Oraux Maths MP 2013

Exercice 1 : Soit $t \to M(t)$ une application dérivable de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $M(2,\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I; \det M(t) = 1$. Soit $\Delta(t)$ la trace de $M(t)$.

1) Montrer que si $\Delta(T_0) = \pm 2$ et $\Delta'(t_0) \neq 0$, alors $M(t_0)$ n'est pas diagonalisable.

2) Caculer la matrice $M(t); t \in \mathbb{R}$ telle que toute solution y de l'équation différentielle $y''(x) + ty(x)$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

Trouver t_0 pour lequel les hypothèses précédentes sont vérifiées.

Commentaire : On montre que $M(t_0)$ a une valeur propre double égale à ± 1, et en calculant la dérivée du déterminant on obtient que $M(t_0)$ n'est pas diagonalisable. La question 2 ne pose pas de problème sauf peut-être la dérivabilité de $M(t)$ en $t = 0$; seule la valeur $t_0 = 0$ convient.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\sup\{|\varphi(x)|; \|x\| = 1\}$ est égal à 1 et n'est pas atteint.

1) Que peut-on dire de $\dim E$?

2) Soit $F = \ker \varphi$. Montrer que $\sup\{d(x, F), \|x\| = 1\}$ n'est pas atteint.

3) Trouver un exemple.

Commentaire : C'est une vérification des propriétés des espaces normés et de la spécificité de ceux de dimension finie. Comme exemple, on a pour E l'espace des fonctions réelles continues sur $[-1, 1]$ muni de la norme $\|f\| = \sup\{|f(t)|; t \in [-1, 1]\}$ et pour φ : $\varphi(f) = \frac{1}{2}(\int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt)$.

Exercice 3 : Soit :

$$u_n(z) = \frac{z^n}{1 + z^{2n+1}}, z \in \mathbb{C}.$$

1) Etudier la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_0^\infty u_n(z)$.

2) Montrer que la somme est paire pour $|z| < 1$ et impaire pour $|z| > 1$.

Commentaire : Cela demande les connaissances minimales sur les séries entières, les séries de fonctions, les séries doubles.

Exercice 4 : Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la moyenne de f sur tout intervalle de longueur T est une constante m.

1) Si $[a, b]$ est un intervalle quelconque, est-ce que la moyenne M de f sur $[a, b]$ est égale à m? Quelle est la condition sur $[a, b]$ pour que ce soit vrai?

2) On suppose $f \geq 0$ et $m > 0$. Trouver un encadrement optimal de $\frac{M-m}{m}$ en fonction de T et $b - a$.

Commentaire : Un exercice très facile qui demande du bon sens pour voir et montrer que f est périodique et obtenir l'encadrement

$$-\frac{r}{b-a} \leq \frac{M-m}{m} \leq \frac{T-r}{b-a}$$

où $nT + r = b - a$, $0 \leq r < T, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Soit $g(t)$ une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $g''(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la courbe décrite dans $\mathbb{R}^2$ par $P(t) = (t, g(t))$ admet une tangente en tout point et définir un vecteur unitaire continu $\vec{n}(t)$ de cette tangente.

2) Pour $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}*_+$ on définit le point $M(t, z)$ tel que $\overrightarrow{PM} = z\ \vec{n}(t)$. Montrer que l'application $(t, z) \mapsto M(t, z)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ sur son image. Déterminer cette image.

Commentaire : C'est un exemple d'application du théorème d'inversion global. L'image dépend de l'existence éventuelle d'asymptotes à la courbe.

Exercice 6 : Soient deux cercles C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}^3$ d'axes respectifs D_1 et D_2.

1) Montrer qu'il existe une droite de $\mathbb{R}^3$ qui rencontre les deux cercles et les deux axes.

2) Trouver un exemple où il y a quatre solutions.

