MP 17-18

MEMO EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I Equations linéaires du premier ordre **1**

II Second ordre à coefficients constants **3**

I. Equations linéaires du premier ordre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (sous cette écriture elle est parfois dite résolue ou normalisée) toute équation différentielle de la forme $(L) \quad y' - a(x)\, y = b(x)$ où a et b sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies continues sur l'intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$.
La fonction b est appelée second membre de l'équation (L). Lorsque b est nulle, l'équation différentielle (L) est dite sans second membre ou homogène.
Dans le cas général, l'équation différentielle $(H) \quad y' - a(x)\, y = 0$ est appelée équation homogène associée à (L).

Remarque I.1 *L'étude d'une équation différentielle de la forme*

$$\alpha(x)\, y' + \beta(x)\, y + \gamma(x) = 0$$

se ramène à celle de (L) en se plaçant sur un intervalle I où les fonctions α, β, γ sont continues et α ne s'annule pas.

Remarque I.2 *Une solution φ de (L) sur I est nécessairement de classe C^1 sur I.*
L'application $\begin{array}{rccc} \Lambda : C^1(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & C^0(I, K) \\ f & \longrightarrow & f' - a\, f \end{array}$ *est linéaire et l'équation différentielle (L) s'écrit aussi* $\Lambda(y) = b$.
D'après la théorie des équations linéaires, la solution générale de (L) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (L) (en cas d'existence) la solution générale de (H).

Remarque I.3 *Dans la pratique, avant d'utiliser la méthode de variation de la constante, on peut essayer de "deviner" une solution particulière simple de (L).*

Théorème 1 *Solution générale de l'équation homogène*
On considère l'équation différentielle $(H) \quad y' - a(x)\, y = 0$.
Etant donnée A une primitive de a sur I, la solution générale de l'équation (H) est donnée par
$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longrightarrow & \lambda\, e^{A(x)} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$
Ainsi l'ensemble des (fonctions) solutions de (H) est une droite vectorielle.
Notamment, pour tout $(x_0, y_0), (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution (I, φ) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ donnée par

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right)$$

Remarque I.4 *Une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre ne s'annule en aucun point de I, ce qui "justifie" la "recette" $\dfrac{y'}{y} = a$ puis $\ln(|y|) = A + c^{te}$ pour les fonctions réelles, ce qui reste correct pour les fonctions complexes.*

Théorème 2 *Solution générale de l'équation complète*
(Solution particulière de l'équation (L) : méthode de variation de la constante)
On considère l'équation différentielle $(L) \quad y' - a(x)\, y = b(x)$. L'ensemble des solutions de (L) sur I est non vide. Ainsi l'ensemble des (fonctions) solutions de (L) sur I est une droite affine.
Notamment, pour tout (x_0, y_0), $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy associé à la condition initiale (x_0, y_0) admet une et une seule solution sur I.

Remarque I.5 *Principe de superposition*
Lorsque le second membre de l'équation différentielle (L) est de la forme $b = b_1 + \cdots + b_N$ et pour tout $i, i \in [\![1, N]\!]$, ψ_i est une solution particulière de l'équation (L_i) $\quad y' - a(x)\, y = b_i(x)$, alors $\psi_1 + \cdots \psi_N$ est une solution particulière de (L).

<u>**Cas particulier important**</u> : a constante, $a \in \mathbb{C}$ et $b(x) = e^{\alpha x}\, P(x)$ avec P fonction polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

La solution générale de l'équation (H) est donnée par $z = \lambda\, e^{ax}$. On cherche une solution particulière de (L) de la forme $\psi : x \longrightarrow e^{\alpha x}\, Q(x)$, où Q est une fonction polynôme. On obtient les deux cas :

- $\alpha \neq a$: $\deg(Q) = \deg(P)$ et on identifie
- $\alpha = a$: Q est une primitive de P

II. Second ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$(L) \quad a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$$

où a, b, c sont trois scalaires, $a \neq 0$, et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction f (ou $\dfrac{f}{a}$) est appelée le second membre de l'équation différentielle (L). Lorsque $f = 0$, l'équation (L) est dite sans second membre ou homogène.
Dans le cas général, l'équation différentielle $(H) \quad a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ est appelée équation homogène associée à (L).

