



# LINEÁRNÍ ALGEBRA

verze 24. 4. 2012

ZDENĚK DOSTÁL, VÍT VONDRÁK

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zdeněk Dostál, Vít Vondrák  
Lineární algebra

© Zdeněk Dostál, Vít Vondrák, 2012  
ISBN

# Předmluva

Skriptum z lineární algebry, které právě dostáváte do rukou, obsahuje látku přednášky „Lineární algebra“ určené pro studenty Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB - Technické univerzity Ostrava s hlubším zájmem o teoretické obory inženýrského studia. Cílem skript je uvést čtenáře do studia lineární algebry a seznámit jej se základními pojmy tak, aby mohl pochopit jejich úlohu při řešení technických problémů.

Lineární algebra je jedním ze základních kamenů matematického vzdělání moderního inženýra, neboť se zabývá jak konkrétními výpočetními postupy, tak abstraktními pojmy, jejichž zvládnutí je užitečné pro popis technických problémů. Kdo zvládne základní pojmy tak, že bude vědět jak spolu souvisí, jaký mají význam pro počítání a pro formulaci technických problémů, pro toho bude mnohem snadnější nejen další studium, ale i sledování rozvoje zvoleného oboru.

Ve výkladu mají významné místo důkazy. Jejich cílem je zejména ukázat čtenáři úvahy, které vedou často od drobných pozorování k pojmům a závěrům, které jsou důležité pro aplikace. Studium důkazů tak rozvíjí všeobecnou schopnost analyzovat a řešit problémy.

Do skriptu je zařazena také méně tradiční látka, jako některé rozklady nebo elementární úvod do principů variačních metod. Autora k tomu vedlo přesvědčení, že tato látka není o nic těžší než tradiční látka lineární algebry, jako třeba teorie determinantů, avšak zpřístupňuje čtenáři pojmy, které se využívají v současných metodách řešení technických problémů. Jako příklady uvedme bilineární formy, které jsou základním prostředkem pro variační formulaci rovnic elektromagnetického pole nebo rovnic rovnováhy, na níž je založeno jejich řešení pomocí prakticky jakéhokoliv moderního software, nebo singulární rozklad, který lze využít mimo jiné při implementaci vyhledávačů.

Do textu byla zařazena i látka, která bývá tradičně součástí numerických metod, jako trojúhelníkové rozklady a jejich použití. Zde byla dána přednost výkladu „od problému k řešení“, který se zdá být pro technické školy přirozený. Navíc byla technika rozkladů využita i v řadě důkazů, takže ji pozorný čtenář může dobře pochopit.

Rádi bychom na tomto místě poděkovali všem, kteří se na vzniku skriptu přímo či nepřímo podíleli, a to zejména Mgr. Janovi Zapletalovi, který vysázel do  $\text{\TeX}$ u převážnou část skriptu včetně obrázků, paní Petře Frélichové za konečnou redakci skriptu, RNDr. Liboru Šindelovi, který četl pečlivě všechny verze rukopisu, RNDr. Petře Šarmanové, Ph.D., která obohatila skriptu svými příklady k procvičení, Ing Ol-

dřichovi Vlachovi, Ph.D, za podíl na kapitole 25.6 a za editaci vzorových příkladů, a paní Ing. Martině Litschmannové za pomoc s první kapitolou. Díky za četné připomínky patří i Doc. Ing. Nině Častové. Za všechny další zdroje inspirace a radosti z práce bychom rádi poděkovali Prof. RNDr. Ivo Markovi, DrSc. z MFF UK/ČVUT Praha za přispění k pocitu, že lineární algebra je nejen důležitá disciplína, ale také zajímavá švanda.

V Ostravě 24. 4. 2012

autoři

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>iii</b>
<b>I Matice a řešení soustav lineárních rovnic</b>	<b>1</b>
<b>1 Zobrazení a lineární rovnice</b>	<b>2</b>
1.1 Elektrický obvod se zdrojem a spotřebiči	2
1.2 Vztah mezi napětími a potenciály	3
1.3 Zobrazení	3
1.4 Proud a napětí	4
1.5 Kirchhoffův zákon proudů	4
1.6 Interpretace řešení soustavy rovnic	5
Příklady k procvičení	7
<b>2 Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic</b>	<b>8</b>
2.1 Ekvivalentní úpravy	8
2.2 Maticový zápis	10
2.3 Úprava na schodový tvar	10
2.4 Zpětná substituce	12
2.5 Gaussova eliminace	13
2.6 Gauss-Jordanova metoda	14
2.7 Pracnost řešení	14
2.8 Příklady	15
Příklady k procvičení	16
Klíč k příkladům k procvičení	18
<b>3 Aritmetické vektory</b>	<b>19</b>
3.1 Aritmetické vektory	19
3.2 Nulový a opačný vektor	22
Příklady k procvičení	23
Klíč k příkladům k procvičení	24

<b>4</b>	<b>Matice a vektorové operace</b>	<b>25</b>
4.1	Definice a označení	25
4.2	Násobení matice skalárem a sčítání matic	26
4.3	Nulová matice a odečítání matic	27
4.4	Matice rozdělené na bloky	28
	Příklady k procvičení	29
	Klíč k příkladům k procvičení	29
<b>5</b>	<b>Násobení a transponování matic</b>	<b>30</b>
5.1	Násobení matice a vektoru	30
5.2	Násobení matic	32
5.3	Pravidla pro násobení matic	33
5.4	Transponované matice	35
5.5	Násobení a transponování blokových matic	36
	Příklady k procvičení	37
	Klíč k příkladům k procvičení	37
<b>6</b>	<b>Inverzní matice</b>	<b>38</b>
6.1	Maticový zápis elementárních úprav	38
6.2	Inverzní matice	40
6.3	Elementární úpravy a regularita	40
6.4	Výpočet inverzní matice	41
6.5	Inverzní matice a řešení soustav	42
6.6	Vyčíslení výrazů s inverzní maticí	43
6.7	Použití inverzní matice	44
6.8	Příklady	44
	Příklady k procvičení	46
	Klíč k příkladům k procvičení	48
<b>7</b>	<b>Trojúhelníkový rozklad</b>	<b>50</b>
7.1	Permutační matice	50
7.2	Trojúhelníkové matice	51
7.3	Trojúhelníkový ( <b>LU</b> ) rozklad	52
7.4	Výpočet <b>LU</b> rozkladu	53
7.5	Řešení soustav pomocí <b>LU</b> rozkladu	54
7.6	Použití <b>LU</b> rozkladu	55
7.7	Příklady	56
	Příklady k procvičení	57
	Klíč k příkladům k procvičení	57

<b>II</b>	<b>Vektorové prostory</b>	<b>58</b>
<b>8</b>	<b>Algebraické operace a struktury</b>	<b>59</b>
8.1	Algebraické operace . . . . .	59
8.2	Asociativní operace . . . . .	60
8.3	Komutativní operace . . . . .	61
8.4	Neutrální prvek . . . . .	61
8.5	Inverzní prvek . . . . .	62
8.6	Grupa . . . . .	63
8.7	Komutativní těleso . . . . .	65
	Příklady k procvičení . . . . .	65
<b>9</b>	<b>Vektorové prostory</b>	<b>66</b>
9.1	Vektorový prostor . . . . .	66
9.2	Rovnosti odvozené z axiomů . . . . .	68
9.3	Podprostory . . . . .	68
9.4	Součet a průnik podprostorů . . . . .	69
9.5	Vektory v matematice a ve fyzice . . . . .	70
9.6	Příklady . . . . .	70
	Příklady k procvičení . . . . .	74
	Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	75
<b>10</b>	<b>Lineární nezávislost a báze</b>	<b>76</b>
10.1	Závislé a nezávislé vektory . . . . .	76
10.2	Lineární kombinace a závislost . . . . .	77
10.3	Postačující podmínky pro nezávislost funkcí . . . . .	78
10.4	Báze vektorového prostoru . . . . .	80
10.5	Příklady . . . . .	81
	Příklady k procvičení . . . . .	84
	Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	84
<b>11</b>	<b>Souřadnice</b>	<b>85</b>
11.1	Souřadnice vektoru . . . . .	85
11.2	Použití souřadnic . . . . .	86
11.3	Příklady . . . . .	87
	Příklady k procvičení . . . . .	88
	Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	88
<b>12</b>	<b>Dimenze a řešení soustav</b>	<b>89</b>
12.1	Dimenze vektorového prostoru . . . . .	89
12.2	Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace . . . . .	90
12.3	Řádkový prostor a řádková hodnota . . . . .	91
12.4	Sloupcová hodnota matice . . . . .	92
12.5	Hodnota a řešitelnost soustav . . . . .	93

12.6	Hodnost a regularita . . . . .	94
12.7	Hodnost matice a počítačová aritmetika . . . . .	95
	Příklady k procvičení . . . . .	95
	Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	95
<b>III</b>	<b>Lineární a multilineární zobrazení</b>	<b>96</b>
<b>13</b>	<b>Lineární zobrazení</b>	<b>97</b>
13.1	Definice a příklady lineárních zobrazení . . . . .	98
13.2	Elementární vlastnosti lineárního zobrazení . . . . .	99
13.3	Nulový prostor a obor hodnot . . . . .	99
13.4	Hodnost a defekt zobrazení . . . . .	100
13.5	Součet zobrazení a násobení skalárem . . . . .	102
13.6	Skládání lineárních zobrazení . . . . .	102
13.7	Mnohočleny v lineárních transformacích . . . . .	103
13.8	Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení . . . . .	104
13.9	Příklady . . . . .	105
	Příklady k procvičení . . . . .	108
	Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	108
<b>14</b>	<b>Lineární zobrazení a matice</b>	<b>109</b>
14.1	Maticový zápis lineárních zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ . . . . .	109
14.2	Určení báze nulového prostoru matice . . . . .	110
14.3	Matice jako lineární zobrazení a soustavy rovnice . . . . .	111
14.4	Definice matice lineárního zobrazení . . . . .	113
14.5	Souřadnice obrazu vektoru . . . . .	114
14.6	Matice složeného zobrazení . . . . .	115
14.7	Změna báze . . . . .	116
14.8	Podobnost matic . . . . .	117
14.9	Příklady . . . . .	117
	Příklady k procvičení . . . . .	119
	Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	119
<b>15</b>	<b>Bilineární formy</b>	<b>120</b>
15.1	Definice a příklady . . . . .	120
15.2	Klasifikace bilineárních forem . . . . .	121
15.3	Matice bilineární formy . . . . .	122
15.4	Matice symetrické formy . . . . .	124
15.5	Změna matice bilineární formy při změně báze . . . . .	124
15.6	Kongruentní matice . . . . .	125
15.7	Příklady . . . . .	125
	Příklady k procvičení . . . . .	127



Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	127
<b>16 Kvadratické formy</b>	<b>128</b>
16.1 Definice a příklady . . . . .	128
16.2 Základní vlastnosti . . . . .	129
16.3 Matice kvadratické formy . . . . .	130
16.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy . . . . .	130
16.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$ . . . . .	131
16.6 Pozitivně definitní kvadratické formy . . . . .	133
Příklady k procvičení . . . . .	135
Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	135
<b>17 Kongruence symetrických a diagonálních matic</b>	<b>136</b>
17.1 Diagonální redukce pozitivně definitní matice . . . . .	136
17.2 $\mathbf{LDL}^T$ rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí . . . . .	138
17.3 Kongruence symetrické a diagonální matice . . . . .	139
17.4 Zákon setrvačnosti kvadratických forem . . . . .	141
17.5 Příklady . . . . .	142
Příklady k procvičení . . . . .	146
Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	147
<b>18 Skalární součin a ortogonalita</b>	<b>148</b>
18.1 Definice skalárního součinu . . . . .	148
18.2 Norma vektoru . . . . .	149
18.3 Norma indukovaná skalárním součinem . . . . .	150
18.4 Ortogonální množiny vektorů . . . . .	151
18.5 Schmidtův ortogonalizační proces . . . . .	153
18.6 Ortogonální matice . . . . .	155
18.7 Příklady . . . . .	156
Příklady k procvičení . . . . .	158
Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	158
<b>19 Variační metody a metoda nejmenších čtverců</b>	<b>159</b>
19.1 Variační princip . . . . .	159
19.2 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	160
19.3 Aproximace a projektory . . . . .	162
Příklady k procvičení . . . . .	164
<b>IV Determinanty</b>	<b>165</b>
<b>20 Induktivní definice determinantu</b>	<b>166</b>
20.1 Explicitní řešení malých soustav . . . . .	166
20.2 Induktivní definice determinantu . . . . .	168

20.3 Výpočetní náročnost . . . . .	169
Příklady k procvičení . . . . .	169
Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	169
<b>21 Determinant a antisymetrické formy</b>	<b>170</b>
21.1 Linearita v prvním řádku . . . . .	170
21.2 Antisymetrie v prvních dvou řádcích . . . . .	171
21.3 Antisymetrie v libovolné dvojici řádků . . . . .	171
21.4 Linearita v libovolném řádku . . . . .	172
21.5 Výpočet hodnoty determinantu . . . . .	174
21.6 Determinant součinu matic . . . . .	175
Příklady k procvičení . . . . .	176
Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	176
<b>22 Determinant a inverzní matice</b>	<b>177</b>
22.1 Rozvoj determinantu podle prvků libovolného řádku . . . . .	177
22.2 Adjungovaná a inverzní matice . . . . .	178
22.3 Determinant transponované matice . . . . .	180
22.4 Determinant jako funkce sloupců . . . . .	181
22.5 Cramerovy vzorce pro řešení soustav . . . . .	181
22.6 Použití Cramerových vzorců . . . . .	182
Příklady k procvičení . . . . .	183
Klíč k příkladům k procvičení . . . . .	184
<b>V Úvod do spektrální teorie</b>	<b>185</b>
<b>23 Vlastní čísla a vektory</b>	<b>186</b>
23.1 Vlastní čísla a vektory . . . . .	186
23.2 Charakteristický mnohočlen a spektrum . . . . .	188
23.3 Neprázdnost spektra transformace . . . . .	189
23.4 Invariantnost vzhledem k podobnosti . . . . .	189
23.5 Součet a součin vlastních čísel . . . . .	190
23.6 Lokalizace vlastních čísel . . . . .	191
Příklady k procvičení . . . . .	192
<b>24 Spektrální rozklad symetrické matice</b>	<b>193</b>
24.1 Spektrum symetrické matice . . . . .	193
24.2 Vlastní vektory reálné symetrické matice . . . . .	194
24.3 Invariantní podprostory . . . . .	194
24.4 Spektrální rozklad reálné symetrické matice . . . . .	196
24.5 Geometrie spektrálního rozkladu . . . . .	197
24.6 Extremální vlastnosti vlastních čísel . . . . .	197
Příklady k procvičení . . . . .	199

<b>25 Důsledky spektrálního rozkladu</b>	<b>200</b>
25.1 Lokalizace spektra pomocí kongruence . . . . .	200
25.2 Sylvesterovo kritérium pozitivní definitnosti . . . . .	201
25.3 Skalární funkce symetrické matice . . . . .	202
25.4 Polární rozklad . . . . .	204
25.5 Geometrický význam determinantu . . . . .	205
25.6 Singulární rozklad a podmíněnost matice . . . . .	207
25.7 Pseudoinverzní matice . . . . .	210
<b>26 Jordanova forma matice</b>	<b>212</b>
26.1 Jordanova forma matice s jedním vlastním vektorem . . . . .	212
26.2 Jordanova forma obecné matice . . . . .	214
26.3 Mocnina matice . . . . .	215
26.4 Význam Jordanovy formy . . . . .	216
 <b>VI Analytická geometrie</b>	 <b>217</b>
<b>27 Přímky, roviny a metrické úlohy</b>	<b>218</b>
27.1 Eukleidovský prostor . . . . .	218
27.2 Přímky v $\mathcal{E}_3$ . . . . .	219
27.3 Roviny v $\mathcal{E}_3$ . . . . .	221
27.4 Vektorový součin . . . . .	223
27.5 Určení některých úhlů . . . . .	225
27.6 Některé metrické úlohy . . . . .	226
27.7 Support Vector Machine . . . . .	227
<b>28 Kvadratické plochy</b>	<b>231</b>
28.1 Kanonický tvar kvadratické formy . . . . .	231
28.2 Kvadratické plochy v kanonickém tvaru . . . . .	232
 <b>Literatura</b>	 <b>235</b>
 <b>Rejstřík</b>	 <b>236</b>

## Část I

# Matice a řešení soustav lineárních rovníc

# Kapitola 1

## Zobrazení a lineární rovnice

Soustavy lineárních algebraických rovnic často vznikají při řešení praktických problémů. V této úvodní kapitole si nejprve odvodíme soustavu lineárních rovnic, kterou můžeme považovat za matematický model elektrického obvodu. Potom si připomeneme pojem zobrazení a ukážeme si různé interpretace řešení výsledné soustavy. Úvodní příklad nám bude v dalším výkladu sloužit k ilustraci a motivaci zavedení některých nových pojmů.

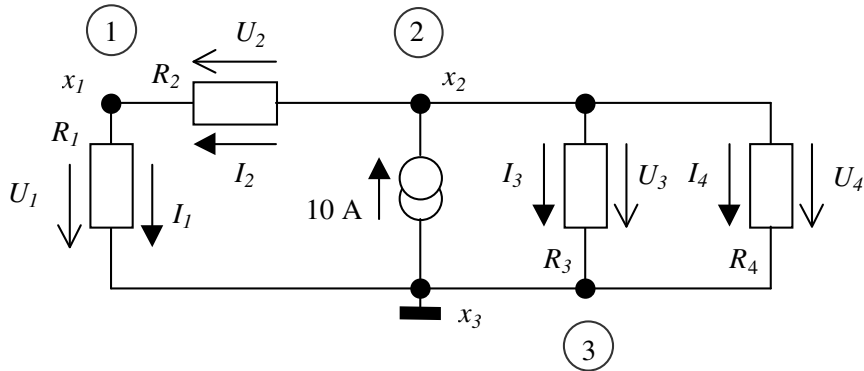
### 1.1 Elektrický obvod se zdrojem a spotřebiči

Uvažujme elektrický obvod na obr. 1.1 se zadanými odpory spotřebičů  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . K odvození rovnic pro neznámé potenciály  $x_1, x_2, x_3$ , s jejichž pomocí můžeme vypočítat neznámé hodnoty napětí na spotřebičích  $U_1, U_2, U_3, U_4$  a hodnoty proudů procházejících spotřebiči  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , použijeme základní fyzikální zákony a následující konvence:

- (i) Jeden uzel, v našem případě uzel 3, je uzemněn, tedy  $x_3 = 0$ .
- (ii) Hodnota napětí na spotřebiči je dáno rozdílem potenciálů na jeho svorkách (např.  $U_2 = x_2 - x_1$ ).
- (iii) Proud ve směru šipky má kladnou hodnotu.
- (iv) Hodnoty napětí i proudu mohou být kladné i záporné. Proud se zápornou hodnotou má směr opačný, než je jeho směr vyznačený ve schématu. Obdobně záporná hodnota napětí charakterizuje skutečný pokles potenciálu v opačném směru.

V dalším textu si postupně vyjádříme napětí a proudy pomocí potenciálů a pro proudy vyjádřené vztahy obsahující potenciály si napíšeme Kirchhoffův zákon proudů.

**Poznámka.** Pokud jste se (zatím) s elektrickými obvody nespřátelili, můžete se na



Obr. 1.1: Modelový elektrický obvod se zdrojem a spotřebiči.

následující předpisy či rovnice dívat jako na zadaná zobrazení.

## 1.2 Vztah mezi napětími a potenciály

Hodnoty napětí na spotřebičích jsou dány podle obr. 1.1 následujícím předpisem:

$$\begin{aligned} U_1 &= x_1 - x_3 \\ U_2 &= -x_1 + x_2 \\ U_3 &= x_2 - x_3 \\ U_4 &= x_2 - x_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Je to předpis, který každé trojici potenciálů  $x_1, x_2, x_3$  přiřazuje čtveřici hodnot napětí  $U_1, U_2, U_3, U_4$ . Snadno se zjistí, že pro některé hodnoty napětí neexistují potenciály (např. pro  $U_3 \neq U_4$ ). Ani když potenciály k hodnotám napětí existují, nejsou určeny jednoznačně: jsou-li rovnice (1.1) splněny pro  $x_1, x_2, x_3$ , pak jsou splněny i pro  $x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c$ , kde  $c$  je libovolné reálné číslo. Jednoznačnost však bude zaručena, pokud přidáme rovnici  $x_3 = 0$ .

## 1.3 Zobrazení

Předpis (1.1) je zvláštním případem jednoho ze základních matematických pojmů.

**Definice 1.1. Zobrazení**  $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$  množiny  $\mathcal{U}$  do množiny  $\mathcal{V}$  je předpis, který každému prvku množiny  $\mathcal{U}$  přiřazuje nějaký prvek množiny  $\mathcal{V}$ . Množina  $\mathcal{U}$  se nazývá **definiční obor** zobrazení  $f$ , množina  $\mathcal{V}$  se nazývá **obor hodnot** zobrazení  $f$ . Zobrazení  $f$  se nazývá **zobrazení na** množinu  $\mathcal{V}$ , jestliže každý prvek množiny  $\mathcal{V}$  je obrazem nějakého prvku množiny  $\mathcal{U}$ . Jestliže mají každé dva různé prvky množiny  $\mathcal{U}$  různé obrazy, nazývá se zobrazení  $f$  **prosté**. Zobrazení, které je současně prosté a na (množinu), se nazývá **vzájemně jednoznačné**.

Předpis (1.1) tedy můžeme považovat za zobrazení, jehož definičním oborem je množina všech trojic reálných čísel  $x_1, x_2, x_3$  a oborem hodnot je množina všech čtveřic reálných čísel  $U_1, U_2, U_3, U_4$ . Jak jsme si ukázali výše, toto zobrazení není ani prosté ani na (množinu všech uspořádaných čtveřic), takže není vzájemně jednoznačné.

