MP 20-21

MEMO MATRICES

I. Matrices

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et m, n sont deux entiers naturels non nuls.

Définition 1 On appelle matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application A de $[\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si $A : [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, $A(i, j) = a_{ij}$ on note A sous la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. On écrit aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Les scalaires a_{ij} sont appelés les coefficients ou les termes de la matrice A.

A i (resp. j) fixé, la suite $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (resp. $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$) est appelée la ligne d'indice i (resp. colonne d'indice j) de la matrice A.

Lorsque $m = n$, la matrice A est dite carrée d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Lorsque $m = 1$ (resp. $n = 1$), la matrice A est appelée matrice-ligne (resp. matrice-colonne).

On appelle sous-matrice (ou matrice extraite) de $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ toute matrice de la forme $(a_{ij})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ avec $I_1 \subset [\![1, m]\!]$ et $I_2 \subset [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire toute matrice obtenue à partir de A en en supprimant un certain nombre de ses lignes et de ses colonnes.

Définition 2 Matrices carrées

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle diagonale (principale) de A la suite $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ dont les termes sont appelés les termes (ou coefficients) diagonaux de A.

On appelle matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) d'ordre n toute matrice carrée d'ordre n $(t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i > j \Rightarrow t_{ij} = 0$ (*resp.* $i < j \Rightarrow t_{ij} = 0$).
On appelle matrice diagonale toute matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à la fois triangulaire supérieure et inférieure, c'est-à-dire $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

On appelle matrice scalaire toute matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux. La matrice scalaire d'ordre n dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n et notée I_n.

On appelle matrice symétrique (resp. antisymétrique) d'ordre n toute matrice carrée d'ordre n $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = a_{ji}$ (*resp.* $a_{ij} = -a_{ji}$).
Comme $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, si A est antisymétrique, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Définition 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, noté $\mathrm{tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propriété I.1 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{tr}(A\,B) = \mathrm{tr}(B\,A)$.
Par conséquent, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $\boxed{\mathrm{tr}(P^{-1}\,A\,P) = \mathrm{tr}(A)}$.

Définition 4 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et (m_1, m_2), (n_1, n_2) deux couples d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$m = m_1 + m_2 \qquad n = n_1 + n_2$$

On note $A_{1,1} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n_1}}$, $A_{1,2} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m_1 \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}}$, $A_{2,1} = (a_{ij})_{\substack{m_1+1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n_1}}$, $A_{2,2} = (a_{ij})_{\substack{m_1+1 \leqslant i \leqslant m \\ n_1+1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Pour $(r, s) \in [\![1, 2]\!] \times [\![1, 2]\!]$, la matrice $A_{r,s}$ est appelée bloc d'indice (r, s) de la matrice A. On dit que l'on écrit la matrice A sous forme de matrice-bloc :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

Cette décomposition est compatible avec l'addition des matrices et la multiplication par un scalaire.

Proposition I.1 *La décomposition par blocs est compatible avec la multiplication des matrices.*

II. Structures

Définition 5 On appelle matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ les matrices notées E_{kl} avec $(k,l) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$, définies par $E_{kl} = (\delta_{ik}\,\delta_{jl}\,1_{\mathbb{K}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

Proposition II.1 *L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de dimension $m\,n$ et $(E_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\1\leqslant l\leqslant n}}$ en est une base, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*

Définition 6 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle produit des matrices A et B dans cet ordre la matrice notée $A\,B$, élément de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ telle que si on note $A\,B = (c_{ij})$ on ait $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}$.

Exemple 1 *Produit de deux matrices élémentaires :* $\boxed{E_{ij}\,E_{kl} = \delta_{jk}\,E_{il}}$.

Proposition II.2 *Le produit des matrices est bilinéaire.*

Définition 7 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle (matrice) transposée de A la matrice, notée ${}^tA$, élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par ${}^tA = (b_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, $b_{ij} = a_{ji}$.

