DDVV 不等式证明

2024 年 10 月 21 日

摘要

关键词： $DDVV$

目录

0 引言

不等式是数学分析中的重要工具，它们在各个数学领域中有广泛的应用。本文将总结并证明 $DDVV$ 不等式。

1 $DDVV$ 不等式

$\forall m \in \mathbb{N}, \forall B_1, \ldots, B_m \in SM(n)$,

$$\sum_{r<s}^{m} |[B_r, B_s]|^2 \leq c(\sum_{r=1}^{m} |B_r|^2)^2 \tag{*}$$

其中 c 为常数, 在 B 为实对称矩阵的情形下为 1.

2 实对称矩阵的单位正交基

$$Def : \widehat{\mathbf{E}}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1_{ii} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1}$$

$$Def : \widehat{\mathbf{E}}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & 1_{ij} & & & \\ & & 1_{ji} & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{2}$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots n, i < j$.

其中 $\widehat{\mathbf{E}}_{ii}$ 有 n 个, $\widehat{\mathbf{E}}_{ij}$ 有 $\binom{n}{2}$ 个, 无妨记 $N = n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. 我们会用到: $\{\alpha = (i, j), i \leq j\} \cong \{1, 2, \cdots N\}$., 事实上只要注意到 α 的结构:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & \to & (1,2) & \to & (1,3) & \to & (1,4) & \to & (1,5) & \cdots & (1,n) \\ & & (2,2) & \to & (2,3) & \to & (2,4) & \to & (2,5) \quad \to & \cdots & (2,n) \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & (i,i) & \to & (i,i+1) & \to & (i,i+2) \quad \to & \cdots & (i,n) \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & (n-1,n-1) & \to & (n-1,n) \\ & & & & & & & & & & (n,n) \end{pmatrix}_{n\times n}$$

并且: 按字母顺序排列,$Def \alpha = (i, j) < (k, l) = \beta \iff i < k$ 或 $: i < k$ 且$j < l$

注意到 $i \neq j$ 时有 $\langle \widehat{\mathbf{E}}_i, \widehat{\mathbf{E}}_j \rangle = 0$, 不难证明 $\{\widehat{\mathbf{E}}_\alpha\}, \alpha = 1, 2, \cdots N$ 实际上给出了实对称矩阵的一组单位正交基。

3 李代数

3.1 定义

$$[A, B] = AB - BA, \quad 其中 A, B \text{ 为} n \text{ 维方阵}.$$

$$|A|^2 = tr.(AA^T) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2, \quad A = (a_{ij})_{n\times n} \tag{3.11}$$

3.2 李代数的性质

3.2.1 反对称性

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

3.2.2 正交矩阵不影响模长

$$|PB|^2 = tr.PB(PB)^T = tr.(PBB^TP^T) = tr.(BB^TP^TP) = tr.(BB^T) = |B|^2$$

其中 P 为正交矩阵.

4 化简

4.1 $(\sum_{r=1}^{m} |B_r|^2)^2$

记 $(B_1, B_2, \cdots B_m)$ 在 $(\widehat{\mathbf{E}}_1, \widehat{\mathbf{E}}_2, \cdots \widehat{\mathbf{E}}_N)$ 下的过渡矩阵为 $B, B = (b)_{ij}$. 其中 $i = 1, 2, \cdots N, j = 1, 2, \cdots m$. 那么有: $(B_1, B_2, \cdots B_m) = (\widehat{\mathbf{E}}_1, \widehat{\mathbf{E}}_2, \cdots \widehat{\mathbf{E}}_N)B$, 于是对于 B_j 有

$$B_j = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\mathbf{E}}_i b_{ij},$$

于是就存在这样的对应关系: $\begin{bmatrix} b^j_{(1,1)} & b^j_{(1,2)} & \cdots & b^j_{(1,n)} & \cdots & b^j_{(i,i)} & b^j_{(i,i+1)} & \cdots & b^j_{(i,n)} & \cdots & b^j_{(n,n)} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{Nj} \end{bmatrix}$ 是一一对应的。

于是可以知道:

$$B_j = \begin{pmatrix}
b^j_{(1,1)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,2)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,3)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,4)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,5)} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,n)} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,2)} & b^j_{(2,2)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,3)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,4)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,5)} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,n)} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,3)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,3)} & \ddots & & & & \\
\frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,4)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,4)} & & b^j_{(i,i)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(i,i+1)} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(i,n)} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,5)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,5)} & & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(i,i+1)} & \ddots & & \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & b^j_{(n-1,n-1)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(n-1,n)} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(1,n)} & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(2,n)} & & \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_{(i,n)} & & & b^j_{(n,n)}
\end{pmatrix}_{n\times n}$$

在同构的意义下, 令 $i=(i_1,i_2)$, $i_1\le i_2, B_j=(b)^j_{i_1i_2}$或$(b)^j_{i_2i_1}$, 也就是说:

$$b^j_{i_1i_2}=\begin{cases} b^j_i=b_{ij} & \text{if } i_1=i_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}b^j_i=\frac{1}{\sqrt{2}}b_{ij} & \text{if } i_1<i_2 \end{cases}$$

由对称性:

$$b^j_{i_2i_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}b^j_i=\frac{1}{\sqrt{2}}b_{ij}$$

又根据 (3.11), 有:

$$\begin{aligned}|B_j|^2&=\sum_{i=1}^N(b_{i_1i_2})^2\\&=\sum_{i_1=i_2}(b_{i_1i_2})^2+\sum_{i_1<i_2}(\frac{1}{\sqrt{2}}b_{i_1i_2})^2+\sum_{i_1<i_2}(\frac{1}{\sqrt{2}}b_{i_2i_1})^2\\&=\sum_{i=1}^N(b_{ij})^2\end{aligned}\tag{4.11}$$

而 $|B|^2=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^N|b_{ij}|^2$,
于是有

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^m|B_r|^2&=|B|^2\\&=tr.(BB^T)\end{aligned}$$

