1 Введение

Формулировка задачи:

Есть $N = 100$ акций. Для каждой из них есть динамика изменения цены за промежуток времени $T = 100$. Необходимо составить портфель (набор) акций, чтобы максимизировать среднюю доходность за весь период времени, при этом чтобы уровень риска не превосходил определённое значение $\sigma \le \sigma_0 = 0.2$, а также общая цена портфеля была не более определённой суммы $S \le S_0 = 1000000$ USD.

2 Целевая функция в неявном виде

Пусть есть матрица X, в которой строка $X_{i,j} = 1$, если i-ая акция куплена j раз. Тогда, чтобы получить число купленных i-ых акций, Также пусть P - матрица, в которой элемент $P_{i,j}$ - это стоимость j-ой акции на i-ый момент времени. Очевидно, что мы сразу можем преобразовать её в матрицу R, в которой элемент $R_{i,j}$ - это доходность j-ой акции на i-ый момент времени. Тогда, если мы умножим матрицу R на вектор $\vec{x}$, то получим вектор $\vec{r}$ такой, что r_i - доходность портфеля в i-ый момент времени:

$$\vec{r} = R\vec{y}$$

или:

$$r_i = \sum_{j=0}^{N-1} R_{i,j} y_j$$

Тогда, по заданному выражению, найдём среднюю доходность за весь период времени:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} r_i$$

Данную функцию, по условию задачи, мы и будем максимизировать. Теперь составим условие на риск и цену. Для этого воспользуемся формулой риска и цены портфеля:

$$\sigma = \sqrt{\frac{T}{T-1} \sum_{i=0}^{T-1} (r_i - \bar{r})^2}$$

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i$$

Таким образом задача выглядит следующим образом: необходимо максимизировать выражение:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} r_i$$

и при этом необходимо выполнение следующих условий:

$$\sqrt{\frac{T}{T-1} \sum_{i=0}^{T-1} \left(r_i - \bar{r}\right)^2} \leq \sigma_0$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i \leq S_0$$

Преобразуем первое условие:

$$\sqrt{\frac{T}{T-1} \sum_{i=0}^{T-1} \left(r_i - \bar{r}\right)^2} \leq \sigma_0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{T-1} \left(r_i - \bar{r}\right)^2 \leq \frac{T-1}{T} \sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{T-1} \left(r_i^2 - 2 r_i \bar{r} + \bar{r}^2\right) \leq \frac{T-1}{T} \sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 - 2\bar{r} \sum_{i=0}^{T-1} r_i + \bar{r}^2 \sum_{i=0}^{T-1} 1 \leq \frac{T-1}{T} \sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow T\bar{r}^2 - 2\bar{r} \sum_{i=0}^{T-1} r_i + \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 \leq \frac{T-1}{T} \sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bar{r}^2 - 2\bar{r} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} r_i \leq \frac{T-1}{T^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bar{r}^2 - 2\bar{r}^2 \leq \frac{T-1}{T^2}\sigma_0^2 - \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bar{r}^2 \geq \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 - \frac{T-1}{T^2}\sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} r_i\right)^2 \geq \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 - \frac{T-1}{T^2}\sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{T^2}\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j \geq \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 - \frac{T-1}{T^2}\sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j \geq T\sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 - (T-1)\,\sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j - \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i^2 \geq -\,(T-1)\,\sigma_0^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i(r_i - r_j) \leq (T-1)\,\sigma_0^2$$

Таким образом получаем, что нам нужно максимизировать выражение:

$$\sum_{i=0}^{T-1} r_i$$

и при этом необходимо выполнение условий:

$$\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i(r_i - r_j) \leq (T-1)\,\sigma_0^2$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i \leq S_0$$

Сделаем следующее: пусть есть некие параметры α и β ($\alpha, \beta \in [0,1]$) такие, что данные условия можно переписать в виде:

$$\sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{T-1} r_i(r_i - r_j) = (T-1)\,\alpha\sigma_0^2$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i = S_0 \beta$$

Очевидно, что чем ближе данные параметры к единице, тем лучше. Тогда данную задачу можно представить в виде задачи максимизации целевой функции вида:

$$f\left(\vec{r}\right) = C_1 \sum_{i=0}^{T-1} r_i + C_2 \left(\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) - (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \right)^2 + C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i - S_0 \beta \right)^2$$

