2024 届高三第一次学业质量评估（T8 联考）数学试卷

学校：___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、选择题

1、已知集合 $A=\{x|\log_2 x<1\}$，$B=\{y|y=2^x\}$，则(　)

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cap B=A$　　C. $A\cup B=\mathbf{R}$　　D. $A\cup B=A$

2、已知复数 z 满足 $(z+2)\mathrm{i}=2z-1$，则复数 $\bar{z}=$(　)

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $\sqrt{5}\mathrm{i}$　　D. $-\sqrt{5}\mathrm{i}$

3、已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，则“$m+n=p+q$”是“$a_m+a_n=a_p+a_q$”的(　)

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

4、直线 $x-y-1=0$ 将圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=8$ 分成两段，这两段圆弧的弧长之比为(　)

A. $1:2$　　B. $1:3$　　C. $1:5$　　D. $3:5$

5、设 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，A，B，C 为抛物线上的三个点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$(　)

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

6、秋冬季节是某呼吸道疾病的高发期，为了解该疾病的发病情况，疾控部门对该地区居民进行普查化验，化验结果阳性率为 1.97%，但统计分析结果显示患病率为 1%.医学研究表明化验结果是有可能存在误差的，没有患该疾病的居民其化验结果呈阳性的概率为 0.01，则该地区患有该疾病的居民化验结果呈阳性的概率为(　)

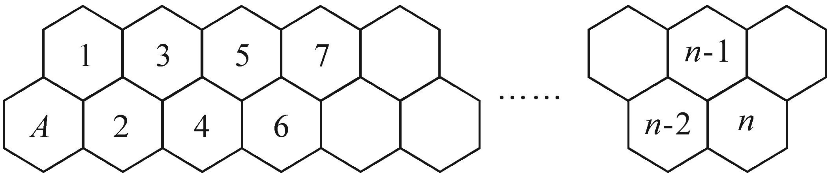
A. 0.96　　B. 0.97　　C. 0.98　　D. 0.99

7、已知正数 a，b，c 满足 $a\mathrm{e}^a=b\ln b=\mathrm{e}^c\ln c=1$，则 a，b，c 的大小关系为(　)

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

8、一只蜜蜂从蜂房 A 出发向右爬，每次只能爬向右侧相邻的两个蜂房（如图），例如：从蜂房 A 只能爬到 1 号或 2 号蜂房，从 1 号蜂房只能爬到 2 号或 3 号蜂房……

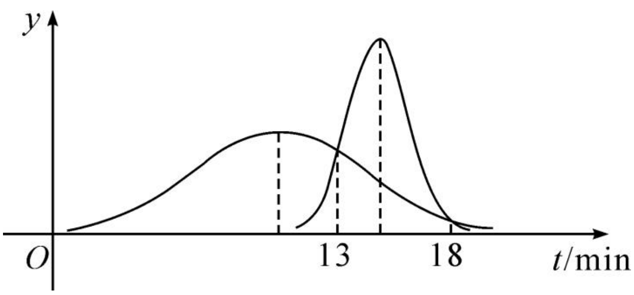
以此类推，用 a_n 表示蜜蜂爬到 n 号蜂房的方法数，则 $a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2=$( )



A.1　　　　　　B.-1　　　　　　C.2　　　　　　D.-2

二、多项选择题

9、小明上学有时坐公交车，有时骑自行车，他各记录了 10 次坐公交车和骑自行车所花的时间，10 次坐公交车所花的时间分别为 7，11，8，12，8，13，6，13，7，15（单位：min），10 次骑自行车所花时间的均值为 15min，方差为 1.已知坐公交车所花时间 X 与骑自行车所花时间 Y 都服从正态分布，用样本均值和样本方差估计 X，Y 分布中的参数，并利用信息技术工具画出 X 和 Y 的分布密度曲线如图所示.若小明每天需在早上 8 点之前到校，否则就迟到，则下列判断正确的是( )



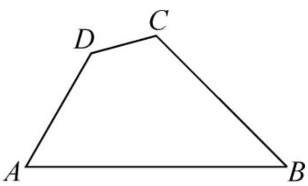
A.坐公交车所花时间的均值为 10，方差为 3

B.若小明早上 7：50 之后出发，并选择坐公交车，则有 50%以上的可能性会迟到

C.若小明早上 7：42 出发，则应选择骑自行车

D.若小明早上 7：47 出发，则应选择坐公交车

10、如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60^\circ$，$\angle DCB=120^\circ$，$AB=2$，$BC=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$，则下列结果正确的是( )



A. $\angle ABC=45°$　　B. $AC=\sqrt{3}$　　C. $BD=\sqrt{3}$　　D. $\triangle ADC$的面积为$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

11、已知函数$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，则下面判断正确的是(　)