我们断言 BB^T 是半正定矩阵, 事实上, 因为

$$BB^T\ge 0 \iff X^TBB^TX\ge 0 \iff (B^TX)^T(B^TX)\ge 0 \iff |(B^TX)|^2\ge 0,$$

$Note:$ 其中 X 为任意矩阵,B 是实对称矩阵.
于是

$$\exists Q\in SO(N),\ s.t\ BB^T=Q\begin{pmatrix}x_1&&&\\&x_2&&\\&&\cdots&\\&&&x_N\end{pmatrix}_{N\times N}Q^T$$

$Note: x_\alpha\ge 0, \alpha=1,2,\cdots N$
通过正交矩阵 Q, 我们又可以得到 $SM(n)$ 中的一组规范正交基:

$$(\widehat{\mathbf{Q}}_1,\widehat{\mathbf{Q}}_2,\cdots\widehat{\mathbf{Q}}_N)=(\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_2,\cdots\widehat{\mathbf{E}}_N)Q$$

回到 (4.11) 式中, 我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}|B_r|^2 &= tr.(BB^T)\\ &= tr.Q\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & x_N\end{pmatrix}_{N\times N} Q^T\\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha\end{aligned}$$

4.2 $\sum_{r<s}^{m}|[B_r,B_s]|^2$

注意到对于 $[B_r,B_s]$, 我们都可以由:

$$[\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_2],[\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_3],\cdots,[\widehat{\mathbf{E}}_{N-1},\widehat{\mathbf{E}}_N]$$

线性表出.

无妨记 $([B_1,B_2],[B_1,B_3],\cdots,[B_{m-1},B_m])$ 在 $([\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_2],[\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_3],\cdots,[\widehat{\mathbf{E}}_{N-1},\widehat{\mathbf{E}}_N])$ 下的系数矩阵为 $\phi_2(B), B=(b)_{ij}$.

我们有:

$$\begin{aligned}&([B_1,B_2],[B_1,B_3],\cdots,[B_{m-1},B_m])_{\binom{m}{2}}\\ =&([\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_2],[\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_3],\cdots,[\widehat{\mathbf{E}}_{N-1},\widehat{\mathbf{E}}_N])_{\binom{N}{2}}\phi_2(B)_{\binom{N}{2}\times\binom{m}{2}}\end{aligned}$$

先考虑 $[B_r,B_s]$, 不难得到:

$$\begin{aligned}[B_r,B_s] &= [\sum_{\alpha} b_{\alpha r}\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\sum_{\alpha} b_{\beta s}\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\\ &= \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha r}b_{\beta s}[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\\ &= \sum_{\alpha<\beta}(b_{\alpha r}b_{\beta s}[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]+b_{\beta r}b_{\alpha s}[\widehat{\mathbf{E}}_\beta,\widehat{\mathbf{E}}_\alpha])\\ &= \sum_{\alpha<\beta}(b_{\alpha r}b_{\beta s}[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]-b_{\beta r}b_{\alpha s}[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta])\\ &= \sum_{\alpha<\beta}(b_{\alpha r}b_{\beta s}-b_{\beta r}b_{\alpha s})[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\end{aligned}$$

为了得到 $\phi_2(B)$ 的结构, 我们引入记号 $\boldsymbol{\tau}_{r,s}$ 代表 $\phi_2(B)$ 的列向量, 于是我们有:

$$([B_1,B_2],[B_1,B_3],\cdots,[B_{m-1},B_m])_{\binom{m}{2}} = ([\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_2],[\widehat{\mathbf{E}}_1,\widehat{\mathbf{E}}_3],\cdots,[\widehat{\mathbf{E}}_{N-1},\widehat{\mathbf{E}}_N])_{\binom{N}{2}}(\boldsymbol{\tau}_{1,2},\boldsymbol{\tau}_{1,3},\cdots,\boldsymbol{\tau}_{m-1,m})$$

即:

$$[B_r,B_s] = \sum_{\alpha<\beta}\boldsymbol{\tau}_{r,s}[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]$$

注意到与式 (19) 的形式相同, 我们可以得到:

$$\boldsymbol{\tau}_{r,s} = \begin{bmatrix} b_{1r}b_{2s} - b_{2r}b_{1s} \\ b_{1r}b_{3s} - b_{3r}b_{1s} \\ \cdots \\ b_{N-1\ r}b_{Ns} - b_{Nr}b_{N-1\ s} \end{bmatrix}$$

同理可以得到行向量:

$$\boldsymbol{\sigma}_{r,s} = \begin{bmatrix} b_{r1}b_{s2} - b_{r2}b_{s1} \\ b_{r1}b_{s3} - b_{r3}b_{s1} \\ \cdots \\ b_{r\ N-1}b_{sN} - b_{rN}b_{s\ N-1} \end{bmatrix}^T$$

通过观察我们可以确定 $\phi_2(B)$ 实际上是 B 的二阶子式的行列式:

$$B\left|\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ r & s \end{pmatrix}\right|$$

记 $\widetilde{B} = \phi_2(B) = (\widetilde{b}_{(\alpha,\beta)(r,s)})_{\binom{N}{2}\times\binom{m}{2}}$ 相当于从第 α 行第 β 行第 r 列第 s 列取行列式:

$$\widetilde{b}_{(\alpha,\beta)(r,s)} = \begin{vmatrix} b_{\alpha r} & b_{\alpha s} \\ b_{\beta r} & b_{\beta s} \\ & \end{vmatrix}$$

并且有:$\phi_2(B^T) = \phi_2(B)^T$.

我们断言:$\phi_2(AB) = \phi_2(A)\cdot\phi_2(B)$ 事实上，对于 $A_{n\times n}\cdot B_{n\times n} = C_{n\times n}$，即:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

本来以为把左右两边都列一下应该就出来了, 但是列完发现右边的下标是一元 x 二元, 左边的是二元 x 二元, 一元指标到二元的关系式又有点难看, 实在是难以证出来.