, где C_1, C_2 и C_3 - некоторые веса. Очевидно, что такое решение

3 Целевая функция в явном виде

Рассмотрим первое слагаемое целевой функции:

$$C_1 \sum_{i=0}^{T-1} r_i$$

Рассмотрим второе слагаемое целевой функции:

$$C_2 \left(\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) - (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \right)^2 =$$

$$= C_2 \left(T \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 - \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j - (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \right)^2 =$$

$$= C_2 \left(\begin{array}{c} \left(T \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j \right)^2 + (T-1)^2 \alpha^2 \sigma_0^4 - \\ -2 \left(T \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j \right) - 2T\, (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 + \\ +2\, (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j \end{array} \right) =$$

$$= C_2 \left(\begin{array}{c} T^2 \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i^2 r_j^2 + \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{m=0}^{T-1} r_i r_j r_k r_m + (T-1)^2 \alpha^2 \sigma_0^4 - \\ -2T \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} r_i r_j r_k^2 - 2T\, (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \sum_{i=0}^{T-1} r_i^2 + \\ +2\, (T-1)\, \alpha \sigma_0^2 \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i r_j \end{array} \right) =$$

$$= C_2 \begin{pmatrix} T^2 \sum_{i,j<T} r_i^2 r_j^2 + \sum_{i,j,k,m<T} r_i r_j r_k r_m - \\ -2T \sum_{i,j,k<T} r_i r_j r_k^2 - 2T\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2 \sum_{i<T} r_i^2 + \\ +2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j + \left(T-1\right)^2 \alpha^2\sigma_0^4 \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \begin{pmatrix} \sum_{i,j,k,m<T} r_i^2 r_j^2 + \sum_{i,j,k,m<T} r_i r_j r_k r_m - \\ -2 \sum_{i,j,k,m<T} r_i r_j r_k^2 - 2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j,k,m<T} \frac{1}{T^2} r_i^2 + \\ +2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j,k,m<T} \frac{1}{T^2} r_i r_j + \left(T-1\right)^2 \alpha^2\sigma_0^4 \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \sum_{i,j,k,m<T} \left(r_i^2 r_j^2 + r_i r_j r_k r_m - 2 r_i r_j r_k^2 - \frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2} r_i^2 + \frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2} r_i r_j \right) +$$

$$+ C_2 \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4$$

Заметим, что слагаемое $C_2\left(T-1\right)^2\alpha^2\sigma_0^4$ никак не влияет на минимум, а значит от неё можно отказаться. То есть второе слагаемое примет вид:

$$C_2 \sum_{i,j,k,m<T} \left(r_i^2 r_j^2 + r_i r_j r_k r_m - 2 r_i r_j r_k^2 - \frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2} r_i^2 + \frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2} r_i r_j \right)$$

Рассмотрим третье слагаемое целевой функции:

$$C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i - S_0 \beta \right)^2 =$$

$$= C_3 \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i \right)^2 - 2 S_0 \beta \sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i + S_0^2 \beta^2 \right) =$$

$$= C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - 2 S_0 \beta \sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i + S_0^2 \beta^2 \right) =$$

$$= C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i + S_0^2 \beta^2 \right) =$$

$$= C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right) + C_3 S_0^2 \beta^2$$

Заметим, что слагаемое $C_3 S_0^2 \beta^2$ никак не влияет на минимум, а значит от неё можно отказаться. То есть второе слагаемое примет вид:

$$C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right)$$

Таким образом целевая функция поменяла свой вид на следующее выражение:

$$f\left(\vec{y}\right)=C_1\sum_{i<T}r_i+C_3\sum_{i,j<N}\left(M_{0,i}M_{0,j}y_iy_j-\frac{2S_0\beta}{N}M_{0,i}y_i\right)+$$

$$+C_2\sum_{i,j,k,m<T}\left(r_i^2r_j^2+r_ir_jr_kr_m-2r_ir_jr_k^2-\frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_i^2+\frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_ir_j\right)$$

Рассмотрим совокупность первого и третьего слагаемых:

$$C_1\sum_{i<T}r_i+$$

$$+C_2\sum_{i,j,k,m<T}\left(r_i^2r_j^2+r_ir_jr_kr_m-2r_ir_jr_k^2-\frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_i^2+\frac{2\left(T-1\right)\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_ir_j\right)=$$

$$=\sum_{i,j,k,m<T}\frac{C_1}{T^3}r_i+\sum_{i,j,k,m<T}\left(\begin{array}{c}C_2r_i^2r_j^2+C_2r_ir_jr_kr_m-\\-2C_2r_ir_jr_k^2-\frac{2(T-1)C_2\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_i^2+\\+\frac{2(T-1)C_2\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_ir_j\end{array}\right)=$$

$$=\sum_{i,j,k,m<T}\left(\begin{array}{c}C_2r_i^2r_j^2+C_2r_ir_jr_kr_m-\\-2C_2r_ir_jr_k^2-\frac{2(T-1)C_2\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_i^2+\\+\frac{2(T-1)C_2\alpha\sigma_0^2}{T^2}r_ir_j+\frac{C_1}{T^3}r_i\end{array}\right)$$

