试卷标题

班级______________姓名______________ 学号______________

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{985}$，短轴长为 $2\sqrt{211}$.则 a^2 的值为.(　　)

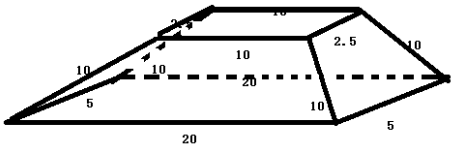
A. 985　　B. 3940 或 844　　C. 844　　D. 985 或 211

2. 若集合$A=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\},B=\{21,23,25,27,29,31,33,35,37,39\},C=\{x+y|x\in A,y\in B\}$，则$|C|$为(　　)

A. 16　　B. 17　　C. 18　　D. 19

3. 如下左图，山西晋祠博物馆，是集中国古代祭祀建筑、园林、雕塑、壁画、碑刻艺术为一体的历史文化遗产，也是世界建筑、园林、雕刻艺术中极为辉煌壮美、璀璨绚烂的篇章.晋祠博物馆位于山西省，是一处蜚声中外的风景名胜区.就单建筑而言，晋祠是中国古代建筑艺术的集约载体，国内宋元明清至民国本体建筑类型、时代序列完整的孤例，附属彩塑壁画碑碣均为国宝.这片建筑群是在经过了千年的风雨后流传下来的，有浓厚的历史文化底蕴.如下右图，将晋祠中的某建筑简化为两底面均为矩形的四棱台，尺寸已经标注在图上（单位：m），则体积（单位：m^3）为.(　　)

A. $\frac{175\sqrt{47}}{16}$　　B. $\frac{875\sqrt{47}}{12}$　　C. $\frac{512\sqrt{47}}{9}$　　D. $\frac{96\sqrt{47}}{5}$



4. 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$|C_1D_1|=|C_1B_1|=1$，$|CC_1|=2$.M，N 在线段 D_1B_1 上且 $|MN|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.相对于 N，M 更靠近 D_1.则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BN}$的最小值为(　　)

A. $\frac{15}{4}$　　B. 4　　C. $\frac{19}{4}$　　D. $\frac{21}{4}$

5. 下表为随机变量 X 的分布列.记此时的变量 X 的均值为 E_0.若随机交换表中十个数中的某两个数，使得交换后 X 的均值大于等于 E_0，则不同的交换方式（交换 A、B 与交换 B、A 视为同种）有 (　　)

A. $\frac{15}{4}$　　B. 4　　C. $\frac{19}{4}$　　D. $\frac{21}{4}$

X	0.2	0.6	1	2	3
P	0.1	0.2	0.15	0.3	0.25

6. 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$ 且处处可导.已知对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有 $f'(x)+af(x)>0(a \geq 0)$.下列说法正确的是.(　　)

A. $a=0$ 时，对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，均有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<0$.

B. $a=2$ 时，$\frac{f(0)}{100}>f(\ln 10)$.

C. $a=2$ 时，$\frac{f(\ln 2)}{f(1)}<\frac{e^2}{4}$

D. $a=1$ 时，若限制定义域为 $\{x|x>\frac{1}{2}\}$，则函数$f(x)=\frac{e^x}{x}$ 满足要求.

7. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=4, \frac{a_{n+4}-2}{4}=a_{n+2}-\frac{3}{4}a_n(n \geq 1)$.则 a_{2023} 的末位为.(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

8. 虚部 $\geq \frac{3}{5}$ 的三个复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1, z_1\overline{z_2}=z_2\overline{z_3}$，且 $2|z_3-z_1|=|z_3-\overline{z_1}|$，则 $|z_1+z_2+z_3|$ 的取值范围为.(　　)

A. $[1+\sqrt{3}, 1+\frac{4}{5}\sqrt{5}]$　　B. $[1+\sqrt{3}, 1+\frac{5}{6}\sqrt{5}]$　　C. $[1+\frac{3}{4}\sqrt{5}, 1+\sqrt{3}]$　　D. $[1+\frac{2}{3}\sqrt{5}, 1+\sqrt{3}]$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 实数 $a, b>0$ 满足 $a+b=1$.下列若干说法，正确的为(　　)