于是可以立即得到:

$$
\begin{aligned}
\sum_{r<s}|[B_r,B_s]|^2 &= ([B_1,B_2],[B_1,B_3],\cdots,[B_{m-1},B_m])\cdot([B_1,B_2],[B_1,B_3],\cdots,[B_{m-1},B_m])^T \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([B_\alpha,B_\beta]\cdot[B_\alpha,B_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\phi_2(B)\phi_2(B)^T[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\phi_2(B)\phi_2(B^T)[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\phi_2(BB^T)[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\phi_2(Q\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & x_N \end{pmatrix}_{N\times N} Q^T)[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]\phi_2(Q)\cdot\phi_2\begin{pmatrix} x_1x_2 & & & \\ & x_1x_3 & & \\ & & \cdots & \\ & & & x_{N-1}x_N \end{pmatrix}_{N-1\times N-1} \phi_2(Q^T)[\widehat{\mathbf{E}}_\alpha,\widehat{\mathbf{E}}_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} tr.([\widehat{\mathbf{Q}}_\alpha,\widehat{\mathbf{Q}}_\beta]\begin{pmatrix} x_1x_2 & & & \\ & x_1x_3 & & \\ & & \cdots & \\ & & & x_{N-1}x_N \end{pmatrix}_{N-1\times N-1} [\widehat{\mathbf{Q}}_\alpha,\widehat{\mathbf{Q}}_\beta]^T) \\
&= \sum_{\alpha<\beta} x_\alpha x_\beta|[\widehat{\mathbf{Q}}_\alpha,\widehat{\mathbf{Q}}_\beta]|^2
\end{aligned}
$$

故:

$$\sum_{r<s}|[B_r,B_s]|^2 = \sum_{\alpha<\beta} x_\alpha x_\beta|[\widehat{\mathbf{Q}}_\alpha,\widehat{\mathbf{Q}}_\beta]|^2$$

4.3 整理

通过对 (*) 式左右两边的化简, 问题等价于证明:

$$\sum_{\alpha<\beta} x_\alpha x_\beta|[\widehat{\mathbf{Q}}_\alpha,\widehat{\mathbf{Q}}_\beta]|^2 \quad \le (\sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha)^2$$

令 $f_Q(x) = \sum_{\alpha<s} x_\alpha x_\beta|[\widehat{\mathbf{Q}}_\alpha,\widehat{\mathbf{Q}}_\beta]|^2 - (\sum_{\alpha=1}^N x_\alpha)^2$, 只需证:

$$f_Q(x) \le 0$$

5 连续性方法

要证明一族连续函数 $f_t(x), t\in[0,1]=I\supset A$ 满足某个性质，可通过如下步骤：
step 1 $A\neq\varnothing$
step 2 $A\subset I$ 为开集
step 3 $A\subset I$ 为闭集

6 DDVV 不等式证明

下面通过连续性方法证明 $f_Q(x)=\sum\limits_{\alpha,\beta}x_\alpha x_\beta|[\hat{Q_\alpha},\hat{Q_\beta}]|^2-(\sum\limits_\alpha x_\alpha)^2<0$
令

$$\begin{aligned}\triangle&=\{x\in\mathbb{R}_N^+\mid\sum x_\alpha=1\}\\ \triangle_\varepsilon&=\{x\in\triangle\mid x_\alpha\geq\varepsilon,\forall\alpha\}\\ G_\varepsilon&=\{Q\in SO(N)\mid f_Q(x)<0,\forall x\in\triangle_\varepsilon\}\end{aligned}$$

6.1 首先来证明 $G_\varepsilon\neq\varnothing$

现在取 $B_1,B_2,\ldots,B_m\in SM(N)$, 同时 $B_1,B_2,\ldots,B_m$ 均为对角矩阵那么对于

$$(\hat{Q_1},\hat{Q_2},\ldots,\hat{Q_N})\ =(\hat{E_1},\hat{E_2},\ldots,\hat{E_N})Q$$

此时 Q 就为单位阵 I_N 进一步证明 $I_N\in G_\varepsilon$, 即证明：

$$f_{I_N}(x)=\sum_{\alpha,\beta}x_\alpha x_\beta|[\hat{Q_\alpha},\hat{Q_\beta}]|^2-(\sum_\alpha x_\alpha)^2=\sum_{\alpha,\beta}x_\alpha x_\beta|[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2-(\sum_\alpha x_\alpha)^2<0$$

其中 $\hat{E_\alpha}=\begin{cases}E_{ij} & i=j\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+Eji) & i<j\text{或者}i>j\end{cases}$ 因此有 $|[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2=\begin{cases}1 & i=j=k<l|i<j=k=l\\ \frac{1}{2} & i<j=k<l\\ 0 & j\neq k\end{cases}$
其中 $\alpha=(i,j),i\leq j\quad\beta=(k,l),k\leq l$

注：
首先有如下事实：

$$E_{ij}E_{kl}=E_{il},j=k$$

$$E_{ij}E_{kl}=0,j\neq k$$

(1) 当 $i=j=k<l$ 时

$$\hat{E_\alpha}=E_{ii},\hat{E_\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{il}+E_{li})$$

则有

$$
\begin{aligned}
[\hat{E_\alpha}, \hat{E_\beta}] &= [E_{ii}, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{il}+E_{li})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ii}E_{il}+E_{ii}E_{li}-E_{il}E_{ii}-E_{li}E_{ii}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{il}-E_{li})
\end{aligned}
$$

所以有

$$
|[\hat{E_\alpha}, \hat{E_\beta}]|^2 = 1
$$

(2) 当 $i<j=k=l$ 时

$$
\hat{E_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji}), \hat{E_\beta} = E_{jj}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
[\hat{E_\alpha}\ \hat{E_\beta}] &= [\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji}), E_{jj}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}E_{jj}+E_{ji}E_{jj}-E_{jj}E_{ij}-E_{jj}E_{ji}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}-E_{ji})
\end{aligned}
$$

所以有

$$
|[\hat{E_\alpha}, \hat{E_\beta}]|^2 = 1
$$

(3) 当 $i<j=k<l$ 时

$$
\hat{E_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji}), \hat{E_\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{kl}+E_{lk})
$$

则有

$$
\begin{aligned}
[\hat{E_\alpha}\ \hat{E_\beta}] &= [\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji}), \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{kl}+E_{lk})] \\
&= \frac{1}{2}(E_{ij}E_{kl}+E_{ij}E_{lk}+E_{ji}E_{kl}+E_{ji}E_{lk}-E_{kl}E_{ij}-E_{kl}E_{ji}-E_{lk}E_{ij}-E_{lk}E_{ji}) \\
&= \frac{1}{2}(E_{il}-E_{li})
\end{aligned}
$$