Remarque II.1 *Une solution φ de (L) sur I est nécessairement de classe C^2 sur I.*
L'application $\begin{array}{rccl} \Lambda : C^2(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & C^0(I, \mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & f'' - a\,f' - b\,f \end{array}$ *est linéaire et l'équation différentielle (L) s'écrit aussi $D(y) = c$.*
D'après la théorie des équations linéaires, la solution générale de (L) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (L) la solution générale de (H).

Définition 2 On appelle condition initiale la donnée d'un triplet $(x_0, y_0, y_0^{'}) \in I \times \mathbb{K}^2$. On appelle problème de Cauchy associé à cette condition initiale la recherche des solutions φ de l'équation différentielle (L) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0 \quad \varphi'(x_0) = y_0^{'}$

Théorème 3 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (L) n'est pas vide ; plus précisément, pour tout $(x_0, \alpha, \beta) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une et une seule solution φ_0 de (L) sur I vérifiant $\varphi_0(x_0) = \alpha$ et $\varphi_0'(x_0) = \beta$.*
Notamment la seule solution φ de (H) telle que φ et φ' s'annulent en un même point est la fonction nulle.

Description de l'ensemble des solutions de (H) :

Pour obtenir un système fondamental de solutions de (H), on en cherche des solutions de la forme $z : x \longrightarrow e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{C}$. On est conduit à la résolution de l'équation

$$(E) \quad a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

appelée équation caractéristique associée à (H).

Si r est une racine de (E), on peut obtenir la forme générale des solutions de (H) à l'aide de la méthode de variation de la constante en posant $z = u\,e^{rx}$.

On peut énoncer la règle suivante :

• (E) a deux racines distinctes r et s. En notant $z_1 : x \to e^{rx}$ et $z_2 : x \to e^{sx}$ alors (z_1, z_2) est un système fondamental de solutions de (H). La solution générale de (H) est donnée par

$$z : x \longrightarrow \lambda\,e^{rx} + \mu\,e^{sx} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

• (E) a une racine double r. En notant $z_1 : x \to e^{rx}$ et $z_2 : x \to x\,e^{rx}$ alors (z_1, z_2) est un système fondamental de solutions de (H). La solution générale de (H) est donnée par

$$z : x \longrightarrow (\lambda + \mu\,x)\,e^{sx} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Cas particulier important : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et avec des conditions initiales réelles, on cherche des solutions réelles.

- (E) a deux racines réelles distinctes r et s. La solution générale de (H) est donnée par

$$z : x \longrightarrow \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{sx} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- (E) a une racine double réelle r. La solution générale de (H) est donnée par

$$z : x \longrightarrow (\lambda + \mu\, x)\, e^{sx} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- (E) a deux racines complexes non réelles conjuguées r et s avec $r = \alpha + i\,\beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. La solution générale de (H) est donnée par

$$z : x \longrightarrow (A\, \cos(\beta\, x) + B\, \sin(\beta\, x))\, e^{\alpha x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Cas particulier important : $f(x) = e^{\alpha x}\, P(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et P fonction polynôme (à coefficients dans $\mathbb{C}$).

On cherche une solution particulière ψ de (L) définie par $\psi(x) = e^{\alpha x}\, Q(x)$ où Q est une fonction polynôme :

- ou bien α n'est pas racine de (E) : alors $\deg(Q) = \deg(P)$ et on identifie
- ou bien α est racine simple de (E) : alors $\deg(Q) = \deg(P)+1$ (choisir Q sans terme constant)
- ou bien α est racine double de (E) : alors $\deg(Q) = \deg(P)+2$ (Q est une "double primitive" de P/a)