Commentaire : Une droite qui rencontre un cercle et son axe est orthogonale à la tangente au cercle au point de rencontre. On en déduit que si $(M_1, M_2) \in C_1 \times C_2$ réalise le maximum de la distance entre un point de C_1 et un point de C_2, la droite M_1M_2 convient. Ce couple existe car $C_1 \times C_2$ est compact. Un examen plus poussé montre qu'il y a 4 solutions au problème sauf dans des cas particuliers.

Exercice 7 : Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. On suppose

$$f'_d(x) = 2f'_g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que f est constante.

Commentaire : Pour cet exercice difficile on attend des remarques intelligentes de la part du candidat et on peut découper la démonstration en plusieurs étapes. La fonction est dérivable en un extremum local. Si $a < b$ et $f(a) < f(b)$ le graphe de f sur le segment $[a, b]$ est sous la corde. Par contre si $f(a) > f(b)$ le graphe est au dessus de la corde. Puis on en déduit que si $f(a) = f(b)$ f est constante sur $[a, b]$. Enfin si $a < b$ et $f(a) < f(b)$, f est croissante et convexe sur $[a, b]$, et les dérivées à droite et à gauche sont croissantes. On en déduit enfin que f est constante.

Exercice 8 : Soit $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$, et

$$b_n = \frac{a_n}{a_0 + a_1 + ... + a_n}.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_0^\infty a_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_0^\infty b_n$ converge.

Commentaire : On pouvait donner une indication salvatrice: chercher la limite quand n tend vers ∞ du produit $(1 - b_1)(1 - b_2)...(1 - b_n)$.

Exercice 9 : Soit $P_n(x) : 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$.

1) Trouver le nombre de racines réelles de P_n.

2) Soit x_n la racine de P_{2n+1}. Montrer que $x_n \to -\infty$ quand $n \to \infty$.

Commentaire : Tout est élémentaire mais réclame du soin et de la rigueur. On montre par récurrence $P_{2n} > 0$, P_{2n+1} strictement croissante, $x_n > -(2n+1)$ et x_n décroissante. Puis on montre que la limite de x_n ne peut être finie car sur un compact de $\mathbb{R}$, P_n converge uniformément vers l'exponentielle et celle-ci ne s'annule pas.

Exercice 10 : Soit Γ la courbe décrite par $M(\theta)$ de coordonnées polaires (ρ, θ) avec $\rho = e^\theta$. Soit P un point du plan différent de l'origine O.

1) Montrer qu'il existe une infinité de tangentes à Γ passant par P. Montrer que les points de contact sont sur un cercle qui passe par O et P.

2) Calculer la longueur $l(\theta)$ de l'arc de courbe $OM(\theta)$. soit $C(\theta)$ le cercle de centre $M(\theta)$ et de rayon $l(\theta)$. Montrer que $\theta < \theta'$ implique que $C(\theta)$ est intérieur à $C(\theta')$.

Commentaire : C'est une vérification des connaissances sur les courbes en coordonnées polaires et de l'aptitude à mener des calculs avec ordre et méthode.

Exercice 11 : Soit pour $x > 1$:

$$f(x) = \int_1^{+\infty} e^{it^x} dt.$$

1) Etudier l'existence de l'intégrale $f(x)$.

2) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

Commentaire : C'est un exercice d'analyse où il faut utiliser correctement l'intégration par parties. L'équivalent est de la forme $\frac{a}{x}$ et il faut montrer que $a = \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du$ est non nul.

Exercice 12 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u et v appartenant à $\mathcal{L}(E)$. On considère la propriété (P) : $u \circ v - v \circ u = id$

1) Montrer que si E est de dimension finie aucun couple (u, v) ne vérifie (P).

2) Montrer que si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ aucun couple (u, v) d'endomorphismes continus ne vérifie (P).

3) Sur $\mathbb{R}[x]$ considérer $u : P \mapsto P'$ et $v : P \mapsto xP$ et trouver des normes pour lesquelles soit u soit v soit continu.

Commentaire : En dimension finie on peut utiliser la trace. On peut aussi montrer $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}, n \geq 1$.