G.

Thème 5 : Soient $(a_n)_{n\in N}$ et $(c_n)_{n\in N}$ des suites de réels positifs ou nuls, et $M \geq 0$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.
1) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty$ et que : $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} \leq M + \sum_{k=0}^{n} c_k a_k$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in N}$ est bornée.
2) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty$, que $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k a_k < +\infty$, et que : $\forall n \geq 0$, $a_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} c_k a_k$. Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que : $\forall n \geq N$, $a_n = 0$.

Commentaire : La première question se traite en considérant la suite $b_{n+1} = M + \sum_{k=0}^{n} c_k a_k$, qui majore a_{n+1} et vérifie : $b_{n+1} \leq (1 + c_n) b_n$. On ramène l'étude du produit des $(1 + c_n)$ à celle d'une série en passant au logarithme, puis on utilise la comparaison de la convergence de séries positives dont les termes généraux sont équivalents. La deuxième question revient à montrer que $\max_{k\geq n} a_k$ est nul pour n assez grand. Or, la suite ainsi définie est décroissante et on a, pour n assez grand, $a_n \leq \frac{1}{2} \max_{k\geq n} a_k$.

Thème 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 2π périodique. Pour $r \in [0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1)r^2)\, f(t)}{1 - 2r\cos(x - t) + r^2} dt$$

1) Montrer que : $F(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ où (a_n) et (b_n) sont les coefficients de Fourier de f.

2) Montrer que quand r tend vers 1 par valeurs inférieures, $F(x,r)$ converge uniformément vers f (on travaillera avec l'expression intégrale).

Commentaire : La première question requiert de développer correctement la fonction $\theta \mapsto \frac{(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$ en série de Fourier. Une décomposition en éléments simple de cette expression vue comme fraction rationnelle en la variable r à θ fixé conduit facilement au résultat. La deuxième question utilise les techniques standard de convergence uniforme et de majoration d'intégrales par des découpages convenables.

Thème 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non inversible.
1) Montrer que : $\dim \ker(A^2) \leq 2 \dim \ker(A)$.
2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  i) $\dim \ker(A^2) = 2 \dim \ker(A)$;
  ii) $\ker(A) \subset \mathrm{Im}(A)$;
  iii) $A(\ker(A^2)) = \ker(A)$;
  iv) $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Commentaire : La première question et l'équivalence des trois premiers points de la deuxième se traitent en considérant la restriction de A à $\ker(A^2)$, qui envoie cet espace dans son sous-espace $\ker(A)$ et en appliquant le théorème du rang. Le dernier point est un peu plus délicat : on peut observer que l'image de $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est la somme de $(\mathrm{Im}(A), 0)$ et $\{(y, A(y)),\, y \in F\}$ où F est un supplémentaire de $\ker(A)$ dans $\mathbb{C}^n$.

Thème 8 :
1) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue, dont l'image est un ouvert, et telle que l'image réciproque de tout compact est un compact (on dit alors que f est propre). Montrer que f est surjective.
2) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $||df(x) - Id|| \leq k$. Montrer que f est injective, propre et que c'est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

Commentaire : Pour 1), on montre que l'image de f est fermée, la connexité par arcs de $\mathbb{R}^n$ permettant de conclure. Il s'agit ensuite d'appliquer le théorème de caractéirisation des difféomorphismes par le jacobien.

Thème 9 : Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $\alpha > 0$. On pose : $m_n = \frac{s_0+\ldots+s_n}{n+1}$ et $t_n = \alpha s_n + (1-\alpha)m_n$.
1) Montrer que si $s_n \to l \in \mathbb{R}$ alors $m_n \to l$. Que dire de la réciproque ? Donner une condition suffisante pour que la réciproque soit vraie.
2) On suppose que $t_n \to l \in \mathbb{R}$ et on se propose de montrer que $s_n \to l$.
  a) Montrer que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
  b) Montrer que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence.
  c) Conclure.

Commentaire : Indication pour traiter 2) : On observera que si $s_n < m_n$ alors $m_{n-1} > m_n$ et si $s_n \geq m_n$ alors $m_{n-1} \leq m_n$.

La première question, sur la moyenne de Cesaro, est classique. La suivante peut se traiter en raisonnant par l'absurde, en exploitant correctement l'indication pour montrer que si $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas la propriété voulue (a) ou b), alors $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne la possède pas non plus.

Thème 10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et minorée. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \neq x_0,\ f(x_0) - f(x) < |x - x_0|$.

Commentaire : La fonction f est minorée, disons par $m \in \mathbb{R}$ mais n'atteint peut-être pas de minimum. En revanche, la fonction $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}|x|$ est encore minorée et tend vers l'infini à l'infini, donc possède un minimum atteint en un $x_0 \in \mathbb{R}$.