A. $a^2b+ab^2+2a^2+2b^2+5ab \leq \frac{5}{2}$　　B. $a^2b \leq \frac{1}{8}$

C. $\frac{a^4+a^2+1}{a^2+b} \in (1,3)$　　D. $\ln a \cdot \ln b<\frac{1}{2}$

10. “外观数列”是一个著名的正整数数列，它的**首项不确定**.如果首项为 1，则前几项为 1,11,21,1211,111221, 312211.可以看出，从第二项开始，每一项都在“描述”前一项.具体而言，若前一项从高位往低位看有 x 个连续的 y，则将 x 和 y 相连（ x 为高位， y 为低位）作为后一项的一部分.多个 x,y 相连后的结果相连组成了后一项。例如：对于 111221，从左到右看，它有3个连续的1，2 个连续的 2，1 个连续的 1，则后一项为 312211.可能存在一种**“特殊情况”**：x 超过了一位数；也依照正常规则写上去.如 13 个连续的 5 在后一项中描述为 135.下列说法正确的是.(　　)

A. 无论首项为何值，数列单调递增.

B. 除非首项数字某位为4，否则数列中不可能出现4.

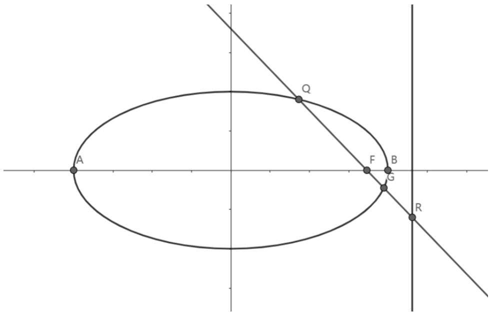
C. 若首项为1，则对于数列中任意项，题中的“特殊情况”不可能出现.

D. 若首项为1，则从第6项开始，每一项都有至少一位是3.

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1+\ln|x|}{e^x}, g(x)=f^2(x)+af(x)+1$.则方程 $g(x)=0$ 的实根可能有()个.(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

12. 如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$.A,B 分别为左顶点、右顶点.其上的动点 Q 不与 A,B 重合.F 为右焦点.另有直线 $l: x=a$.下列若干说法，正确的为(　　)



A. 过Q作 $QM \perp l$ 交 l 于 M.若 $\frac{|QF|}{|QM|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
B. $k_{BQ}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{4}$.
C. 若 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，直线 FQ 交 C 于另一点G，交l于R，且$|FQ|=\frac{5}{4},|FG|=\frac{5}{16}$，则 $|GR|=\frac{25}{48}$.
D. 若 $S(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，L 为 C 上另一动点，则 $|SL|_{max}=\frac{8}{3}$.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知 $a>0,(x^2+ax+1)^5$ 的展开式中 x^8 的系数为 10,则 $a=$______________.

14. 三角形 APB 的边 AB 及平面上一点 Q 满足 $|AB|=4$，$|AQ|=3$，$|BQ|=1$.若 PQ 平分$\angle APB$，则 $S_{\triangle APB}$的最大值为______________.

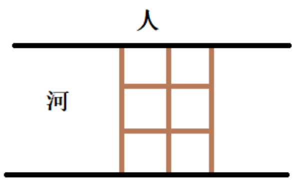
15. 写出一组正实数a,b,c，满足：

(1) $a+c+b^2=16$

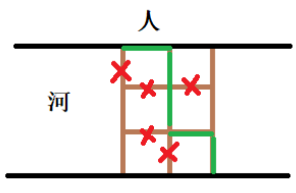
(2) $a(b^2+c-1)+b^2c-b^2=75$

______________.

16. 一条河上有一座桥.桥由若干树干拼接成，这些树干组成了$n\times(n-1)(n\geq 1)$的网格，人只能从树干上经过，通过方向不受限制，下图(a)是 $n=3$ 的情形.由于地震，每条树干有$\frac{1}{2}$的概率断裂，每条树干是否断裂相互独立.当且仅当有至少一条由完好的树干组成的通路时人才能过河（如下图(b)的绿色路径，红色×表示此处的树干断裂了）.则人能过河的概率为______________.