## 1.4 Proud a napětí

Vztah mezi hodnotami proudu a napětí je dán Ohmovým zákonem:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{R_1} U_1 \\ I_2 &= \frac{1}{R_2} U_2 \\ I_3 &= \frac{1}{R_3} U_3 \\ I_4 &= \frac{1}{R_4} U_4 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Předpis (1.2) zřejmě definuje prosté, vzájemně jednoznačné zobrazení (alespoň za přirozeného předpokladu  $R_i > 0$ ). Nás však zajímá vyjádření hodnot proudů pomocí potenciálů, které získáme, když dosadíme vztahy (1.2) do (1.1):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{R_1} x_1 - \frac{1}{R_1} x_3 \\ I_2 &= -\frac{1}{R_2} x_1 + \frac{1}{R_2} x_2 \\ I_3 &= \frac{1}{R_3} x_2 - \frac{1}{R_3} x_3 \\ I_4 &= \frac{1}{R_4} x_2 - \frac{1}{R_4} x_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

## 1.5 Kirchhoffův zákon proudů

Kirchhoffův zákon proudů tvrdí, že součet proudů v uzlu je nula. V našem případě dostaneme postupně:

$$\text{Uzel 1 : } -I_1 + I_2 = 0 \tag{1.4a}$$

$$\text{Uzel 2 : } -I_2 - I_3 - I_4 = -10 \tag{1.4b}$$

$$\text{Uzel 3 : } I_1 + I_3 + I_4 = 10 \tag{1.4c}$$

Pokud  $I_1, I_2, I_3, I_4$  splňují první dvě rovnice, pak zřejmě splňují i třetí, neboť tato je součtem prvních dvou s opačným znaménkem. Třetí rovnice tedy nenese

žádnou novou informaci a lze ji vynechat. Dosadíme-li do rovnic (1.4a) a (1.4b) výrazy pro potenciály (1.3), dostaneme po úpravě:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)x_1 + \frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_1}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{R_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)x_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)x_3 &= -10 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Zvolíme-li  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$  a vezmeme-li v úvahu, že  $x_3 = 0$ , dostaneme soustavu:

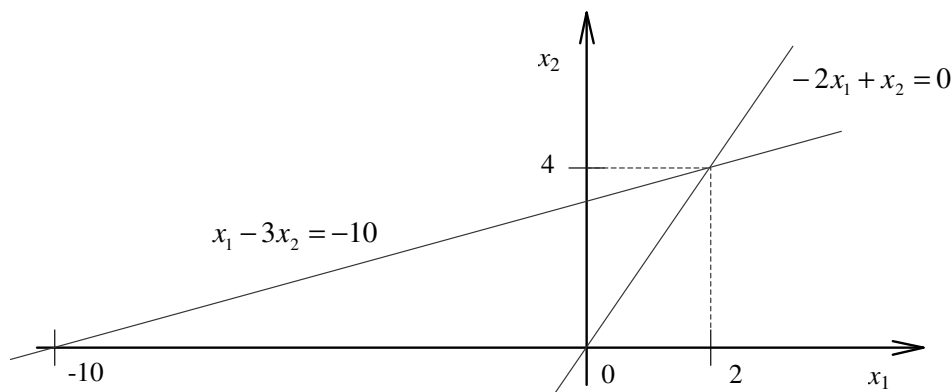
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= -10 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Soustava se nazývá lineární, protože neobsahuje mocniny ani součiny neznámých. Jak se dá očekávat z fyzikálního významu úlohy, soustavu (1.6) splňuje jediná dvojice potenciálů  $x_1, x_2$ . Matematické argumenty si ukážeme později.

## 1.6 Interpretace řešení soustavy rovnic

Řešení soustavy (1.6) může být interpretováno zcela nezávisle na původní úloze.

První interpretaci dostaneme, když se na soustavu (1.6) budeme dívat *po řádcích*. Jednotlivé rovnice jsou vlastně rovnicemi přímek a úkolem je najít jejich průsečík, jak je to znázorněno na obr. 1.2. Jelikož přímky mají různé směrnice, je zřejmé, že průsečík existuje. Pro souřadnice průsečíku platí  $x_1 = 2, x_2 = 4$ . Snadno si ověříme, že splňují soustavu (1.6).



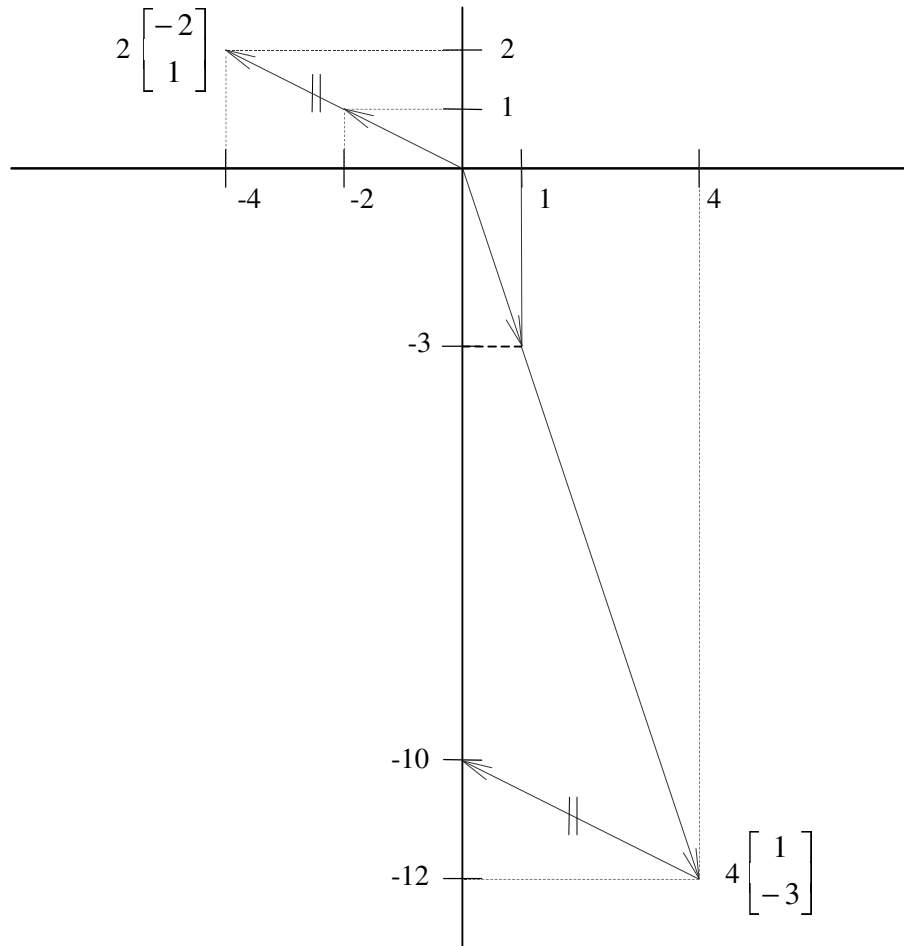
Obr. 1.2: Geometrické znázornění soustavy (1.6) po řádcích.

Na soustavu (1.6) se však můžeme také dívat *po sloupcích*. V tomto případě je naším úkolem najít  $x_1$  a  $x_2$  tak, aby se  $x_1$ -násobek vektoru  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  sečtený s  $x_2$ -



-násobkem vektoru  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$  rovnal vektoru  $\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}$ . Číselné řešení je ovšem totéž, neboť

$$2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}.$$



Obr. 1.3: Sloupcová interpretace soustavy (1.6).

Soustavu (1.6) lze popsat i pomocí zobrazení

$$A : \mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

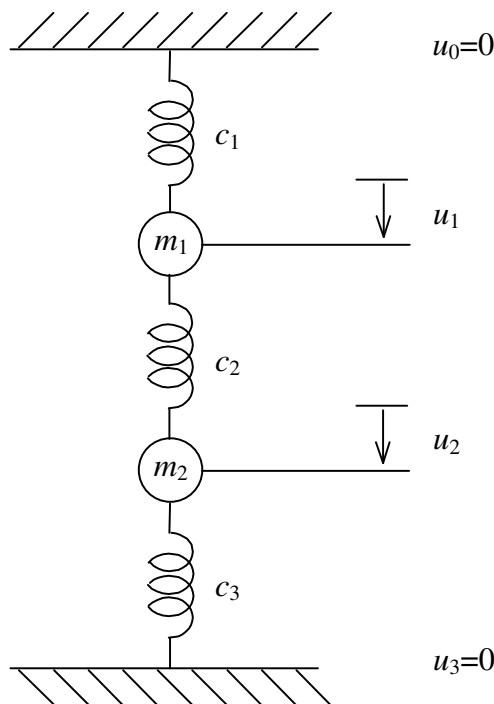
kde  $\mathbb{R}^2$  značí množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Označíme-li si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix},$$

pak úloha najít řešení rovnice (1.1) je ekvivalentní úloze najít  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  tak, aby

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Soustava rovnic (1.6) má řešení, právě když  $\mathbf{b} \in \mathcal{H}(A)$ , kde  $\mathcal{H}(A)$  je obor hodnot zobrazení  $A$ . Jestliže  $\mathbf{b} \in \mathcal{H}(A)$  a  $A$  je prosté zobrazení, pak soustava rovnic (1.6) má jediné řešení.



Obr. 1.4: Soustava pružin.

## Příklady k procvičení

1.1. Nechtě je zadána mechanická soustava sestávající ze tří pružin a dvou těles jako na obrázku 1.4. Najděte rovnice pro posunutí  $u_1, u_2$ , víte-li, že:

- Prodloužení  $i$ -té pružiny je dáno vztahem  $l_i = u_i - u_{i-1}$ .
- $u_0 = u_3 = 0$ .
- Síla  $y_i$  v natažené  $i$ -té pružině splňuje Hookův zákon  $y_i = c_i l_i$ . Vertikální pružina tedy působí na dolní těleso silou  $-y_i$  a na horní těleso silou  $y_i$ .
- Součet sil působících na každé těleso je nula. To lze vyjádřit také tak, že hmotnost  $f_i = m_i g$   $i$ -tého tělesa je vyrovnána odporem pružin. Síla  $f_i$  (kladná je orientována dolů) natahuje  $i$ -tou pružinu a stlačuje pružinu  $i + 1$ , takže platí  $f_i = y_i - y_{i+1}$ .

NÁPOVĚDA: Postupujte analogicky jako u elektrického obvodu z obr. 1.1.

## Kapitola 2

# Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat řešením obecné soustavy lineárních rovnic, tj. úlohy najít  $x_1, \dots, x_n$  tak, aby pro daná čísla  $a_{ij}$  a  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  platilo

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.1)$$

Součástí této úlohy je rozhodnout, zda vůbec nějaké řešení dané soustavy existuje, kolik jich je a co o nich lze říci v případě, že je jich nekonečně mnoho. Konkrétním případem soustavy (2.1) je soustava (1.6), jejímž řešením jsou neznámé potenciály obvodu na obr. 1.1. Seznámíme se zde zejména s velmi účinnou metodou řešení soustavy (2.1), jejíž objev je připisován významnému německému matematikovi K. F. Gaussovi (1777–1855). V Číně však byla tato metoda známa nejméně 180 let před naším letopočtem pod jménem *fang cheng*.

### 2.1 Ekvivalentní úpravy

Základní myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic spočívá v nahrazení dané soustavy jinou soustavou, která má stejné řešení a je jednodušší. V případě dvou rovnic o dvou neznámých je jednodušší taková soustava, která obsahuje alespoň jednu rovnici s jedinou neznámou, neboť takovou rovnici už můžeme řešit nezávisle na druhé rovnici. Novou soustavu můžeme dostat postupným použitím tzv. **ekvivalentních úprav** zvolených tak, aby řešení původní soustavy bylo i řešením soustavy upravené:

- (E1) Vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy.
- (E2) Násobení obou stran některé rovnice soustavy nenulovým číslem.
- (E3) Přičtení násobku některé rovnice soustavy k jiné rovnici.

Vhodná úprava soustavy

$$-2x_1 + x_2 = 0 \quad (2.2a)$$

$$x_1 - 3x_2 = -10 \quad (2.2b)$$

je například vynásobení rovnice (2.2b) dvěma, podle pravidla (E2), a přičtení rovnice (2.2a) k upravené rovnici (2.2b), v souladu s pravidlem (E3). Upravená soustava bude mít tvar

$$-2x_1 + x_2 = 0 \quad (2.3a)$$

$$-5x_2 = -20 \quad (2.3b)$$

Z rovnice (2.3b) vypočteme  $x_2 = 4$  a po dosazení do rovnice (2.3a) dostaneme

$$-2x_1 + 4 = 0, \quad (2.4)$$

odkud  $x_1 = 2$ . Dosazením do (2.2) si ověříme, že jsme opravdu získali řešení soustavy (2.2).

Ekvivalentní úpravy mají tu vlastnost, že jejich pomocí můžeme z upravené soustavy získat zpět původní soustavu. Například soustavu (2.2) můžeme dostat ze soustavy (2.3) tak, že rovnici (2.3a) odečteme od rovnice (2.3b) a takto upravenou rovnici (2.3b) vynásobíme číslem  $\frac{1}{2}$ .

Obecně platí:

- Jestliže soustava  $S'$  vznikla ze soustavy  $S$  vzájemnou výměnou  $i$ -té a  $j$ -té rovnice podle pravidla (E1), pak tatáž úprava použitá na  $S'$  nás přivede zpět k  $S$ .
- Jestliže soustava  $S'$  vznikla ze soustavy  $S$  násobením  $i$ -tého řádku nenulovým číslem  $\alpha$  podle pravidla (E2), pak násobením téhož řádku soustavy  $S'$  číslem  $\frac{1}{\alpha}$  obdržíme zpátky soustavu  $S$ .
- Jestliže soustava  $S'$  vznikla ze soustavy  $S$  přičtením  $\alpha$ -násobku  $i$ -té rovnice k  $j$ -té rovnici ( $i \neq j$ ), pak přičtení  $(-\alpha)$ -násobku  $i$ -té rovnice soustavy  $S'$  k  $j$ -té rovnici soustavy  $S'$  vede opět k  $S$ .

Dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme **ekvivalentní soustavy**, jestliže jednu z nich lze získat z druhé ekvivalentními úpravami. Jelikož řešení původní soustavy je také řešením upravené soustavy a upravenou soustavu můžeme ekvivalentními úpravami převést na původní soustavu, platí následující věta.

**Věta 2.1.** *Jsou-li dvě soustavy lineárních rovnic ekvivalentní, potom mají stejné řešení.*

## 2.2 Maticový zápis

Při úpravě rovnic si můžeme ušetřit práci, když nebudeme opisovat neznámé. Soustavě rovnic (2.1) bude v tomto úsporném zápisu odpovídat tabulka

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right], \quad (2.5)$$

kterou nazýváme **rozšířená matice soustavy** (2.1). Část tabulky bez posledního sloupce se nazývá **matice soustavy** (2.1). Poslední sloupec se nazývá **pravá strana soustavy**. Pokud budeme mluvit o tabulce, jako je matice soustavy, bez odkazu na soustavu, budeme ji nazývat stručně **matice**.

Ekvivalentním úpravám soustavy rovnic odpovídají operace s řádky rozšířené matice soustavy, které nazýváme **elementární (řádkové) operace**:

- (e1) Vzájemná výměna libovolných dvou řádků.
- (e2) Násobení některého řádku nenulovým číslem.
- (e3) Přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.

Máme-li dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé pomocí elementárních řádkových operací, říkáme, že matice jsou **řádkově ekvivalentní**. Větu 2.1 si můžeme vyjádřit pomocí nových pojmů.

**Věta 2.2.** *Mají-li dvě soustavy lineárních rovnic řádkově ekvivalentní rozšířené matice, potom mají stejné řešení.*

Úpravu soustavy (2.2) na (2.3) můžeme zapsat pomocí elementárních operací ve tvaru

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 \end{array} \right] 2r_1 + r_2 \mapsto \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -20 \end{array} \right]. \quad (2.6)$$

## 2.3 Úprava na schodový tvar

Podívejme se, jak můžeme pomocí elementárních řádkových operací převést matici (2.5) na tzv. **schodový tvar**, tj. na tvar, v němž jsou první nenulové prvky řádků zvané **vedoucí prvky** uspořádány jako schody klesající zleva doprava. Požaduje se přitom, aby vedoucí prvky nebyly nad sebou a aby všechny případné nulové řádky byly dole. Příkladem matice ve schodovém tvaru je pravá matice ve výrazu (2.6) nebo matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Při úpravě matice využijeme pozorování, že je-li v matici (2.5) prvek  $a_{ij}$  nenulový, pak vynásobíme-li  $i$ -tý řádek této matice číslem  $-a_{kj}/a_{ij}$  a přičteme-li ho ke  $k$ -tému řádku, bude mít upravená matice v  $k$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci prvek

$$a_{kj} + (-a_{kj}/a_{ij}) a_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

Pokud je prvek  $a_{11}$  nenulový, lze takto transformovat matici (2.1) na tvar

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^1 & \dots & a_{mn}^1 & b_m^1 \end{array} \right]$$

Pokud bude také prvek  $a_{22}^1$  nenulový, můžeme obdobně dosáhnout pomocí elementárních řádkových operací, aby i pod ním byly v upravené matici nuly. Bude-li pokaždé  $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ , dostaneme nakonec matici (2.8) ve schodovém tvaru s nenulovými prvky  $a_{11}, a_{22}^1, \dots, a_{kk}^{k-1}$ .

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

Rozložení nenulových prvků v levé části upravené matice soustavy připomíná trojúhelník, proto říkáme, že **matice je v trojúhelníkovém tvaru**. Úpravu na trojúhelníkový tvar lze provést i v případě, že pokaždé, když  $a_{ii}^{i-1} = 0$ , je možno nalézt prvek  $a_{ji}^{i-1} \neq 0, j > i$ . Stačí vzájemně vyměnit před úpravou  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek.

Každou matici však nelze elementárními řádkovými úpravami převést na trojúhelníkový tvar. Kdyby byl například celý první sloupec nulový, nebyli bychom schopni žádnou řádkovou úpravou zajistit, aby se do levého horního rohu upravené matice dostal nenulový prvek. V takovém případě bychom přešli na úpravu prvního nenulového sloupce. Obdobně bychom postupovali i při úpravě dalších řádků. Nedospěli bychom však k matici (2.8), ale k obecnější matici ve schodovém tvaru.

**Varování.** Z našich úvah vyplývá, že *postupným* prováděním ekvivalentních úprav dostaneme soustavu, která má stejné řešení jako původní soustava. Neprovádíme-li

následnou úpravu na upravené matici, můžeme se dopustit chyby. Například úpravami

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_2 - r_3 \\ r_3 - r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 + r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

dostaneme rozšířenou matici soustavy, která má jiné řešení než soustava odpovídající původní matici soustavy. Této chybě se můžeme vyhnout tak, že vybereme některý pevně zvolený řádek, který neupravíme, ale použijeme ho k úpravě ostatních řádků. Například úpravy

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - 2r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

jsou ekvivalentní.

## 2.4 Zpětná substituce

Nyní si ukážeme, jak získat řešení soustavy s maticí ve schodovém tvaru. Budeme rozlišovat tři případy:

- Jestliže poslední nenulový řádek rozšířené matice soustavy má nenulový pouze poslední prvek  $b_{k+1}^k$ , pak tomuto řádku odpovídá rovnice

$$0 = b_{k+1}^k,$$

která nemá pro  $b_{k+1}^k \neq 0$  řešení. V tomto případě tedy daná **soustava nemá řešení**.

- Jestliže rozšířená matice má trojúhelníkový tvar (2.8) s  $k = n$ ,  $b_{n+1}^n = 0$  a  $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pak  $n$ -tá rovnice má tvar

$$a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1},$$

ze které snadno vypočteme  $x_n$ . Po dosazení do předchozích rovnic zbude v  $(n-1)$ -ní rovnici jediná neznámá, kterou také snadno vypočteme. Budeme-li takto postupovat dále, určíme snadno **jediné řešení soustavy**.

- Jestliže rozšířená matice má obecný schodový tvar, pak z každé rovnice soustavy vyjádříme neznámou, která odpovídá vedoucímu prvku. Postupným dosazováním od posledního řádku dostaneme vzorce pro neznámé odpovídající vedoucím prvkům vyjádřené pomocí neznámých na pravé straně. V tomto případě má soustava **nekonečně mnoho řešení**.

## 2.5 Gaussova eliminace

Výpočetní postup pro řešení soustav lineárních rovnic, se kterým jsme se právě seznámili se nazývá **Gaussova eliminace**. První krok, redukce na schodový tvar, se při řešení soustav nazývá **dopředná redukce**, zatímco řešení soustavy se schodovou maticí se nazývá **zpětná substituce**.

### Příklad 2.3 (soustava s jediným řešením).

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2.9}$$

*Řešení.* Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]_{\substack{r_3 \\ r_1}} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right]_{r_3 - 2r_2} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \tag{2.10}$$

Řešením rovnic, které odpovídají matici napravo, dostaneme postupně  $x_3 = 2$ ,  $x_2 = -x_3 = -2$ ,  $x_1 = 4 - x_3 = 2$ , což je jediné řešení naší soustavy (2.9). ▲

### Příklad 2.4 (soustava, která má nekonečně mnoho řešení).

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*Řešení.* Ekvivalentními úpravami dostaneme postupně

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]_{r_2 - r_1} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]_{r_3 + r_2} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice nenese žádnou informaci.

Z předposlední rovnice vypočteme  $x_2$  pomocí  $x_3$ , tj.  $x_2 = -2x_3$ . Po dosazení za  $x_2$  do první rovnice dostaneme  $x_1 = 1 + x_3$ . Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru  $x_3$  libovolné,  $x_2 = -2x_3$ ,  $x_1 = 1 + x_3$ . Můžeme je zapsat také pomocí libovolného parametru  $p$  ve tvaru  $x_3 = p$ ,  $x_2 = -2p$ ,  $x_1 = 1 + p$ . ▲



**Poznámka.** Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, je *množina* řešení určena jednoznačně, nikoliv však její *parametrizace*, tj. analytický tvar. Například  $x_2 = p$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2}p$  a  $x_1 = -\frac{1}{2}p + 1$  je *jiný* tvar *téhož* řešení.

**Příklad 2.5 (soustava, která nemá řešení).**

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

*Řešení.* Ekvivalentními úpravami rozšířené matice soustavy dostaneme postupně

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ 2r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right]$$

Poslední rovnici  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -5$  nelze splnit žádnou volbou  $x_1, x_2, x_3$ . Soustava proto nemá řešení. ▲

## 2.6 Gauss-Jordanova metoda

Při ekvivalentních úpravách se nemusíme zastavit u schodového tvaru. Jestliže podělíme každý řádek (tj. prvky každého řádku) vedoucím prvkem a pomocí transformace (2.7) upravíme matici dále tak, aby i nad vedoucím prvkem každého řádku byly nuly, dostaneme matici v **normovaném schodovém tvaru**.

**Gauss-Jordanova metoda** se od Gaussovy eliminace liší tím, že se při dopředné redukci upraví rozšířená matice soustavy na normovaný schodový tvar místo na schodový tvar. Zpětná substituce je pak snadnější a nemusí se provádět od poslední rovnice.

Například dodatečnou úpravou rozšířené matice soustavy (2.10) dostaneme

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - r_3 \\ r_2 - r_3 \\ \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Řešení soustavy se nachází v posledním sloupci matice vpravo, neboť rovnice, které odpovídají rozšířené matici soustavy napravo, jsou  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$  a  $x_3 = 2$ .

## 2.7 Pracnost řešení

Gaussova eliminace je velmi efektivní metoda pro ruční řešení malých soustav a pro počítačové řešení soustav stovek až tisíců rovnic. Metoda je velmi efektivní i pro počítačové řešení větších soustav se speciální strukturou rozložení nenulových prvků,

kteřá usnadňuje dopřednou redukci soustavy. Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější metody, které se rozvíjejí i v současné době.

Pracnost řešení soustavy metodou Gaussovy eliminace lze výstižně charakterizovat počtem násobení. Příímým výpočtem lze ověřit, že pro  $m = n$  vyžaduje dopředná redukce  $\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$  násobení, zatímco zpětná substituce vyžaduje asi  $\frac{1}{2}n(n-1)$  násobení. Pro velká  $n$  přitom platí

$$\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n \sim \frac{1}{3}n^3 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}n(n-1) \sim \frac{1}{2}n^2.$$

Dopředná redukce je tedy podstatně pracnější než zpětná substituce.