Thème 11 : Soient a, b des réels strictement positifs, λ un réel ≥ 1 et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + \lambda((a+b)^n - a^n - b^n)}{2 + \lambda(2^n - 2)}} \leq \frac{a+b}{2}\ .$$

Commentaire : Il est naturel d'étudier la fonction $f(\lambda) = \frac{a_n + b_n + \lambda((a+b)^n - a^n - b^n)}{2+\lambda(2^n-2)}$. Elle est décroissante, ce qui donne l'inégalité de droite. L'autre inégalité s'obtient en minorant sa limite en $+\infty$ par $(ab)^{\frac{n}{2}}$: ceci peut se faire en développant $(a+b)^n$ par la formule du binôme et en minorant $\frac{a^j b^{n-j} + a^{n-j} b^j}{2}$ par $a^n b^n$.

Thème 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice $A\overline{A}$ possède une valeur propre réelle positive ou nulle λ. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que : $A\overline{v} = \sqrt{\lambda} v$.

Commentaire : Partant d'un vecteur propre de $A\overline{A}$ pour la valeur propre λ, on se demande si $A\overline{u}$ et u sont liés. Si c'est le cas, on obtient le vecteur cherché en multipliant u par un nombre complexe de module 1 convenable. Sinon, on cherche v comme combinaison linéaire de $A\overline{u}$ et u.

Thème 13 : Soit $t \to M(t)$ une application dérivable de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I\ :\ \det M(t) = 1$. Soit $\Delta(t)$ la trace de $M(t)$.
1) Montrer que si $\Delta(t_0) = \pm 2$ et $\Delta'(t_0) \neq 0$, alors $M(t_0)$ n'est pas diagonalisable.
2) Calculer la matrice $M(t)$, où $t \in \mathbb{R}$, telle que toute solution y de l'équation différentielle $y''(x) + ty(x)$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}.$$

Trouver t_0 pour lequel les hypothèses précédentes sont vérifiées.

Commentaire : On montre que $M(t_0)$ a une valeur propre double égale à ± 1, et en calculant la dérivée du déterminant on obtient que $M(t_0)$ n'est pas diagonalisable. La question 2 ne pose pas de problème sauf peut-être la dérivabilité de $M(t)$ en $t = 0$; seule la valeur $t_0 = 0$ convient.

Thème 14 : Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\sup\{|\varphi(x)|\ ;\ ||x|| = 1\}$ est égal à 1 et n'est pas atteint.

1) Que peut-on dire de $\dim E$?
2) Soit $F = \ker \varphi$. Montrer que $\sup\{d(x, F) \,;\, ||x|| = 1\}$ n'est pas atteint.
3) Trouver un exemple.

Commentaire : C'est une vérification des propriétés des espaces normés et de la spécificité de ceux de dimension finie. Comme exemple, on a pour E l'espace des fonctions réelles continues sur $[-1, 1]$ muni de la norme $||f|| = \sup\{|f(t)|; t \in [-1, 1]\}$ et pour $\varphi : \varphi(f) = \frac{1}{2} : \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt)$.

Thème 15 : Soit

$$u_n(z) = \frac{z^n}{1 + z^{2n+1}} \ , \ z \in \mathbb{C} \ .$$

1) Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_0^\infty u_n(z)$.
2) Montrer que la somme est paire pour $|z| < 1$ et impaire pour $|z| > 1$.

Commentaire : Cela demande les connaissances minimales sur les séries entières, les séries de fonctions, les séries doubles.

Thème 16 : Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la moyenne de f sur tout intervalle de longueur T est une constante m.
1) Si $[a, b]$ est un intervalle quelconque, est-ce que la moyenne M de f sur $[a, b]$ est égale à m ? Quelle est la condition sur $[a, b]$ pour que ce soit vrai ?
2) On suppose $f \geq 0$ et $m > 0$. Trouver un encadrement optimal de $\frac{M - m}{m}$ en fonction de T et $b - a$.

Commentaire : Un thème facile qui demande du bon sens pour voir et montrer que f est périodique et obtenir l'encadrement

$$-\frac{r}{b - a} \leq \frac{M - m}{m} \leq \frac{T - r}{b - a}$$

où $nT + r = b - a$, $0 \leq r < T$, $n \in \mathbb{N}$.

Thème 17 : Soit $g(t)$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $g''(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que la courbe décrite dans $\mathbb{R}^2$ par $P(t) = (t, g(t))$ admet une tangente en tout point et définir un vecteur unitaire continu $\vec{u}(t)$ de cette tangente.
2) Pour $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ on définit le point $M(t, z)$ tel que $\overrightarrow{PM} = z\vec{u}(t)$. Montrer que l'application $(t, z) \mapsto M(t, z)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ sur son image. Déterminer cette image.