Представим каждую часть это выражение в виде матрицы QUBO, то есть:

$$\sum_{i,j,k,m<T}C_2r_i^2r_j^2=\sum_{i,j,k,m<T}{}_1Q_{i,j}^{k,m}r_ir_jr_kr_m\iff$$

$$\iff\sum_{i,j}C_2T^2r_i^2r_j^2=\sum_{i,j}{}_1Q_{i,j}^{i,j}r_i^2r_j^2+\sum_{i,j<T}\sum_{(k,m)\notin[(i,j),(j,i)]}{}_1Q_{i,j}^{k,m}r_ir_jr_kr_m$$

В силу того, что матрица ${}_1Q$ выбирается произвольным образом, положим, что:

$${}_1Q_{i,j}^{k,m}=\begin{cases}C_2T^2 & , \quad (k,m)\in[(i,j),(j,i)]\\ 0 & , \quad \text{иначе}\end{cases}$$

$$\sum_{i,j,k,m<T}C_2r_ir_jr_kr_m=\sum_{i,j,k,m<T}{}_{2r}Q_{i,j}^{k,m}r_ir_jr_kr_m$$

Здесь очевидно, что:

$$ {}_{2r}Q^{k,m}_{i,j} = C_2 $$

$$ -\sum_{i,j,k,m<T} C_2 r_i r_j r_k^2 = \sum_{i,j,k,m<T} {}_3Q^{k,m}_{i,j} r_i r_j r_k r_m \Longleftrightarrow $$

$$ \Longleftrightarrow -\sum_{i,j,k<T} C_2 T r_i r_j r_k^2 = \sum_{i,j,k} {}_3Q^{k,k}_{i,j} r_i r_j r_k^2 + \sum_{i,j,k<T} \sum_{m\neq k} {}_3Q^{k,m}_{i,j} r_i r_j r_k r_m $$

Аналогичным образом получаем:

$$ {}_3Q^{k,m}_{i,j} = \begin{cases} -C_2 T & , \quad m = k \\ \quad 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases} $$

Рассмотрим оставшиеся выражения:

$$ -\sum_{i,j,k,m<T} \frac{2\,(T-1)\,C_2 \alpha \sigma_0^2}{T^2} r_i^2 + \sum_{i,j,k,m<T} \frac{2\,(T-1)\,C_2 \alpha \sigma_0^2}{T^2} r_i r_j + \sum_{i,j,k,m<T} \frac{C_1}{T^3} r_i = $$

$$ = \sum_{i,j,k,m<T} \frac{2\,(T-1)\,C_2 \alpha \sigma_0^2}{T^2} r_i (r_j - r_i) + \sum_{i,j,k,m<T} \frac{C_1}{T^3} r_i = $$

4 Целевая функция в явном виде

Рассмотрим первое слагаемое целевой функции:

$$ C_1 \sum_{i=0}^{T-1} r_i $$

Рассмотрим второе слагаемое целевой функции:

$$ C_2 \left(\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) - (T-1)\,\alpha \sigma_0^2 \right)^2 = $$

$$ = C_2 \left(\left(\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) \right)^2 - 2\,(T-1)\,\alpha \sigma_0^2 \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) + (T-1)^2\,\alpha^2 \sigma_0^4 \right) = $$

$$= C_2 \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{T-1} \left(\left(\sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) \right) \left(\sum_{k=0}^{T-1} r_i (r_i - r_k) \right) \right) - \\ -2\left(T-1\right) \alpha \sigma_0^2 \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} r_i (r_i - r_j) + \\ + \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4 \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \begin{pmatrix} \sum_{i,j,k<T} r_i^2 (r_i - r_j)(r_i - r_k) - \\ -2\left(T-1\right) \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i (r_i - r_j) + \\ + \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4 \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \begin{pmatrix} \sum_{i,j,k<T} r_i^2 \left(r_i^2 - r_i r_j - r_i r_k + r_j r_k\right) - \\ -2\left(T-1\right) \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i (r_i - r_j) + \\ + \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4 \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \begin{pmatrix} \sum_{i,j,k<T} \left(r_i^4 - r_i^3 r_j - r_i^3 r_k + r_i^2 r_j r_k\right) + \\ +2\left(T-1\right) \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j - \\ -2\left(T-1\right) \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i^2 + \\ + \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4 \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \sum_{i,j,k<T} \left(r_i^4 - r_i^3 r_j - r_i^3 r_k + r_i^2 r_j r_k\right) + 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \left(\sum_{i,j<T} r_i r_j - \sum_{i,j<T} r_i^2 \right) +$$