所以有

$$
|[\hat{E_\alpha}, \hat{E_\beta}]|^2 = \frac{1}{2}
$$

(4) 当 $j \neq k$ 时

若 $i=j, k=l$,$[\hat{E_\alpha}\ \hat{E_\beta}] = [E_{jj}, E_{kk}] = E_{jj}E_{kk} - E_{kk}E_{jj} = 0$

若 $i < j, k = l$,

$$\begin{aligned}[\hat{E_\alpha}\ \hat{E_\beta}] &= [\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}), E_{kk}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}E_{jj} + E_{ji}E_{kk} - E_{kk}E_{ij} - E_{kk}E_{ji}) \\ &= 0\end{aligned}$$

若 $i = j, k < l$,

$$\begin{aligned}[\hat{E_\alpha}\ \hat{E_\beta}] &= [E_{jj}, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{kl} + E_{lk})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{jj}E_{kl} + E_{jj}E_{lk} - E_{kl}E_{jj}E_{lk}E_{jj}) \\ &= 0\end{aligned}$$

若 $i < j, k < l$, 则有

$$\begin{aligned}[\hat{E_\alpha}\ \hat{E_\beta}] &= [\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}), \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{kl} + E_{lk})] \\ &= \frac{1}{2}(E_{ij}E_{kl} + E_{ij}E_{lk} + E_{ji}E_{kl} + E_{ji}E_{lk} - E_{kl}E_{ij} - E_{kl}E_{ji} - E_{lk}E_{ij} - E_{lk}E_{ji}) \\ &= 0\end{aligned}$$

综上所述有：$|[\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta]|^2 = \begin{cases} 1 & i = j = k < l \\ 1 & i < j = k = l \\ \frac{1}{2} & i < j = k < l \\ 0 & j \neq k \end{cases}$

将 $|[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2$ 的结果分情况代入 $f_{I_N}(x)$，则可进一步化简为如下形式：

$$\begin{aligned}
f_{I_N}(x) &= \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta |[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2 - (\sum_\alpha x_\alpha)^2 \\
&= \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta |[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2 - \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta \\
&= \sum_{i=j=k<l} x_\alpha x_\beta |[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2 + \sum_{i<j=k=l} x_\alpha x_\beta |[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2 \\
&\quad + \sum_{i<j=k<l} x_\alpha x_\beta |[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2 + \sum_{j\neq k} x_\alpha x_\beta |[\hat{E_\alpha},\hat{E_\beta}]|^2 - \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta \\
&= \sum_{i=j=k<l} x_{ij}x_{kl} + \sum_{i<j=k=l} x_{ij}x_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{i<j=k<l} x_{ij}x_{kl} \\
&\quad - \sum_{i=j=k<l} x_{ij}x_{kl} - \sum_{i<j=k=l} x_{ij}x_{kl} - \sum_{i<j=k<l} x_{ij}x_{kl} - \sum_{j\neq k} x_{ij}x_{kl} \\
&= \sum_{i=j=k<l} (x_{ij}x_{kl} - x_{ij}x_{kl}) + \sum_{i<j=k=l} (x_{ij}x_{kl} - x_{ij}x_{kl}) \\
&\quad \sum_{i<j=k<l} (\frac{1}{2}x_{ij}x_{kl} - x_{ij}x_{kl}) - \sum_{j\neq k} x_{ij}x_{kl} \\
&= -(\sum_{i<j=k<l} \frac{1}{2}x_{ij}x_{kl} + \sum_{j\neq k} x_{ij}x_{kl}) \\
&< 0
\end{aligned}$$

注： x_α 为半正定的矩阵的特征值，故 $x_\alpha \geq 0$

因此证明了 $\exists I_N \in G_\varepsilon$, 故 $G_\varepsilon \neq \varnothing$

6.2 接着证明 G_ε 为开集

不妨将 $f_Q(x)$ 看成一个 G_ε 到 $\mathbb{R}$ 连续的双线性映射 F(x,Q).

$Def: F: \triangle_\varepsilon \times \mathbb{SO}(n) \to \mathbb{R}$

其中 $\triangle_\varepsilon \times \mathbb{SO}(n) = G_\varepsilon$

由于 $F(x,Q) = f_Q(x) < 0$, 而 $(-\infty,0)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 且 F 为连续映射, 故 $(-\infty,0)$ 的原像 $F^{-1}(-\infty,0) = G_\varepsilon$ 为开集.

6.3 最后证明 G_ε 为闭集

通过证明 G_ε 包含所有的极限点来说明 G_ε 为闭集，即证明 $\forall Q_i \to Q_\infty (i \to \infty)$, 都有 $Q_\infty \in G_\varepsilon$

问题转化为证明 $f_{Q_\infty}(x) < 0, \forall x \in \triangle_\varepsilon$ 对于所有的正交矩阵都成立

下面通过反证法来证明：

由于 $f_{Q_i}(x) < 0.\forall x \in \triangle_\varepsilon$，则 $\lim_{i\to\infty} f_{Q_i}(x) = f_{Q_\infty}(x) \leq 0$

假设 $\exists y \in \triangle_\varepsilon$, 使得 $f_{Q_\infty}(y) = 0$

定义 $\triangle_\varepsilon^r = \{x \in \triangle_\varepsilon | x_i = \varepsilon, i = r+1, \ldots, N\}$

不妨假设 $\exists 1 \le r \le N$, 使得 $y_i > \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, r$ $y_{r+1} = \cdots = y_N = \varepsilon$, 其中$\varepsilon < \frac{1}{N}$
则

$$\sum_{\alpha} y_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} y_\alpha + (N-r)\varepsilon = 1$$

则 $y \in \triangle_\varepsilon^r$
同时满足

$$\sum_{\alpha=1}^{r} y_\alpha = 1 - (N-r)\varepsilon \tag{3}$$

由于 $f_{Q_\infty}(x) \le 0, \forall x \in \triangle$, 而 $y \in \triangle_\varepsilon^r, f_{Q_\infty}(y) = 0$, 那么说明 y 为 $f_{Q_\infty}(x)$ 的极大值点