## 2.8 Příklady

**Příklad 2.6.** Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15. \end{aligned}$$

*Řešení.* Soustavu prepíšeme do maticového tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Gaussovou eliminací nyní upravíme rozšířenou matici soustavy:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array} \right] \begin{array}{l} 3r_2 \\ 3r_3 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 9 & 45 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 10 & 5 & 25 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{5}r_3 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} 11r_3 \end{array} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 22 & 11 & 55 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_3 - 2r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{21}r_3 \end{array} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 11x_2 - 5x_3 &= -4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Dosazením poslední rovnice do druhé dostaneme  $11x_2 - 5 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 1$  a nyní dosazením do první rovnice  $3x_1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x_1 = 2$ . Řešením tedy je vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Provedem ještě zkoušku:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Vektor  $\mathbf{x}$  je tedy opravdu řešením naší soustavy. ▲

## Příklady k procvičení

2.1. Zdůvodněte, proč není žádná z matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve schodovém tvaru.

2.2. Najděte schodový tvar matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  ze cvičení 2.1.

2.3. Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

2.4. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

- a) pomocí Gaussovy eliminace,
- b) pomocí Gauss–Jordanovy metody.

2.5. Gaussovou eliminační metodou vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2.6. Gaussovou eliminační metodou vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

2.7. Užitím Gaussovy eliminační metody najděte pro soustavu

$$\begin{aligned}6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 &= 1\end{aligned}$$

- a) všechna řešení.
- b) řešení pro  $x_2 = 1$ .

2.8. Užitím Gaussovy eliminační metody najděte pro soustavu

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5\end{aligned}$$

- a) všechna řešení.
- b) řešení pro  $x_2 = 1$ .

2.9. Řešte v  $\mathbb{R}$  soustavu rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3\end{aligned}$$

2.10. Řešte v  $\mathbb{C}$  soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + i \cdot x_2 - 2x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + 2i \cdot x_3 &= 10 \\ x_1 + 3i \cdot x_2 - (1 + i) \cdot x_3 &= 30\end{aligned}$$

2.11. Užitím Gaussovy eliminační metody určete, pro která  $a, b$  má daná soustava nekonečně mnoho řešení a vyjádřete tato řešení pomocí parametru  $p$ .

$$\begin{aligned}ax_1 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 &= 3\end{aligned}$$

**Klíč k příkladům k procvičení**

2.5.  $[x_1, x_2, x_3] = [3 - 2p, 1 - p, p], p \in \mathbb{R}$

2.6. nemá řešení

2.7. a)  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\frac{1+3p}{2}, p, 0, 0], p \in \mathbb{R}$ ; b)  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2, 1, 0, 0]$

2.8. a)  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [1 + p, p, -1 + 3p, 0], p \in \mathbb{R}$ ; b)  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2, 1, 2, 0]$

2.9.  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\frac{3}{5} - \frac{3}{2}s - \frac{1}{10}t, s, \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t, t], s, t \in \mathbb{R}$

2.10.  $[x_1, x_2, x_3] = [2 - 16i, 4 - 12i, 2 - 6i]$

2.11.  $a = 3, b = 4, [x_1, x_2, x_3] = [\frac{2-2p}{3}, \frac{-7+10p}{6}, p], p \in \mathbb{R}$

## Kapitola 3

# Aritmetické vektory

V rovnicích, které popisují elektrický obvod na obr. 1.1, se vyskytují skupiny veličin, jako je  $x_1, x_2, x_3$  nebo  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , kterým lze připsat společný fyzikální význam; zde potenciály nebo proudy obvodu z obr. 1.1.

V této kapitole budeme zkoumat, jak se s takovými skupinami manipuluje vcelku, což nám umožní jednodušším způsobem zapsat vztahy podobné těm, kterými jsme se zabývali v předcházejících kapitolách, aniž bychom měli před sebou stále všechny detaily. To nás přivede k aritmetickým vektorům a operacím s nimi.

### 3.1 Aritmetické vektory

$n$ -rozměrný **aritmetický vektor** je uspořádaná  $n$ -tice čísel, jejíž prvky se nazývají **složky**. Tyto uspořádané  $n$ -tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců. Například vektor proudů obvodu z 1.1 můžeme definovat předpisem  $\mathbf{i} = [I_1, I_2, I_3, I_4]$ .

Aritmetický vektor je určen svými složkami. Jestliže  $\mathbf{v}$  je aritmetický vektor, pak  $i$ -tou složku vektoru  $\mathbf{v}$  budeme značit  $[\mathbf{v}]_i$  (např.  $[\mathbf{i}]_1 = I_1$ ).

Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho **rozměrem** nebo též **dimenzí**. Například vektor  $\mathbf{u} = [1, 2]$  je dvourozměrný vektor,  $\mathbf{i}$  je čtyřrozměrný.

Dva aritmetické vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  považujeme za **stejné** (píšeme  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ), jestliže mají stejnou dimenzi  $n$  a stejné odpovídající složky, tj.  $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, \dots, [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$ . Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , které nejsou stejné, jsou **různé** (píšeme  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ ). Jestliže tedy  $\mathbf{u} = [1, 2]$  a  $\mathbf{v} = [2, 1]$ , pak  $[\mathbf{u}]_1 = 1, [\mathbf{v}]_1 = 2$ , takže  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ .

Dvourozměrné nebo třírozměrné aritmetické vektory si můžeme znázornit v dané kartézské soustavě souřadnic šipkami vedoucími od počátku do bodů, které mají stejné souřadnice jako příslušné vektory. Tyto šipky se také nazývají **polohové vektory** příslušných bodů. Jelikož všechny šipky vychází z jednoho bodu, nazývají se také **vázané vektory**.

Každý aritmetický vektor  $\mathbf{u}$  dimenze dvě nebo tři definuje **zobrazení posunutí**  $p_{\mathbf{u}}$ , které každý bod  $A$  posune do polohy  $p_{\mathbf{u}}(A)$  tak jako na obr. 3.1. Každý aritmetický vektor dimenze dvě nebo tři si tedy můžeme představit také jako zobrazení

posunutí.

Zobrazení  $p_{\mathbf{u}}$  je určeno libovolnou rovnoběžně přenesenou kopií polohového vektoru  $\mathbf{u}$  s počátkem v kterémkoliv bodu. Rovnoběžné kopie vektoru  $\mathbf{u}$  můžeme proto považovat za různé reprezentace jednoho a téhož aritmetického vektoru. V takovém případě mluvíme o **volných vektorech**.

Aritmetické vektory dimenze vyšší než tři si nemůžeme představit jako šipky. Můžeme si je však představovat jako funkce definované na indexech složek, jako na obr. 3.2. **Součin skaláru (čísla)  $\alpha$  a aritmetického vektoru  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$**  je vektor  $\alpha\mathbf{u}$  definovaný předpisem

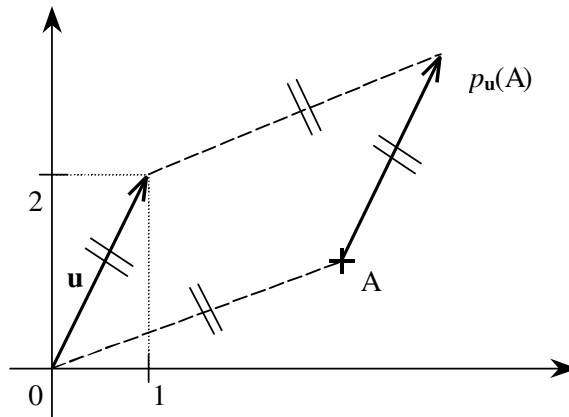
$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, \dots, \alpha u_n].$$

Pro složky  $\alpha\mathbf{u}$  tedy platí

$$[\alpha\mathbf{u}]_i = \alpha[\mathbf{u}]_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

například

$$\begin{aligned} 3[1, 2] &= [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [3, 6], \\ [3[1, 2]]_1 &= 3 \cdot 1 = 3, \quad [3[1, 2]]_2 = 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$



Obr. 3.1: Volné a vázané vektory.

**Součet aritmetických vektorů  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$  a  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]$**  stejné dimenze je vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  definovaný předpisem

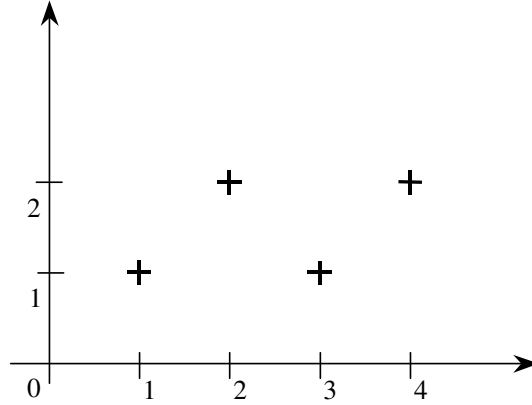
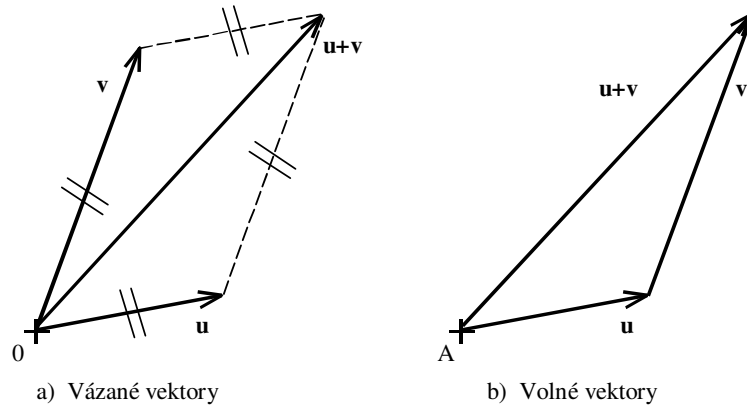
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n].$$

Pro složky  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  tedy platí

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

například

$$[1, 2] + [2, 3] = [1 + 2, 2 + 3] = [3, 5],$$

Obr. 3.2: Znázornění vektoru  $\mathbf{w} = [1, 2, 1, 2]$ .

Obr. 3.3: Součet vektorů.

$$[[1, 2] + [2, 3]]_1 = 1 + 2 = 3, \quad [[1, 2] + [2, 3]]_2 = 2 + 3 = 5.$$

Součet dvourozměrných nebo třírozměrných aritmetických vektorů lze znázornit jako na obr. 3.3.

Snadno se ověří, že pro libovolná čísla  $\alpha, \beta$  a vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  stejné dimenze platí:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (3.2b)$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad (3.2c)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad (3.2d)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \quad (3.2e)$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (3.2f)$$

Důkazy těchto tvrzení se provádí po složkách s využitím definic a vlastností čísel. Například vztah (3.2f) dokážeme pomocí vztahu (3.1) a vlastnosti čísla 1. Pro



libovolnou složku  $i$  dostaneme

$$[1\mathbf{u}]_i = 1[\mathbf{u}]_i = [\mathbf{u}]_i,$$

což dokazuje (3.2f).

Nové pojmy nám umožňují alternativní zápis vztahů z 1. kapitoly. Například vztah (1.1) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

## 3.2 Nulový a opačný vektor

Při počítání s vektory má zvláštní úlohu vektor  $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$ , který se nazývá **nulový vektor**, neboť má při sčítání vektorů stejnou úlohu jako číslo nula při sčítání čísel. Nulový vektor dimenze  $n$  budeme značit  $\mathbf{o}_n$  nebo  $\mathbf{o}$ , když lze určit  $n$  z předpokladu, že výraz, ve kterém se vyskytuje, má smysl. Je-li  $\mathbf{u}$  libovolný  $n$ -rozměrný vektor, pak nulový vektor dimenze  $n$  je jediný nulový vektor  $\mathbf{o}$ , který splňuje

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}.$$

Je-li vektor  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$  libovolný aritmetický vektor, pak se vektor

$$-\mathbf{u} = [-u_1, \dots, -u_n] = (-1)\mathbf{u}$$

nazývá **opačný vektor** k vektoru  $\mathbf{u}$ . Opačný vektor je jediný vektor, který splňuje

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

Jestliže  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor  $\mathbf{x}$ , který splňuje

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$$

lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}. \quad (3.4)$$

**Poznámka.** V rovnici (3.4) jsme se vyhnuli zápisu  $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , protože se v něm vyskytuje rozdíl aritmetických vektorů, který jsme si zatím nedefinovali. Mohli bychom to ovšem snadno dohnat předpisem

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}).$$

## Příklady k procvičení

3.1. Vypočtete, případně označte výrazy, které nejsou definovány:

- a)  $3 [1, 2]$
- b)  $[1, 2] + [3, 4]$
- c)  $[1, 2] + [1, 2, 3]$

3.2. Necht tři pracovníci  $P_1, P_2, P_3$  mají hodinové mzdy 50, 80 a 120 Kč v pracovní dny a 60, 100 a 150 Kč v sobotu a v neděli. Označme si  $\mathbf{p} = [50, 80, 120]$ ,  $\mathbf{s} = [60, 100, 150]$ .

- a) Vyčíslete  $40[\mathbf{p}]_1$  a  $[40\mathbf{p} + 8\mathbf{s}]_2$ .
- b) Jaký je význam  $40[\mathbf{p}]_1$  ve slovním vyjádření?
- c) Jaký je význam  $[40\mathbf{p} + 8\mathbf{s}]_2$  ve slovním vyjádření?

3.3. Necht  $\mathbf{u} = [1, 2]$  a  $\mathbf{v} = [2, 4]$ . Vypočtete vektor, který splňuje  $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ .

3.4. Dokažte vztah (3.2a).

3.5. Určete taxativně (výčtem prvků) množinu  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ , pokud

$$\begin{aligned} A_1 &= \{-1, 0, 1\} \\ A_2 &= \{1, 2\} \\ A_3 &= \{2, 3\} \\ A_4 &= \{0\}. \end{aligned}$$

3.6. Obsahuje množina  $\mathbb{N}^5$  prvek  $[0, 1, -1, 2, 1]$  nebo  $[2, 4, 6, 8]$ , přičemž  $\mathbb{N}$  je množina všech přirozených čísel? Své rozhodnutí zdůvodněte.

3.7. Rovnají se vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ , pokud

$$\mathbf{u} = [\ln \sqrt{e}, \cos \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{3}], \quad \mathbf{v} = [\sin \frac{\pi}{6}, \log 1, \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{6}]?$$

Své rozhodnutí zdůvodněte.

3.8. Patří do  $\mathbb{R}^5$  aritmetický vektor  $[\sqrt{-2}, e, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}, -1, \ln(-3)]$ ? Své rozhodnutí zdůvodněte.

3.9. Vypočítejte

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln e^2}, -\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{5\pi}{6} \right] - 2 \left[ \cos \frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2 \sin(\frac{-\pi}{2})}, \sqrt{\frac{\log 10^4 - 4 \operatorname{tg}(\frac{-\pi}{4})}{8}} \right].$$

3.10. Dokažte, že pro každé  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  a  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  platí

- a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- b)  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
- c)  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ .

3.11. Určete výpočtem i graficky

$$\frac{1}{2}[-4, -2] + 2[1, 2].$$

**Klíč k příkladům k procvičení**

3.5.  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = \{[-1, 1, 2, 0], [-1, 1, 3, 0], [-1, 2, 2, 0], [-1, 2, 3, 0], [0, 1, 2, 0],$   
 $[0, 1, 3, 0], [0, 2, 2, 0], [0, 2, 3, 0], [1, 1, 2, 0], [1, 1, 3, 0], [1, 2, 2, 0], [1, 2, 3, 0]\}$

3.6. Ne

3.7. Ano

3.8. Ne

3.9.  $[1, 0, -3]$

## Kapitola 4

# Matice a vektorové operace

Při sdružování informací do složitějších celků se nemusíme zastavit u aritmetických vektorů. Například tři sloupcové vektory na pravé straně výrazu (3.3) obsahují informaci o spojení uzlů sítě z obrázku 1.1, takže spojení uzlů sítě je popsáno tabulkou

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Podobné tabulky vznikají v mnoha dalších situacích, s nimiž se postupně seznámíme. Nejsou pro nás úplnou novinkou, neboť jsme je v části 2.2 použili ke stručnému zápisu soustav rovnic a zavedli jsme si pro ně název matice. Nyní budeme matice považovat za svébytné matematické objekty a naučíme se s nimi počítat. V této kapitole se omezíme na rozšíření operací sčítání a násobení skalárem na matice.

### 4.1 Definice a označení

Nechť jsou dány prvky  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  z dané množiny  $\mathcal{F}$ , jejíž prvky lze sčítat a násobit obdobně jako čísla. Prvky množiny  $\mathcal{F}$  nazýváme také **skaláry**. **Matice** typu  $(m, n)$  (stručně  $m \times n$  matice) je obdélníková tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

která má  $mn$  **prvků**  $a_{ij}$  uspořádaných do  $m$  **řádků**  $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$  a  $n$  **sloupců**  $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$ , takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}],$$

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, \dots, a_{in}], \quad \mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ . Množinu všech matic typu  $(m, n)$  s prvky z množiny  $\mathcal{F}$  budeme značit  $\mathcal{F}^{m,n}$ .

Jestliže  $m = n$ , pak se  $\mathbf{A}$  nazývá **čtvercová matice** řádu  $n$ . Matici typu  $(1, n)$  nazýváme **řádkovým vektorem** řádu  $n$ , matici typu  $(m, 1)$  nazýváme **sloupcovým vektorem** řádu  $m$ . Kromě řádků a sloupců matice  $\mathbf{A}$  je význačnou částí matice její **diagonála** tvořená prvky  $a_{11}, \dots, a_{ss}$ ,  $s = \min\{m, n\}$ . Diagonála matice  $\mathbf{C}$  z (4.1) je tedy tvořena prvky 1, 1, -1.

Matice obvykle značíme velkými písmeny, která mohou být vysázena tučně. Prvek v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{A}$  budeme značit  $[\mathbf{A}]_{ij}$ , takže pro matici  $\mathbf{C}$  z (4.1) platí  $[\mathbf{C}]_{21} = -1$ . Množinu  $\mathcal{F}$ , která obsahuje prvky matice, budeme v případě potřeby specifikovat příslušným přídavným jménem, takže budeme mluvit o **reálných maticích**, **komplexních maticích**, **polynomiálních maticích** atd.

Dvě matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  považujeme za **stejné** (píšeme  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj.  $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$ . Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ , které nejsou stejné, jsou **různé** (píšeme  $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ). Například

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq [1, 2], \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Operace sčítání a násobení číslem (skalárem), které jsme si zavedli pro aritmetické vektory, můžeme přirozeně rozšířit na matice. **Součín skaláru  $\alpha$  a matice  $\mathbf{A}$**  je matice  $\alpha\mathbf{A}$  stejného typu jako  $\mathbf{A}$  definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}.$$

Například

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obdobně **součet matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$**  stejného typu je matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  stejného typu jako  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  definovaná předpisem

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}.$$

Například

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro ilustraci smyslu právě zavedených operací s maticemi označme  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{P}$  matice doby letu a časových nároků na dopravu z centra města na letiště a zpět v minutách mezi městy Ostravou (O), Prahou (P) a Brnem (B).

$$\mathbf{L} = \begin{array}{c} \text{O} \text{ P } \text{B} \\ \text{O} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 50 & 40 \\ 50 & 0 & 30 \\ 40 & 30 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{O} \text{ P } \text{B} \\ \text{O} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 100 & 100 \\ 100 & 0 & 100 \\ 100 & 100 & 0 \end{array} \right]. \\ \text{P} \\ \text{B} \end{array}$$

Pak matice  $\mathbf{T} = \mathbf{L} + \mathbf{P}$  obsahuje čas potřebný na cestu mezi uvažovanými městy v minutách. V matici  $\frac{1}{60}\mathbf{T}$  je tentýž čas v hodinách.

Jelikož obě nové operace jsou definovány po složkách, obdobně jako odpovídající operace pro aritmetické vektory, platí pro jakékoliv číselné matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  stejného typu a pro libovolné skaláry  $\alpha, \beta$  vztahy obdobné vztahům (3.2):

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (4.2b)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \quad (4.2c)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \quad (4.2d)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \quad (4.2e)$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (4.2f)$$

### 4.3 Nulová matice a odečítání matic

Při sčítání matic má obdobnou úlohu jako nula při sčítání čísel nebo nulový vektor při sčítání vektorů **nulová matice**

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

jejíž všechny prvky jsou nuly. Snadno se ověří, že pro libovolnou matici  $\mathbf{A}$  a nulovou matici stejného typu platí

$$[\mathbf{A} + \mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + 0 = [\mathbf{A}]_{ij},$$

takže

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}.$$

Nulovou matici typu  $(m, n)$  značíme také  $\mathbf{O}_{mn}$ , avšak indexy obvykle vynecháváme, když je lze určit z předpokladu, že daný maticový výraz má smysl.

Obdobně, jako jsme si zavedli po složkách opačný vektor, můžeme ke každé číselné matici  $\mathbf{A}$  definovat **matici opačnou**  $-\mathbf{A}$  předpisem

$$[-\mathbf{A}]_{ij} = [(-1)\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij},$$

takže platí

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= \mathbf{O} \\ -\mathbf{A} &= (-1)\mathbf{A}\end{aligned}$$

Jestliže matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici  $\mathbf{X}$ , která splňuje

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}. \quad (4.3)$$

Pro stručnější psaní výrazů, jako je (4.3), definujeme **odečítání matic** nebo též **rozdíl matic** předpisem

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

## 4.4 Matice rozdělené na bloky

V některých případech je výhodné rozdělit danou matici pomocí vhodně zvolených horizontálních či vertikálních čar na menší matice, zvané též **submatice** nebo **bloky**. Například následující matici typu  $(3, 4)$  můžeme rozdělit na čtyři bloky

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{array} \right]. \quad (4.4)$$

Matice, jejichž prvky jsou uspořádány do bloků, nazýváme **blokové matice**.

Rozdělení na bloky je užitečné při odvozování vztahů, ve kterých figurují části matice, a při manipulaci s velkými maticemi, neboť ty mohou být postupně prováděny po blocích. Například, je-li matice  $\mathbf{B}$  typu  $(3, 4)$  rozdělena na bloky  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$ , stejně jako matice  $\mathbf{A}$  z (4.4), pak

$$\alpha\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} \alpha\mathbf{C} & \alpha\mathbf{D} \\ \alpha\mathbf{E} & \alpha\mathbf{F} \end{array} \right], \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{C} + \mathbf{P} & \mathbf{D} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{E} + \mathbf{R} & \mathbf{F} + \mathbf{S} \end{array} \right].$$

Pro blokové matice používáme obdobnou terminologii jako pro běžné matice, takže mluvíme o **blokové diagonále** nebo o **blokových rádcích**. Například matice

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

má nenulové pouze diagonální bloky.

## Příklady k procvičení

4.1. Určete, pro které dvojice následujících matic lze vypočítat součet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2. Určete, pro která  $x, y, z$  je splněna maticová rovnost

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ z & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3. Obchodní síť má 3 prodejny, které prodávají 2 produkty spotřební elektroniky. Předpokládejme, že odbyt v prvním a druhém pololetí je zapsán do matic  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{D}$  typu  $(3, 2)$  tak, že v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci je prodej  $j$ -tého produktu v  $i$ -té prodejně. Necht

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 120 & 100 \\ 80 & 120 \\ 100 & 80 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 140 & 120 \\ 100 & 100 \\ 160 & 180 \end{bmatrix}.$$

- a) Vypočtete  $\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{D}$  a  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{D})$ .
- b) Jaký je význam prvků  $[\mathbf{S}]_{21}$  a  $[\mathbf{A}]_{21}$ ?