$$+ C_2 \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4$$

Заметим, что слагаемое $C_2 \left(T-1\right)^2 \alpha^2 \sigma_0^4$ никак не влияет на минимум, а значит от неё можно отказаться. То есть второе слагаемое примет вид:

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} \left(r_i^4 - r_i^3 r_j - r_i^3 r_k + r_i^2 r_j r_k\right) + 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \left(\sum_{i,j<T} r_i r_j - \sum_{i,j<T} r_i^2 \right)$$

Рассмотрим третье слагаемое целевой функции:

$$C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i - S_0 \beta \right)^2 =$$

$$= C_3 \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i \right)^2 - 2 S_0 \beta \sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i + S_0^2 \beta^2 \right) =$$

$$= C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - 2 S_0 \beta \sum_{i=0}^{N-1} M_{0,i} y_i + S_0^2 \beta^2 \right) =$$

$$= C_3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i + S_0^2 \beta^2 \right) =$$

$$= C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right) + C_3 S_0^2 \beta^2$$

Заметим, что слагаемое $C_3 S_0^2 \beta^2$ никак не влияет на минимум, а значит от неё можно отказаться. То есть второе слагаемое примет вид:

$$C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right)$$

Таким образом целевая функция поменяла свой вид на следующее выражение:

$$f\left(\vec{y}\right) = C_1 \sum_{i<T} r_i + C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right) +$$

$$+ C_2 \sum_{i,j,k<T} \left(r_i^4 - r_i^3 r_j - r_i^3 r_k + r_i^2 r_j r_k \right) + 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \left(\sum_{i,j<T} r_i r_j - \sum_{i,j<T} r_i^2 \right)$$

Рассмотрим первое и третье слагаемые:

$$C_1 \sum_{i<T} r_i + C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right)$$

Исходя из определения $\vec{r}$, получаем:

$$C_1 \sum_{i<T} \sum_{j<N} R_{i,j} y_j + C_3 \sum_{i,j<N} \left(M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j - \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i \right) =$$

$$= C_1 \sum_{i<T} \sum_{j<N} R_{i,j} y_j - C_3 \sum_{i,j<N} \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i + C_3 \sum_{i,j<N} M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j$$

Рассмотрим первую пару слагаемых:

$$C_1 \sum_{i<T} \sum_{j<N} R_{i,j} y_j - C_3 \sum_{i,j<N} \frac{2 S_0 \beta}{N} M_{0,i} y_i$$

Конкретно в нашей задаче $N = T$. Воспользуемся этим свойством, и тогда получим:

$$C_1 \sum_{i<T} \sum_{j<N} R_{i,j} y_j - C_3 \sum_{i,j<N} \frac{2S_0\beta}{N} M_{0,i} y_i =$$

$$= C_1 \sum_{i<N} \sum_{j<N} R_{j,i} y_i - C_3 \sum_{i,j<N} \frac{2S_0\beta}{N} M_{0,i} y_i$$

$$= \sum_{i<N} y_i \left(C_1 \sum_{j<N} R_{j,i} \right) - \sum_{i<N} C_3 2S_0 \beta M_{0,i} y_i =$$

$$= \sum_{i<N} y_i \left(C_1 \sum_{j<N} R_{j,i} - C_3 2S_0 \beta M_{0,i} \right)$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} \left(r_i^4 - r_i^3 r_j - r_i^3 r_k + r_i^2 r_j r_k \right) + 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \left(\sum_{i,j<T} r_i r_j - \sum_{i,j<T} r_i^2 \right) =$$

$$= C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^4 - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_j - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_k + C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^2 r_j r_k +$$

$$+ 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j - 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i^2$$

Таким образом целевая функция принимает следующий вид:

$$f\left(\vec{y}\right) = C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^4 - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_j - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_k + C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^2 r_j r_k +$$

$$+ 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j - 2\left(T-1\right) C_2 \alpha \sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i^2 +$$

$$+ C_3 \sum_{i,j<N} M_{0,i} M_{0,j} y_i y_j + \sum_{i<N} y_i \left(C_1 \sum_{j<N} R_{j,i} - C_3 2S_0 \beta M_{0,i} \right)$$