接下来使用拉格朗日极值法求 $f_{Q_\infty}(x), x \in \triangle_\varepsilon^r$ 的极大值,约束条件为 $F(x) = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} x_\alpha + (N-r)\varepsilon - 1 = 0$
引入拉格朗日函数

$$L(x, \lambda) = f_{Q_\infty}(x) - \lambda F(x)$$

那么有

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{Q_\infty}(x)}{\partial x_i} - \lambda = 0$$

所以有

$$\frac{\partial f_{Q_\infty}(x)}{\partial x_i} = \lambda, i = 1, 2, \ldots, r$$

对于 $f_{Q_\infty}(x) = \sum\limits_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta |[\hat{Q_\alpha}, \hat{Q_\beta}]|^2 - (\sum\limits_{\alpha} x_\alpha)^2$
令

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial f_{Q_\infty}(x)}{\partial x_\alpha} &= \sum_{\beta \ne \alpha} x_\beta |[\hat{Q_\alpha}, \hat{Q_\beta}]|^2 - \sum_{\alpha} x_\alpha \\
&= \sum_{\beta \ne \alpha} x_\beta |[\hat{Q_\alpha}, \hat{Q_\beta}]|^2 - 1 \\
&= a, \alpha = 1, 2, \ldots, r
\end{aligned}$$

同时记

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f_{Q_\infty}(x)}{\partial x_\alpha} = b_\alpha, \alpha > r$$

那么有 $\sum\limits_{\beta \ne \alpha} x_\beta |[\hat{Q_\alpha}, \hat{Q_\beta}]|^2 - 1 = \begin{cases} a & \alpha \le r \\ b_\alpha & \alpha > r \end{cases}$

由于 y 是极值点，则 $\sum\limits_{\beta \ne \alpha} x_\beta |[\hat{Q_\alpha}, \hat{Q_\beta}]|^2 - 1 = \begin{cases} a & \alpha \le r \\ b_\alpha & \alpha > r \end{cases}$

由欧拉公式 $\langle \nabla F, x \rangle) = dF(x))$ ，其中 d 为 $F(x)$ 的次数，可得:

$$\langle \nabla f_{Q_\infty}(y), y \rangle = 2 f_Q(y) = 0$$

其中 $\nabla f_{Q_\infty}(y) = (\frac{\partial f_Q}{\partial x_1}(y), \frac{\partial f_Q}{\partial x_2}(y), \ldots, \frac{\partial f_Q}{\partial x_N}(y))$
于是有

$$\begin{aligned}\langle \nabla f_{Q_\infty}(y), y\rangle &= (\frac{\partial f_Q}{\partial x_1}(y), \frac{\partial f_Q}{\partial x_2}(y), \ldots, \frac{\partial f_Q}{\partial x_N}(y))(y_1, y_2, \ldots, y_r)^T \\ &= (a, \ldots, a, b_{r+1}, \ldots, b_N)(y_1, \ldots, y_r, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T \\ &= a\sum_{\alpha=1}^{r} y_\alpha + \sum_{\alpha>r} b_\alpha \varepsilon \\ &= 0\end{aligned}$$

另一方面由方向导数，

$$\frac{\partial f_{Q_\infty}(x)}{\partial v} = \overrightarrow{v} \cdot \nabla f_{Q_\infty}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f_{Q_\infty}(x(t))$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_{Q_\infty}(x(t)) - f_{Q_\infty}(x(0)}{t} \le 0$$

其中$x(t) = (x_1 + tv_1, \ldots, x_n + tv_n), x(0) = y, y \in \triangle_\varepsilon^r$, 而且 $f_{Q_\infty}(x(t)) \le 0$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{Q_\infty}(y)}{\partial v} &= \nabla f_{Q_\infty}(y) \cdot \overrightarrow{v} \\ &= (a, \ldots, a, b_{r+1}, \ldots, b_N)(1, 1, \ldots, 1)^T \\ &= ra + \sum_{\alpha>r} b_\alpha \\ &\le 0\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{\alpha>r} b_\alpha \le -ra$$

结合（2）（3）则有

$$a\sum_{\alpha=1}^{r} y_\alpha + \sum_{\alpha>r} b_\alpha\varepsilon = 0 \le a(\sum_{\alpha=1}^{r} y_\alpha - r\varepsilon) = 1 - (N-r)\varepsilon$$

由此可得

$$a \ge 0$$

综上，我们现在有 $\frac{1}{2}\nabla f_{Q_\infty}(y) = \begin{cases} a \ge 0 & \alpha \le r \\ b_\alpha & \alpha > r \end{cases}$

定义 6.1. $I = \{(i,j)|\lambda_i - \lambda_j > 1\} \subset S$

引理 1. $I = \{(i,j)|\lambda_i - \lambda_j > 1\} = \begin{cases} \{1\} \times \{n - n_0 + 1 \le j \le n\} \\ \{1 \le i \le n_0\} \times \{n\} \end{cases}$ 其中 $n_0 = \#I$ 为 I 的基数

证明:

$n_0 = 1$ 时，$I = \{(1, n)\} = \{1\} \times \{n\}$, 成立

$n_0 = 2$ 时，$I = \{(1, n), (1, n-1)\} = \{1\} \times \{n - 1 \le j \le n\}$, 成立

$n_0 \ge 3$ 时，假设 $\exists 1 < i, j < n - n_0 + 1$, 使得 $\lambda_i - \lambda_j > 1$, 那么有:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - \lambda_i &> 1 \\
\lambda_j - \lambda_n &> 1 \\
1 \ge \lambda_1^2 + \lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_n^2 &\ge \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_i)^2 + \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_n)^2 \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

假设 $\exists n - n_0 + 1 < j < n, 1 < i < n_0$, 使得 $\lambda_1 - \lambda_j > 1, \lambda_i - \lambda_n > 1$, 那么有:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - \lambda_i &> 1 \\
\lambda_j - \lambda_n &> 1 \\
1 \ge \lambda_1^2 + \lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_n^2 &\ge \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_j)^2 + \frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_n)^2 \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

定理得证，并且两种情况不能同时成立，下面不妨假设第一种情况成立

命题 6.1. $\sum\limits_{(i,j) \in I} \big((\lambda_i - \lambda_j)^2 - 1\big) \le 1$