(a)



(b)

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10分）
在三角形 ABC 中，$\sin A=\frac{1}{\tan C}$.

(1) 若 $A=\frac{\pi}{6}$，求 $\sin B$.

(2) 若 $\cos B=\frac{1}{\tan C}$，求 $\sin B$.

18. （12分）

有一个无穷大的方格表.用(i,j)表示第i行第j列.现在在这些格子里填数，满足：从$(k,1)$斜向上到$(1,k)$的每个格子中填$2^{1-k}(k\geq 1)$.填好如下图.

(1) 记所有格子中的数字的和为S.证明：$S<4$.

(2) 一开始在$(1,1)$处有一枚棋子.小明可以进行如下操作：如果(i,j)处有棋子，而$(i+1,j)$和$(i,j+1)$处都没有棋子，则小明可以把(i,j)处的棋子拿走，并在$(i+1,j)$和$(i,j+1)$处各放置一枚棋子.一个格子最多只能放置一枚棋子.证明：无论小明如何操作，左上角的3×3 区域内一定会有棋子.

1	1/2	1/4	1/8	1/16 ……
1/2	1/4	1/8	1/16	……
1/4	1/8	1/16	……	
1/8	1/16	……		
1/16 ……	……			

19. （12分）

四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 ABCD 是梯形，$AB\parallel CD, AB=4, AD=2, DC=2$，平面 $PAB\perp ABCD$，且 P 到平面 ABCD 的距离为 $4, |PB|=\sqrt{17}$.三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 BC.

(2) Q 是 PB 的中点，过 Q 作 $QR\parallel BC$ 交 PC 于 R.求平面 AQR 和平面 DQR 所成角的余弦值.

20. （12分）

某校校长为改善学生在校的生活与学习体验，计划拨款 x（单位：千元）翻新校内包括宿舍、体育器具、教室电器在内的各项设施。下表给出了拨款金额 x 和学生的幸福指数 y 的对应关系.

(1) 由表中数据得知，在 $x\leq 500$ 时可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.请用相关系数加以说明，并建立 y 关于 x 的经验回归方程.

(2) 由表中数据得知，在 x 较大时线性回归模型拟合效果不佳.若取拟合函数为 $y=\frac{ax}{b+x}$，试估计 a 与 b 的值.（与实际 a,b 相差的绝对值不超过 100 即可）

x	100	200	300	400	500	1000	2000	3000	4000	5000
y	18.53	34.75	49.06	61.78	73.16	115.83	163.53	189.55	205.93	217.19

21. （12分）

已知函数 $f(x)=2\ln x+x^2, g(x)=ax-3$.

(1) 若 $f(x)\geq g(x)$ 对于 $\forall x\geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(2) 对于任意正整数 n，证明：

$$\ln 2\cdot\ln\frac{3}{2}\cdot\ln\frac{4}{3}\cdot\ln\frac{5}{4}\cdots\ln\frac{2n}{2n-1}\cdot\ln\frac{2n+1}{2n}>\frac{C_{4n-1}^{2n}}{2^{4n-1}\cdot(2n)!}$$

22. （12分）

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$.过 $K(-4,0)$ 作两条切线交 E 于 A,B，且 $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=48$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 如下图.点 $P(a,0)(a<0)$ 是 x 轴负半轴上一点.过 P 作直线 l 与 E 交于不重合的 M，N 两点，再过 M、N 作垂直于 l 的直线 MS、NT 分别交 E 于 S、T.直线 ST 交 x 轴于 $Q(b,0)$.对于每个确定的点 P，Q 的横坐标 b 会随着 l 斜率的变化而变化，从而有一个左开右开的连续取值范围，即
$b\in(L(a),R(a))$.试求 $R(a)-L(a)$.