

**1**

**a**

$$\frac{\frac{B \in [B, A]}{[B, A] \vdash B} \text{Ass} \quad \frac{A \in [B, A]}{[B, A] \vdash A} \text{Ass}}{[B, A] \vdash B \wedge A} \wedge\text{-Intro}$$
$$\frac{[A] \vdash B \rightarrow (B \wedge A)}{[A] \vdash B \rightarrow (B \wedge A)} \rightarrow\text{-Intro}$$
$$\frac{[A] \vdash B \rightarrow (B \wedge A)}{[] \vdash A \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge A))} \rightarrow\text{-Intro}$$

**b**

$$\frac{\frac{A \vee A \in [A \vee A]}{[A \vee A] \vdash A \vee A} \text{Ass} \quad \frac{A \in [A, A \vee A]}{[A, A \vee A] \vdash A} \text{Ass} \quad \frac{A \in [A, A \vee A]}{[A, A \vee A] \vdash A} \text{Ass}}{[A \vee A] \vdash A} \vee\text{-Elim}$$
$$\frac{[A \vee A] \vdash A}{[] \vdash (A \vee A) \rightarrow A} \rightarrow\text{-Intro}$$

**c**

$$\frac{\frac{A \rightarrow B \in [A \rightarrow B, A]}{[A \rightarrow B, A] \vdash A \rightarrow B} \text{Ass} \quad \frac{A \in [A \rightarrow B, A]}{[A \rightarrow B, A] \vdash A} \text{Ass}}{[A \rightarrow B, A] \vdash B} \rightarrow\text{-Elim}$$
$$\frac{[A \rightarrow B, A] \vdash B}{[A] \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B} \rightarrow\text{-Intro}$$

## 2

### a

$$\begin{array}{c}
\frac{[y : B, x : A](y) = B}{[y : B, x : A] \vdash y : B} \text{Var} \quad \frac{[y : B, x : A](x) = A}{[y : B, x : A] \vdash x : A} \text{Var} \\
\hline
\frac{[y : B, x : A] \vdash (y, x) : B \wedge A}{[x : A] \vdash \lambda y. (y, x) : B \rightarrow (B \wedge A)} \text{Pair} \\
\hline
\frac{[x : A] \vdash \lambda y. (y, x) : B \rightarrow (B \wedge A)}{[] \vdash \lambda x. \lambda y. (y, x) : A \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge A))} \text{Lambda}
\end{array}$$

### b

$$\begin{array}{c}
\frac{[x : A \vee A](x) = A \vee A}{[x : A \vee A] \vdash x : A \vee A} \text{Var} \quad \frac{[y : A, x : A \vee A](y) = A}{[y : A, x : A \vee A] \vdash y : A} \text{Var} \quad \frac{[z : A, x : A \vee A](z) = A}{[z : A, x : A \vee A] \vdash z : A} \text{Var} \\
\hline
\frac{[x : A \vee A] \vdash \text{case } x \text{ of } \{\text{left } y \rightarrow y ; \text{right } z \rightarrow z\} : A}{[] \vdash \lambda x. \text{case } x \text{ of } \{\text{left } y \rightarrow y ; \text{right } z \rightarrow z\} : (A \vee A) \rightarrow A} \text{Case} \\
\hline
\frac{[x : A \vee A] \vdash \text{case } x \text{ of } \{\text{left } y \rightarrow y ; \text{right } z \rightarrow z\} : (A \vee A) \rightarrow A}{[] \vdash \lambda x. \text{case } x \text{ of } \{\text{left } y \rightarrow y ; \text{right } z \rightarrow z\} : (A \vee A) \rightarrow A} \text{Lambda}
\end{array}$$

### c

$$\begin{array}{c}
\frac{[f : A \rightarrow B, x : A](f) = A \rightarrow B}{[f : A \rightarrow B, x : A] \vdash f : A \rightarrow B} \text{Var} \quad \frac{[f : A \rightarrow B, x : A](x) = A}{[f : A \rightarrow B, x : A] \vdash x : A} \text{Var} \\
\hline
\frac{[f : A \rightarrow B, x : A] \vdash f x : B}{[x : A] \vdash \lambda f. f x : (A \rightarrow B) \rightarrow B} \text{App} \\
\hline
\frac{[x : A] \vdash \lambda f. f x : (A \rightarrow B) \rightarrow B}{[x : A] \vdash \lambda f. f x : (A \rightarrow B) \rightarrow B} \text{Lambda}
\end{array}$$