4.4. Dokažte vztah (4.2a).

4.5. Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Najděte matici  $\mathbf{C}$ , pro niž platí  $\mathbf{C} = 2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ .

4.6. Dokažte, že pro každou matici  $\mathbf{A}$  a reálná čísla  $r, s$  platí

- a)  $(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$ ,
- b)  $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$ .

## Klíč k příkladům k procvičení

4.5.  $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$



## Kapitola 5

# Násobení a transponování matic

### 5.1 Násobení matice a vektoru

Znovu se vraťme ke vztahu (3.3). Jeho pravá strana je sestavena ze složek vektoru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

a ze sloupců matice  $\mathbf{C}$  z (4.1). Takový výraz budeme považovat za součin  $\mathbf{C}\mathbf{x}$  matice  $\mathbf{C}$  a sloupcového vektoru  $\mathbf{x}$ , takže

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{C}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{C}}.$$

Obecně definujeme **součin matice**  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  typu  $(m, n)$  **a sloupcového vektoru**  $\mathbf{x} = [x_i]$  dimenze  $n$  předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \dots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}. \quad (5.1)$$

Rozepsáním definice (5.1) po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{x}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ a_{i1} \quad \dots \quad a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \downarrow$$

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & + & 1 \cdot 2 & + & 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & + & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Pro libovolné matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  typu  $(m, n)$ ,  $n$ -rozměrné vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  a skalár  $\alpha$  platí:

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\alpha \mathbf{A})\mathbf{u} \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (5.2b)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.2c)$$

Rovnosti (5.2) se dokazují po složkách. Tím se vlastně redukuje na důkaz tvrzení pro matice typu  $(1, n)$ . Například s použitím definic a vlastností sčítání a násobení čísel dostáváme

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a_{i1}(u_1 + v_1) + \dots + a_{in}(u_n + v_n) = \\ &= (a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n) = \\ &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{v} = [\mathbf{A}\mathbf{u}]_i + [\mathbf{A}\mathbf{v}]_i, \end{aligned}$$

což dokazuje (5.2b).

Pomocí součinu matice a vektoru si můžeme stručně zapsat vztahy mezi napětím, potenciály a proudy obvodu z obr. 1.1. Označme si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Potom (1.1), (1.2) a (1.4) lze zapsat postupně ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \text{a} \quad (-\mathbf{C}^T)\mathbf{i} = \mathbf{c}.$$

Postupným dosazením s použitím  $-\mathbf{C}^T = (-1)\mathbf{C}^T$  dostaneme

$$-\mathbf{C}^T(\mathbf{D}(\mathbf{C}\mathbf{x})) = \mathbf{c}. \quad (5.4)$$

Specifikací matice  $\mathbf{D}$ , dosazením  $x_3 = 0$  a vynecháním poslední složky vektorů na obou stranách rovnice (5.4) dostaneme výraz ekvivalentní (1.5).

## 5.2 Násobení matic

Ačkoliv jsou koeficienty rovnice (1.5) plně určeny maticemi  $\mathbf{C}^\top$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{C}$ , výraz (5.4) nám je umožňuje vypočítat pouze s pomocí neznámých potenciálů  $x_1, x_2, x_3$ . Naším cílem teď bude toto omezení překonat.

Podívejme se nejprve podrobněji na výraz  $\mathbf{D}(\mathbf{C}\mathbf{x})$ . S použitím (5.2) dostaneme

$$\mathbf{D}(\mathbf{C}\mathbf{x}) = \mathbf{D} (x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{C}} + x_2 \mathbf{s}_2^{\mathbf{C}} + x_3 \mathbf{s}_3^{\mathbf{C}}) = x_1 \mathbf{D}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}} + x_2 \mathbf{D}\mathbf{s}_2^{\mathbf{C}} + x_3 \mathbf{D}\mathbf{s}_3^{\mathbf{C}},$$

odkud s pomocí nového označení

$$\mathbf{DC} = [\mathbf{D}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \mathbf{D}\mathbf{s}_2^{\mathbf{C}}, \mathbf{D}\mathbf{s}_3^{\mathbf{C}}] \quad (5.5)$$

a definice součinu matice a vektoru (5.1) dostaneme

$$\mathbf{D}(\mathbf{C}\mathbf{x}) = (\mathbf{DC})\mathbf{x}.$$

Vztah (5.5) je vzorem obecné definice součinu matic. Jestliže  $\mathbf{A}$  je matice typu  $(m, p)$  a  $\mathbf{B}$  je matice typu  $(p, n)$ , pak *součin matic*  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je matice  $\mathbf{AB}$  typu  $(m, n)$  definovaná předpisem

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}}]. \quad (5.6)$$

Rozepíšeme-li si tuto definici po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Při odvození rovnosti (5.7) jsme pro každý řádek použili definici (5.6) s tím, že za levou matici jsme si postupně dosazovali řádky matice  $\mathbf{A}$ . Pravidlo pro násobení matic lze také znázornit pomocí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AB} \\ [\mathbf{AB}]_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ a_{i1} \quad \dots \quad a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix} \downarrow \end{bmatrix}.$$

Jako příklady násobení matic si uvedme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Povšimněme si, že definice součinu dvou matic je zvolena tak, aby platilo

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x} \quad (5.8)$$

pro libovolné matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a sloupcový vektor  $\mathbf{x}$ , pro které má alespoň jeden z výrazů význam. Levou stranu rovnice (5.4) tedy můžeme zapsat ve tvaru součinu matice a vektoru  $\mathbf{x}$ , neboť

$$-\mathbf{C}^T(\mathbf{D}(\mathbf{C}\mathbf{x})) = -(\mathbf{C}^T\mathbf{D})(\mathbf{C}\mathbf{x}) = -((\mathbf{C}^T\mathbf{D})\mathbf{C})\mathbf{x}.$$

Na možnost vynechání vnitřních závorek se podíváme v článku 5.3.

## 5.3 Pravidla pro násobení matic

Z definice (5.6) vyplývá, že pro součin matic platí obdobná pravidla jako pro násobení matice a vektoru (5.2), takže pro skalár  $\alpha$  a matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  platí

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \quad (5.9b)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}, \quad (5.9c)$$

kdykoliv jsou příslušné výrazy definovány. Tato pravidla připomínají známá aritmetická pravidla pro počítání s čísly.

Pro násobení matice  $\mathbf{A}$  typu  $(m, p)$ , matice  $\mathbf{B}$  typu  $(p, q)$  a matice  $\mathbf{C}$  typu  $(q, n)$  platí také **asociativní zákon**

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (5.10)$$

neboť podle definice součinu matic a (5.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) &= \mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{s}_1^C, \dots, \mathbf{B}\mathbf{s}_n^C] = [\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_1^C), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_n^C)] = \\ &= [(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{s}_1^C, \dots, (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{s}_n^C] = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}. \end{aligned}$$

Z asociativního zákona (5.10) plyne, že výsledek součinu tří matic nezávisí na rozmístění závorek, které proto můžeme vynechat. Indukcí lze dokázat obdobné tvrzení i pro součin více než tří matic. Odtud speciálně vyplývá, že **mocnina čtvercové matice**

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_k$$

je definována jednoznačně v tom smyslu, že nezáleží na „uzávorkování“ při jejím vyčíslení. Odtud bezprostředně plyne

$$\mathbf{A}^{k+l} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_k \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_l = \mathbf{A}^k \mathbf{A}^l.$$

S použitím asociativního zákona můžeme upravit levou stranu rovnice (5.4) na

$$-(\mathbf{C}^\top \mathbf{D} \mathbf{C}) \mathbf{x} = \mathbf{c}.$$

Stojí za povšimnutí, že tento vztah nám umožňuje vyčíslit matici soustavy nezávisle na  $\mathbf{x}$ , zatímco (5.4) nám umožňoval pouze ověřit, zda pro dané  $\mathbf{x}$  platí příslušná rovnost.

Úlohu jedničky při násobení matic má **jednotková matice**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednotkovou matici řádu  $n$  značíme také  $\mathbf{I}_n$ , avšak index obvykle vynecháváme, když ho můžeme určit z předpokladu, že daný maticový výraz má smysl. Jestliže  $\mathbf{A}$  je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Například

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & & \mathbf{I} \\ & & & \\ i & \begin{bmatrix} & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ j \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \\ & \begin{matrix} 1 & j & n \end{matrix} & j & \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} & \end{matrix} = a_{ij}.$$

Zatím jsme si ukázali pravidla pro počítání s maticemi, která jsou obdobná pravidlům pro počítání s čísly. To nás však nesmí vést k ukvapenému závěru, že se s maticemi počítá úplně stejně jako s čísly. Například pro

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

takže

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Pro násobení matic tedy **neplatí komutativní zákon** a **mocnina nenulové matice** může být **nulová matice**!

## 5.4 Transponované matice

Porovnáme-li matice  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{C}^\top$  v (5.3), zjistíme, že řádky matice  $\mathbf{C}$  jsou tvořeny sloupci matice  $\mathbf{C}^\top$  a obráceně. Matici takto vytvořenou z dané matice nazýváme **maticí transponovanou**. Formálněji, k dané matici  $\mathbf{A}$  typu  $(m, n)$  definujeme matici transponovanou  $\mathbf{A}^\top$  typu  $(n, m)$  předpisem

$$[\mathbf{A}^\top]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}.$$

Například

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Snadno se ověří po složkách, že pro matice stejného typu platí:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top &= \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \\ (\alpha \mathbf{A})^\top &= \alpha \mathbf{A}^\top \end{aligned}$$

Například

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top]_{ij} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ji} = [\mathbf{A}]_{ji} + [\mathbf{B}]_{ji} = [\mathbf{A}^\top]_{ij} + [\mathbf{B}^\top]_{ij}.$$

Jestliže je  $\mathbf{A}$  matice typu  $(m, p)$  a  $\mathbf{B}$  je matice typu  $(p, n)$ , pak platí:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top \quad (!) \quad (5.12)$$

Na první pohled překvapivá identita plyne z toho, že transponováním se vymění řádky se sloupci, takže

$$[(\mathbf{AB})^\top]_{ij} = [\mathbf{AB}]_{ji} = \mathbf{r}_j^\mathbf{A} \mathbf{s}_i^\mathbf{B} = (\mathbf{s}_i^\mathbf{B})^\top (\mathbf{r}_j^\mathbf{A})^\top = [\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top]_{ij}.$$

## 5.5 Násobení a transponování blokových matic

Již v části 4.4 jsme viděli, že blokové matice lze sčítat podle stejných pravidel po prvcích i blocích. Ještě důležitější však je, že i pravidlo pro násobení matic lze pro blokové matice s vhodnou strukturou uplatnit po blocích. Například rovnost

$$\left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + a_{13}x_3 \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + a_{23}x_3 \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2) + a_{33}x_3 \end{array} \right]$$

můžeme zapsat pomocí označení

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \quad \text{a} \quad \left[ \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \quad (5.13)$$

ve tvaru

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B}\mathbf{y} & + & \mathbf{C}\mathbf{z} \\ \mathbf{D}\mathbf{y} & + & \mathbf{E}\mathbf{z} \end{array} \right].$$

Příklad lze zobecnit na vyčíslení součinu libovolných blokových matic. Jestliže

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{np} \end{array} \right], \quad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \dots & \mathbf{B}_{pn} \end{array} \right]$$

jsou dvě blokové matice rozdělené na bloky tak, že počet sloupců bloků  $\mathbf{A}_{ik}$  je stejný jako počet řádků bloků  $\mathbf{B}_{kj}$ , pak se libovolný blok  $\mathbf{C}_{ij}$  součinu  $\mathbf{AB}$  vyčíslí podle pravidla

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \dots + \mathbf{A}_{ip}\mathbf{B}_{pj}. \quad (5.14)$$

Pravidlo pro transponování blokových matic lze snadno pochopit, když si prohlédneme, jak se transponují blokový vektor a bloková matice (5.13). Dostaneme

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array} \right]^\top = \left[ \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{y}^\top & \mathbf{z}^\top \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \right]^\top = \left[ \begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B}^\top & \mathbf{D}^\top \\ \mathbf{C}^\top & \mathbf{E}^\top \end{array} \right].$$

Obecnou blokovou matici tedy transponujeme tak, že zaměníme řádky se sloupci a každý blok navíc transponujeme.

## Příklady k procvičení

5.1. Necht

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vypočtěte

$$\mathbf{MA}, \quad \mathbf{AM}, \quad \mathbf{PA}, \quad \mathbf{AP}, \quad \mathbf{AG}, \quad \mathbf{GA}.$$

Popište výsledky v termínech operací s řádky či sloupci matic.

5.2. Vypočtěte  $\mathbf{C}^\top \mathbf{C}$  pro matice ze vztahu (5.3) a porovnejte výsledek s maticí soustavy (1.5).

5.3. Je dána matice  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vypočtěte  $\mathbf{Av}$ .

5.4. Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vypočtěte matici  $\mathbf{AB}$ .

5.5. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Určete matici  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$ .

## Klíč k příkladům k procvičení

$$5.3. \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$5.4. \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5.5. \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 10 \\ 4 & 7 & 8 \\ 16 & -2 & 15 \end{bmatrix}$$



## Kapitola 6

### Inverzní matice

V této kapitole se vrátíme k řešení soustav lineárních rovnic, avšak elementární úpravy z oddílu 2.2 budeme zapisovat pomocí maticových operací. Získáme tak nejen nový pohled na známé algoritmy, ale postupně se seznámíme s maticí, která se chová vzhledem k násobení matic jako převrácené nenulové číslo vzhledem k násobení čísel.

#### 6.1 Maticový zápis elementárních úprav

Nejprve si všimněme, že násobení maticí zleva lze popsat jako manipulaci s řádky násobené matice. Například pro matice  $\mathbf{T} = [t_{ij}]$  a  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  řádu dvě platí

$$\mathbf{TA} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + t_{12}\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ t_{21}\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + t_{22}\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix}.$$

Vhodnou volbou  $\mathbf{T}$  pak můžeme dosáhnout toho, aby matice  $\mathbf{A}' = \mathbf{TA}$  byla právě maticí, která vznikne z  $\mathbf{A}$  zvolenou elementární úpravou. Například matice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

provede výměnu 1. a 2. řádku, tedy elementární úpravu (e1) z oddílu 2.2.

K nalezení všech matic, které realizují elementární úpravy z 2.2, tedy výměnu řádků, násobení řádku nenulovým číslem a přičtení násobku některého řádku k jinému, stačí provést tyto úpravy na jednotkové matici  $\mathbf{I}$ . Jestliže  $\mathbf{T}$  je matice, která realizuje některou elementární transformaci, tj.  $\mathbf{A}' = \mathbf{TA}$  vznikne z  $\mathbf{A}$  nějakou pevně zvolenou elementární transformací, pak také  $\mathbf{I}' = \mathbf{TI} = \mathbf{T}$  vznikne z jednotkové matice  $\mathbf{I}$  toutéž transformací. Například výměnu řádků v matici typu  $(2, n)$  realizuje matice, kterou dostaneme z jednotkové matice výměnou příslušných řádků, tedy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}' = \mathbf{T}.$$

Skutečně,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pro elementární úpravy matic typu  $n \times m$  dostaneme následující tři matice řádu  $n$ :

(r1) Výměna  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku.

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_j \\ \\ r_i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{ij} \quad (6.1)$$

(r2) Násobení  $i$ -tého řádku nenulovým číslem  $\alpha$ .

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \alpha r_i \mapsto \begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i(\alpha)$$

(r3) Přičtení násobku  $i$ -tého řádku k  $j$ -tému řádku.

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_j + \alpha r_i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{ij}(\alpha) \quad (6.2)$$

Matice  $\mathbf{P}_{ij}$  se nazývá **elementární permutační matice**, zatímco  $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$  se nazývá **matice Gaussovy transformace**.

## 6.2 Inverzní matice

**Definice 6.1.** Necht  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice. Jestliže existuje matice  $\mathbf{B}$  tak, že

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

pak se matice  $\mathbf{B}$  nazývá **inverzní maticí** k matici  $\mathbf{A}$ . Čtvercová matice, ke které existuje inverzní matice, se nazývá **regulární**. V opačném případě takovou matici nazýváme **singulární**.

**Věta 6.2.** Ke každé regulární matici  $\mathbf{A}$  existuje právě jedna inverzní matice.

*Důkaz.* Necht  $\mathbf{A}$  je regulární a necht  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  jsou inverzní matice k matici  $\mathbf{A}$ , takže platí

$$\mathbf{AB}_1 = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Vynásobíme-li první rovnost zleva maticí  $\mathbf{B}_2$  a druhou rovnici zprava  $\mathbf{B}_1$ , dostaneme

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{AB}_1 = \mathbf{B}_1.$$

□

Jedinou inverzní matici k dané regulární matici  $\mathbf{A}$  budeme nadále značit  $\mathbf{A}^{-1}$ .

V obecném případě je poměrně obtížné rozhodnout, je-li daná matice regulární nebo singulární. Jestliže však má daná matice celý řádek nulový, pak je určité singulární, neboť má-li matice  $\mathbf{A}$  nulový řádek a je-li  $\mathbf{B}$  libovolná matice, pak platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}. \quad (6.3)$$

## 6.3 Elementární úpravy a regularita

Nyní si ukážeme, že elementárními úpravami se zachovává regularita matic. Nejprve si všimneme, že jsou-li matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  regulární, potom je také matice  $\mathbf{AB}$  regulární a platí

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (6.4)$$

neboť

$$\mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

Vztah (6.4) lze pomocí matematické indukce zobecnit na

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}. \quad (6.5)$$

Dále si všimneme, že matice elementárních transformací jsou regulární. Příslušné inverzní matice najdeme tak, že sestrojíme matice ekvivalentních úprav, které převádí upravenou soustavu na původní a jsou popsány na konci oddílu 2.1. Dostaneme vzorce

$$\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}, \quad \mathbf{M}_i^{-1}(\alpha) = \mathbf{M}_i(\alpha^{-1}) \text{ pro } \alpha \neq 0, \quad \mathbf{G}_{ij}^{-1}(\alpha) = \mathbf{G}_{ij}(-\alpha). \quad (6.6)$$

K matici každé elementární transformace  $\mathbf{T}$  tedy existuje inverzní matice  $\mathbf{T}^{-1}$ . Jestliže matice  $\mathbf{A}'$  vznikne z regulární matice  $\mathbf{A}$  elementárními řádkovými úpravami, pak

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$$

a z (6.5) dostaneme

$$(\mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_k^{-1},$$

tedy  $\mathbf{A}'$  je regulární.

## 6.4 Výpočet inverzní matice

**Věta 6.3.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Pak rovnice*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (6.7)$$

*má jediné řešení  $\mathbf{X}$  právě tehdy, když  $\mathbf{A}$  je regulární. V tom případě platí  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ .*

*Důkaz.* Jestliže  $\mathbf{A}$  je regulární, pak přenásobením obou stran rovnice (6.7) zleva maticí  $\mathbf{A}^{-1}$  dostaneme  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ .

Obráceně, jestliže rovnice  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$  má jediné řešení, pak rozšířenou matici  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$  je možno pomocí ekvivalentních řádkových úprav převést na tvar  $[\mathbf{I} \mid \mathbf{B}]$ . Podle pravidel z oddílu 6.1 potom existují elementární matice transformací  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$  tak, že pro matici  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$  platí

$$\mathbf{T} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{B}].$$

Roznásobíme-li matice vlevo podle pravidla o násobení blokových matic (5.14), dostaneme porovnáním obou částí rozšířené matice

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Jelikož matice  $[\mathbf{I} \mid \mathbf{B}]$  vznikla z  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$  ekvivalentními řádkovými úpravami, má rovnice (6.7) jediné řešení  $\mathbf{X}$ , které je řešením soustavy

$$\mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

tedy  $\mathbf{X} = \mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ . □

Právě dokázaná věta redukuje výpočet inverzní matice na řešení rovnice (6.7) s několika pravými stranami.

**Příklad 6.4.** Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jestliže ano, vypočtěte  $\mathbf{A}^{-1}$ .

*Řešení.* Postupnou úpravou rozšířené matice pro soustavu  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$  dostaneme

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 + \frac{1}{2}r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 + \frac{2}{3}r_2 \end{array} \mapsto \\ &\mapsto \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{2}{3}r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]. \end{aligned}$$

Matice  $\mathbf{A}$  je tedy regulární a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

▲

## 6.5 Inverzní matice a řešení soustav

Nechť  $\mathbf{A}$  je daná regulární matice. Vynásobíme-li soustavu

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

maticí  $\mathbf{A}^{-1}$  zleva, dostaneme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Odtud a z jednoznačnosti inverzní matice vyplývá důležitá věta:

**Věta 6.5.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je regulární matice a nechť  $\mathbf{b}$  je sloupcový vektor stejného řádu. Pak má soustava  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  jediné řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .*

**Příklad 6.6.** Najděte řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

pomocí inverzní matice.

*Řešení.* Soustavu (6.9) lze zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

S využitím výsledku (6.8) příkladu 6.4 dostaneme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

▲

## 6.6 Vyčíslení výrazů s inverzní maticí

Při vyčíslení výrazů s inverzní maticí je většinou výhodné vyhnout se explicitnímu vyjádření inverzní matice tím, že se vyčíslení součinu inverzní matice s vektorem či maticí převede na řešení soustavy lineárních rovnic.

**Příklad 6.7.** Necht

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyčíslete  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bb}$ .

*Řešení.* Nejprve vypočteme vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektor  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$  je jediným řešením rovnice  $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ , kterou vyřešíme Gaussovou eliminací

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \end{array} \right]_{r_1 + r_2} \mapsto \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \end{array} \right],$$

odkud  $x_1 = \frac{13}{2}, x_2 = 10$ . Tedy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 10 \end{bmatrix}.$$

▲

**Poznámka.** Násobení matic je sice asociativní, takže platí

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Bb}),$$

avšak pracnost vyčíslení obou výrazů je rozdílná!

## 6.7 Použití inverzní matice

Rozborem počtu operací zjistíme, že k výpočtu inverzní matice řádu  $n$  je třeba asi  $n^3$  násobení. Srovnáme-li toto číslo s počtem násobení potřebným k řešení soustavy Gaussovou eliminací uvedeným v oddílu 2.7, dojdeme k závěru, že se inverzní matici *nevyplatí* používat pro řešení jedné soustavy rovnic, avšak *může se vyplatit* při řešení soustavy s větším počtem pravých stran, neboť je-li inverzní matice k dispozici, je pak k vlastnímu řešení zapotřebí pouze  $n^2$  operací. V kapitole 7 si však ukážeme algoritmus, se kterým lze dosáhnout stejného výsledku za nejméně polovičních nákladů na přípravu řešení. Inverzní matice je tedy spíš důležitý teoretický nástroj pro řešení technických problémů než prostředek k efektivnímu provádění numerických výpočtů.

## 6.8 Příklady

**Příklad 6.8.** Pomocí řádkových úprav převedte matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

na horní trojúhelníkovou matici  $\mathbf{U}$ . Zkonstruuje transformální matice jednotlivých řádkových úprav a transformální matici  $\mathbf{T}$  takovou, že  $\mathbf{U} = \mathbf{TA}$ .