Рассмотрим первый блок слогаемых:

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^4 - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_j - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_k + C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^2 r_j r_k$$

В нём рассмотрим первое слагаемое:

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^4$$

Представим данное выражение следующим образом:

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^4 = \sum_{i,j,k,m<T} Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{C_2}{T} \sum_{i,j,k,m<T} r_i^4 = \sum_{i,j,k,m<T} Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m$$

В силу того, что Q мы вибираем сами, легко заметить, что данное представление будет верно при:

$$Q_{i,j}^{k,m} = \begin{cases} \frac{C_2}{T} & , \quad i=j=k=m \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Проделаем аналогичные рассуждения для следующих выражений, и получим:

$$-C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_j = \sum_{i,j,k,m<T} Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q_{i,j}^{k,m} = \begin{cases} -\frac{C_2}{T} & , \quad i=k=m \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

$$-C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_k = \sum_{i,j,k,m<T} Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q_{i,j}^{k,m} = \begin{cases} -\frac{C_2}{T} & , \quad i=j=m \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^2 r_j r_k = \sum_{i,j,k,m<T} Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q_{i,j}^{k,m} = \begin{cases} \frac{C_2}{T} & , \quad m=i \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

В итоге, очевидно, что если каждое из этих выражений представимо в этой форме, то и вся сумма представима, то есть:

$$C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^4 - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_j - C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^3 r_k + C_2 \sum_{i,j,k<T} r_i^2 r_j r_k = \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4r} Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m$$

, причём элементами матрицы ${}_{4r}Q$ будут выступать сумма элементов найденных подматриц, то есть получаем:

$$ {}_{4r}Q^{k,m}_{i,j} = \begin{cases} \frac{C_2}{T} & , \quad \begin{cases} i & = & m \\ i & \neq & j \\ i & \neq & k \end{cases} \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases} $$

Или же:

$$ {}_{4r}Q^{k,t}_{t,j} = \frac{C_2}{T}, \qquad \begin{cases} t & \neq & j \\ t & \neq & k \end{cases} $$

Также отметим, что данную матрицу можно представить в виде:

$$ {}_{4r}Q = {}_{2r'}Q \otimes {}_{2r''}Q $$

, где:

$$ A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{0,0}B & \cdots & A_{0,N-1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N-1,0}B & \cdots & A_{N-1,N-1}B \end{pmatrix} $$

Рассмотрим второй блок:

$$ 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j - 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i^2 $$

В нём рассмотрим первое слагаемое:

$$ 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j $$

Представим данное выражение следующим образом:

$$ 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 \sum_{i,j<T} r_i r_j = \sum_{i,j<T} Q_{i,j} r_i r_j $$

В силу того, что Q мы вибираем сами, легко заметить, что данное представление будет верно при:

$$ Q_{i,j} = 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 $$

Аналогичным образом сделаем со вторым слагаемым и получим:

$$-2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2\sum_{i,j<T} r_i^2 = \sum_{i,j<T} Q_{i,j}r_ir_j \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q_{i,j} = \begin{cases} -2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 & , \quad i=j \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

И аналогичные рассуждения приводят нас к следующему:

$$2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2\sum_{i,j<T} r_ir_j - 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2\sum_{i,j<T} r_i^2 = \sum_{i,j<T} {}_{2r}Q_{i,j}r_ir_j \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow {}_{2r}Q_{i,j} = \begin{cases} 2\left(T-1\right)C_2\alpha\sigma_0^2 & , \quad i\neq j \\ 0 & , \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим третий блок:

$$C_3\sum_{i,j<N} M_{0,i}M_{0,j}y_iy_j$$

Представим данное выражение следующим образом:

$$C_3\sum_{i,j<N} M_{0,i}M_{0,j}y_iy_j = \sum_{i,j<N} {}_{2y'}Q_{i,j}y_iy_j$$

В силу того, что ${}_{2y'}Q$ мы вибираем сами, легко заметить, что данное представление будет верно при:

$${}_{2y'}Q_{i,j} = C_3M_{0,i}M_{0,j}$$

Рассмотрим четвертый блок:

$$\sum_{i<N} y_i\left(C_1\sum_{j<N} R_{j,i} - C_32S_0\beta M_{0,i}\right)$$

Представим данное выражение следующим образом:

$$\sum_{i<N} y_i\left(C_1\sum_{j<N} R_{j,i} - C_32S_0\beta M_{0,i}\right) = \sum_{i<N} {}_{1y}Q_iy_i$$

