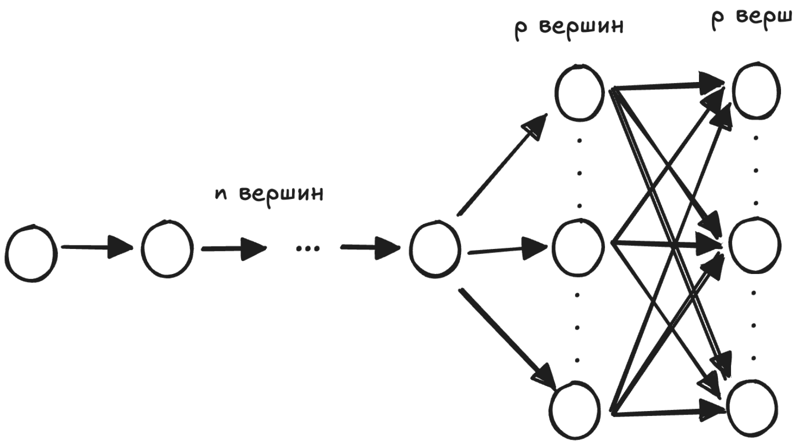
Задание 1

> Предъявите граф с РОВНО $m \le n^{2-\varepsilon}$ рёбер (m задано, но меньше $n^{2-\varepsilon}$, где ε любая положительная константа), на котором рандомизированный алгоритм поиска компонент сильной связности работает за $\Omega(m \log n)$ в матожидании. Не забудьте про доказательство.



Сделаем граф данного вида, цепочка из примерно n вершин, с двудольным графом $K_{p,p}$ на конце $p \sim \sqrt{m} = n^{1-\varepsilon}$.

Выбираемая в алгоритме вершина будет чаще всего в цепочке, а не на $K_{p,p}$. Рекурсия в серднем должна занять $\log n$ раз, в среднем разделяю длину цепочки в 2 раза, каждый рекурсивный вызов который не попал на $K_{p,p}$, будет обрабатывать весь двудольный граф, со всеми его $\sim m$ ребрами.

Задание 2

> Докажите, что пирамидка построенная на координатах $(D, 0, \ldots), (0, D, 0, \ldots), (0, 0, D, 0, \ldots)$ в n-мерном пространстве имеет объём $\frac{D^n}{n!}$.

1. База:

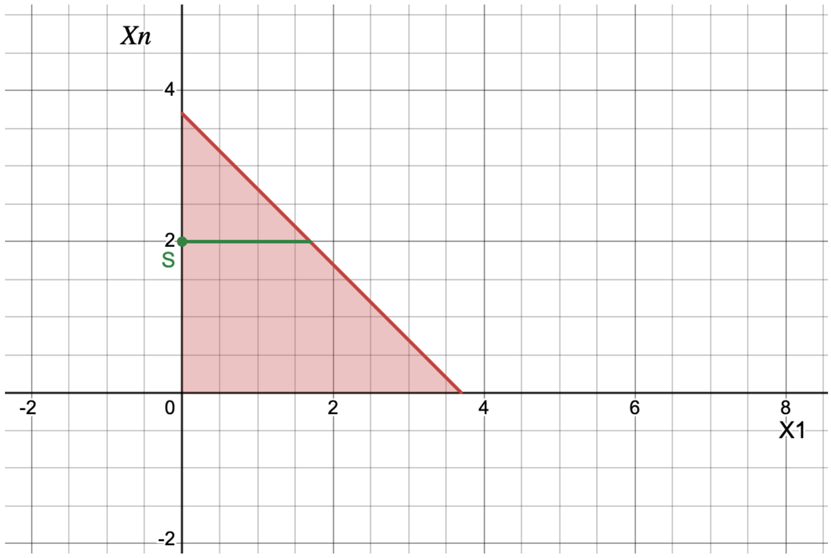
$$n = 2: \quad V_2 = \frac{D^2}{2}$$

2. Пусть верно для произвольного $n \ge 2 : V_n = \frac{D^n}{n!}$.

   Рассмотрим сечение s, параллелльное $(x_1, \ldots, x_n)$, пересекающее ось x_{n+1} в точке S. В силу подобия, объем тетраедара в сечении будет равен $\left(\frac{D-S}{D}\right)^n \cdot V_n$, Тогда объем $n+1$-мерной пирамиды, вычисляется как

$$\int_0^D V_n \left(\frac{D-s}{D}\right)^n \mathrm{d}s = -V_n \cdot \frac{D}{n+1} \cdot \left(\frac{D-s}{D}\right)^{n+1} \Bigg|_0^D = V_n \cdot \frac{D}{n+1} = \frac{D^{n+1}}{(n+1)!}$$

3. По индукции, следует $V_n = \frac{D^n}{n!}$


Xn
4
2
S
-2
-2
0
2
4
6
8
X1