*Řešení.* Pomocí řádkových úprav převedeme matici  $\mathbf{A}$  na horní trojúhelníkovou:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{2r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{5r_3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} = \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Odpovídající matice elementárních řádkových úprav mají postupně tvary:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tzn., že jsme prováděli následující násobení matic:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{T}_3 \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{T}_4 \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{U} = \mathbf{T}_5 \mathbf{A}_4.$$

Postupným dosazením dostaneme vztah:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{T}_5 (\mathbf{T}_4 (\mathbf{T}_3 (\mathbf{T}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{A})))) = (\mathbf{T}_5 \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1) \mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{A},$$

tedy

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matice  $\mathbf{T}$  tedy transformuje matici  $\mathbf{A}$  na matici  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{T} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

▲

**Příklad 6.9.** Najděte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Řešení.*

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2r_2 \\ 2r_3 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \end{array} \mapsto \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ 2r_3 \end{array} \mapsto \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_3 + 3r_2 \end{array} \mapsto \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - 3r_3 \\ r_2 + 3r_3 \end{array} \mapsto \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 4 & -18 & -12 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 20 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \\ -\frac{1}{4}r_2 \end{array} \mapsto \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$



Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

a zkontrolujeme

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

▲

## Příklady k procvičení

6.1. Napište matice  $\mathbf{P}_{23}$ ,  $\mathbf{M}_2(3)$  a  $\mathbf{G}_{23}(4)$  (viz oddíl 6.1) pro elementární transformace matic, které mají 3 řádky a ověřte si jejich účinek na matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

6.2. Vypište matice elementárních transformací, které realizují elementární úpravy v příkladu 6.4.

6.3. Určete matici  $\mathbf{X}$  tak, aby platilo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

6.4. Určete matici  $\mathbf{X}$  tak, aby platilo

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.5. Určete matici  $\mathbf{X}$  tak, aby platilo

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.6. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu (3,3) aby došlo k výměně 2 a 3 sloupce?

6.7. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu (4,4) aby došlo k výměně 1 a 3 sloupce?

6.8. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu 3/3 aby se provedla operace

$$r_1 - r_2 + 5r_3 \rightarrow r_2$$

6.9. Necht

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{U} = \mathbf{L}^\top.$$

Vypočtěte  $\mathbf{L}^{-1}$ ,  $\mathbf{U}^{-1}$  a rozhodněte, zda

$$(\mathbf{L}^\top)^{-1} = (\mathbf{L}^{-1})^\top.$$

6.10. Vypočtěte  $\mathbf{A}^{-1}$  pro

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Povšimněte si zaplnění inverzní matice nenulovými prvky ve srovnání s původní maticí.

6.11. Dokažte, že pro libovolnou regulární matici  $\mathbf{A}$  platí

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

NÁPOVĚDA: Stačí ověřit, že  $(\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}$ .

6.12. Určete inverzní matici  $\mathbf{A}^{-1}$  k matici  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.13. Určete inverzní matici  $\mathbf{A}^{-1}$  k matici  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.14. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

a) určete matici  $\mathbf{A}^{-1}$

b) pomocí matice  $\mathbf{A}^{-1}$  určete řešení soustavy rovnic:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13$$

6.15. Užitím inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = -1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1$$

6.16. Vypočítejte výhodně maticový výraz  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.17. Užitím inverzní matice řešte soustavu rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{D}$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### Klíč k příkladům k procvičení

$$6.3. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6.4. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6.5. \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6.6. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6.7. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6.8. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6.10. \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6.12. \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9}\mathbf{A}$$

$$6.13. \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$6.14. \text{ a) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 11 & -5 & -4 \\ 8 & -5 & -2 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } [x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 3]$$

$$6.15. [x_1, x_2, x_3] = [2, -2, -1]$$

$$6.16. \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$6.17. [1, 1, 0]^\top, [0, 1, 0]^\top, [-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}]^\top$$

## Kapitola 7

# Trojúhelníkový rozklad

Pokračováním úvah z kapitoly 6 si nyní ukážeme, že každou regulární matici můžeme zapsat jako součin tří matic, pro které se snadno řeší soustavy lineárních rovnic. Narozdíl od kapitoly 6 nevystačíme s řádkovými úpravami, ale budeme potřebovat také výměny sloupců.

### 7.1 Permutační matice

Matice  $\mathbf{P}$  se nazývá *permutační matice*, je-li možno  $\mathbf{P}$  získat z jednotkové matice  $\mathbf{I}$  stejného typu postupnou výměnou řádků. Jelikož výměnu  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku dané matice můžeme provést tak, že tuto matici vynásobíme zleva *elementární permutační maticí*  $\mathbf{P}_{ij}$  (viz. (6.1)), je možno každou permutační matici  $\mathbf{P}$  zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{I} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1}. \quad (7.1)$$

Například matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

můžeme získat z jednotkové matice výměnami

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_3 \\ r_1 \\ r_2 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

takže  $\mathbf{P}$  můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{13} \mathbf{I} = \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{13}.$$

Z rozkladu (7.1), ze zřejmé rovnosti  $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}^\top$ , dále z  $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}$  (viz. (6.6)) a pomocí (5.12) dostaneme pro  $\mathbf{P}$  ve tvaru (7.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{P}^\top &= \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} (\mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1})^\top = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{P}_{i_1 j_1}^\top \cdots \mathbf{P}_{i_k j_k}^\top \\ &= \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{P}_{i_1 j_1} \cdots \mathbf{P}_{i_k j_k} = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

takže

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top.$$

Elementární permutační matice  $\mathbf{P}_{ij}$  můžeme také použít k výměně  $i$ -tého a  $j$ -tého **sloupce**. K tomu stačí násobit maticí  $\mathbf{P}_{ij}$  **zprava**. Například vynásobíme-li matici  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  řádu 2 maticí  $\mathbf{P}_{12}$  zprava, dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_2^\mathbf{A}, \mathbf{s}_1^\mathbf{A}].$$

K odvození obecného pravidla můžeme použít transponování.

## 7.2 Trojúhelníkové matice

Čtvercová matice  $\mathbf{L}(\mathbf{U})$  se nazývá **dolní (horní) trojúhelníková matice**, jestliže má nad (pod) diagonálou všechny prvky nulové. Pro prvky  $l_{ij}$  dané dolní trojúhelníkové matice  $\mathbf{L}$  tedy platí  $l_{ij} = 0$  pro  $i < j$ , zatímco pro prvky  $u_{ij}$  dané horní trojúhelníkové matice  $\mathbf{U}$  platí  $u_{ij} = 0$  pro  $i > j$ . Matice  $\mathbf{L}$  je tedy dolní trojúhelníková, právě když  $\mathbf{L}^\top$  je horní trojúhelníková matice.

Snadno se ověří, že součin dvou trojúhelníkových matic stejného typu je trojúhelníková matice téhož typu. Jsou-li například  $\mathbf{L} = [l_{ij}]$  a  $\mathbf{M} = [m_{ij}]$  dvě dolní trojúhelníkové matice a  $i < j$ , pak

$$[\mathbf{LM}]_{ij} = l_{i1}m_{1j} + \dots + l_{in}m_{nj} = l_{i1} \cdot 0 + \dots + l_{ii} \cdot 0 + 0 \cdot m_{i+1,j} + \dots + 0 \cdot m_{in} = 0,$$

takže  $\mathbf{LM}$  je také dolní trojúhelníková matice.

Budeme potřebovat ještě jedno méně zřejmé pozorování.

**Věta 7.1.** *Nechť  $\mathbf{L} = [l_{ij}]$  je čtvercová dolní trojúhelníková matice s nenulovými diagonálními prvky. Pak  $\mathbf{L}$  je regulární a  $\mathbf{L}^{-1}$  je dolní trojúhelníková matice.*

*Důkaz.* Je-li  $\mathbf{L}$  dolní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále, pak existují matice elementárních operací  $\mathbf{T}_p = \mathbf{G}_{i_p j_p}(\alpha_p)$  s  $i_p > j_p$ , případně  $\mathbf{T}_p = \mathbf{M}_{i_p}(l_{i_p i_p}^{-1})$  tak, že pro matici  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$  platí

$$\mathbf{T} [\mathbf{L} \mid \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{B}].$$

Porovnáním levých částí příslušných matic dostaneme  $\mathbf{TL} = \mathbf{I}$ . Podle věty 6.3 tedy platí  $\mathbf{L} = \mathbf{T}^{-1}$ , odkud  $\mathbf{LT} = \mathbf{I}$  a  $\mathbf{T} = \mathbf{L}^{-1}$ . Jelikož všechny matice  $\mathbf{T}_i$  jsou dolní trojúhelníkové, je také matice

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$$

dolní trojúhelníková matice. □

### 7.3 Trojúhelníkový (LU) rozklad

**Věta 7.2 (o existenci LU rozkladu).** *Nechť  $\mathbf{A}$  je regulární čtvercová matice. Pak existuje dolní trojúhelníková matice  $\mathbf{L}$ , horní trojúhelníková matice  $\mathbf{U}$  a permutační matice  $\mathbf{P}$  tak, že*

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU}. \quad (7.2)$$

*Matice  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  jsou regulární.*

*Důkaz.* Necht  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Z regulárnosti matice  $\mathbf{A}$  a z (6.3) plyne, že existuje  $i_1$  tak, že  $a_{1i_1} \neq 0$ , takže  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{AP}_{1i_1}$  má v levém horním rohu nenulový prvek  $\bar{a}_{11} = a_{1i_1}$ .

Nyní si všimněme, že první krok úpravy matice  $\bar{\mathbf{A}}$ , který známe z Gaussovy eliminace, můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{AP}_{1i_1} = \mathbf{A}_1,$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{G}_{1n}(-\bar{a}_{n1}/\bar{a}_{11}) \cdots \mathbf{G}_{12}(-\bar{a}_{21}/\bar{a}_{11}) \quad (7.3)$$

je dolní trojúhelníková matice, neboť je vyjádřena jako součin dolních trojúhelníkových matic.

Matice  $\mathbf{A}_1$  je zřejmě součinem regulárních matic, takže podle (6.5) je  $\mathbf{A}_1$  také regulární a existuje  $2 \leq i_2$  tak, že  $a_{2i_2}^1 \neq 0$ . Matice  $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_{2i_2}$  má tedy nenulový prvek  $\bar{a}_{22}$  a stejný první sloupec jako matice  $\mathbf{A}_1$ . Opakováním tohoto postupu dosáhneme toho, že

$$\tilde{\mathbf{L}} \mathbf{AP} = \mathbf{U}, \quad (7.4)$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11}^{n-1} & a_{12}^{n-1} & \dots & a_{1n}^{n-1} \\ 0 & a_{22}^{n-1} & \dots & a_{2n}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{n-1} \quad (7.5)$$

a

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{1i_1} \cdots \mathbf{P}_{n-1 i_{n-1}}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1.$$

Zřejmě  $\mathbf{P}$  je permutační matice a  $\tilde{\mathbf{L}}$  je dolní trojúhelníková matice, neboť každá matice  $\mathbf{L}_i$  je součinem dolních trojúhelníkových matic  $\mathbf{G}_{ij}(-\bar{a}_{ji}^{i-1}/\bar{a}_{ii}^{i-1})$  s  $i < j$ . Přenásobíme-li (7.4) zleva maticí  $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}$ , dostaneme

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU}.$$

Matice  $\mathbf{L}$  je podle věty 7.1 regulární dolní trojúhelníková matice, neboť je inverzní k dolní trojúhelníkové matici  $\tilde{\mathbf{L}}$ , a matice  $\mathbf{P}$  je zřejmě permutační matice. Jelikož matice  $\bar{\mathbf{A}}_i$  jsou regulární, je podle (7.5) také matice  $\mathbf{U}$  regulární.  $\square$

Vyjádření matice ve tvaru součinu (7.2) se nazývá **LU rozklad** podle počátečních písmen anglických slov *Lower* (dolní) a *Upper* (horní). Přenásobíme-li (7.2) zprava maticí  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^\top$ , dostaneme vyjádření  $\mathbf{A}$  ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}\tilde{\mathbf{P}}$$

s permutační maticí  $\tilde{\mathbf{P}}$ . Matice  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{P}$  nejsou určeny jednoznačně.

## 7.4 Výpočet LU rozkladu

Rozbor důkazu věty o existenci trojúhelníkového rozkladu nám dává návod k instruktivnímu výpočtu tohoto rozkladu. Stačí postupně upravovat matici  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$  na tvar  $[\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}]$  obdobně, jako jsme to dělali ve 2. kapitole, avšak bez použití výměny řádků. Tím dosáhneme toho, že matice  $\tilde{\mathbf{L}}$  bude dolní trojúhelníková. Je-li to nutné, provádíme místo výměny řádků výměny sloupců, které neprovádíme jen na matici  $\mathbf{A}$ , ale také zvlášť na další jednotkové matici, která se postupně transformuje na  $\tilde{\mathbf{P}}$ . Dolní trojúhelníkovou matici  $\mathbf{L}$  dostaneme inverzí matice  $\tilde{\mathbf{L}}$ , tedy s pomocí elementárních řádkových operací, které převedou matici  $[\tilde{\mathbf{L}} \mid \mathbf{I}]$  na  $[\mathbf{I} \mid \mathbf{L}]$ .

**Příklad 7.3.** Najděte trojúhelníkový rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

*Řešení.*

- Sledování výměn sloupců:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ s_3 \\ s_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$$



- Úprava  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \mapsto [\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}]$ :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & \mathbf{A} & & & \mathbf{I} & \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3 \quad s_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2r_2 + r_1} \\
 &\xrightarrow{3r_3 + r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & \mathbf{U} & & & \tilde{\mathbf{L}} & \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] = \\
 &= [\mathbf{U} \mid \tilde{\mathbf{L}}]
 \end{aligned}$$

- Úprava  $[\tilde{\mathbf{L}} \mid \mathbf{I}] \mapsto [\mathbf{I} \mid \mathbf{L}]$ :

$$\begin{aligned}
 [\tilde{\mathbf{L}} \mid \mathbf{I}] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & \tilde{\mathbf{L}} & & & \mathbf{I} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - r_1 \quad r_3 - r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \\
 &\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2 \quad \frac{1}{3}r_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & \mathbf{I} & & & \mathbf{L} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{L}]
 \end{aligned}$$

- Odtud

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Přímým výpočtem si můžeme ověřit, že platí

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} = \mathbf{LUP}.$$

▲

## 7.5 Řešení soustav pomocí LU rozkladu

Řešení soustav pomocí trojúhelníkového rozkladu spočívá v postupném řešení soustav s maticemi  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  a  $\tilde{\mathbf{P}}$ . Jestliže tedy  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{P}}$ , pak místo soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

budeme řešit soustavu

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}(\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x})) = \mathbf{b}$$

tak, že postupně vyřešíme

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (7.8)$$

**Příklad 7.4.** Využijte rozkladu (7.7) matice (7.6) k řešení soustavy:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

*Řešení.* Nejprve řešíme soustavu  $\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}$ , tedy

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ -\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 &= 1 \\ -\frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3 &= 1, \end{aligned}$$

odkud  $z_1 = 1, z_2 = 3, z_3 = 6$ . Potom vyřešíme soustavu  $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$ , tedy

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= 1 \\ 3y_2 - 2y_3 &= 3 \\ 4y_3 &= 6. \end{aligned}$$

Odtud  $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 2, y_3 = \frac{3}{2}$ . Konečně určíme  $\mathbf{x}$  „řešením“  $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  nebo  $\mathbf{z} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{P}}^\top \mathbf{y}$ , takže  $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2}$ . ▲

**Poznámka.** Pokud hodláme použít LU rozklad k řešení soustav, není třeba vyčíslit matici  $\mathbf{L}$  explicitně. Vystačíme totiž s maticí  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$ , s jejíž pomocí vypočítáme  $\mathbf{z}$  v (7.8) ze vztahu

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}.$$

## 7.6 Použití LU rozkladu

Lze ukázat, že k výpočtu LU rozkladu čtvercové matice  $\mathbf{A}$  řádu  $n$  stačí asi  $\frac{1}{2}n^3$  násobení, což je asi polovina počtu násobení potřebného k výpočtu inverzní matice. Máme-li LU rozklad, můžeme získat řešení soustavy  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  pomocí  $n^2$  násobení, stejně jako u inverzní matice. Použití LU rozkladu je tedy efektivnější nástroj pro řešení soustav lineárních rovnic s více pravými stranami než inverzní matice. Tento rozdíl se může ještě drasticky zvětšit, má-li matice  $\mathbf{A}$  mnoho nulových prvků, neboť při úpravě se trojúhelníkové faktory zaplňují nenulovými prvky méně než inverzní matice. Trojúhelníkový rozklad je také důležitý nástroj teorie matic.

## 7.7 Příklady

**Příklad 7.5.** Pomocí LU rozkladu nalezněte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Řešení.*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{U}^{-1}\tilde{\mathbf{L}}$$

1. Nalezení matic  $\mathbf{U}$ ,  $\tilde{\mathbf{L}}$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[2r_3]{2r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - r_1} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[2r_3]{2r_3} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 + 3r_2]{r_3 + 3r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Výpočet  $\mathbf{U}^{-1}$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_2 + 3r_3]{r_1 - 3r_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[2r_1]{2r_1} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 + r_2]{r_1 + r_2} \\ & \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{4}r_2]{\frac{1}{4}r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Výpočet  $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

▲

## Příklady k procvičení

7.1. Najděte LU rozklad symetrické matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a porovnejte rozložení nul v obou trojúhelníkových faktorech a v matici  $\mathbf{A}$ .

7.2. Využijte rozkladu z předchozího cvičení k řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

7.3. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

a) rozložte tuto matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice (**LU** rozklad)

b) využijte **LU** rozkladu k řešení soustavy:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

c) využijte **LU** rozkladu k řešení soustavy:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

7.4. Pomocí **LU** rozkladu nalezněte inverzní matici k matici  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Klíč k příkladům k procvičení

$$7.3. \text{ a) } \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\text{ b) } [x_1, x_2, x_3] = [10, 4, 2], \text{ c) } [x_1, x_2, x_3] = [-4, -1, 2]$$

$$7.4. \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Část II

# Vektorové prostory

## Kapitola 8

# Algebraické operace a struktury

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s různými pravidly, které dvěma prvkům jedné množiny přiřazují nějaký prvek téže množiny. Jako příklad uvedme sčítání aritmetických vektorů nebo násobení čtvercových matic. Ukazuje se, že tato pravidla mají některé vlastnosti, které lze studovat společně bez ohledu na objekty, kterých se týkají, a že výsledky tohoto studia lze pak aplikovat na řešení nejrozličnějších konkrétních problémů. Pro studium těchto pravidel si nejprve zavedeme abstraktní pojem operace, a pak si rozebereme některé vlastnosti, které operace může mít. Nakonec se seznámíme s některými algebraickými strukturami, což je abstrakce umožňující pochopit obecné zákonitosti počítání s nejrozličnějšími objekty, jako například s čísly, maticemi nebo zobrazeními.

### 8.1 Algebraické operace

**Definice 8.1.** (Binární) *algebraická operace*  $\circ$  na neprázdné množině  $\mathcal{A}$  je zobrazení

$$\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{A}.$$

Operace  $\circ$  na množině  $\mathcal{A}$  tedy každé uspořádané dvojici  $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  prvků  $a, b \in \mathcal{A}$  přiřazuje jednoznačně určený prvek  $a \circ b \in \mathcal{A}$ .

Jako příklad algebraické operace si uvedme sčítání  $+$  definované na množině reálných čísel  $\mathbb{R}$ , které například dvojici  $(2, 3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  přiřazuje prvek  $2 + 3 = 5 \in \mathbb{R}$ . Jiné příklady algebraických operací jsou sčítání reálných aritmetických vektorů stejné dimenze nebo násobení komplexních čtvercových matic stejného řádu.

Důležitý příklad algebraické operace je skládání zobrazení  $\circ$  definované na množině všech zobrazení  $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$  dané množiny  $\mathcal{A}$  do sebe. Tato operace přiřazuje každé uspořádané dvojici zobrazení  $(f, g) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{A})$  složené zobrazení  $f \circ g \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$  definované pro každé  $x \in \mathcal{A}$  předpisem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Jestliže například  $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$  a  $g \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$  jsou definovány předpisem  $f(x) = x^2$  a  $g(x) = x^2 + 1$ , pak

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 + 1)^2.$$

Všimněme si, že násobení aritmetického vektoru skalárem není operací na množině v našem smyslu, neboť nepřirazuje vektor dvojici vektorů, ale skaláru a vektoru.

## 8.2 Asociativní operace

**Definice 8.2.** Algebraická operace  $\circ$  na množině  $\mathcal{A}$  je **asociativní**, jestliže pro libovolné prvky  $a, b, c$  množiny  $\mathcal{A}$  platí

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c. \quad (8.1)$$

Operace sčítání a násobení čísel jsou dobře známé asociativní operace, stejně jako sčítání aritmetických vektorů stejné dimenze nebo násobení čtvercových matic stejného řádu. Také operace skládání zobrazení množiny  $\mathcal{A}$  do sebe je asociativní, neboť podle definice složeného zobrazení platí pro každé  $x \in \mathcal{A}$  a  $f, g, h \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))), \\ (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))), \end{aligned}$$

takže

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x).$$

Poslední rovnost znamená, že zobrazení  $f \circ (g \circ h)$  i  $(f \circ g) \circ h$  přiřazují každému  $x \in \mathcal{A}$  tentýž prvek, takže platí  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

Operace  $\uparrow$  definovaná na množině všech přirozených čísel  $\mathbb{N}$  předpisem

$$\uparrow: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \mapsto a^b \in \mathbb{N}$$

není asociativní, neboť

$$2 \uparrow (3 \uparrow 2) = 2^{(3^2)} = 2^9 \quad \text{a} \quad (2 \uparrow 3) \uparrow 2 = (2^3)^2 = 2^6.$$

Je-li  $\circ$  asociativní operace na množině  $\mathcal{A}$ , pak lze u výrazu (8.1) vynechat závorky. Výraz  $a \circ b \circ c$  lze potom vyčíslit buď jako  $(a \circ b) \circ c$  nebo  $a \circ (b \circ c)$ . Dá se dokázat, že pro asociativní operace není potřeba používat závorky vůbec. Například pro každou asociativní operaci platí

$$((a \circ b) \circ c) \circ d = a \circ (b \circ (c \circ d)),$$

neboť

$$((a \circ b) \circ c) \circ d = (a \circ (b \circ c)) \circ d = a \circ ((b \circ c) \circ d) = a \circ (b \circ (c \circ d)).$$

## 8.3 Komutativní operace

**Definice 8.3.** Algebraická operace  $\circ$  na množině  $\mathcal{A}$  se nazývá **komutativní**, jestliže pro každé  $a, b \in \mathcal{A}$  platí  $a \circ b = b \circ a$ .

Příklady komutativních operací jsou sčítání čísel, aritmetických vektorů stejné dimenze nebo matic stejného typu. Naopak násobení čtvercových matic řádu většího než jedna není komutativní, jak je patrné z příkladu (5.11).