证明：

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in I}\big((\lambda_i-\lambda_j)^2-1\big) &= \sum_{j=n-n_0+1}^{n}\big((\lambda_1-\lambda_j)^2-1\big)\\
&= \sum_{j=n-n_0+1}^{n}(\lambda_1^2+\lambda_j^2-2\lambda_1\lambda_j-1)\\
&= n_0\lambda_1^2+\sum_{j=n-n_0+1}^{n}\lambda_j^2-2\lambda_1\sum_{j=n-n_0+1}^{n}\lambda_j-n_0\\
&= (n_0+1)\lambda_1^2+\sum_{j=n-n_0+1}^{n}\lambda_j^2-n_0-(\lambda_1+\sum_{j=n-n_0+1}^{n}\lambda_j)^2\\
&\le (n_0+1)\lambda_1^2+\sum_{j=n-n_0+1}^{n}\lambda_j^2-n_0\\
&= (n_0+1)\lambda_1^2+\sum_{j=n-n_0+1}^{n}(\lambda_j 1)^2-n_0\\
&\le (n_0+1)\lambda_1^2+(n_0+1)\sum_{j=n-n_0+1}^{n}\lambda_j^2-n_0\\
&\le (n_0+1)\sum_i\lambda_i^2-n_0\\
&= 1
\end{aligned}$$

下面讨论证明过程中的不等号取等条件

7 反称矩阵空间

以 m 表示矩阵数量，以 n 表示矩阵阶数

7.1 矩阵数量等于 2 时

n=2 时,$B_i=\begin{pmatrix}0&\lambda_i\\-\lambda&0\end{pmatrix}$，则 $[B_1,B_2]=0$

n=3 时，$\exists P\in O(3)$, 使得 $P^TB_1P=\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\-\lambda&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,$P^TB_2P=(\widetilde{b_{ij}})$，$B_1,B_2$ 均为反称矩阵

取 $(\widetilde{b_{ij}}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$，则有：

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= B_1 B_2 - B_2 B_1 \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

进一步有：

$$\begin{aligned} |[B_1, B_2]|^2 &= \lambda^2 \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &\le \lambda^2 |B_2|^2 \\ &= \frac{1}{2} |B_1|^2 |B_2|^2 \end{aligned}$$

由此可得：$\widetilde{c} = \frac{1}{2}$

当 $n \geq 4$ 时

8 厄密特矩阵空间

对于厄密特矩阵空间:$B \in H(n)$, 有 $\bar{B}^T = B$, 且 $\exists B_1 \in SM(n), \exists B_2 \in O(n)$，使得

$$B = B_1 + iB_2$$

引理 2. 以 A 表示对称矩阵，以 B 表示反对称矩阵，则有：

$$[A_1, A_2]\text{为反对称矩阵}, [B_1, B_2]\text{为反对称矩阵 } [A_1, B_1], [B_1, A_1]\text{均为对称矩阵}$$

证明:

$$
\begin{aligned}
[A_1, A_2]^T &= (A_1A_2 - A_2A_1)^T \\
&= (A_1A_2)^T - (A_2A_1)^T \\
&= A_2A_1 - A_1A_2 \\
&= -[A_1, A_2] \\
[B_1, B_2]^T &= (B_1B_2 - B_2B_1)^T \\
&= (B_1B_2)^T - (B_2B_1)^T \\
&= B_2B_1 - B_1B_2 \\
&= -[B_1, B_2] \\
[A_1, B_1]^T &= (A_1B_1 - B_1A_1)^T \\
&= (A_1B_1)^T - (B_1A_1)^T \\
&= -B_1A_1 + A_1B_1 \\
&= [A_1, B_1]
\end{aligned}
$$

现在取 $\forall A, B \in H(n)$, 且有

$$A = A_1 + iA_2, B = B_1 + iB_2$$

那么有

$$
\begin{aligned}
[A, B] &= [A_1 + iA_2, B_1 + iB_2] \\
&= (A_1 + iA_2)(B_1 + iB_2) - (B_1 + iB_2)(A_1 + iA_2) \\
&= A_1B_1 + iA_1B_1 + iA_2B_1 - A_2B_2 - B_1A_1 - iB_1A_2 - iB_2A_1 + B_2A_2 \\
&= ([A_1, B_1] - [A_2, B_2]) + i([A_1, B_2] + [A_2, B_2])
\end{aligned}
$$

为简化计算, 记

$$P = [A_1, B_1] - [A_2, B_2] \quad Q = [A_1, B_2] + [A_2, B_1]$$

现在来计算一个复矩阵的模长平方和:
设 A 为复矩阵，那么有：$\exists X, Y \in M(n)$，使得

$$A = X + iY$$

则:

$$
\begin{aligned}
|A|^2 &= \sum(a_{ij}^2) \\
&= \sum(x_{ij}^2 + y_{ij}^2) \\
&= \sum(x_{ij}^2) + \sum(y_{ij}^2) \\
&= |X|^2 + |Y|^2
\end{aligned}
$$

进一步有:

$$\begin{aligned}|[A,B]|^2 &= |([A_1,B_1]-[A_2,B_2])+i([A_1,B_2]+[A_2,B_2])|^2\\ &= |P+iQ|^2\\ &= |P^2|+|Q^2|\end{aligned}$$

定义一个映射:

$$\Phi:\Phi(A)=\begin{pmatrix}A_2 & A_1\\ -A_1 & A_2\end{pmatrix}$$

那么有:

$$\begin{aligned}[\Phi(A),\Phi(B)] &= \left[\begin{pmatrix}A_2 & A_1\\ -A_1 & A_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B_2 & B_1\\ -B_1 & B_2\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}A_2 & A_1\\ -A_1 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2 & B_1\\ -B_1 & B_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_2 & B_1\\ -B_1 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & A_1\\ -A_1 & A_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}A_2B_2-A_1B_1-B_2A_2+B_1A_1 & A_2B_1+A_1B_2-B_2A_1-B_1A_2\\ -(A_2B_1+A_1B_2-B_2A_1-B_1A_2) & A_1B_2-A_1B_1-B_2A_2+B_1A_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}[A_2.B_2]-[A_1,B_1] & [A_2,B_1]-[A_1,B_2]\\ -([A_2,B_1]-[A_1,B_2]) & [A_2,B_2]-[A_1.B_1]\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}P & Q\\ -Q & P\end{pmatrix}\end{aligned}$$