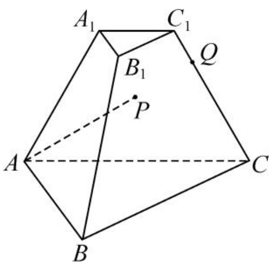
A.若$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)>f(x)$，则函数$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

B.若$\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，$\left|f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right|\le\left|\sin x_1+\sin x_2\right|$，则函数$f(x)$是奇函数

C.若$\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le\left|\sin x_1-\sin x_2\right|$，则函数$f(x)$是周期函数

D.若$\forall x_1$，$x_2\in(-1,1)$且$x_1\ne x_2$，$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\left|\sin x_1-\sin x_2\right|$，则函数$f(x)+\sin x$在区间$(-1,1)$上单调递增，函数$f(x)-\sin x$在区间$(-1,1)$上单调递减

12、如图，已知正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的上、下底面边长分别为 2 和 6，侧棱长为 4，点 P 在侧面BCC_1B_1内运动（包含边界），且AP与平面BCC_1B_1所成角的正切值为$2\sqrt{2}$，点 Q 为CC_1上一点，且$\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{QC_1}$，则下列结论中正确的有(　)



A.正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的高为$2\sqrt{6}$

B.点 P 的轨迹长度为$\sqrt{3}\pi$

C.高为$\frac{4\sqrt{6}}{3}$，底面半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}$的圆柱可以放进棱台内

D.过点 A，B，Q 的平面截该棱台内最大的球所得的截面面积为$\frac{3}{2}\pi$

三、填空题

13、已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60°$，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$，若$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则$t=$_________.

14、已知$(1+x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则

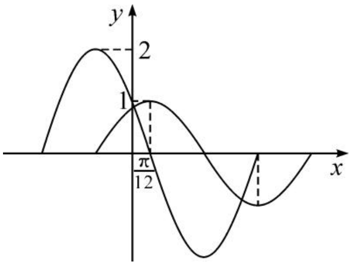
$a_5+2a_4+4a_3+8a_2+16a_1+32a_0=$_________.

15、三棱锥$P-ABC$的每一个面都是边长为 1 的正三角形，以它的高PH所在直线为旋转轴，将其旋转$60°$得到三棱锥$P-A'B'C'$，则两个三棱锥公共区域的体积为________.

16、已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若过点$F_2$的直线与双曲线的左、右两支分别交于 A，B 两点，且$AF_1=BF_1=2\sqrt{5}$.又以双曲线的顶点为圆心，半径为$2\sqrt{2}$的圆恰好经过双曲线虚轴的端点，则双曲线的离心率为________.

四、解答题

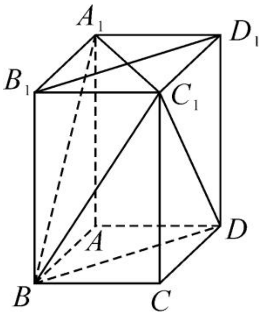
17、已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0$，$0<\varphi<\pi)$及其导函数的图象如图所示.



（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）若函数$f(x)$在区间$(0,m)$上恰有 2 个极值点和 2 个零点，求实数 m 的取值范围.

18、如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面为菱形，$AB=AC=2$，$AA_1=2\sqrt{3}$.



（1）证明：平面$A_1C_1B\perp$平面BDD_1B_1；

（2）求直线DC_1与平面A_1C_1B所成角的正弦值.

19、为应对全球气候变化，我国制定了碳减排的国家战略目标，采取了一系列政策措施积极推进碳减排，作为培育发展新动能、提升绿色竞争力的重要支撑，节能环保领

域由此成为全国各地新一轮产业布局的热点和焦点.某公司为了解员工对相关政策的了解程度，随机抽取了 180 名员工进行调查，得到如下表的数据：

了解程度	性别		合计
	男性	女性	
比较了解	60	60	
不太了解	20	20	
合计			

（1）补充表格，并根据小概率值$\alpha=0.025$的独立性检验，分析了解程度与性别是否有关？

（2）用分层抽样的方式从不太了解的人中抽取 12 人，再从这 12 人中随机抽取 6 人，用随机变量 X 表示这 6 人中男性员工人数与女性员工人数之差的绝对值，求 X 的分布列和数学期望.

附表及公式：

a	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
x_a	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

20、已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，点 P 是椭圆与 x 轴正半轴的交点，点 Q 是椭圆与 y 轴正半轴的交点，且$|FQ|=\sqrt{2}$，$|PF|=\sqrt{2}-1$.直线 l 过圆 $O:x^2+y^2=1$的圆心，并与椭圆相交于 A，B 两点，过点 A 作圆 O 的一条切线，与椭圆的另一个交点为 C，且$S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{3}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）求直线AC的斜率.