Snadno se můžeme přesvědčit, že ani operace  $\uparrow$  definovaná v oddílu 8.2 není komutativní, neboť

$$2 \uparrow 3 = 2^3 \neq 3^2 = 3 \uparrow 2.$$

Pokud je počet prvků množiny  $\mathcal{A}$  větší než jedna, není ani operace skládání zobrazení množiny  $\mathcal{A}$  do sebe komutativní. Jestliže totiž v dané množině  $\mathcal{A}$  existují prvky  $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b$ , pak například pro zobrazení

$$f : \mathcal{A} \ni x \mapsto a \quad \text{a} \quad g : \mathcal{A} \ni x \mapsto b$$

a pro každé  $x \in \mathcal{A}$  platí

$$(f \circ g)(x) = a \neq b = (g \circ f)(x),$$

tedy

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

## 8.4 Neutrální prvek

**Definice 8.4.** Prvek  $e \in \mathcal{A}$  nazýváme **neutrálním prvkem** vzhledem k operaci  $\circ$  definované na množině  $\mathcal{A}$ , jestliže pro každé  $a \in \mathcal{A}$  platí

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

Například prvek 0 je neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání reálných nebo komplexních čísel. Prvek 1 je zase neutrálním prvkem vzhledem k násobení reálných nebo komplexních čísel. Jednotková matice  $\mathbf{I}$  daného řádu je neutrálním prvkem vzhledem k násobení čtvercových matic stejného řádu.

Existuje také neutrální prvek vzhledem k operaci skládání všech zobrazení množiny  $\mathcal{A}$  do sebe. Je jím identické zobrazení  $id_{\mathcal{A}}$  množiny  $\mathcal{A}$ , neboť pro každé  $f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  a  $x \in \mathcal{A}$  platí

$$\begin{aligned} (id_{\mathcal{A}} \circ f)(x) &= id_{\mathcal{A}}(f(x)) = f(x), \\ (f \circ id_{\mathcal{A}})(x) &= f(id_{\mathcal{A}}(x)) = f(x), \end{aligned}$$

takže  $f = f \circ id_{\mathcal{A}} = id_{\mathcal{A}} \circ f$ .



**Poznámka.** Neutrální prvek musí splňovat obě rovnosti uvedené v definici. Například pro výše uvedenou operaci umocňování přirozených čísel platí  $a \uparrow 1 = a$ , avšak  $1 \uparrow a = 1$ , takže 1 není neutrálním prvkem vzhledem k operaci  $\uparrow$ .

Na první pohled není jasné, jestli nemůže být více neutrálních prvků vzhledem k nějaké operaci. Následující věta dává úplnou odpověď na tuto otázku.

**Věta 8.5.** *Nechť  $\circ$  je algebraická operace na množině  $\mathcal{A}$  a nechť  $e_1, e_2 \in \mathcal{A}$  jsou neutrální prvky vzhledem k operaci  $\circ$ . Potom  $e_1 = e_2$ .*

*Důkaz.* Podle definice neutrálního prvku

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

□

## 8.5 Inverzní prvek

**Definice 8.6.** Nechť  $\circ$  je algebraická operace na množině  $\mathcal{A}$ , nechť  $e \in \mathcal{A}$  je neutrální prvek vzhledem k  $\circ$  a nechť  $a \in \mathcal{A}$ . Prvek  $b \in \mathcal{A}$  nazýváme **levým inverzním prvkem** k prvku  $a$ , jestliže  $b \circ a = e$ , **pravým inverzním prvkem** k prvku  $a$ , jestliže  $a \circ b = e$ , a **inverzním prvkem** k prvku  $a$ , jestliže  $a \circ b = b \circ a = e$ .

Pro každé reálné číslo  $a \in \mathbb{R}$  je  $-a$  inverzní prvek vzhledem ke sčítání, neboť 0 je neutrální prvek vzhledem ke sčítání a  $(-a) + a = a + (-a) = 0$ . Ke každé regulární matici  $\mathbf{A}$  existuje také inverzní prvek vzhledem k násobení matic. Je jím inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$ , neboť jednotková matice  $\mathbf{I}$  je neutrálním prvkem vzhledem k násobení matic a  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ . Naopak k prvku 0 neexistuje inverzní prvek ani vzhledem k násobení reálných čísel, ani vzhledem k násobení komplexních čísel, neboť rovnice  $0 \cdot x = 1$  nemá žádné reálné ani komplexní řešení.

Podívejme se nyní na inverzní prvky vzhledem ke skládání zobrazení množiny  $\mathcal{A}$  do sebe. Nechť  $f, g \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ . Jestliže  $f \circ g = id_{\mathcal{A}}$ , potom  $f$  je zobrazení na  $\mathcal{A}$ , neboť libovolný prvek  $a \in \mathcal{A}$  lze vyjádřit ve tvaru

$$a = id_{\mathcal{A}}(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a)),$$

tedy jako obraz prvku  $g(a) \in \mathcal{A}$  při zobrazení  $f$ . Zobrazení  $g$  je přitom nutně prosté, neboť pro libovolné  $a, b \in \mathcal{A}$  by z  $g(a) = g(b)$  plynulo

$$a = id_{\mathcal{A}}(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = id_{\mathcal{A}}(b) = b.$$

Zobrazení  $f \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$  má tedy inverzní zobrazení ve smyslu definice inverzního prvku 8.6, právě když  $f$  je vzájemně jednoznačné.

**Poznámka.** Pokud je  $\mathcal{A}$  nekonečná množina, existují v  $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$  prvky, které mají jen *levý* nebo *pravý inverzní prvek*, ale nemají *inverzní prvek*. Například zobrazení

$$f : \mathbb{N} \ni k \mapsto k + 1 \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad g : \mathbb{N} \ni k \mapsto \max\{k - 1, 1\} \in \mathbb{N}$$

splňují  $g \circ f = id$ , neboť pro  $k \in \mathbb{N}$

$$(g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(k + 1) = k = id(k),$$

avšak

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2,$$

takže

$$f \circ g \neq id.$$

## 8.6 Grupa

Množina spolu s jednou či více operacemi, které splňují předepsané vlastnosti, tvoří **algebraickou strukturu**. Zde se seznámíme s důležitou algebraickou strukturou s jednou operací, která se nazývá grupa. Grupy se v matematice objevily při studiu teorie čísel, v geometrii a při řešení algebraických rovnic. Netriviální technické aplikace využívající poznatků o struktuře grup zahrnují kódování nebo krystalografii.

**Definice 8.7.** Množina  $\mathcal{G}$  s operací  $\circ$  se nazývá **grupa**, jestliže:

(G1)  $\circ$  je asociativní operace na  $\mathcal{G}$ .

(G2) Existuje  $e \in \mathcal{G}$  tak, že pro každé  $a \in \mathcal{G}$  platí  $a \circ e = e \circ a = a$ .

(G3) Ke každému  $a \in \mathcal{G}$  existuje prvek  $b \in \mathcal{G}$  tak, že  $a \circ b = b \circ a = e$ .

Grupa je tedy určena uspořádanou trojicí  $(\mathcal{G}, \circ, e)$ , kde  $\mathcal{G}$  je množina,  $\circ$  je asociativní operace na  $\mathcal{G}$ , a  $e \in \mathcal{G}$  je neutrální prvek vzhledem k operaci  $\circ$ .

Jako příklady grup nám mohou sloužit  $(\mathbb{R}, +, 0)$  a  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ . Regulární čtvercové matice stejného řádu tvoří vzhledem k násobení matic také grupu, jejíž jednotkový prvek je identická matice  $\mathbf{I}$ .

Snadno se ověří, že pokud  $\mathcal{A}$  má více než jeden prvek, pak  $(\mathcal{Z}(\mathcal{A}), \circ, id)$  netvoří grupu, avšak podmnožina  $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$  sestávající ze všech vzájemně jednoznačných zobrazení grupu tvoří.

Obdobně jako u jednotkového prvku vzniká otázka, zda k některému prvku nemůže existovat více než jeden inverzní prvek. Vyjasníme si tento problém současně s otázkami týkajícími se řešení rovnic.

**Věta 8.8.** *Nechť  $(\mathcal{G}, \circ, e)$  je grupa. Potom platí následující tvrzení:*

- (i) *Ke každému prvku  $a \in \mathcal{G}$  existuje právě jeden inverzní prvek  $a^{-1}$ .*
- (ii) *Nechť  $a, b, c \in \mathcal{G}$ . Jestliže  $a \circ b = a \circ c$  nebo  $b \circ a = c \circ a$ , pak  $b = c$ .*
- (iii) *Nechť  $a, b \in \mathcal{G}$ . Potom existuje jediné  $x \in \mathcal{G}$  tak, že platí  $a \circ x = b$  a jediné  $y \in \mathcal{G}$  tak, že  $y \circ a = b$ .*

*Důkaz.*

- (i) Nechť  $a, b, c \in \mathcal{G}$ ,  $a \circ b = b \circ a = e$  a  $a \circ c = c \circ a = e$ . Pak

$$b = b \circ e = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = e \circ c = c.$$

- (ii) Nechť  $a, b, c \in \mathcal{G}$  a třeba  $a \circ b = a \circ c$ . Pak  $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$ . Upravíme-li obě strany rovnice použitím asociativity, dostaneme  $(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$ . Výraz v závorce je ovšem neutrální prvek, takže výsledkem je

$$b = e \circ b = e \circ c = c.$$

- (iii) Nechť  $a, b \in \mathcal{G}$ . Pro  $x = a^{-1} \circ b$  platí

$$a \circ x = a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b,$$

takže  $x = a^{-1} \circ b$  je řešením rovnice  $a \circ x = b$ . Nechť  $x_1$  a  $x_2$  jsou řešení rovnice  $a \circ x = b$ , tj.  $a \circ x_1 = b$  a  $a \circ x_2 = b$ . Pak platí  $a \circ x_1 = a \circ x_2$  a podle tvrzení (ii) tedy  $x_1 = x_2$ .

□

S pojmem grupa jsou spojeny některé konvence v terminologii a v označení. Grupa  $(\mathcal{G}, \circ, e)$  se nazývá **komutativní**, jestliže je operace  $\circ$  komutativní. Operace v komutativní grupě se často označuje znaménkem  $+$ , i když se může jednat o úplně jinou operaci než sčítání čísel. Při takovém zápisu, který nazýváme **aditivní**, mluvíme místo o neutrálním prvku o **nulovém** prvku, který také označujeme pomocí nuly. Při této konvenci se inverzní prvek k prvku  $a$  zapisuje  $-a$ . Znak operace se také často zapisuje pomocí tečky nebo se v příslušných výrazech zcela vynechává. V takovém případě mluvíme o **multiplikativním zápisu**, neutrální prvek značíme jedničkou a inverzní prvek k prvku  $a$  značíme  $\frac{1}{a}$  nebo  $a^{-1}$ . Někdy se také používá názvu **aditivní grupa** pro grupu zapsanou v aditivním zápisu a **multiplikativní grupa** pro grupu zapsanou v multiplikativním zápisu.

## 8.7 Komutativní těleso

Nyní se seznámíme s algebraickou strukturou se dvěma operacemi, které mají obdobné vlastnosti jako sčítání a násobení na některých číselných množinách.

**Definice 8.9. Komutativní těleso**  $(\mathbb{T}, +, 0, \cdot, 1)$  je množina, na níž jsou definovány dvě binární algebraické operace  $+$  a  $\cdot$ , které splňují následující axiomy:

(T1)  $(\mathbb{T}, +, 0)$  je komutativní grupa.

(T2)  $(\mathbb{T} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$  je komutativní grupa.

(T3) Pro každé  $a, b, c \in \mathbb{T}$  platí distributivní zákon  $a(b + c) = ab + ac$ .

(T4)  $0 \neq 1$ .

Množina všech reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení je tedy těleso, stejně jako množina všech komplexních čísel  $\mathbb{C}$  spolu s operacemi sčítání a násobení. V některých aplikacích, jako například v kódování, se můžete setkat s konečnými tělesy. Nejjednodušším příkladem je těleso  $(\{0, 1\}, +, 0, \cdot, 1)$  s operacemi, které jsou definovány tabulkami:

$+$	$0$	$1$
$0$	$0$	$1$
$1$	$1$	$0$

$\cdot$	$0$	$1$
$0$	$0$	$0$
$1$	$0$	$1$

I pro obecné těleso lze dokázat některé další vlastnosti, které platí pro počítání s čísly. Například v tělese platí  $0 \cdot 1 = 0$ , neboť

$$0 = 1 + (-1) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = (1 + (-1)) \cdot 1 = 0 \cdot 1.$$

Vzhledem k tomu, že v dalším výkladu budeme pracovat jen s tělesy reálných a komplexních čísel, budeme používat známá pravidla pro násobení a sčítání bez důkazů.

### Příklady k procvičení

8.1. Nechť  $(\mathcal{G}, \circ, e)$  je grupa a nechť  $a, b \in \mathcal{G}$ . Ověřte, že  $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ .

## Kapitola 9

# Vektorové prostory

Ve 3. kapitole jsme se seznámili s aritmetickými vektory, které jsme si ve zvláštních případech mohli znázornit šipkami, takže jsme si je byli schopni představit. Pro aritmetické vektory jsme definovali skládání (sčítání) a násobení skalárem, které splňovaly určitá pravidla. Nyní si pojem vektoru zobecníme ještě více, takže náš nový pojem vektoru bude zahrnovat nejen aritmetické vektory a tím i „staré známé šipky“, ale také jiné objekty, jako například matice a funkce. Ukazuje se, že alespoň v matematice není podstatné to, co konkrétně považujeme za vektory, ale jaká pravidla splňují operace s nimi. Rozšíření pojmu vektoru nám bude sloužit jako opora naší intuice.

### 9.1 Vektorový prostor

**Definice 9.1. Vektorový prostor** nad komutativním tělesem  $(\mathbb{T}, +, 0, \cdot, 1)$  je komutativní grupa  $(\mathcal{V}, +, \mathbf{o})$  a zobrazení  $\mathbb{T} \times \mathcal{V} \ni (\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , které nazýváme **násobení skalárem**, přičemž pro libovolné  $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$  a  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  platí:

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v} \quad (\text{V1})$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u} \quad (\text{V2})$$

$$\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \quad (\text{V3})$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{V4})$$

V definici vektorového prostoru má znak  $+$  dva různé významy, které však vždy dokážeme rozlišit podle operandů. Prvky tělesa  $\mathbb{T}$  nazýváme **skaláry**, prvky grupy  $\mathcal{V}$  **vektory**. Jestliže  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , mluvíme o **reálném vektorovém prostoru**, jestliže  $\mathbb{T} = \mathbb{C}$ , mluvíme o **komplexním vektorovém prostoru**. V dalším výkladu budeme předpokládat, pokud nebude uvedeno jinak, že  $\mathbb{T}$  je těleso reálných čísel, nebo těleso komplexních čísel. Pokud budeme dále stručně mluvit jen o vektorovém prostoru, budeme předpokládat, že skaláry jsou prvky jednoho z uvedených číselných těles.

**Příklad 9.2.** Reálné aritmetické vektory daného řádu  $n$  se sčítáním vektorů a s násobením skalárem po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Jeho nulový prvek je  $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$ , pro  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$  je inverzním prvkem  $-\mathbf{a} = [-a_1, \dots, -a_n]$ . Pro  $n = 1$  je množina skalárů i vektorů stejná.

**Příklad 9.3.** Množina  $\mathcal{F}$  všech reálných funkcí s operací  $+$  definovanou pro každé reálné  $x$  rovností

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a s násobením skalárem, které pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $f \in \mathcal{F}$  definuje funkci  $\alpha f \in \mathcal{F}$  rovností

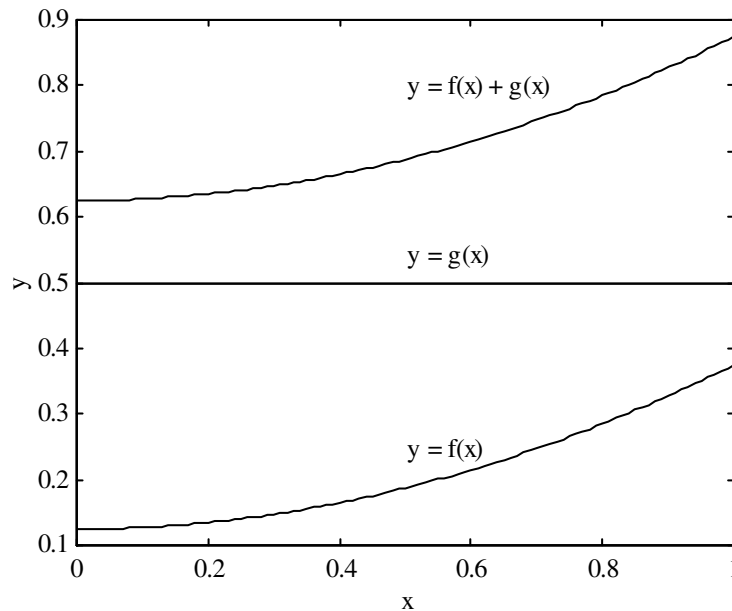
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

tvoří reálný vektorový prostor. Nulový prvek  $o$  tohoto prostoru je dán předpisem

$$o(x) = 0,$$

prvek opačný k  $f$  je definován pomocí

$$(-f)(x) = -f(x).$$



Obr. 9.1: Součet funkcí  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}$  a  $g(x) = \frac{1}{2}$  definovaných na intervalu  $[0, 1]$ .

## 9.2 Rovnosti odvozené z axiomů

Axiomy vektorového prostoru jsou vybrány tak, aby pro abstraktní vektory platila všechna tvrzení, která jsou zřejmá pro šipky. Některá taková tvrzení si na ukázkou dokážeme v následující větě.

**Věta 9.4.** *Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor s nulovým prvkem  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  a nechť  $\alpha$  je libovolný skalár. Pak platí následující rovnosti:*

$$0\mathbf{u} = \mathbf{o} \quad (9.1)$$

$$\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (9.2)$$

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \quad (9.3)$$

*Důkaz.* Bez bližší specifikace budeme používat vlastnosti tělesa a použití axiomů grupy nebo axiomů vektorového prostoru vyznačíme odkazy nad rovnostmi.

(9.1)

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} &\stackrel{(G2)}{=} 0\mathbf{u} + \mathbf{o} \stackrel{(G3)}{=} 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})) \stackrel{(G1)}{=} (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + (-0\mathbf{u}) = \\ &\stackrel{(V2)}{=} (0 + 0)\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) \stackrel{(G3)}{=} \mathbf{o}. \end{aligned}$$

(9.2) Použijeme-li (9.1) pro  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ , dostaneme  $0\mathbf{o} = \mathbf{o}$ , takže

$$\alpha\mathbf{o} = \alpha(0\mathbf{o}) \stackrel{(V3)}{=} (\alpha 0)\mathbf{o} = 0\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

(9.3)  $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \stackrel{(V4)}{=} 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \stackrel{(V2)}{=} (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \stackrel{(9.1)}{=} \mathbf{o}.$

□

## 9.3 Podprostory

**Definice 9.5.** Neprázdná množina  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  je **podprostorem** vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ , jestliže  $\mathcal{U}$  je vektorový prostor vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem v prostoru  $\mathcal{V}$ .

K tomu, aby  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  byl podprostorem vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  stačí, aby  $\mathcal{U}$  byla uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem, tedy aby pro libovolné dva prvky  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$  a pro libovolný skalár  $\alpha$  platilo  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$  a  $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ . Z posledního předpokladu totiž plyne  $0\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  i  $(-1)\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , takže podle (9.1) a (9.3) také nulový prvek  $\mathbf{o} = 0\mathbf{u}$  i opačný prvek  $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$  patří do  $\mathcal{U}$ , přičemž je zřejmé, že ostatní axiomy vektorového prostoru jsou splněny.

**Příklad 9.6.** Necht  $p$  je pevně zvolená přímka v prostoru procházející zvoleným počátkem souřadnic. Pak množina všech polohových vektorů bodů na přímce  $p$  tvoří podprostor vektorového prostoru všech vázaných vektorů v prostoru.

**Příklad 9.7.** Pro dané  $k \geq 1$  je množina  $\mathcal{P}_k$  všech mnohočlenů stupně menšího než  $k$  podprostorem vektorového prostoru  $\mathcal{F}$  z příkladu 9.3.

**Příklad 9.8.** Necht  $\mathcal{V}$  je libovolný prostor. Pak  $\mathcal{O} = \{\mathbf{o}\}$  je podprostorem  $\mathcal{V}$ , neboť  $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$  a podle (9.2) platí pro libovolný skalár  $\alpha$ , že  $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$ . Vektorový prostor  $\mathcal{O}$  je nejmenší podprostor daného vektorového prostoru a nazývá se **nulovým podprostorem**.

**Příklad 9.9.** Necht  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  je konečná množina vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ . Není těžké ověřit, že množina všech vektorů, které lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

je podprostorem vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ , který nazýváme **lineární obal** množiny  $\mathcal{S}$ . Lineární obal dané množiny vektorů  $\mathcal{S}$  značíme  $\langle \mathcal{S} \rangle$ .

**Příklad 9.10.** Jestliže  $p_1(x) = 1$  a  $p_2(x) = x$  jsou dva mnohočleny, které považujeme za prvky vektorového prostoru  $\mathcal{P}$  všech reálných mnohočlenů, pak  $\mathcal{P}_2 = \langle p_1, p_2 \rangle$  je podprostor  $\mathcal{P}$  tvořený všemi lineárními mnohočleny. Jestliže  $p_3 = p_1 + p_2$ , pak zřejmě  $\langle p_1, p_2 \rangle = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ .

## 9.4 Součet a průnik podprostorů

Pro libovolné dva podprostory  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  daného vektorového prostoru  $\mathcal{W}$  můžeme vytvořit **průnik podprostorů**  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  a **součet podprostorů**

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}.$$

Průnik podprostorů není nikdy prázdný, neboť do něho vždy patří nulový prvek.

**Věta 9.11.** Necht  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  jsou podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{W}$ . Pak  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  i  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  jsou podprostory  $\mathcal{W}$ .

*Důkaz.* Necht  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ , tedy  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Jelikož  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  jsou podprostory téhož prostoru, platí  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$  a  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , tedy  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ , a pro libovolný skalár  $\alpha$  platí také  $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  i  $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ , takže  $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Důkaz, že  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  je podprostorem  $\mathcal{W}$  je obdobný.  $\square$

Jestliže průnik podprostorů  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  daného vektorového prostoru  $\mathcal{W}$  je nulový podprostor  $\mathcal{O}$ , pak se součet  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  nazývá **direktní (přímý) součet podprostorů** a značí se  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ . Direktní součet je tedy definován jen pro některé podprostory  $\mathcal{W}$ .



Důležitou vlastností direktního součtu podprostorů je to, že každý prvek  $\mathbf{w} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$  lze vyjádřit jednoznačně ve tvaru  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  s  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Skutečně, nechť platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2.$$

Potom  $\mathbf{o} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) - (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$ , tedy  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ . To však znamená, že vektory  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  i  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  patří do  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ , takže podle definice direktního součtu jsou oba vektory nulové a platí

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.$$

## 9.5 Vektory v matematice a ve fyzice

V této kapitole jsme si zavedli nový pojem vektoru, který je zobecněním pojmu vektor, tak jak se používá například ve fyzice. To, že používáme stejný název, tedy vektor, nás nesmí vést k domněnce, že se jedná v podstatě o jedno a totéž. Naše abstraktní vektory rozhodně nejsou veličiny, které mají velikost a směr. Co je velikost funkce, která je prvkem prostoru  $\mathcal{F}$ ?