В силу того, что ${}_{1y}Q$ мы вибираем сами, легко заметить, что данное представление будет верно при:

$$ {}_{1y}Q_{i,j} = \left(C_1 \sum_{j<N} R_{j,i} - C_3 2 S_0 \beta M_{0,i} \right) $$

Таким образом целевая функция принимает следующий вид:

$$ f\left(\vec{y}\right) = \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4r}Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m + \sum_{i,j<T} {}_{2r}Q_{i,j} r_i r_j + \sum_{i,j<N} {}_{2y'}Q_{i,j} y_i y_j + \sum_{i<N} {}_{1y}Q_i y_i $$

Заметим, что каждое из слагаемых представимо в виде:

$$ \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4r}Q_{i,j}^{k,m} r_i r_j r_k r_m = \left(\vec{r}^T {}_{2r'}Q\vec{r}\right)\left(\vec{r}^T {}_{2r''}Q\vec{r}\right) $$

$$ \sum_{i,j<T} {}_{2r}Q_{i,j} r_i r_j = \vec{r}^T {}_{2r}\vec{Q}\vec{r} $$

$$ \sum_{i,j<N} {}_{2y'}Q_{i,j} y_i y_j = \vec{y}^T {}_{2y}\vec{Q}\vec{y} $$

$$ \sum_{i<N} {}_{1y}Q_i y_i = {}_{1y}\vec{Q}^T \vec{y} $$

Подставим в первое слагаемое выражение для $\vec{r}$:

$$ \left(\left(R\vec{y}\right)^T {}_{2r'}Q\left(R\vec{y}\right)\right)\left(\left(R\vec{y}\right)^T {}_{2r''}Q\left(R\vec{y}\right)\right) = $$

$$ = \left(\vec{y}^T R^T {}_{2r'}QR\vec{y}\right)\left(\vec{y}^T R^T {}_{2r''}QR\vec{y}\right) $$

Теперь, если ввести новые матрицы:

$$ {}_{2y'}Q = R^T {}_{2r'}QR $$

$$ {}_{2y''}Q = R^T {}_{2r''}QR $$

, то получим:

$$ \left(\vec{y}^T {}_{2y'}Q\vec{y}\right)\left(\vec{y}^T {}_{2y''}Q\vec{y}\right) = \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4y}Q_{i,j}^{k,m} y_i y_j y_k y_m $$

Подставим во второе слагаемое выражение для $\vec{r}$:

$$(R\vec{y})^T\ {}_{2r}\vec{Q}\,(R\vec{y}) = \vec{y}^T R^T\ {}_{2r}\vec{Q}R\vec{y}$$

Теперь, если ввести матрицу:

$$ {}_{2R}Q = R^T\ {}_{2r}QR$$

, то получим:

$$\vec{y}^T\ {}_{2R}\vec{Q}\vec{y} = \sum_{i,j<T} {}_{2R}Q_{i,j}r_i r_j$$

Таким образом целевая функция принимает следующий вид:

$$f(\vec{y}) = \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4y}Q_{i,j}^{k,m}y_i y_j y_k y_m + \sum_{i,j<T} {}_{2R}Q_{i,j}y_i y_j + \sum_{i,j<N} {}_{2y'}Q_{i,j}y_i y_j + \sum_{i<N} {}_{1y}Q_i y_i$$

В силу того, что $T = N$, введём еще одну матрицу:

$$ {}_{2y}Q_{i,j} = {}_{2R}Q_{i,j} + {}_{2y'}Q_{i,j}$$

Тогда получаем

$$f(\vec{y}) = \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4y}Q_{i,j}^{k,m}y_i y_j y_k y_m + \sum_{i,j<T} {}_{2y}Q_{i,j}y_i y_j + \sum_{i<N} {}_{1y}Q_i y_i$$