21、已知数列$\{a_n\}$为等差数列，公差$d>0$，等比数列$\{b_n\}$满足：$b_1=2a_1=2$，$b_2=a_1+a_3$，$b_1b_3=5a_3+1$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若将数列$\{a_n\}$中的所有项按原顺序依次插入数列$\{b_n\}$中，组成一个新数列：b_1，a_1，b_2，a_2，a_3，b_3，a_4，a_5，a_6，a_7，b_4，$\cdots$，在b_k与b_{k+1}之间插入2^{k-1}项$\{a_n\}$中的项，新数列中b_{n+1}之前（不包括b_{n+1}）所有项的和记为T_n，若$d_n=\dfrac{a_n^2}{a_{n+1}}\left(\dfrac{2^{n-1}}{T_n+2}+2\right)$，求使得$[d_1]+[d_2]+[d_3]+\cdots+[d_n]\le 2023$成立的最大正整数$n$的值.（其中符号$[x]$表示不超过$x$的最大整数）

22、已知函数$f(x)=3a-x-(x+1)\ln(x+1)$，$g(x)=a^2\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}(2-a)x^2-3ax(x>-1)$，$1\le a\le 6$，$g(x)$的导函数记为$g'(x)$，e为自然对数的底数，约为 2.718.

（1）判断函数$f(x)$的零点个数；

（2）设x_1是函数$f(x)$的一个零点，x_2是函数$g(x)$的一个极值点，证明：

①$-1<x_2<1<x_1$；②$f(x_2)<g'(x_1)$.

参考答案

1、答案：B

解析：$\because A=\left\{x\middle|\log_2 x<1\right\}=\left\{x\middle|0<x<2\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=2^x\right\}=\left\{y\middle|y>0\right\}$，$\therefore A\cap B=A$，

$A\cup B=B$，故正确选项为 B.

2、答案：B

解析：由$(z+2)\mathrm{i}=2z-1$可得$(2-\mathrm{i})z=1+2\mathrm{i}$，$\therefore z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\mathrm{i}$，$\therefore \overline{z}=-\mathrm{i}$，

故正确选项为 B.

3、答案：A

解析：设$\{a_n\}$的公差为 d，由$a_m+a_n=a_p+a_q$可得

$2a_1+(m+n-2)d=2a_1+(p+q-2)d$，$\therefore (m+n-2)d=(p+q-2)d$，$\therefore m+n=p+q$或

$d=0$，$\therefore$“$m+n=p+q$”不是“$a_m+a_n=a_p+a_q$”的必要条件；若$m+n=p+q$，则

一定有$a_m+a_n=a_p+a_q$，$\therefore$“$m+n=p+q$”是“$a_m+a_n=a_p+a_q$”的充分条件，故正

确选项为 A.

4、答案：A

解析：设直线与圆的两个交点为 A、B，圆心为 C，$\angle ACB=2\alpha(0<\alpha<\pi)$，$\because$ 圆心到

直线的距离为$\dfrac{|2-3-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，$\because 0<\alpha<\pi$，$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，两段圆弧的弧长之比等于两段弧所对圆心角的弧度数之比，等于

$\dfrac{2\pi}{3}:\left(2\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right)=1:2$，故正确选项为 A.

5、答案：C

解析：设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$C\left(x_3,y_3\right)$，则$\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_3-\dfrac{1}{2}\right)=0$，

$\therefore x_1+x_2+x_3=\dfrac{3}{2}$ ，

$\therefore|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=\left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_3+\dfrac{1}{2}\right)=x_1+x_2+x_3+\dfrac{3}{2}=3$ ，

故正确选项为 C.

6、答案：C

解析：设 $A=$ “患有该疾病” ，$B=$ “化验结果呈阳性” .由题意可知 $P(A)=0.01$ ，$P(B)=0.0197$ ，$P(B|\overline{A})=0.01$.$\because P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ ，

$\therefore 0.0197=0.01\times P(B|A)+0.99\times0.01$ ，解得 $P(B|A)=0.98$.

$\therefore$ 患有该疾病的居民化验结果呈阳性的概率为 0.98，故正确选项为 C.

7、答案：D

解析：易知 $b>1$ ，$c>1$ ，$0<a<1$ ，$\therefore$ 排除选项 A 和 B.当 $x>1$ 时，函数 $y=x\ln x$ 和函数 $y=\mathrm{e}^x\ln x$ 均单调递增，且 $x\ln x<\mathrm{e}^x\ln x$.$\therefore$ 由 $b\ln b=\mathrm{e}^c\ln c$ 可得 $c<b$.综上所述，$a<c<b$.故正确选项为 D.

8、答案：A

解析：由题意可得 $a_1=1$ ，$a_2=2$ ，$a_3=3$ ，$a_4=5$ ，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ （ $n\in\mathbf{N}^*$ ，$n\geq2$ ）.

$\therefore n\geq2$ 时，$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n\left(a_{n+1}+a_n\right)-a_{n+1}^2=a_na_{n+1}+a_n^2-a_{n+1}^2=a_n^2+a_{n+1}\left(a_n-a_{n+1}\right)$

$=a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=-\left(a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2\right)$.