Commentaire : C'est un exemple de caractérisation des difféomorphismes à l'aide du jacobien. L'image dépend de l'existence éventuelle d'asymptotes à la courbe.

Thème 18 : Soient deux cercles C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}^3$ d'axes respectifs D_1 et D_2.
1) Montrer qu'il existe une droite de $\mathbb{R}^3$ qui rencontre les deux cercles et les deux axes.
2) Trouver un exemple où il y a quatre solutions.

Commentaire : Une droite qui rencontre un cercle et son axe est orthogonale à la tangente au cercle au point de rencontre. On en déduit que si $(M_1, M_2) \in C_1 \times C_2$ réalise le maximum de la distance entre un point de C_1 et un point de C_2, la droite M_1M_2 convient. Ce couple existe car $C_1 \times C_2$ est compact. Un examen plus poussé montre qu'il y a 4 solutions au problème sauf dans des cas particuliers.

Thème 19 : Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R} \, : \, f'_d(x) = 2f'_g(x) \, .$$

Montrer que f est constante.

Commentaire : Ce thème n'est pas aisé : on attend des remarques pertinentes de la part du candidat et on peut découper la démonstration en plusieurs étapes. La fonction est dérivable en un extremum local. Si $a < b$ et $f(a) < f(b)$ le graphe de f sur le segment $[a, b]$ est sous la corde. Par contre si $f(a) > f(b)$ le graphe est au-dessus de la corde. Puis on en déduit que si $f(a) = f(b)$, f est constante sur $[a, b]$. Enfin si $a < b$ et $f(a) < f(b)$, f est croissante sur $[a, b]$, et les dérivées à droite et à gauche sont croissantes. On en déduit enfin que f est constante.

Thème 20 : Soit $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, et

$$b_n = \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} \, .$$

Montrer que les séries de terme général a_n et b_n sont de même nature.

Commentaire : On pouvait donner une indication salvatrice : chercher la limite quand n tend vers ∞ du produit $(1 - b_1)(1 - b_2) \ldots (1 - b_n)$.

Thème 21 : Soit $P_n(x) : 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x_n}{n!}$.
1) Trouver le nombre de racines réelles de P_n.
2) Soit x_n la racine de P_{2n+1}. Montrer que $x_n \to -\infty$ quand $n \to \infty$.

Commentaire : Tout est élémentaire mais réclame du soin et de la rigueur. On montre par récurrence $P_{2n} > 0$, P_{2n+1} strictement croissante, $x_n > -(2n+1)$ et x_n décroissante. Puis on montre que la limite de x_n ne peut être finie car sur un compact de $\mathbb{R}$, P_n converge uniformément vers l'exponentielle et celle-ci ne s'annule pas.

Thème 22 : Soit Γ la courbe décrite par $M(\theta)$ de coordonnées polaires (ρ, θ) avec $\rho = e^\theta$. Soit P un point du plan différent de l'origine O.
1) Montrer qu'il existe une infinité de tangentes à Γ passant par P. Montrer que les points de contact sont sur un cercle qui passe par O et P.
2) Calculer la longueur $l(\theta', \theta)$ de l'arc de courbe $M(\theta')M(\theta)$. On note $l(\theta)$ la limite de $l(\theta', \theta)$ quand θ' tend vers $-\infty$. Soit $C(\theta)$ le cercle de centre $M(\theta)$ et de rayon $l(\theta)$. Montrer que $\theta < \theta'$ implique que $C(\theta)$ est intérieur à $C(\theta')$.

Commentaire : C'est une vérification des connaissances sur les courbes en coordonnées polaires et de l'aptitude à mener des calculs avec ordre et méthode.

Thème 23 : Soit pour $x > 1$:

$$f(x) = \int_1^{+\infty} e^{it^x} dt \ .$$

1) Étudier l'existence de l'intégrale impropre $f(x)$.
2) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

Commentaire : C'est un thème d'analyse où il faut utiliser correctement l'intégrationpar parties. L'équivalent est de la forme $\dfrac{a}{x}$ et il faut montrer que $a = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du$ est non nul.

Thème 24 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u et v appartenant à $\mathcal{L}(E)$. On considère la propriété (P) : $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id_E}$.
1) Montrer que si E est de dimension finie, aucun couple (u, v) ne vérifie (P).
2) Montrer que si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ aucun couple (u, v) d'endomorphismes continus ne vérifie (P).
3) Sur $\mathbb{R}[x]$ considérer $u : P \mapsto P'$ et $v : P \mapsto xP$ et trouver des normes pour lesquelles soit u soit v soit continu.