Теперь подставим сюда определение для $\vec{y}$:

$$y_i = \sum_{j=0}^{K-1} 2^{K-1-j}X_{i,j}$$

Для удобства введём вектор P такой, что $P_i = 2^{K-1-i}$. Тогда данное выражение примет вид:

$$y_i = \sum_{j=0}^{K-1} X_{i,j}P_j^T$$

Или:

$$\vec{y} = XP$$

Отсюда, в силу тех же самых рассуждений, получаем:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,j,k,m<T} {}_{4y}Q_{i,j}^{k,m}y_i y_j y_k y_m + \sum_{i,j<T} {}_{2y}Q_{i,j}y_i y_j + \sum_{i<N} {}_{1y}Q_i y_i =$$

$$= \sum_{i,j,k,m<T} {}_{2x'}Q_{i,j} y_i y_j \, {}_{2x''}Q_{k,m} y_k y_m + \sum_{i,j<T} {}_{2y}Q_{i,j} y_i y_j + \sum_{i<T} {}_{1y}Q_i y_i =$$

$$= \left(\vec{y}^T \, {}_{2x'}Q \vec{y}\right) \left(\vec{y}^T \, {}_{2x''}Q \vec{y}\right) + \vec{y}^T \, {}_{2y}Q \vec{y} + {}_{1y}Q \vec{y} =$$

$$= \left(X^T P^T \, {}_{2x'}QPX\right) \left(X^T P^T \, {}_{2x''}QPX\right) + X^T P^T \, {}_{2y}Q \vec{y} + {}_{1y}\vec{Q}^T PX =$$

$$= \left(X^T P^T \, {}_{2x'}QPX\right) \left(X^T P^T \, {}_{2x''}QPX\right) + X^T P^T \, {}_{2y}Q \vec{y} + {}_{1y}\vec{Q}^T PX =$$

, где:

$${}_{1x}Q_i = \sum_{j<T} {}_{1y}Q_j P_{j,i} = \left(C_1 \sum_{j<N} R_{j,i} - C_3 2 S_0 \beta M_{0,i} \right) 2^{T-1-i}$$

$${}_{2x}Q = P^T \, {}_{2y}QP = P^T \left({}_{2R}Q + {}_{2y'}Q\right) P =$$
$$= P^T \left(R^T \, {}_{2r}QR + C_3 M_0 M_0^T\right) P =$$
$$= P^T \left(C_2 R^T R + C_3 M_0 M_0^T\right) P$$

$${}_{4x}Q_{i,j}^{k,m} = \left(P^T \, {}_{2x'}QP\right)_{i,j} \left(P^T \, {}_{2x''}QP\right)_{k,m}$$

$$\left(P^T \, {}_{2x'}Q\right)_{i,j} = \sum_{m<T} P_{i,m}^T \, {}_{2x'}Q_{m,j} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(P^T \, {}_{2x'}QP\right)_{i,j} = \sum_{m<T} \left(P^T \, {}_{2x'}Q\right)_{i,m} P_{m,j} =$$

$$= \sum_{k,m<T} P_{i,k}^T \, {}_{2x'}Q_{k,m} P_{m,j} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow {}_{4x}Q_{i,j}^{k,m} = \sum_{a,b<T} P_{i,a}^T \, {}_{2x'}Q_{a,b} P_{b,j} \sum_{c,d<T} P_{k,c}^T \, {}_{2x''}Q_{c,d} P_{d,m} =$$

$$= \sum_{a,b,c,d<T} {}_{2x'}Q_{a,b} \, {}_{2x''}Q_{c,d} P_{i,a}^T P_{b,j} P_{k,c}^T P_{d,m}$$

$$= \sum_{a,b,c,d<T} {}_{4y}Q_{a,b} P_{i,a}^T P_{b,j} P_{k,c}^T P_{d,m}$$

Конечно, давайте детально рассмотрим, как формируются значения внутри матрицы QUBO для задачи оптимизации портфеля акций с учетом ограничений на начальную стоимость и риск.

Шаг 1: Формирование линейных членов

Цель: максимизация средней доходности портфеля

Целевая функция:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{100} r_i \sum_{k=1}^{M} k x_{ik}$$

Перевод в QUBO: Для перевода в QUBO необходимо выразить целевую функцию через квадраты и произведения бинарных переменных. Однако поскольку целевая функция уже линейна относительно x_{ik}, ее можно сразу перенести в линейную часть матрицы Q.

Линейные члены матрицы будут выглядеть следующим образом:

$$Q_{i,k;i',k'} = -r_i k \delta_{i,i'} \delta_{k,k'}$$

Где: - r_i — средняя доходность акции i, - k — количество акций, - $\delta_{a,b}$ — дельта-функция Кронекера ($\delta_{a,a} = 1$, $\delta_{a,b} = 0$ при $a \neq b$).

Таким образом, линейные члены учитываются только для одинаковых пар (i, k), что обеспечивает корректное включение средней доходности в целевую функцию.