$\because a_1a_3-a_2^2=-1$ ，$\therefore$ 数列 $\left\{a_na_{n+2}-a_{n+1}^2\right\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公比的等比数列.

$\therefore a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2=(-1)\times(-1)^{2021}=1$ ，

故正确选项为 A.

9、答案：BCD

解析：坐公交车所花时间的均值为 $\dfrac{7+11+8+12+8+13+6+13+7+15}{10}=10$ ，方差为

$\frac{1}{10}\left(3^2+1^2+2^2+2^2+2^2+3^2+4^2+3^2+3^2+5^2\right)=9$ ，

故选项 A 错误.

根据题意，可以得到 $X\sim N\left(10,3^2\right)$ ，$Y\sim N\left(15,1^2\right)$ ，$\therefore 7:50$ 之后出发，并选择坐公交车，有 50% 以上的可能性会超过 10min ，即 8 点之后到校，会迟到，故选项 B 正确.

由图可知，$P(X\le 18)<P(Y\le 18)$ ，$P(X\le 13)>P(Y\le 13)$ ，应选择在给定的时间内不迟到的概率大的交通工具.

$\therefore$ 小明早上 7：42 出发，有 18min 可用，则应选择骑自行车，故选项 C 正确.

小明早上 7：47 出发，只有 13min 可用，则应选择坐公交车，故选项 D 正确.故正确选项为 BCD.

10、答案：ACD

解析：由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ 可得 $2\sqrt{2}\cos B=2$ ，

$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，$\because 0<\angle ABC<180^\circ$ ，$\therefore \angle ABC=45^\circ$ ，故选项 A 正确.

连接 AC ，在 $\triangle ABC$ 中，$AC^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times 2\times\sqrt{2}\cos 45^\circ=2$ ，$\therefore AC=\sqrt{2}$ ，故选项 B 错误.

$\because AC=BC=\sqrt{2}$ ，$AB=2$ ，$\therefore \angle ACB=90^\circ$ ，

在四边形 $ABCD$ 中，$\because \angle DAB+\angle DCB=180^\circ$ ，$\therefore A$ ，B ，C ，D 四点共圆.

连接 BD ，$\therefore \angle ADB=90^\circ$ ，$\therefore AD=AB\cos A=1$ ，$BD=AB\sin A=\sqrt{3}$ ，故选项 C 正确.

$\triangle ADC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.故正确选项为 ACD.

11、答案：BCD

解析：令 $f(x)=\sin(2\pi x)+x$ ，满足 $f(x+1)>f(x)$ ，

但 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数，故选项 A 错误.

令 $x_1=x$ ，$x_2=-x$ ，则 $|f(x)+f(-x)|\le|\sin x+\sin(-x)|=0$ ，$\therefore f(x)+f(-x)=0$ ，

即 $f(x)=-f(-x)$ ，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是奇函数，故选项 B 正确.

$\because \forall x_1$ ，$x_2\in \mathbf{R}$ ，都有 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le|\sin x_1-\sin x_2|$ ，

$\therefore |f(x)-f(x+2\pi)|\le|\sin x-\sin(x+2\pi)|=0$ ，$\therefore f(x)-f(x+2\pi)=0$ ，

即 $f(x)=f(x+2\pi)$ ，$\therefore f(x)$ 是周期函数，故选项 C 正确.

任取 $-1<x_1<x_2<1$ ，$\because y=\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，$\therefore \sin x_1<\sin x_2$ ，

$\therefore \left|\sin x_1-\sin x_2\right|=\sin x_2-\sin x_1$ ，$\therefore \left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\sin x_2-\sin x_1$ ，

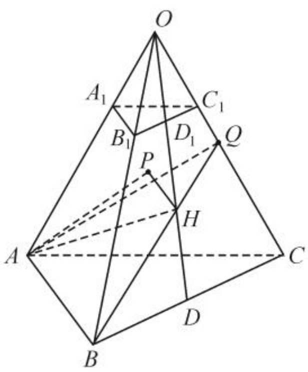
$\therefore \sin x_1-\sin x_2<f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<\sin x_2-\sin x_1$ ，

$\therefore f\left(x_2\right)-\sin x_2<f\left(x_1\right)-\sin x_1$ 且 $f\left(x_1\right)+\sin x_1<f\left(x_2\right)+\sin x_2$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)+\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，函数 $f(x)\ \sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，故选项 D 正确.故正确选项为 BCD.

12、答案：CD

解析：依题意，如图，延长正三棱台侧棱相交于点 O，$\therefore OA=OB=OC$.



