Równanie transportu ciepła

Jakub Zając

Styczeń 2025

1 Problem

Równanie transportu ciepła:

$$-\frac{d}{dx}k(x)\frac{du(x)}{dx} = 100x^2$$

$$u(2) = -20$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 2x & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja:

$$[0,2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}.$$

2 Rozwiązanie

$$-\frac{d}{dx}(k(x)\frac{du(x)}{dx}) = 100x^2$$

$$-\frac{d}{dx}(k(x)u'(x))v(x) = 100x^2v(x)$$

$$u \in \mathbb{R}, \forall v \in V, V = \{f \in H^1, f(2) = 0\}$$

$$-\int_0^2(-\frac{d}{dx}(k(x)u'(x))v(x))dx = \int_0^2(100x^2v(x))dx$$

Całkuję przez części lewą stronę równania:

$$-\int_0^2\left(\frac{d}{dx}(k(x)u'(x))v(x)\right)dx = -(v(x)k(x)u'(x))|_0^2 + \int_0^2(k(x)u'(x)v'(x))dx =$$

$$= -v(2)k(2)u'(2) + v(0)k(0)u'(0) + \int_0^2 (k(x)u'(x)v'(x))dx = (*)$$

$$u, v \in V \wedge u(2) = -20, v(2) = 0$$
$$u'(0) + u(0) = 20$$
$$k(0) = 1$$

$$(*) = v(0)(20 - u(0)) + \int_0^2 (k(x)u'(x)v'(x))dx$$

Wracając do głównego równania:

$$20v(0) - v(0)u(0) + \int_0^2 (k(x)u'(x)v'(x))dx = \int_0^2 (100x^2 v(x))dx$$

$$\int_0^2 (k(x)u'(x)v'(x))dx - u(0)v(0) = \int_0^2 (100x^2 v(x))dx - 20v(0)$$
$$B(u, v) = \int_0^2 (k(x)u'(x)v'(x))dx - u(0)v(0)$$
$$L(v) = \int_0^2 (100x^2 v(x))dx - 20v(0)$$
$$B(u, v) = L(v)$$