Шаг 2: Формирование квадратичных членов для штрафа за превышение начальной стоимости

Ограничение на начальную стоимость:

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{k=1}^{M} k S_i x_{ik} \leq C_{\max}$$

Штраф за превышение:

$$g_1(x) = (\sum_{i=1}^{100} \sum_{k=1}^{M} k S_i x_{ik} - C_{\max})^2$$

Разложение квадратичной части:

$$(\sum_{i=1}^{100} \sum_{k=1}^{M} k S_i x_{ik})^2 = \sum_{i_1=1}^{100} \sum_{k_1=1}^{M} \sum_{i_2=1}^{100} \sum_{k_2=1}^{M} (k_1 S_{i_1})(k_2 S_{i_2}) x_{i_1 k_1} x_{i_2 k_2}$$

Включение в матрицу QUBO: Квадратичные члены для штрафа:

$$2\lambda_1 k_1 S_{i_1} k_2 S_{i_2} x_{i_1 k_1} x_{i_2 k_2}$$

Где λ_1 — коэффициент штрафа за нарушение ограничения на начальную стоимость.

Шаг 3: Формирование квадратичных членов для штрафа за превышенный риск

Стандартное отклонение стоимости портфеля:

$$V_t = \sum_{i=1}^{100} P_{it} \sum_{k=1}^{M} k x_{ik}, \quad t = 1, ..., T$$

$$\overline{V} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} V_t$$

$$g_2(x) = [\sigma(x) - R_{\max}]_+^2$$

Выражение для $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^{T} (V_t - \overline{V})^2} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \left[\sum_{t=2}^{T} {V_t}^2 - T\overline{V}^2 \right]}$$

Упрощенное выражение для $\sum_{t=2}^{T} {V_t}^2$:

$$\sum_{t=2}^{T} \left(\sum_{i_1=1}^{100} \sum_{k_1=1}^{M} P_{i_1 t} k_1 x_{i_1 k_1} \right)^2 = \sum_{i_1, i_2, k_1, k_2, t} P_{i_1 t} P_{i_2 t} k_1 k_2 x_{i_1 k_1} x_{i_2 k_2}$$

Среднее значение $\overline{V}$:

$$T\overline{V} = \sum_{u=1}^{T} V_u = \sum_{u, i_1, k_1} P_{i_1 u} k_1 x_{i_1 k_1}$$

Квадратичное выражение для $T\overline{V}$:

$$(T\overline{V})^2 = \left(\sum_{i_1, u, k_1} P_{i_1 u} k_1 x_{i_1 k_1} \right) \left(\sum_{i_2, v, k_2} P_{i_2 v} k_2 x_{i_2 k_2} \right) = \sum_{i_1, i_2, u, v, k_1, k_2} P_{i_1 u} P_{i_2 v} k_1 k_2 x_{i_1 k_1} x_{i_2 k_2}$$

Включение в матрицу QUBO: Квадратичные члены для штрафа за риск:

$$\Delta^{(2)}_{i_1, k_1; i_2, k_2} = \lambda_2 \frac{k_1 k_2}{T(T-1)} \sum_{t, t'=1}^{T} P_{i_1 t} P_{i_2 t'} (\delta_{tt'} - \frac{T}{\sum_{u,v=1}^{T} P_{iu} P_{iv}})$$

Где λ_2 — коэффициент штрафа за превышение уровня риска.

Итоговая формула

Собирая все вместе, получаем:

$$Q_{(i_1k_1),(i_2k_2)} = -r_{i_1}k_1\delta_{i_1,i_2}\delta_{k_1,k_2}+2\lambda_1 k_1 S_{i_1} k_2 S_{i_2}+\lambda_2\frac{k_1k_2}{T(T-1)}\sum_{t,t'=1}^{T} P_{i_1t}P_{i_2t'}(\delta_{t,t'}-\frac{T}{\sum_{u,v=1}^{T} P_{iu}P_{iv}})$$

Таким образом, каждое значение в матрице QUBO складывается из трех частей: 1. Линейного вклада от целевой функции (доходы), 2. Штрафа за превышение начальной стоимости, 3. Штрафа за превышенный риск.

Каждое из этих значений рассчитано исходя из соответствующей части целевой функции и ограничений, что позволяет корректно решать задачу оптимизации портфеля акций методом QUBO.

$$V_i = \sum_{j=0}^{T-1}\sum_{k=0}^{N-1} P_{j,i}\sum_{m=0}^{M} mX_{i,m}$$

$$V_i = \sum_{j=0}^{T-1}\sum_{k=0}^{N-1} P_{j,i}\sum_{m=0}^{M} mX_{i,m}$$