在等腰梯形 BCC_1B_1 中，由 $BC=6$ ，$B_1C_1=2$ ，$BB_1=CC_1=4$ ，易知

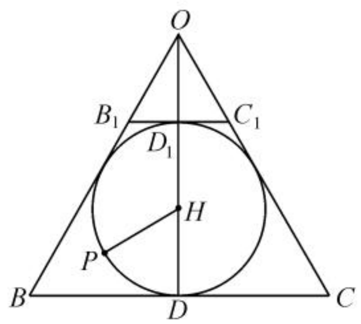
$\angle B_1BC=\angle C_1CB=60^\circ$.

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形，三棱锥 $O-ABC$ 为正四面体，$OB_1=2$.

如图，设 H 为等边 $\triangle OBC$ 的中心，易证 $AH\perp$ 侧面 OBC ，

$\therefore AH=\sqrt{6^2-\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2}=2\sqrt{6}$ ，

$\therefore O$ 点到底面 ABC 的距离为 $2\sqrt{6}$ ，又 $OB_1=2$ ，$BB_1=4$ ，$\therefore$ 正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $\frac{2}{3}\times 2\sqrt{6}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，故选项 A 错误.



$\because AP$ 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $2\sqrt{2}$ ，即 $\tan\angle APH=\frac{AH}{HP}=\frac{2\sqrt{6}}{HP}=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore HP=\sqrt{3}$.正好为等边 $\triangle OBC$ 的内切圆半径，$\therefore$ 点 P 的轨迹长度为 $2\sqrt{3}\pi$ ，故选项 B 错误.

$\because$ 正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，$\triangle A_1B_1C_1$ 的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，$\therefore$ 可以放入，故选项 C 正确.

设正四面体 $O-ABC$ 的内切球半径 r ，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times 2\sqrt{6}=4\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot r$ ，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\because 2r<\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，$\therefore$ 该棱台内最大的球即为正四面体 $O-ABC$ 的内切球.

$\because \overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{QC_1}$ ，$CC_1=4$ ，$OC=6$ ，$\therefore Q$ 为 OC 的中点，过点 A ，B ，Q 的平面正好过该内切球的球心，故截面面积为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\pi=\frac{3}{2}\pi$ ，故选项 D 正确.故正确选项为 CD.

13、答案：2

解析：依题意，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot[t\vec{a}+(1-t)\vec{b}]=t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{b}^2=\frac{1}{2}t+1-t=0$ ，解得 $t=2$.

14、答案：243

解析：$\because (x+1)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + \cdots + C_5^5 x^5$，$\therefore a_0 = a_5 = C_5^0$，$a_1 = a_4 = C_5^1$，

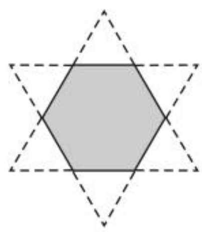
$a_2 = a_3 = C_5^2$，

$\therefore (1+x)^5 = a_5 + a_4 x + a_3 x^2 + a_2 x^3 + a_1 x^4 + a_0 x^5$，令 $x=2$ 得

$a_5 + 2a_4 + 4a_3 + 8a_2 + 16a_4 + 32a_0 = 3^5 = 243$.

15、答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

解析：如图，依题意可得，绕高旋转 60° 后，与原底面重合部分为正六边形.

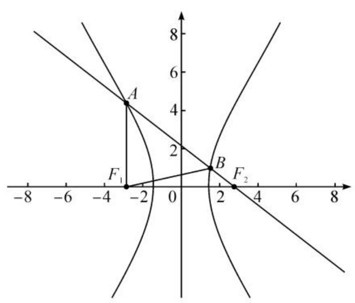


$\because$ 正三角形的边长为 1，$\therefore$ 正六边形的边长为 $\dfrac{1}{3}$，面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

又易知各棱长均为 1 的三棱锥的高为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$ 公共区域的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$.

16、答案：2

解析：如图，$\because AF_1 = BF_1 = 2\sqrt{5}$，$AF_2 - AF_1 = 2a = BF_1 - BF_2$，



$\therefore AF_2 = 2\sqrt{5} + 2a$，$BF_2 = 2\sqrt{5} - 2a$，$\therefore AB = AF_2 - BF_2 = 4a$.

$\because$ 以双曲线的顶点为圆心，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆恰好经过双曲线虚轴的端点，

$\therefore a^2 + b^2 = (2\sqrt{2})^2 = c^2$，$\therefore c^2 = 8$，$\therefore F_1F_2 = 4\sqrt{2}$.

在$\triangle BF_1F_2$中，$\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5}-2a)^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{5}\times(2\sqrt{5}-2a)}=\dfrac{8-8\sqrt{5}a+4a^2}{4\sqrt{5}(2\sqrt{5}-2a)}$，

在$\triangle AF_1B$中，$\cos\angle ABF_1=\dfrac{2a}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$.

$\because\angle F_1BF_2=\pi-\angle ABF_1$，$\therefore\cos\angle F_1BF_2=-\cos\angle ABF_1$，

$\therefore\dfrac{8-8\sqrt{5}a+4a^2}{4\sqrt{5}(2\sqrt{5}-2a)}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$，解得$a^2=2$，$\therefore e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=2$.