Proposition II.3 *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a* $\boxed{{}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA}$.

Définition 8 Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et (m_1,m_2), (n_1,n_2) deux couples d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $m = m_1 + m_2, n = n_1 + n_2$. On note $A_{1,1} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m_1\\1\leqslant j\leqslant n_1}}$, $A_{1,2} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m_1\\n_1+1\leqslant j\leqslant n}}$, $A_{2,1} = (a_{ij})_{\substack{m_1+1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n_1}}$, $A_{2,2} = (a_{ij})_{\substack{m_1+1\leqslant i\leqslant m\\n_1+1\leqslant j\leqslant n}}$. Pour $(r,s) \in [\![1,2]\!] \times [\![1,2]\!]$, la matrice $A_{r,s}$ est appelée bloc d'indice (r,s) de la matrice A. On dit que l'on écrit la matrice A sous forme de matrice-bloc : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$. Cette "décomposition" est compatible avec l'addition des matrices et la multiplication par un scalaire.

Proposition II.4 *La décomposition par blocs est compatible avec la multiplication des matrices.*

Remarque II.1 *On pourra être amené à manipuler des matrices-blocs de "découpages" différents. Par exemple une matrice peut être considérée comme une matrice colonne par blocs de ses lignes (ou de ses colonnes).*

Proposition II.5 *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 d'élément unité I_n.*
Pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a des diviseurs de zéro et est non commutative.

Définition 9 Les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelées les matrices inversibles d'ordre n, constituent un groupe multiplicatif, noté $GL_n(\mathbb{K})$, appelé groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Proposition II.6 *Les sous-ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques et antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$.*

Pour $n \geqslant 2$, *ces sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *n'en sont pas des sous-algèbres : par exemple, pour* $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, *on a* $(E_{i\,j} + E_{j\,i})\,E_{i\,i} = E_{j\,i}$ *et* $(E_{i\,j} - E_{j\,i})^2 = -E_{i\,i} - E_{j\,j}$.

Proposition II.7 *L'ensemble* $\mathcal{T}_n^{(s)}(\mathbb{K})$ *des matrices triangulaires supérieures d'ordre* n *est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.
Les coefficients diagonaux du produit de deux éléments de $\mathcal{T}_n^{(s)}(\mathbb{K})$ *sont les produits des termes diagonaux correspondants de ces deux matrices. L'ensemble* $\mathcal{T}_n^{(i)}(\mathbb{K})$ *des matrices triangulaires inférieures d'ordre* n *a des propriétés identiques.*

Proposition II.8 *L'ensemble* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *des matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *isomorphe à* $\mathbb{K}^n$.
Les matrices diagonales inversibles sont celles dont aucun des termes diagonaux n'est nul ; l'inverse d'une telle matrice est une matrice diagonale d'ordre n. *L'ensemble des matrices scalaires d'ordre* n *est un corps isomorphe à* $\mathbb{K}$.

III. Matrices et applications linéaires

III.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 10 Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions respectives n et m, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et
$\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}_F = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ deux bases de E et de F respectivement.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on peut écrire (de manière unique) $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i$.
La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, est appelée la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et est notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.
Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, A est appelée la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$ et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$.

Proposition III.1 *Ecriture matricielle d'une application linéaire.*
Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions respectives n et m, $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}_F = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ deux bases de E et de F respectivement.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. A $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$, on associe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et à $f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i\, u_i$ on associe $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. En identifiant les deux expressions de $f(x)$, on obtient $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$, c'est-à-dire $\boxed{Y = A\,X}$.
Réciproquement une telle relation matricielle représente d'une unique application linéaire de E dans F dont A est la matrice dans les base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Proposition III.2 *Soient E, F et G des $\mathbb{K}$ev de dimension finie munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. On a* $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)}$.

Corollaire III.1 *Lorsque $E = F = G$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$, on a* $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(g)\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(f)}$.