Commentaire : En dimension finie on peut utiliser la trace. On peut aussi montrer $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}$, $n \geq 1$.

Thème 25 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'équation $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin A$,
avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Par définition, $\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^{2n+1}/(2n+1)!$.

Commentaire : Ce thème permet de tester l'aisance des candidats avec la réduction des endomorphismes dans un cas simple.

Thème 26 : Existe-t-il une suite de réels $a_0, a_1, \ldots$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n(x) := a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ admet n zéros simples réels dans l'intervalle $]0, 1[$?

Commentaire : On considère $Q_n(x) = x^n P_n(1/x)$; la solution découle d'une application répétée du théorème de Rolle.

Thème 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique de classe C^∞ telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Démontrer que l'équation $g(\cdot + \sqrt{2}) - g(\cdot) = f(\cdot)$ admet une unique solution 1-périodique et C^∞.

Commentaire : Ce thème permet dans un premier temps de tester les connaissances des candidats sur les séries de Fourier (lien entre régularité de la fonction et décroissance de ses coefficients de Fourier). Il permet dans un second temps de tester l'habileté des candidats à manipuler des inégalités.

Thème 28 : Soient $m_1, \dots, m_n$ des constantes positives et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Posons

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{x - x_k} .$$

Montrer que l'ensemble des réels x pour lesquels $g(x)$ est défini et vérifie $g(x) > \lambda$ (avec $\lambda > 0$) est une union finie d'intervalles dont la somme $l(\lambda)$ des longueurs vérifie

$$l(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

Commentaire : Ce thème permet de tester les connaissances des candidats en algèbre (polynômes, fractions rationnelles).

Thème 29 : Soient $f, g\ :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux telles que $\int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty$, $\int_0^\infty |g(x)|^2 dx < \infty$. Démontrer que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx\, dy \leq C \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} ,$$

où C est une constante universelle.

Commentaire : Il s'agit d'un thème qui permet de tester la maîtrise par les candidats des outils de base de l'intégration.

Thème 30 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, n impair, telles que $AB + BA = A$. Démontrer que A et B admettent un vecteur propre commun. Le résultat est-il vrai si on enlève l'hypothèse n impair ?

Commentaire : Une des matrices laisse invariant un espace propre de l'autre.

Thème 31 : Si la matrice M à coefficients réels s'écrit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$ et est définie positive, démontrer que $\det M \leq \det A \det B$.

Commentaire : L'outil sous-jacent à ce thème est Gram-Schmidt dans ses liens avec la théorie de la réduction simultanée des formes quadratiques dont une est définie positive.

Thème 32 : *1)* Démontrer que le produit des coefficients diagonaux d'une matrice symétrique définie positive est supérieur au produit de ses valeurs propres.
2) Démontrer que si A et B sont deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors pour tous $\alpha, \beta \geq 0$, avec $\alpha + \beta = 1$, on a

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta .$$

3) En déduire que $\det(A + B)^{1/d} \geq \det(A)^{1/d} + \det(B)^{1/d}$.

Commentaire : L'outil sous-jacent à ce thème est Gram-Schmidt dans ses liens avec la théorie de la réduction simultanée des formes quadratiques dont une est définie positive.

Thème 33 : Soient α, β deux réels tels que pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ (mais pas nécessairement tous) la quantité $u_n = \sqrt{\alpha 2 + (\beta - n)^2}$ soit dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\alpha = 0$ et $\beta \in \mathbb{Z}$.

Commentaire : Ce thème permet de tester les connaissances de base des candidats en analyse (*via* la remarque qu'un entier non nul est plus grand que 1 en valeur absolue).

Thème 34 : Soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Etudier l'existence de la limite (et si elle existe la déterminer) de $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)\sin(nt)}{t} dt$ quand $n \to \infty$.

Commentaire : On écrit $f(x) = f(0) + xg(x)$ avec g continue et on intégre par parties.

Thème 35 : Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, K un compact de E et $f : K \to K$ une application qui vérifie pour tous $x, y \in K$

$$||f(x) - f(y) \geq ||x - y|| \, .$$

Démontrer que f est une isométrie bijective.

Commentaire : On étudie les valeurs d'adhérence des suites $f^k(x)$, $x \in K$.

Thème 36 : Soit $a > 0$ et f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2(t)dt < \infty$. Montrer que l'équation différentielle $y'(t) - ay(t) = f(t)$ admet une unique solution de carré intégrable.

Commentaire : Sur ce thème, on peut vérifier que les candidats connaissent la formule de variation de la constante et savent manipuler des intégrales.