17、答案：（1）$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

（2）$\left(\dfrac{5}{6}\pi,\dfrac{13}{12}\pi\right]$

解析：（1）$\because f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$\therefore f'(x)=\omega A\cos(\omega x+\varphi)$.

根据$f'(0)>0$，函数$f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$上单调递增，由图可知$\begin{cases}A=1,\\\omega=2.\end{cases}$

$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$，则$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=1$，$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.

$\therefore\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

此时$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

（2）当$x\in(0,m)$时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},2m+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\because f(x)$在区间$(0,m)$上恰有 2 个极值和 2 个零点，

$\therefore 2\pi<2m+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5}{2}\pi$，$\therefore\dfrac{5}{6}\pi<m\le\dfrac{13}{12}\pi$，$\therefore m$的取值范围为$\left(\dfrac{5}{6}\pi,\dfrac{13}{12}\pi\right]$.

18、答案：（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

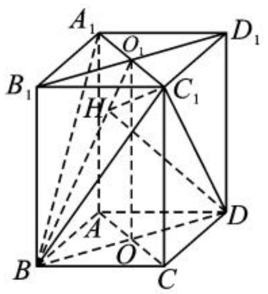
解析：（1）$\because$四边形$A_1B_1C_1D_1$是菱形，$\therefore A_1C_1\perp B_1D_1$.

又 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，$A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，$\therefore BB_1 \perp A_1C_1$.

$\because B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$ B_1D_1 ，$BB_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，

$\because A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B ，$\therefore$ 平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 BDD_1B_1 .

（2）方法一：如图，连接 AC ，设菱形对角线交点分别为 O ，O_1 ，连接 BO_1 ，OO_1 ，过 D 点作 $DH \perp BO_1$ 于点 H ，连接 HC_1 .



$\because$ 平面 $BDD_1B_1 \cap$ 平面 $A_1C_1B = BO_1$ ，$\therefore DH \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，

由（1）知，$A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，$\therefore A_1C_1 \perp DH$ ，

$\because BO_1 \subset$ 平面 A_1C_1B ，$A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B ，

$\therefore DH \perp$ 平面 A_1C_1B ，则 $\angle DC_1H$ 为直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成的角.

$\because AA_1 = 2\sqrt{3}$ ，$AB = AC = 2$ ，$\therefore BO = \sqrt{3}$ ，$\therefore BD = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore \sin\angle DBH = \dfrac{DH}{BD} = \dfrac{DH}{2\sqrt{3}}$.

$\because BO = \sqrt{3}$ ，$OO_1 = AA_1 = 2\sqrt{3}$ ，$\therefore BO_1 = \sqrt{15}$ ，

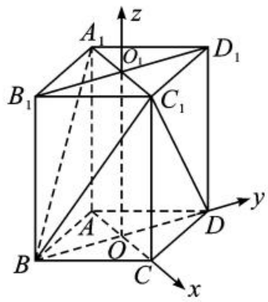
$\therefore \sin\angle DBO_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ，$\therefore DH = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

$\because DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = 4$ ，$\therefore \sin\angle DC_1H = \dfrac{DH}{DC_1} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ，

$\therefore$ 直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

方法二：连接 AC ，设菱形对角线交点分别为 O ，O_1 ，连接 OO_1 ，依题意可知，$OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，以 O 为原点，OC ，OD ，OO_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建

立如图所示的空间直角坐标系.



$\because AA_1=2\sqrt{3}$ ，$AB=AC=2$ ，$\therefore BO=\sqrt{3}=DO$ ，

$\therefore B(0,-\sqrt{3},0)$ ，$A_1(-1,0,2\sqrt{3})$ ，$C_1(1,0,2\sqrt{3})$ ，$D(0,\sqrt{3},0)$ ，

$\therefore \overrightarrow{BC_1}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$ ，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$ ，$\overrightarrow{C_1D}=(-1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$.

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $\vec{n}=(0,2,-1)$ ，

设直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 的夹角为 θ ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{C_1D},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{C_1D}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{C_1D}\right||\vec{n}|}=\dfrac{2\times\sqrt{3}+1\times2\sqrt{3}}{4\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ，

$\therefore$ 直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

19、答案：（1）了解程度与性别无关

（2）X 的分布列见解析，数学期望为 $\dfrac{70}{33}$

解析：（1）补充表格如下：

了解程度	性别		合计
	男性	女性	
比较了解	60	60	120
不太了解	20	20	60

合计	80	100	180

零假设为H_0：了解程度与性别无关.

根据列联表中的数据，经计算得到$\chi^2=\dfrac{180\times(60\times40-60\times20)^2}{120\times60\times80\times100}=\dfrac{9}{2}=4.5<5.024$，

根据小概率值$\alpha=0.025$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，

因此可以认为H_0成立，即了解程度与性别无关.