进一步有:

$$\begin{aligned}|[\Phi(A),\Phi(B)]|^2 &= \left|\begin{pmatrix}P & Q\\ -Q & P\end{pmatrix}\right|^2\\ &= 2|P|^2+2|Q|^2\\ &= 2|[A,B]|^2\end{aligned}$$

另一方面有:

$$\begin{aligned}|A|^2 &= |A_1+iA_2|^2\\ &= |A_1|^2+|A_2|^2\\ |\Phi(A)|^2 &= \left|\begin{pmatrix}A_2 & A_1\\ -A_1 & A_2\end{pmatrix}\right|^2\\ &= 2|A_1|^2+2|A_2|^2\end{aligned}$$

所以有:

$$|\Phi(A)|^2=2|A|^2$$

根据以上分析有:

$$\begin{aligned}\sum_{r,s}|[B_r,B_s]|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{r,s}|[\Phi(B_r),\Phi(B_s)]|^2\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{2}{3}(\sum_r|\Phi(B_r)|^2)^2\\ &= \frac{1}{2}(2\sum_r|B_r|^2)^2\\ &= \frac{4}{3}(\sum_r|B_r|^2)^2\end{aligned}$$

于是在厄密特矩阵空间下,

$$\tilde{c}=\frac{4}{3}$$

9 一般的复矩阵

对于一般的复矩阵空间有 $M(n,c)=H(n)\oplus H(n)^{skew}$ 那么对于 $\forall B\in M(n,c)$, 有:

$$B=\frac{B+\overline{B}^T}{2}-\frac{B-\overline{B}^T}{2}$$

现在取 $B_r,B_s\in M(n,c)$, 则有:

$$B_r=B_r^1+B_r^2 \quad B_s=B_s^1+B_s^2$$

其中 B_r^1,B_s^1 为厄密特矩阵,B_r^2,B_s^2 为反厄密特矩阵

引理 3. 任意对称矩阵与反对称矩阵的内积为 0

证明: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为反称矩阵
那么有:

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle &= \mathrm{tr}(A\overline{B}^T)\\ &= -\mathrm{tr}(AB)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{i=j}a_{ij}b_{ji}+\sum_{i\neq j}a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{i\neq j}a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{i<j}a_{ij}b_{ji}+\sum_{i>j}a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{i<j}a_{ij}b_{ji}-\sum_{i>j}a_{ji}b_{ij}\\ &= \sum_{i<j}a_{ij}b_{ji}-\sum_{i<j}a_{ij}b_{ji}\\ &= 0\end{aligned}$$

那么有:

$$
\begin{aligned}
[B_r, B_s] &= [B_r^1 + B_r^2, B_s^1 + B_s^2] \\
&= (B_r^1 + B_r^2)(B_s^1 + B_s^2) - (B_s^1 + B_s^2)(B_r^1 + B_r^2) \\
&= B_r^1 B_s^1 + B_r^1 B_s^2 + B_r^2 B_s^1 + B_r^2 B_s^2 - B_s^1 B_r^2 - B_s^1 B_r^2 - B_s^2 B_r^1 - B_s^2 B_r^2 \\
&= ([B_r^1, B_s^1] + [B_r^2, B_s^2]) + ([B_r^1, B_s^2] + [B_r^2, B_s^1]) \\
|[B_r, B_s]|^2 &= |([B_r^1, B_s^1] + [B_r^2, B_s^2]) + ([B_r^1, B_s^2] + [B_r^2, B_s^1])|^2 \\
&= |([B_r^1, B_s^1] + [B_r^2, B_s^2])|^2 \\
&+ |([B_r^1, B_s^2] + [B_r^2, B_s^1])|^2 \\
&+ 2\langle [B_r^1, B_s^1] + [B_r^2, B_s^2], [B_r^1, B_s^2] + [B_r^2, B_s^1] \rangle \\
&= |([B_r^1, B_s^1] + [B_r^2, B_s^2])|^2 + |([B_r^1, B_s^2] + [B_r^2, B_s^1])|^2
\end{aligned}
$$

进一步有:

$$
\begin{aligned}
|[B_r, B_s]|^2 &= |([B_r^1, B_s^1] + [B_r^2, B_s^2])|^2 + |([B_r^1, B_s^2] + [B_r^2, B_s^1])|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} |[B_r^i, B_s^i]|^2 + 2\langle [B_r^1, B_s^1], [B_r^2, B_s^2] \rangle + |[B_r^1, B_s^2]|^2 \\
&+ |[B_r^2, B_s^1]|^2 + 2\langle [B_r^1, B_s^2], [B_r^2, B_s^1] \rangle
\end{aligned}
$$

现在研究两个内积:

$$
\begin{aligned}
\langle [B_r^1, B_s^1], [B_r^2, B_s^2] \rangle &= Re\Big(tr\big((B_r^1 B_s^1 - B_s^1 B_r^1)(\overline{B_r^2 B_s^2 - B_s^2 B_R^2})^T \big) \Big) \\
&= -Re\big(tr(B_r^1 B_s^1 B_r^2 B_s^2 + B_s^1 B_r^1 B_s^2 B_r^2 - B_s^1 B_r^1 B_r^2 B_s^2 - B_r^1 B_s^1 B_s^2 B_r^2) \big) \\
&= -Re\big(tr(B_r^1 B_s^1 B_r^2 B_s^2 + B_s^1 B_r^1 B_s^2 B_r^2 - B_r^1 B_r^2 B_s^2 B_s^1 - B_r^2 B_r^1 B_s^1 B_s^2) \big) \\
\langle [B_r^1, B_s^2], [B_r^2, B_s^1] \rangle &= Re\Big(tr\big((B_r^1 B_d^1 - B_s^1 B_r^1)(\overline{B_r^2 B_s^1 - B_s^1 B_r^2})^T \big) \Big) \\
&= Re\big(tr(B_r^1 B_s^2 B_r^2 B_s^1 + B_s^2 B_r^1 B_s^1 B_r^2 - B_s^2 B_r^1 B_r^2 B_s^1 - B_r^1 B_s^2 B_s^1 B_r^2) \big) \\
&= Re\big(tr(B_s^1 B_r^1 B_s^2 B_r^2 + B_r^1 B_s^1 B_r^2 B_s^2 - B_r^1 B_r^2 B_s^1 B_s^2 - B_r^2 B_r^1 B_s^2 B_s^1) \big)
\end{aligned}
$$