Corollaire III.2 *Soient E et F sont deux $\mathbb{K}$ev de même dimension finie munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme de E sur F est que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ soit inversible. Dans ce cas* $\boxed{(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f))^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1})}$.

Proposition III.3 *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n et $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. Cette application induit un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.*

Définition 11 En notant $\mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{B}_m$) la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (resp. $\mathbb{K}^m$), l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels dit canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Ainsi pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on appelle application linéaire canoniquement

associée à A l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ est A.
De même l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres dit canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'application $\begin{array}{ccc} GL(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes dit canonique de $GL(\mathbb{K}^n)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.
On utilise ces isomorphismes pour obtenir des propriétés de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$) à l'aide de celles de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $GL(\mathbb{K}^n)$) et inversement.

III.2 Changement de base

Définition 12 Soit E un $\mathbb{K}ev$ de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ un système de vecteurs de E. En écrivant $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\, e_i$, on définit une matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée la matrice du système de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Lorsque $n = p$, il s'agit aussi de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f de E défini par $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = u_j$.

Définition 13 Avec les mêmes notations, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E, la matrice du système de vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est appelée la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Ainsi par définition $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$.
D'après la remarque précédente, la matrice de passage d'une base à une autre est inversible.
Ce résultat s'obtient aussi en constatant que l'on a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ et alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Proposition III.4 *Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ un système de vecteurs de E.*
On a $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_p)}$.
Notamment, si $\mathcal{B}''$ est une autre base de E, on a $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$. *Cette relation s'obtient aussi de la façon suivante* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$. *On retrouve de plus la relation* $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}$.

Proposition III.5 *Pour $x \in E$, dont les vecteurs colonnes de coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont respectivement X et X', en posant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on a* $\boxed{X = P\,X'}$.

Théorème 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = A'$. On a alors* $\boxed{A' = Q^{-1}\,A\,P}$.

Corollaire III.3 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = A'$. On a alors* $\boxed{A' = P^{-1}\,A\,P}$.

Définition 14 Les deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}\,A\,P$.

On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les classes sont appelées les classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux matrices A et B soient semblables est qu'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telles que A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Définition 15 Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Il existe un scalaire, et un seul, appelé trace de f et noté $\mathrm{tr}(f)$, tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on ait $\mathrm{tr}\left(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \mathrm{tr}(f)$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathbb{K} \\ f & \to & \mathrm{tr}(f) \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Définition 16 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. On appelle rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang de f. Ainsi $\mathrm{rg}(A)$ est le rang du système des vecteurs colonnes de A.

Proposition III.6 *Le rang d'une matrice A est égal au rang de toute application linéaire représentée par A.*

Proposition III.7 *Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ de rang r.*
Il existe $P, P \in GL_n(\mathbb{K})$, et $Q, Q \in GL_m(\mathbb{K})$, telles que $Q^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} = J_{m,n,r}$.
Réciproquement, une telle relation impose à A d'être de rang r.

Définition 17 Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ telles que $B = Q\,A\,P$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Propriété III.1 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})^2$. D'après ce qui précède (par transitivité), une condition nécessaire et suffisante pour que les rangs de A et de B soient égaux est qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ telles que $B = Q\,A\,P$.
Ainsi deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ont même rang si, et seulement si, elles sont équivalentes.

Corollaire III.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r.*
Ou bien $r = 0$ et $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A) = 0$
Ou bien $r \neq 0$ et il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ telles que $J_{m,n,r} = Q\,A\,P$. Par transposition, $J_{n,m,r} = {}^tP\,{}^tA\,{}^tQ$ et alors $\mathrm{rg}({}^tA) = r$.
En conclusion

$$\boxed{\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)}$$

Ainsi $\mathrm{rg}(A)$ est aussi égal au rang du système des vecteurs lignes de A.

Proposition III.8 *Le rang d'une matrice A est le maximum des ordres des matrices carrées inversibles extraites de A.*