（2）用分层抽样在不太了解的 60 人中抽取 12 人，抽得女性 8 人，男性有 4 人.

X的可能取值为 0，2，4，6.

则$P(X=0)=\dfrac{C_8^3C_4^3}{C_{12}^6}=\dfrac{8}{33}$，$P(X=2)=\dfrac{C_8^4C_4^2+C_8^2C_4^4}{C_{12}^6}=\dfrac{16}{33}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_8^5C_4^1}{C_{12}^6}=\dfrac{8}{33}$，$P(X=6)=\dfrac{C_8^6C_4^0}{C_{12}^6}=\dfrac{1}{33}$.

X的分布列为：

X	0	2	4	6
P	$\dfrac{8}{33}$	$\dfrac{16}{33}$	$\dfrac{8}{33}$	$\dfrac{1}{33}$

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{8}{33}+2\times\dfrac{16}{33}+4\times\dfrac{8}{33}+6\times\dfrac{1}{33}=\dfrac{70}{33}$.

20、答案：（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）1 或-1

解析：（1）由题意可得$a=\sqrt{2}$，$a-c=\sqrt{2}-1$，

$\therefore c=1$，$\therefore b=1$，$\therefore$ 椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）若圆 O 的切线$AC\perp x$轴，则$|AC|=\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，不满足题意.

设直线AC的方程为$y=kx+m$，

$\because$ 直线 AC 与圆 O 相切，$\therefore \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，$\therefore m^2=k^2+1$，

联立 $y=kx+m$ 与 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

消 y 得 $\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$.

$\because O$ 到直线 AC 的距离为 1，则 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=2\times\frac{1}{2}|AC|\times 1$

$=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2-m^2+1}}{1+2k^2}=\frac{4}{3}$，

将 $m^2=k^2+1$ 代入消 m 可得 $\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}|k|}{1+2k^2}=\frac{4}{3}$，

化简可得 $k^4+k^2-2=0$，解得 $k^2=1$（负值舍去），

$\therefore k=\pm 1$，故直线 AC 的斜率为 1 或 -1.

21、答案：（1）$a_n=n$，$b_n=2^n$

（2）$n=45$

解析：（1）设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q\neq 0)$，依题意可得 $a_1=1$，$b_1=2$，

$\begin{cases}2q=1+1+2d,\\2\times 2q^2=5(1+2d)+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=1,\\q=2,\end{cases}$ 或，$\begin{cases}d=-\frac{1}{2},\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$（舍去）.

$\therefore a_n=n$，$b_n=2^n$.

（2）新数列中 b_{n+1} 之前的所有项中，含有 $\{a_n\}$ 中的项共有 $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

项，

$\therefore T_n=\dfrac{\left(1+2^n-1\right)\left(2^n-1\right)}{2}+\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^{2n-1}+3\cdot 2^{n-1}-2$ ，

$\therefore d_n=\dfrac{n^2}{n+1}\left(\dfrac{1}{2^n+3}+2\right)=\dfrac{n^2}{(n+1)\left(2^n+3\right)}+\dfrac{2n^2}{n+1}=\dfrac{n^2}{(n+1)\left(2^n+3\right)}+\dfrac{2}{n+1}+2(n-1)$

$=\dfrac{n^2+2\left(2^n+3\right)}{(n+1)\left(2^n+3\right)}+2(n-1)$.

下证当$n\geq 2$时，$0<\dfrac{n^2+2\left(2^n+3\right)}{(n+1)\left(2^n+3\right)}<1$.

$(n+1)\left(2^n+3\right)-n^2-2\left(2^n+3\right)=(n-1)2^n-n^2+3n-3$ ，

$\because 2^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$ ，$\therefore$ 当$n\geq 2$时，$2^n\geq n+2$ ，

$\therefore (n-1)2^n-n^2+3n-3\geq (n-1)(n+2)-n^2+3n-3=4n-5>0$.

$\therefore$ 当$n\geq 2$时，$0<\dfrac{n^2+2\left(2^n+3\right)}{(n+1)\left(2^n+3\right)}<1$，故$\left[d_n\right]=2(n-1)$；

当$n=1$时，$d_1=\dfrac{11}{10}$，$\therefore\left[d_1\right]=1$.

$\therefore\left[d_1\right]+\left[d_2\right]+\left[d_3\right]+\cdots+\left[d_n\right]=1+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=n^2-n+1\leq 2023$ ，

$\therefore n^2-n=n(n-1)\leq 2022$，满足不等式的最大正整数$n=45$.

22、答案：（1）1

（2）证明见解析

解析：（1）$f'(x)=-\ln(x+1)-2$，令$f'(x)=0$，解得$x=-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，

当$x\in\left(-1,-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$时，$f'(x)>0$ ，

当$x\in\left(-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$ ，

$\therefore f(x)$在区间$\left(-1,-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$上单调递增，在区间$\left(-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$上单调递减，令

$m(x)=x\ln x$ ，

$\therefore x\to 0$时，可令 $x=\mathrm{e}^{-t}$ ，$t\to+\infty$.