进一步有:

$$
\begin{aligned}
\langle [B_r^1, B_s^1], [B_r^2, B_s^2] \rangle + \langle [B_r^1, B_s^2], [B_r^2, B_s^1] \rangle &= -Re\big(tr(B_r^1 B_r^2 B_s^1 B_s^2 + B_r^2 B_r^1 B_s^2 B_s^1 - B_r^2 B_r^1 B_s^1 B_s^2 - B_r^1 B_r^2 B_s^2 B_s^1) \big) \\
&= -\langle [B_r^1, B_r^2], [B_s^1, B_s^2] \rangle
\end{aligned}
$$

则有:

$$
|[B_r, B_s]|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} |[B_r^i, B_r^j]|^2 - 2\langle [B_r^1, B_r^2], [B_s^1, B_s^2] \rangle
$$

所以有:

$$\begin{aligned}
\sum_{rs}|[B_r,B_s]|^2 &= \sum_{rs}(\sum_{i,j=1}^{2}|[B_r^i,B_r^j]|^2-2\langle[B_r^1,B_r^2],[B_s^1,B_s^2]\rangle)\\
&= \sum_{rs}\sum_{i,j=1}^{2}[B_r^i,B_r^j]|^2-2\langle\sum_{r=1}^{m}[B_r^1,B_r^2],\sum_{s=1}^{m}[B_s^1,B_s^2]\rangle\\
&= \sum_{rs}\sum_{i,j=1}^{2}[B_r^i,B_r^j]|^2-2|\sum_{r=1}^{m}[B_r^1,B_r^2]|^2\\
&\leq \sum_{rs}\sum_{i,j=1}^{2}[B_r^i,B_r^j]|^2\\
&= \sum_{rs}(|[B_r^1,B_s^1]|^2+|[B_r^2,B_s^2]|^2+|[B_r^1,B_s^2]|^2+|[B_r^2,B_s^1]|^2)\\
&\leq \sum_{rs}(|[B_r^1,B_s^1]|^2+|[B_r^2,B_s^2]|^2)\\
&\leq \frac{4}{3}(\sum_{r}(|B_r^1|^2+|B_r^2|^2))
\end{aligned}$$

另一方面有:

$$\begin{aligned}
|B_r|^2 &= Re\big(tr(B_r^1+B_r^2)(B_r^1-B_r^2)\big)\\
&= Re\Big(tr\big((B_r^1)^2-(B_r^2)^2\big)\Big)\\
&= |B_r^1|^2+|B_r^2|^2
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{rs}|[B_r,B_s]|^2\leq\frac{4}{3}(\sum_{r=1}^{m}|B_r|^2)^2$$

10 四元数下的 $DDVV$ 不等式

10.1 定义

对于一个四元数 $\hat{\mathbf{q}}\in\mathbb{H}$ 可以被定义为以下形式，并且各形式等价。

$$\hat{\mathbf{q}}=q_w+q_xi+q_yj+q_zk \tag{5.11}$$

其中,

$$i^2=j^2=k^2=-1,\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j,\quad ij=-ji=k \tag{5.12}$$

i, j, k 为虚数单位。

10.2 四元数空间的直和分解

由 (5.11) 和 (5.12), 我们可以得到:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}} &= q_w + q_x i + q_y j + q_z k \\
&= (q_w + q_x i) + (q_y + q_z i) j
\end{aligned}
$$

于是我们很自然地有:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot j$$

10.3 四元数空间中的矩阵

由上面的直和分解, 不难得到:

$$\mathbb{H}(n) = \mathbb{C}(n) \oplus \mathbb{C}(n) \cdot j$$

为了计算四元数空间中的矩阵模长, 我们想要构造一个从四元数空间到复矩阵的线性映射, 注意到:

$$\forall B \in \mathbb{H}(n), \exists B_1, B_2 \in \mathbb{C}(n), s.t\ B = B_1 + B_2 \cdot j$$

我们定义:

$$
\begin{aligned}
\psi : \mathbb{H}(n) &\to \mathbb{M}(2n, \mathbb{C}) \\
B &\mapsto \psi(B) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & \bar{B_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

不难验证这样定义的映射是线性的.

10.4 四元数空间中的矩阵模长

注意到 ψ 是线性的, 我们有:

$$|[\psi(B_r), \psi(B_s)]|^2 = |\psi([B_r, B_s])|^2$$

于是我们只需要关注 $|\psi(B)|^2$ 如何得到.
我们断言:

$$|\psi(B)|^2 = 2|B|^2$$

事实上, 我们有:

$$
\begin{aligned}
|\psi(B)|^2 &= tr.(\psi(B) \cdot \psi(B)^T) \\
&= tr.(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & \bar{B_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{B_1} & -\bar{B_2} \\ \bar{B_2} & B_1 \end{pmatrix}) \\
&= 2(|B_1|^2 + |B_2|^2) \\
&= 2|B|^2
\end{aligned}
$$

因此:

$$|[\psi(B_r), \psi(B_s)]|^2 = |\psi([B_r, B_s])|^2 = 2|[B_r, B_s]|^2$$

而根据一般复矩阵空间中的 $DDVV$ 不等式, 我们有:

$$\sum_{r,s}|[\psi(B_r),\psi(B_s)]|^2 \leq \frac{4}{3}(\sum_{r,s}|\psi(B_r)|^2)^2$$

于是自然得到四元数空间上的 $DDVV$ 不等式:

$$\begin{aligned}\sum_{r,s}|[B_r,B_s]|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{r,s}|[\psi(B_r),\psi(B_s)]|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}(\sum_{r}|\psi(B_r)|^2)^2 \\ &= \frac{8}{3}(\sum_{r}|(B_r)|^2)^2\end{aligned}$$