Ani veličina, která má velikost a směr, nemusí být vektorem v takovém smyslu. Představme si křižovatku, z níž lze vyjet čtyřmi směry. Známe-li průměrný počet aut, která projedou křižovatkou v každém směru v nějakém pevném časovém období, můžeme definovat v každém směru veličiny, které budou mít směr příslušného výjezdu z křižovatky a jejichž velikost bude rovna průměrnému počtu aut, které v tomto směru ve sledovaném období vyjely. Pro tyto veličiny, které mají velikost i směr, lze těžko smysluplně definovat skládání vektorů, které by splňovalo axiomy vektorového prostoru.

Ve zvláštních případech však lze dát našim novým pojmům stejný smysl, jako mají ve fyzice nebo v geometrii. Řešení úloh, ve kterých se vyskytují abstraktní vektory, například funkce, si tak někdy můžeme usnadnit tím, že si představíme řešení obdobného problému se šipkami.

## 9.6 Příklady

**Příklad 9.12.** Dokažte, že množina  $\mathcal{F}$  všech reálných funkcí  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce skalárem definovanými předpisy

$$f + g : x \rightarrow f(x) + g(x), \quad \alpha f : x \rightarrow \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tvoří reálný vektorový prostor.

*Řešení.*

- (G1)  $(\forall f, g, h \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x), \\ \text{a odtud: } f + (g + h) &= (f + g) + h. \end{aligned}$$

- (G2)  $(\exists o \in \mathcal{F}, o(x) = 0)(\forall f \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} (f + o)(x) &= f(x) + o(x) = f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x) = o(x) + f(x) = \\ &= (o + f)(x), \text{ a odtud: } f + o = f = o + f. \end{aligned}$$

- (G3)  $(\forall f \in \mathcal{F})(\exists -f \in \mathcal{F}, (-f)(x) = -f(x))(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = o(x) = \\ &= -f(x) + f(x) = (-f)(x) + f(x) = (-f + f)(x), \\ \text{a odtud: } f + (-f) &= o = -f + f. \end{aligned}$$

- (komutativnost +)  $(\forall f, g \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x), \text{ a odtud: } f + g = g + f.$$

- (V1)  $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f, g \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} (\alpha(f + g))(x) &= \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = \\ &= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x), \\ \text{a odtud: } \alpha(f + g) &= \alpha f + \alpha g. \end{aligned}$$

- (V2)  $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} ((\alpha + \beta)f)(x) &= (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = \\ &= (\alpha f + \beta f)(x), \text{ a odtud: } (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f. \end{aligned}$$

- (V3)  $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta f))(x) &= \alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x), \\ \text{a odtud: } \alpha(\beta f) &= (\alpha\beta)f. \end{aligned}$$

- (V4)  $(\forall f \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x), \text{ a odtud: } 1f = f.$$



**Příklad 9.13.** Rozhodněte, zda-li je množina  $\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, 1] : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$  podprostorem  $\mathbb{R}^3$ .

*Řešení.* Je zřejmé, že  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  neboť  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, 1] \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Množina  $\mathcal{U}$  však není podprostorem  $\mathbb{R}^3$  neboť v  $\mathcal{U}$  neexistuje nulový vektor  $\mathbf{o} \in \mathcal{U}$  tak, že  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$  je  $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$ . Vskutku

$$[u_1, u_2, 1] + [o_1, o_2, 1] = [u_1 + o_1, u_2 + o_2, 2] \neq [u_1, u_2, 1]$$

neboť pro poslední složku je vždy  $2 \neq 1$ . ▲

**Příklad 9.14.** Rozhodněte, zda-li je množina  $\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] : u_1 + u_2 - u_3 = 0\}$  podprostorem  $\mathbb{R}^3$ .

*Řešení.* Je zřejmé, že  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  neboť jestliže  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ .

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3] \in \mathcal{U} &\Rightarrow u_1 + u_2 - u_3 = 0 \\ \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] \in \mathcal{U} &\Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3] = [w_1, w_2, w_3]$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 - w_3 &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = \\ &= \underbrace{u_1 + u_2 - u_3}_{=0} + \underbrace{v_1 + v_2 - v_3}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ .

2.

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3] \in \mathcal{U} \Rightarrow u_1 + u_2 - u_3 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \mathbf{u} = [\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3] = [w_1, w_2, w_3]$$

$$w_1 + w_2 - w_3 = \alpha u_1 + \alpha u_2 - \alpha u_3 = \alpha \underbrace{(u_1 + u_2 - u_3)}_{=0} = 0$$

Odtud dostáváme, že  $\alpha \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ .

$\mathcal{U}$  je tedy podprostorem vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ . ▲

**Příklad 9.15.** Rozhodněte, zda-li jsou množiny

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 - u_3 = 0 \wedge u_2 - u_3 = 0\} \\ \mathcal{V} &= \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_2 + u_3 = 0\} \end{aligned}$$

podprostory  $\mathbb{R}^3$ . Pokud ano, nalezněte jejich průnik a součet.

*Řešení.* Všechny prvky množiny  $\mathcal{U}$  musí splňovat podmínky  $u_1 + u_2 - u_3 = 0$ ,  $u_2 - u_3 = 0$ . Tzn. že složky vektoru  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  musí být řešením soustavy 2 rovnic

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matice této soustavy je již ve schodovém tvaru, takže můžeme přímo určit její řešení

$$u_1 = 0, \quad u_2 = t, \quad u_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vektor řešení můžeme dále zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3] = [0, t, t] = t \cdot [0, 1, 1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odtud  $\mathcal{U} = \{t \cdot [0, 1, 1], \forall t \in \mathbb{R}\} = \langle [0, 1, 1] \rangle$ . Množina  $\mathcal{U}$  je tedy lineárním obalem vektoru  $[0, 1, 1] \in \mathbb{R}^3$  a tedy podprostorem  $\mathbb{R}^3$ .

Analogicky musí všechny prvky množiny  $\mathcal{V}$  splňovat podmínku  $u_2 + u_3 = 0$ . Tzn. že složky vektoru  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  musí být řešením jedné rovnice o třech neznámých  $u_2 + u_3 = 0$ . V této rovnici si proto volíme neznámé  $u_1, u_3$  za parametry a dostáváme řešení  $u_1 = p, u_2 = -q, u_3 = q, p, q \in \mathbb{R}$ . Tento vektor řešení můžeme dále zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3] = [p, -q, q] = [p, 0, 0] + [0, -q, q] = p \cdot [1, 0, 0] + q \cdot [0, -1, 1], \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Odtud

$$\mathcal{V} = \{p \cdot [1, 0, 0] + q \cdot [0, -1, 1], \forall p, q \in \mathbb{R}\} = \langle [1, 0, 0], [0, -1, 1] \rangle.$$

Množina  $\mathcal{V}$  je tedy lineárním obalem vektorů  $[1, 0, 0], [0, -1, 1] \in \mathbb{R}^3$  a tedy podprostorem  $\mathbb{R}^3$ .

Složky všech vektorů  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  průniku  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  musí splňovat podmínky  $u_1 + u_2 - u_3 = 0$ ,  $u_2 - u_3 = 0$  a zároveň podmínku  $u_2 + u_3 = 0$ . Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Odečtením 2. rovnice od 3. dostáváme soustavu ve schodovém tvaru

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \\ 2u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jejíž řešením je  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ . Průnik podprostoru  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  obsahuje tedy pouze jediný vektor a tím je vektor nulový  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\mathbf{o}\}$ . Pokud uvážíme, že libovolný

vektor  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  má tvar  $\mathbf{u} = t \cdot [0, 1, 1]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a libovolný vektor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  má tvar  $\mathbf{v} = p \cdot [1, 0, 0] + q \cdot [0, -1, 1]$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ , tak  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$  má tvar

$$\mathbf{w} = t \cdot [0, 1, 1] + p \cdot [1, 0, 0] + q \cdot [0, -1, 1], \quad t, p, q \in \mathbb{R}.$$

Pak podprostor  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  je lineární kombinací vektorů  $[0, 1, 1]$ ,  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, -1, 1] \in \mathbb{R}^3$  a můžeme psát

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \langle [0, 1, 1], [1, 0, 0], [0, -1, 1] \rangle.$$

▲

## Příklady k procvičení

9.1. Dokažte, že lineární obal  $\langle \mathcal{S} \rangle$  množiny  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  z příkladu 9.9 tvoří vektorový prostor.

9.2. Necht  $\mathcal{F}_0$  je množina všech reálných funkcí  $f$ , které splňují  $f(0) = 0$ . Dokažte, že  $\mathcal{F}_0$  je podprostorem vektorového prostoru  $\mathcal{F}$  z příkladu 9.3.

9.3. Necht  $\mathcal{F}$  je vektorový prostor všech reálných funkcí definovaný v příkladu 9.3. Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory  $\mathcal{F}$ . Své rozhodnutí zdůvodněte.

- a)  $\mathcal{W}_1 = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1\}$ ,  
 $\mathcal{W}_2 = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$
- b)  $\mathcal{W}_1 = \{f \in \mathcal{F} : 2f(x) - f(0) = 0\}$ ,  
 $\mathcal{W}_2 = \{f \in \mathcal{F} : 2f(x) - f(0) = 3\}$
- c)  $\mathcal{W}_1 = \{f \in \mathcal{F} : f(1) = 0 \wedge f(-1) = 0\}$ ,  
 $\mathcal{W}_2 = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = -1 \wedge f(1) = 0\}$
- d)  $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F} : 2f(x) - f(-x) = 0\}$
- e)  $\mathcal{W} = P_n$ , kde  $P_n$  značí množinu všech polynomů stupně nejvýše  $n$ .

9.4. Necht je dán vektorový prostor  $P_2$  (prostor všech polynomů stupně maximálně 2). Rozhodněte, zda je množina  $\mathcal{W} = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a + c = 0 \wedge a - b = 0\}$  podprostorem  $P_2$ . Své rozhodnutí zdůvodněte.

9.5. Rozhodněte, zda podmnožina  $\mathcal{W} \subset P_n$  je podprostorem vektorového prostoru polynomů  $P_n$ , je-li

- a)  $\mathcal{W}_1 = \{p \in P_n : p(x) = p(-x)\}$
- b)  $\mathcal{W}_2 = \{p \in P_n : 2p(0) + 3p(1) = 0\}$
- c)  $\mathcal{W}_3 = \{p \in P_n : p(x) = x^2 + ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$
- d)  $\mathcal{W}_4 = \{p \in P_n : p(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$

9.6. Rozhodněte, zda je podmnožina  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$  podprostorem vektorového prostoru  $\mathbb{R}^n$ , je-li  $\mathcal{W} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}$ .

9.7. Jsou dány podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0\},$$

$$\mathcal{V} = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : u_3 + u_4 = 0\}.$$

Určete  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ .

9.8. Jsou dány podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0 \wedge -u_1 - u_3 = 0\},$$

$$\mathcal{V} = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : u_2 - 2u_3 + u_4 = 0\}.$$

Určete  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ .

9.9. Jsou dány podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 - u_3 = 0 \wedge u_1 - 2u_2 = 0\},$$

$$\mathcal{V} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - u_2 - u_3 = 0\}.$$

Určete  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ .

9.10. Udejte příklad vektorového prostoru nad  $\mathbb{R}$ , který má konečně mnoho vektorů.

9.11. Udejte příklad nekonečné podmnožiny  $\mathcal{M}$  v  $\mathbb{R}^5$  tak, že  $\mathcal{M}$  není podprostorem vektorového prostoru  $\mathbb{R}^5$ .

## Klíč k příkladům k procvičení

9.3. a)  $\mathcal{W}_1$  není,  $\mathcal{W}_2$  je podprostor

b)  $\mathcal{W}_1$  je,  $\mathcal{W}_2$  není podprostor

c)  $\mathcal{W}_1$  je,  $\mathcal{W}_2$  není podprostor

d)  $\mathcal{W}$  je podprostor

e)  $\mathcal{W}$  je podprostor

9.4. je

9.5.  $\mathcal{W}_1$  a  $\mathcal{W}_2$  jsou,  $\mathcal{W}_3$  a  $\mathcal{W}_4$  ne

9.6. není

9.7.  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle [-1, 1, 0, 0], [2, 0, -1, 1] \rangle$

9.8.  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle [-1, 2, 1, 0], [0, -1, 0, 1] \rangle$

9.9.  $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \langle [2, 1, 3], [1, 1, 0], [1, 0, 1] \rangle$

# Kapitola 10

## Lineární nezávislost a báze

Pro vektory, které jsme zavedli v kapitole 9, zavedeme obdobu některých pojmů známých z analytické geometrie, jako jsou kolineárnost (rovnoběžnost) dvou vektorů nebo komplanárnost (možnost umístění ve stejné rovině) tří vektorů. Vystačíme přitom pouze s vlastnostmi vektorového prostoru, zejména se obejdeme bez úhlů. Nakonec si zavedeme pojem báze, který má pro vektorový prostor obdobný význam jako *soustava souřadnic* v geometrii.

### 10.1 Závislé a nezávislé vektory

První nový pojem, který si zde zavedeme, je obdobou vlastnosti, kterou mají dva volné vektory, lze-li je umístit na jednu přímku, nebo tři volné vektory, lze-li je umístit do společné roviny.

**Definice 10.1.** Neprázdná konečná množina vektorů  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  je **lineárně nezávislá**, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \quad (10.1)$$

má jediné řešení

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

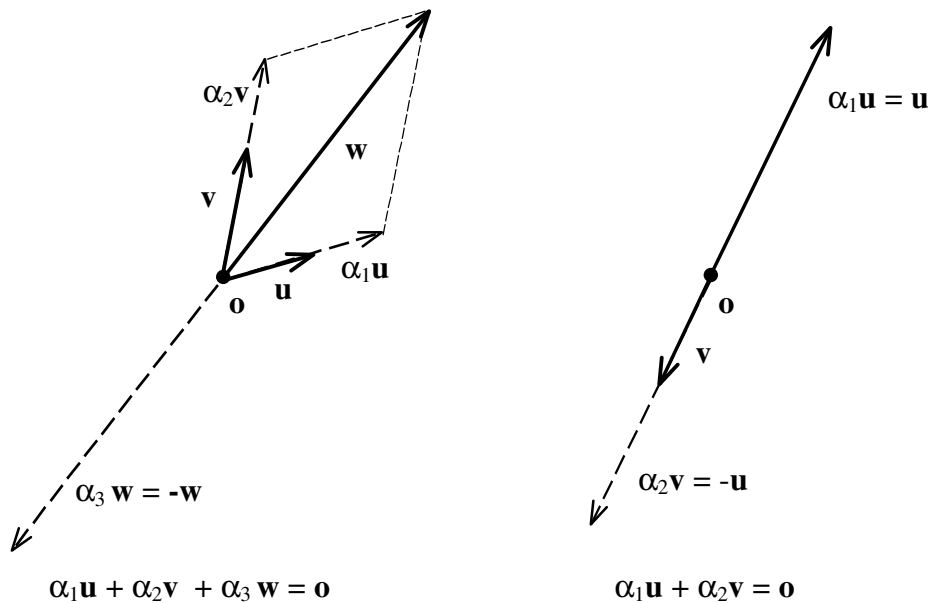
Jestliže  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  je nezávislá, říkáme také, že vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou nezávislé. Má-li rovnice (10.1) i jiné řešení, pak říkáme, že  $\mathcal{S}$  je **lineárně závislá** a vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou závislé.

Geometrický význam lineární závislosti pro dvourozměrné vázané vektory je na obr. 10.1.

**Příklad 10.2.** Jestliže  $\mathbf{v}_1 = [2, -1, 0]$ ,  $\mathbf{v}_2 = [1, 2, 5]$  a  $\mathbf{v}_3 = [7, -1, 5]$ , pak množina vektorů  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  je lineárně závislá, neboť  $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$ .

**Příklad 10.3.** Mnohočleny  $p_1(x) = 1 - x$ ,  $p_2(x) = 5 + 3x - 2x^2$  a  $p_3(x) = 1 + 3x - x^2$  tvoří lineárně závislou množinu v  $\mathcal{P}_3$ , neboť pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí  $3p_1(x) - p_2(x) + 2p_3(x) = 0$ , tj.  $3p_1 - p_2 + 2p_3 = \mathbf{o}$ .

**Příklad 10.4.** Vektory  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$  a  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$  tvoří lineárně nezávislou množinu reálných třírozměrných aritmetických vektorů, neboť z  $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$  plyne  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ .



Obr. 10.1: Lineárně závislé vektory v  $\mathbb{R}^2$ .

**Poznámka.** Závislost či nezávislost množiny vektorů závisí na množině skalárů. Například považujeme-li  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$  za reálný vektorový prostor, pak jsou komplexní jednotka  $i$  a  $1$  nezávislé, neboť pro libovolná reálná čísla  $\alpha_1, \alpha_2$  plyne z

$$\alpha_1 i + \alpha_2 1 = 0,$$

že  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Pokud však tutéž množinu, tedy  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ , považujeme za komplexní vektorový prostor, plyne z

$$(-1)i + i1 = \mathbf{o},$$

že  $i$  a  $1$  jsou závislé!

## 10.2 Lineární kombinace a závislost

Na obr. 10.1 vlevo vidíme trojici závislých vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Současně je naznačeno, že vektor  $\mathbf{w}$  lze vyjádřit jako součet násobků vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Součet násobků vektorů



se bude v dalším výkladu vyskytovat tak často, že si pro něj zavedeme samostatný název. Vektor  $\mathbf{v}$  z vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  budeme nazývat **lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ , jestliže existují skaláry  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tak, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Například mnohočlen  $p_1$  z vektorového prostoru  $\mathcal{P}_1$  všech lineárních reálných mnohočlenů, který je definován předpisem  $p_1(x) = x$ , je lineární kombinací mnohočlenů  $p_2(x) = x + 1$  a  $p_3(x) = x + 2$ , neboť pro libovolné reálné  $x$  platí

$$p_1(x) = x = 2(x + 1) - (x + 2) = 2p_2(x) - p_3(x),$$

takže  $p_1 = 2p_2 - p_3$ .

**Věta 10.5.** Konečná množina nenulových vektorů  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  je lineárně závislá, právě když existuje  $k \geq 2$  tak, že vektor  $\mathbf{v}_k$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ .

*Důkaz.* Necht  $\mathcal{S}$  je množina nenulových lineárně závislých vektorů. Uvažujme množiny  $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1\}, \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \dots, \mathcal{S}_m = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  a necht  $\mathcal{S}_k$  je nejmenší množina vektorů, které jsou lineárně závislé, takže platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \quad (10.2)$$

a některý z koeficientů  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  je nenulový. Pak  $k \geq 2$ , neboť  $\mathcal{S}_1$  je zřejmě nezávislá množina vektorů, a  $\alpha_k \neq 0$ , neboť jinak by  $\mathcal{S}_{k-1}$  byla lineárně závislá. Rovnici (10.2) můžeme tedy upravit pomocí axiomů vektorového prostoru na tvar

$$\mathbf{v}_k = \left( \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} \right) \mathbf{v}_1 + \dots + \left( \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right) \mathbf{v}_{k-1}.$$

Obráceně, jestliže pro  $2 \leq k \leq m$  platí

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1},$$

pak

$$-(\alpha_1 \mathbf{v}_1) - \dots - (\alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}) + 1\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \dots + 0\mathbf{v}_m = \mathbf{o},$$

takže  $\mathcal{S}_m$  je lineárně závislá, neboť koeficient 1 u  $\mathbf{v}_k$  je nenulový. □

### 10.3 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

Necht  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_k\}$  je konečná množina reálných funkcí vektorového prostoru  $\mathcal{F}$  z příkladu 9.3. Podle definice je  $\mathcal{S}$  nezávislá právě tehdy, když pro libovolné koeficienty  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  plyne z

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) = 0 \quad (10.3)$$

pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , že  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . Ověření podmínky (10.3) pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  však vyžaduje dosazení nekonečně mnoha čísel do levé strany rovnosti, což může být v obecném případě neproveditelné. Přesto lze s trochou štěstí nezávislost množiny  $\mathcal{S}$  poznat.

První postup vychází z pozorování, že dosadíme-li v (10.3) za  $x$  postupně různá čísla  $x_1, \dots, x_k$ , dostaneme soustavu  $k$  lineárních rovnic o  $k$  neznámých  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 f_1(x_1) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_1) & = & 0 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 f_1(x_k) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_k) & = & 0 \end{array}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  a  $\mathcal{S}$  je nezávislá množina.

Druhý postup vychází z pozorování, že pokud platí pro nějaké  $x \in \mathbb{R}$  rovnost (10.3), zůstane tato rovnost v platnosti i po derivování. Pro pevně zvolené číslo  $x$  tak dostaneme pro  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  soustavu

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 f_1^{(0)}(x) & + & \dots & + & \alpha_k f_k^{(0)}(x) & = & 0 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 f_1^{(k-1)}(x) & + & \dots & + & \alpha_k f_k^{(k-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  a  $\mathcal{S}$  je nezávislá množina. Matice této soustavy se vyskytuje ve více aplikacích a nazývá se **Wronského matice**.

**Příklad 10.6.** Rozhodněte, zda jsou mocniny  $x$ ,  $x^2$  a  $x^3$  lineárně nezávislé.

*Řešení 1.* Zvolíme si body  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  a  $x_3 = 3$ , které postupně dosadíme do funkcí  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $f_3(x) = x^3$ , a vytvoříme soustavu (10.3). Dostaneme:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 8\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 9\alpha_2 & + & 27\alpha_3 & = & 0 \end{array} \quad (10.4)$$

Matice této soustavy převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ r_3 - 3r_2 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matice soustavy je regulární, takže soustava (10.4) má jen nulové řešení  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Funkce  $x$ ,  $x^2$  a  $x^3$  jsou tedy lineárně nezávislé.  $\blacktriangle$

**Řešení 2.** Vypočteme první a druhou derivaci funkcí  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $f_3(x) = x^3$  v bodě 1 a vytvoříme Wronského matici, kterou převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matice je tedy regulární, z čehož opět vyplývá, že funkce  $x$ ,  $x^2$  a  $x^3$  jsou lineárně nezávislé. ▲

**Poznámka.** Pokud by nám vyšlo, že výsledná matice není regulární, nemohli bychom učinit žádný závěr. K tomu, abychom mohli prohlásit, že uvažované funkce jsou závislé, bychom museli vyzkoušet v prvním případě všechny trojice reálných čísel  $x_1, x_2, x_3$ , ve druhém případě všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Singulární matici bychom dostali například při volbě  $x_1 = 0$  nebo  $x = 0$ .

## 10.4 Báze vektorového prostoru

Pojem báze, který si zavedeme v tomto oddílu, nám umožní popsat vektory pomocí skalárů. Ve svých důsledcích to vede k redukci úloh, v nichž se mohou vyskytovat libovolné vektory, na úlohy, v nichž se objevují pouze vektory báze a čísla.

