Mines - Ponts MP

312. $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle définie par — $x_{n+1} = f(x_n)$

$\forall n \geq 1,\ x_{n+1} = n(x_n - n)$ — penser au télescopage.

Mq $x_n = O(n)$ ssi $x_1 = 2e$.

$$\forall n \geq 2,\ \frac{x_{n+1}}{n!} - \frac{x_n}{(n-1)!} = -\frac{n^2}{n!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} = -\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{x_{k+1}}{k!} - \frac{x_k}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 1.$$

$$\frac{x_n}{(n-1)!} = x_1 - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!}}_{\text{environ } e\ldots} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}}_{\text{environ } e\ldots}$$

$$\forall n \geq 2,\ x_n = (x_1 - 2e)(n-1)! + (n-1)!\Big[\underbrace{\Big(e - \sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{k!}\Big)}_{|-|\leq \frac{e}{(n-2)!}} + \underbrace{\Big(e - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}\Big)}_{|-|\leq \frac{e}{(n-1)!}}\Big]$$

donc $x_n = (x_1 - 2e)(n-1)! + O(n)$

Majoration Taylor-Lagrange

318. $n \geq 2$. $P_n = X(X-1)\ldots(X-n)$.

a) Mq P_n' s'annule en un unique r_n sur $]0,1[$.

$P_n(0) = P_n(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, ~~$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$~~, $\exists! r_n \in]0,1[$, $P_n'(r_n) = 0$. Fixons r_n.

b) Équivalent de R_n.

$$\forall n \geq 2,\ \frac{P_n'(r_n)}{P_n(r_n)} = 0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r_n - k}.$$

$$\forall n \geq 2,\ \frac{P_n'(r_n)}{P_n(r_n)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - r_n} = \frac{1}{r_n}. \quad (*)$$

$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X-k}$ donc $\left(\frac{P'}{P}\right) \searrow$ sur $]0,1[$ (dérivée $\ominus$).

Soit $n \geq 2$. $\frac{P_{n+1}'(r_n)}{P_{n+1}(r_n)} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{r_n - k} = \underbrace{\frac{1}{r_n - (n+1)}}_{<0}$ donc $r_{n+1} < r_n$ car $\frac{P_{n+1}'}{P_{n+1}} \searrow$ sur $]0,1[$

et $\frac{P_{n+1}'}{P_{n+1}}(r_{n+1}) = 0$.

(*) devient
$$\frac{1}{1-r_m} + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k-1} \leq \overbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k-r_m}}^{1/r_m} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{1-r_2} + H_{m-1} \leq \frac{1}{r_m} \leq H_m \quad \text{donc } r_m \sim \frac{1}{\ln(m)}.$$

Centrale MP 2021

540.

a) Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,dt$

On pose $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\sin\sqrt{t}}{t} \end{array}$. $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$.

$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ comp. à un exemple de Riemann.

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \int_1^x \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{2\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{t^{3/2}}\,dt.$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{t}}{t^{3/2}}\,dt$ est ACV car $\frac{\cos\sqrt{t}}{t^{3/2}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.

donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ CV puis $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ CV.

b) Nature de $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$?

On a
$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{\cos\sqrt{x}}{x^{3/2}}.$$

On pose $F : \begin{array}{l} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_1^x \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt \end{array}$. G primitive de $|f'|$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F(n+1) - F(n) = f(n) + \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{1!} f'(t)\,dt.$$

Taylor Lagrange reste intégrale

$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ CV donc $(F(n))_{n\geq 1}$ CV donc $\sum_{n\geq 1} F(n+1) - F(n)$ CV

Puis $\sum_{n\geq 1} f(n)$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,dt$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,dt\right| \leq \underbrace{\int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt}_{G(n+1)-G(n)}$. f' est $\mathcal{L}^1$ tq série CV

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ CV.