此时$m(x)=-t\mathrm{e}^{-t}$ ，易知$t\to+\infty$ 时，$m(x)\to 0$.

$\therefore$ 当 $x\to -1$时，$y=(x+1)\ln(x+1)\to 0$ ，$\therefore f(x)\to 3a+1$ ，

$\because 1\le a\le 6$ ，$\therefore 3a+1>0$ ，即 $f(x)$ 在区间$\left(-1,-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$上无零点.

又 $f(1)=3a-1-2\ln 2\ge 3\times 1-1-2\ln 2>0$ ，

$f\left(\mathrm{e}^2-1\right)=3a-\left(\mathrm{e}^2-1\right)-2\mathrm{e}^2=3a+1-3\mathrm{e}^2\le 3\times 6+1-3\mathrm{e}^2<0$ ，

$\therefore \exists x_1\in\left(1,\mathrm{e}^2-1\right)$使得 $f\left(x_1\right)=0$ ，

即 $f(x)$ 在区间$\left(-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$上有一个零点，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点个数为 1.

（2）①由（1）可知，函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_1 ，且 $x_1>1$.下面判断函数 $g(x)$ 的极值点情况，

$g'(x)=a^2\mathrm{e}^x+(2-a)x-3a(x>-1)$ ，

令 $h(x)=g'(x)$ ，则 $h'(x)=a^2\mathrm{e}^x+2-a(x>-1)$ ，

当$1\le a\le 2$时，$h'(x)>0$ ，$\therefore h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $2<a\le 6$ 时，$h'(x)>a^2\mathrm{e}^{-1}+2-a>\dfrac{2^2}{\mathrm{e}}+2-2=\dfrac{4}{\mathrm{e}}>0$ ，

$\therefore h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当$1\le a\le 6$时，$h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because h(-1)=\dfrac{a^2}{\mathrm{e}}-2a-2$ ，令 $r(a)=\dfrac{a^2}{\mathrm{e}}-2a-2$ ，$r'(a)=\dfrac{2a}{\mathrm{e}}-2$ ，

令 $r'(a)=0$ ，解得 $a=\mathrm{e}$.

$\because 1\le a\le 6$ ，$\therefore r(a)$ 在区间 $[1,\mathrm{e})$ 上单调递减，在区间 $[\mathrm{e},6]$ 上单调递增，

$\because r(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-4<0$ ，$r(6)=\dfrac{36}{\mathrm{e}}-14<0$ ，$\therefore h(-1)<0$ ，

又 $h(1)=a^2\mathrm{e}-4a+2>1^2\times\mathrm{e}-4\times1+2=\mathrm{e}-2>0$ ，

$\therefore \exists x_2\in(-1,1)$ 使得 $h\left(x_2\right)=0$ ，

即 $g'\left(x_2\right)=0$ ，且当 $x\in\left(-1,x_2\right)$ 时，$h\left(x_2\right)=g'\left(x_2\right)<0$ ，

当 $x\in\left(x_2,1\right)$ 时，$h\left(x_2\right)=g'\left(x_2\right)>0$ ，

$\therefore g(x)$ 在区间 $\left(-1,x_2\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(x_2,1\right)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，函数 $g(x)$ 存在唯一的极值点 x_2 ，且 $-1<x_2<1$.

综上，$-1<x_2<1<x_1$.

②$\because f\left(x_1\right)=g'\left(x_2\right)=0$ ，要证 $f\left(x_2\right)<g'\left(x_1\right)$ ，

即证 $f\left(x_2\right)+g'\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)+g'\left(x_1\right)$ ，

令 $\varphi(x)=f(x)+g'(x)=a^2\mathrm{e}^x+(1-a)x-(x+1)\ln(x+1)$ ，

下证 $\varphi(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，即证 $\varphi'(x)\geq0$ 恒成立，

$$\varphi'(x)=a^2\mathrm{e}^x-a-\ln(x+1)=a^2\mathrm{e}^x+1-1-a-\ln(x+1)\geq2\sqrt{a^2\mathrm{e}^x\times1}-1-a-\ln(x+1)$$

$$=2a\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1-a-\ln(x+1)=a\left(2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\right)-1-\ln(x+1)$$ ，

$\because x>-1$ ，$\therefore 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1>2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-1>0$ ，

故 $v(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减，在区间 $\left(-1,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore v(x)\geq v(0)=0$ ，$\therefore$ 当 $x>-1$ 时，$\varphi'(x)\geq0$ 恒成立，

$\therefore \varphi(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

$\because -1<x_2<1<x_1$ ，$\therefore \varphi\left(x_2\right)<\varphi\left(x_1\right)$ ，原命题得证.