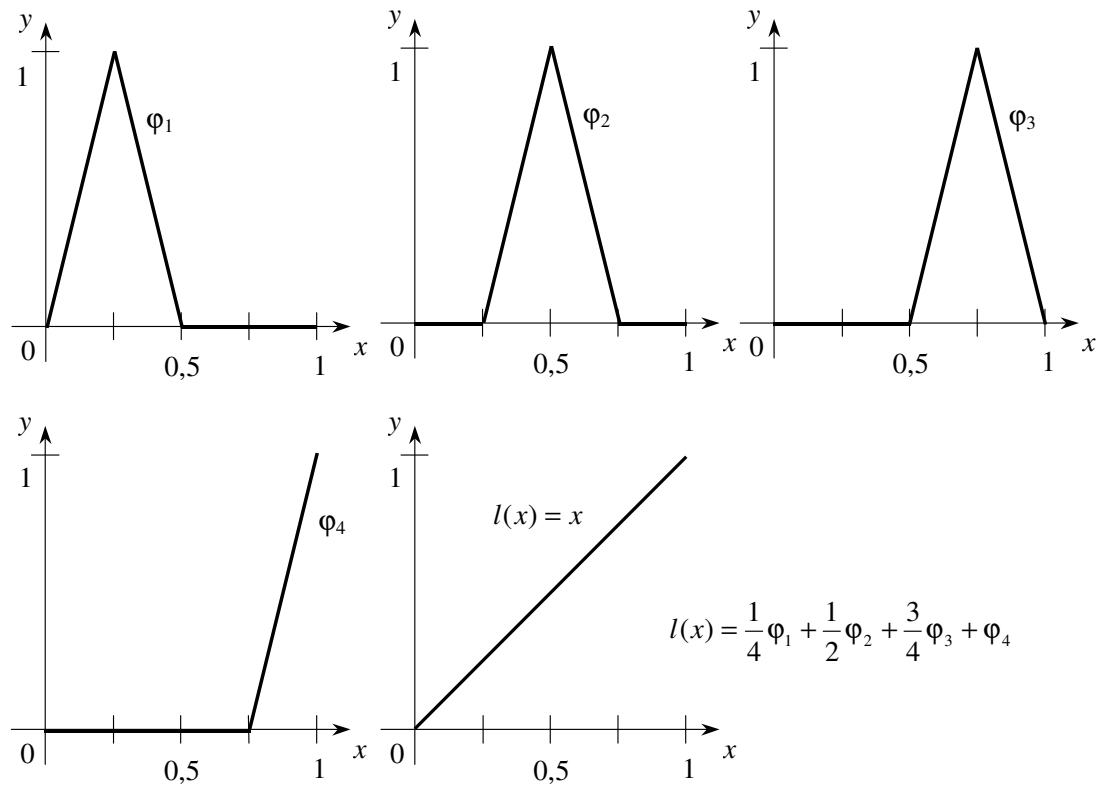
**Definice 10.7.** Konečná množina  $\mathcal{E}$  vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  je **báze vektorového prostoru**  $\mathcal{V}$ , jestliže

- (i)  $\mathcal{E}$  je nezávislá.
- (ii) Každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathcal{E}$ .

**Příklad 10.8.** Vektory  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$  tvoří bázi  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ . Jakýkoli vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  tohoto prostoru lze vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ . Báze  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  je zvláštním případem **standardní báze**  $\mathbb{R}^n$ , která je tvořena řádky či sloupci jednotkové matice  $\mathbf{I}_n$ .

**Příklad 10.9.** Mnohočleny  $p_1(x) = 1$  a  $p_2(x) = x$  tvoří bázi vektorového prostoru  $\mathcal{P}_2$ . Každý mnohočlen  $p(x) = a_0 + a_1x$  lze zapsat ve tvaru  $p = a_0p_1 + a_1p_2$ . Mnohočleny zde považujeme za reálné funkce definované na celé reálné ose. Nechť  $a_0p_1 + a_1p_2 = 0$ , tj.  $a_0 + a_1x = 0$  pro všechna  $x$ . Pro  $x = 0$  dostáváme  $a_0 + a_1 \cdot 0 = 0$ , odkud  $a_0 = 0$ , a pro  $x = 1$  pak z  $a_1 \cdot 1 = 0$  dostaneme  $a_1 = 0$ , takže  $p_1$  a  $p_2$  jsou nezávislé.

**Příklad 10.10.** Nechť  $\mathcal{L}_4$  je množina všech spojitých funkcí  $l$  na intervalu  $[0, 1]$ , které splňují  $l(0) = 0$  a které jsou lineární na intervalech  $[0, \frac{1}{4}]$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ ,  $[\frac{3}{4}, 1]$ . Potom funkce  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  z obr. 10.2 tvoří bázi  $\mathcal{L}_4$ .



Obr. 10.2: Po částech lineární funkce.

**Poznámka.** Ne každý vektorový prostor má bázi ve smyslu naší definice. Například neexistuje žádná konečná množina reálných funkcí, jejichž lineární kombinací by bylo možno vyjádřit libovolnou reálnou funkci.

## 10.5 Příklady

**Příklad 10.11.** Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$$p_1(x) = x^2 - x, \quad p_2(x) = x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + 2$$

*Řešení.*

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 &= 0 \\ \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3(x^2 + 2) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \alpha_1 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x^2 + 2\alpha_3 &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_2 + 2\alpha_3) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin  $x$  dostáváme z poslední rovnice soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{rccccccc} & \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \\ - & \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 + r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \\ \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array} \end{array}$$

Rovnice má tedy právě jedno nulové řešení a tudíž vektory  $p_1, p_2, p_3$  jsou lineárně nezávislé. ▲

**Příklad 10.12.** Rozhodněte zda-li mnohočlen  $p(x) = x^2 + 2$  je lineární kombinací mnohočlenů

$$p_1(x) = x^2 - x, \quad p_2(x) = x + 1$$

*Řešení.*

$$\begin{array}{l} p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \\ x^2 + 2 = \alpha_1 (x^2 - x) + \alpha_2 (x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ x^2 + 2 = \alpha_1 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 x + \alpha_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ x^2 + 2 = \alpha_1 x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin  $x$  dostáváme z poslední rovnice soustavu 3 rovnic o 2 neznámých:

$$\begin{array}{rccccccc} & \alpha_1 & & & = & 1 \\ - & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ & & & \alpha_2 & = & 2 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 + r_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Rovnice nemá řešení a tudíž vektor  $p$  není lineární kombinací vektorů  $p_1, p_2$ . ▲

**Příklad 10.13.** Rozhodněte, zda-li vektory

$$\mathcal{E} = \{p_1, p_2, p_3\}, \quad p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2$$

tvoří bázi  $\mathcal{P}_3$ .

*Řešení.*

1. Množina  $\mathcal{E}$  musí být lineárně nezávislá

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 &= 0 \\ \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) &= 0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 &= 0, & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dva mnohočleny se sobě rovnají jestliže mají stejné koeficienty u stejných mocnin  $x$ . Odtud je zřejmé, že rovnice má pouze jedno řešení a to  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  a množina  $\mathcal{E}$  je tedy lineárně nezávislá.

2. Libovolný mnohočlen  $p \in \mathcal{P}_3$ ,  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , musí být možné vyjádřit jako lineární kombinaci mnohočlenů z  $\mathcal{E}$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 &= p \\ \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) &= p(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 &= ax^2 + bx + c, & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Poslední rovnice má právě jedno řešení  $\alpha_1 = c$ ,  $\alpha_2 = b$ ,  $\alpha_3 = a$  a tedy mnohočlen  $p$  je lineární kombinací vektorů  $\mathcal{E}$ .

Jelikož jsou splněny obě podmínky 1. a 2. množina  $\mathcal{E}$  tvoří bázi  $\mathcal{P}_3$ . ▲

**Příklad 10.14.** Určete bázi podprostoru

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3, p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : a_0 - a_2 = 0\}$$

vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$ .

*Řešení.* Koeficienty mnohočlenů patřících do množiny  $\mathcal{U}$  musí splňovat podmínku  $a_0 - a_2 = 0$  což představuje rovnici o třech neznámých  $a_0, a_1, a_2$  jejíž řešením je  $a_0 = t, a_1 = s, a_2 = t$  pro libovolné parametry  $t, s \in \mathbb{R}$ . Pak pro  $\forall p \in \mathcal{U}$  existují  $t, s \in \mathbb{R}$  takové, že  $p(x) = tx^2 + sx + t = tx^2 + t + sx = t(x^2 + 1) + sx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$  a odtud  $\mathcal{U} = \{t(x^2 + 1) + sx, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}\} = \langle x^2 + 1, x \rangle$ .

Je zřejmé, že mnohočleny  $x^2 + 1$  a  $x$  jsou lineárně nezávislé a libovolný mnohočlen z  $\mathcal{U}$ , lze vyjádřit jako kombinaci těchto mnohočlenů. Proto mnohočleny  $x^2 + 1$  a  $x$  tvoří bázi podprostoru  $\mathcal{U}$ . ▲

## Příklady k procvičení

10.1. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$$\mathbf{v}_1 = [1, 2, 0], \quad \mathbf{v}_2 = [-1, -2, 1], \quad \mathbf{v}_3 = [1, 1, 1]$$

10.2. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$$\mathbf{v}_1 = [1, 2, 0], \quad \mathbf{v}_2 = [-1, -2, 1], \quad \mathbf{v}_3 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{v}_4 = [1, 2, 2]$$

10.3. Uvažujme vektorový prostor  $\mathbb{C}^3$ . Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

$$\mathbf{u} = (2, 2 + 2i, 2i), \quad \mathbf{v} = (1 - i, 1 + 3i, -1 + i), \quad \mathbf{w} = (1 + i, 1 - i, 1 + i).$$

10.4. Uvažujme vektorový prostor  $\mathbb{R}^4$ . V závislosti na parametrech  $a, b$ , rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti zadaných vektorů:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2 + a, 4, 6), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 3 - b, 3), \quad \mathbf{u}_3 = (2, 4, b - 6, 7), \quad \mathbf{u}_4 = (1, 2 - a, 2 - b, 1).$$

10.5. Uvažujme vektorový prostor  $P_3$  polynomů stupně maximálně 3. Polynom  $p(x) = 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$  vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů  $q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ ,  $r(x) = 2x^2 - x + 3$ ,  $s(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

10.6. Jakým podmínkám musí vyhovovat číslo  $a$ , aby následující vektory tvořily bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $(1, 1, 1), (1, a, a^2),$
- b)  $(0, a, a), (a, a, 1), (0, 1, a).$

10.7. Množina všech matic typu  $(2, 2)$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$  (vzhledem k operacím sčítání matic a součinu čísla s maticí).

- a) Určete dimenzi tohoto vektorového prostoru.
- b) Vyjádřete matici  $\mathbf{D}$  jako lineární kombinaci matic  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ , je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

## Klíč k příkladům k procvičení

10.3. lineárně závislé,

10.4. pro  $a \neq 0$  a  $b \neq 6$  jsou vektory lineárně nezávislé, jinak jsou lineárně závislé,

10.5.  $p(x) = q(x) - 2r(x) + 3s(x)$ ,

10.6. a) Vektory nemohou nikdy tvořit bázi  $\mathbb{R}^3$ .

b) Vektory tvoří bázi pro každé  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

10.7. a) dimenze je 4

b)  $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} + 5\mathbf{B} - \mathbf{C}$

# Kapitola 11

## Souřadnice

V kapitole 10 jsme si zavedli pojem báze, který nyní využijeme k definování souřadnic. Pak si ukážeme, jak lze pomocí souřadnic převést úlohy s abstraktními vektory na úlohy s aritmetickými vektory, s nimiž umíme číselně počítat.

### 11.1 Souřadnice vektoru

**Definice 11.1.** Necht  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  je uspořádaná báze vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ . Necht  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Potom čísla  $v_1, \dots, v_n$ , pro která platí

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n,$$

nazýváme *souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$*  v bázi  $\mathcal{E}$ .

Například libovolný aritmetický vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  má ve standardní bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  z příkladu 10.8 souřadnice  $v_1, v_2, v_3$ , neboť

$$[v_1, v_2, v_3] = v_1[1, 0, 0] + v_2[0, 1, 0] + v_3[0, 0, 1].$$

Mnohočlen  $p(x) = x + 2$  má v bázi  $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$  z příkladu 10.9, kde  $p_1(x) = 1$  a  $p_2(x) = x$ , souřadnice 2, 1, neboť

$$p(x) = x + 2 = 2p_1(x) + 1p_2(x).$$

Souřadnice závisí nejen na zvolené bázi, ale i na očíslování vektorů báze. Například  $\mathbf{v} = [1, 2]$  má v bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , kde  $\mathbf{e}_1 = [1, 0]$  a  $\mathbf{e}_2 = [0, 1]$ , první souřadnici 1, avšak pokud  $\mathbf{e}_1 = [0, 1]$  a  $\mathbf{e}_2 = [1, 0]$ , potom má tentýž vektor první souřadnici 2.

Následující věta říká, že souřadnice daného vektoru jsou určeny jednoznačně.

**Věta 11.2.** Necht  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  je uspořádaná báze vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  a necht  $x_1, \dots, x_n$  a  $y_1, \dots, y_n$  jsou souřadnice vektoru  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Pak  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ .



*Důkaz.* Necht  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  je báze a

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n + (-1)(y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n) = \\ &= (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Jelikož vektory báze jsou nezávislé, plyne odtud  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ .  $\square$

Souřadnice každého vektoru  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  jsou v dané bázi  $\mathcal{E}$  určeny jednoznačně. Budeme je zapisovat také do aritmetického vektoru, který se nazývá **souřadnicový vektor** a značí se  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ .

**Příklad 11.3.** Libovolný aritmetický vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  má v bázi

$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

z příkladu 10.8 souřadnicový vektor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [v_1, v_2, v_3].$$

**Příklad 11.4.** Mnohočlen  $p(x) = x + 2$  má v bázi  $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$  z příkladu 10.9 souřadnicový vektor  $[\mathbf{p}]_{\mathcal{P}} = [2, 1]$ .

**Příklad 11.5.** Libovolná po částech lineární funkce  $l$  vektorového prostoru  $\mathcal{L}_4$  z příkladu 10.10 má v bázi  $\mathcal{E} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$  souřadnicový vektor

$$[l]_{\mathcal{E}} = [l(\frac{1}{4}), l(\frac{1}{2}), l(\frac{3}{4}), l(1)].$$

## 11.2 Použití souřadnic

Pomocí souřadnic můžeme převést úlohy s vektory, které lze popsat pomocí lineárních kombinací bazových vektorů daného vektorového prostoru, na úlohy s aritmetickými vektory. Použijeme toho, že zobrazení, které každému vektoru přiřazuje jeho souřadnicový vektor v dané bázi  $\mathcal{E}$ , převádí součet vektorů na součet souřadnicových vektorů, tedy

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}, \quad (11.1)$$

a násobení vektoru skalárem  $\alpha$  na násobení příslušného souřadnicového vektoru, tedy

$$[\alpha\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = \alpha [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}. \quad (11.2)$$

Obě rovnosti lze ověřit přímo z definice souřadnic. Například jsou-li  $u_1, \dots, u_n$  souřadnice vektoru  $\mathbf{u}$  v bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , tedy

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_n\mathbf{e}_n,$$

pak

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha u_n \mathbf{e}_n,$$

odkud

$$[\alpha \mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = \alpha [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}.$$

Při řešení úloh s lineárními kombinacemi vektorů, například máme-li vyjádřit nějaký vektor jako lineární kombinaci jiných vektorů nebo máme-li rozhodnout, zda je nějaká množina vektorů nezávislá, postupujeme následovně:

- Zvolíme si takovou bázi  $\mathcal{E}$  daného vektorového prostoru, ve které lze všechny vektory snadno vyjádřit.
- Najdeme souřadnicové vektory všech vektorů, které se vyskytují v popisu problému.
- Řešíme úlohu, kterou dostaneme z původní úlohy záměnou všech vektorů za souřadnicové vektory.

Postup ovšem předpokládá, že máme k dispozici vhodnou bázi, což nemusí být vždycky splněno.

## 11.3 Příklady

**Příklad 11.6.** Najděte souřadnice mnohočlenu  $p(x) = x^2 - 1$  v bázi  $\mathcal{P} = (p_1, p_2, p_3)$ , kde  $p_1(x) = 1, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^2 + x + 1$ .

*Řešení.*

- Zvolíme si bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ , kde  $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ .
- Najdeme souřadnice vektorů  $p, p_1, p_2, p_3$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Dostaneme

$$[p]_{\mathcal{E}} = [-1, 0, 1], \quad [p_1]_{\mathcal{E}} = [1, 0, 0], \quad [p_2]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 0], \quad [p_3]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 1].$$

- Řešíme soustavu

$$[p]_{\mathcal{E}} = x_1 [p_1]_{\mathcal{E}} + x_2 [p_2]_{\mathcal{E}} + x_3 [p_3]_{\mathcal{E}}.$$

Rozepsáním této rovnice po složkách dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcl} -1 & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & = & x_2 + x_3 \\ 1 & = & x_3, \end{array}$$

která má řešení  $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

Snadno ověříme, že opravdu platí  $p = -p_1 - p_2 + p_3$ . ▲

**Příklad 11.7.** Rozhodněte, zda jsou mnohočleny

$$p_1(x) = x^2 + x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + 2x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + x + 2$$

závislé nebo nezávislé.

*Řešení.*

- Zvolíme si stejnou bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  jako v příkladu 11.6, tj.  
 $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ .
- Najdeme souřadnice vektorů  $p_1, p_2, p_3$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Dostaneme

$$[p_1]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 1], \quad [p_2]_{\mathcal{E}} = [1, 2, 1], \quad [p_3]_{\mathcal{E}} = [2, 1, 1].$$

- Řešíme soustavu

$$x_1 [p_1]_{\mathcal{E}} + x_2 [p_2]_{\mathcal{E}} + x_3 [p_3]_{\mathcal{E}} = \mathbf{0}.$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{11.3}$$

Úpravou rozšířené matice soustavy dostaneme

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Odtud vidíme, že soustava (11.3) má jediné řešení  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ .

Mnohočleny  $p_1, p_2, p_3$  jsou tedy lineárně nezávislé. ▲

## Příklady k procvičení

11.1. Nalezněte souřadnice vektoru  $\mathbf{v} = [2, 1, 1]$  vzhledem ke standardní bázi  $\mathcal{E}$  a k bázi  $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ ,  $\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]$ ,  $\mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$ .

11.2. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$$p_1(x) = x^2 - x, \quad p_2(x) = x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + 2 \quad \text{z } \mathcal{P}_3.$$

11.3. Necht vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  tvoří bázi vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ . Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru  $\mathbf{V}$ :

- $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w},$
- $2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w}, \mathbf{v} + 2\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} + 7\mathbf{w}.$

## Klíč k příkladům k procvičení

11.3. a) ne, b) ano,

## Kapitola 12

# Dimenze a řešení soustav

Vektory v rovině (prostoru) považujeme za dvourozměrné (trojrozměrné), neboť k určení každého vektoru je třeba dvou (tří) souřadnic. Jelikož počet souřadnic je stejný jako počet vektorů příslušné báze, nabízí se okamžité zobecnění rozměru (dimenze) na vektorové prostory. Než tak učiníme, ukážeme si, že všechny báze jednoho vektorového prostoru mají stejný počet vektorů. Potom si ukážeme souvislost mezi novým pojmem dimenze a řešitelností obecných lineárních soustav.

### 12.1 Dimenze vektorového prostoru

**Věta 12.1.** *Nechť  $\mathcal{V} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  je vektorový prostor z příkladu 9.9 a nechť  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$  jsou nezávislé vektory prostoru  $\mathcal{V}$ . Pak  $m \leq n$ .*

*Důkaz.* Nechť platí předpoklady věty a  $m > n$ . Jelikož  $\mathcal{V} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  a  $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{V}$ , lze  $\mathbf{f}_1$  vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, takže vektory  $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  jsou závislé podle věty 10.5. Podle téže věty však existuje  $k$  tak, že  $\mathbf{e}_k$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$ . Odtud snadno plyne, že každý vektor prostoru  $\mathcal{V}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ .

Jestliže tento postup zopakujeme s tím, že vezmeme v úvahu nezávislost vektorů  $\mathbf{f}_1$  a  $\mathbf{f}_2$ , ukáže se, že každý vektor prostoru  $\mathcal{V}$  lze vyjádřit jako kombinaci  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  a některých  $n - 2$  vektorů vybraných z původní báze  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ .

Kdyby  $m > n$ , dostali bychom výše uvedeným postupem po vyškrtání všech  $n$  vektorů báze  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , že každý vektor prostoru  $\mathcal{V}$  lze vyjádřit pomocí vektorů  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ . Tak bychom však mohli vyjádřit  $\mathbf{f}_{n+1}$  jako kombinaci  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ , což je ve sporu s předpokladem, že  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$  jsou nezávislé. Platí tedy  $m \leq n$ .  $\square$

Z právě dokázané věty ihned plyne, že je-li  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  báze prostoru  $\mathcal{V}$  a jsou-li  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$  nezávislé, pak  $m \leq n$ . Má-li tedy nějaký vektorový prostor  $\mathcal{V}$  bázi, pak počet vektorů této báze je maximálním počtem nezávislých vektorů prostoru  $\mathcal{V}$  a *počet vektorů v různých bázích téhož vektorového prostoru je stejný*.

**Definice 12.2.** Maximální počet nezávislých vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  nazýváme **dimenzí** prostoru  $\mathcal{V}$  a značíme ji  $\dim \mathcal{V}$ . Má-li vektorový prostor bázi, je jeho dimenze rovna počtu vektorů báze a mluvíme o **konečněrozměrném prostoru**. Podle naší definice platí  $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$ . Nemá-li nenulový vektorový prostor bázi, mluvíme o **nekonečněrozměrném prostoru**.

Nový pojem dimenze je v souladu s pojmem dimenze, který jsme si zavedli pro aritmetické vektory, neboť vektory  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0], \dots, \mathbf{e}_n = [0, \dots, 0, 1]$  tvoří bázi prostoru  $n$ -rozměrných aritmetických vektorů. Pojem dimenze nemusí však být plně v souladu s naší intuicí. Například komplexní prostor  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$  je jednorozměrný, neboť jeho bázi tvoří jakékoliv nenulové číslo.

## 12.2 Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

S pomocí pojmu dimenze lze popsat řešitelnost úlohy nalézt vyjádření vektoru jako lineární kombinace jiných vektorů.

**Věta 12.3.** *Nechť  $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  jsou vektory vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ . Označme si  $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ . Pak platí následující tvrzení:*

- (i) *Vektor  $\mathbf{b}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ , právě když*

$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = \dim \langle \mathcal{A} \rangle. \quad (12.1)$$

- (ii) *Jestliže platí (12.1) a  $\mathcal{A}$  je nezávislá množina vektorů, pak lze vektor  $\mathbf{b}$  vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ .*
- (iii) *Jestliže platí (12.1) a  $\mathcal{A}$  je závislá množina vektorů, pak lze vektor  $\mathbf{b}$  vyjádřit nekonečně mnoha způsoby jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ . V této kombinaci lze zvolit některých  $d = k - \dim \langle \mathcal{A} \rangle$  koeficientů libovolně.*

*Důkaz.*

- (i) Jestliže  $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$ , je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že některý z vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  je různý od nuly. Pak postupným vyškrtáváním vektorů, které jsou kombinací ostatních, vybereme z  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  nějakou bázi  $\mathcal{E}$  prostoru  $\langle \mathcal{A} \rangle$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $\mathcal{E} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ . Jestliže  $\mathbf{b}$  nelze vyjádřit jako kombinaci vektorů báze  $\mathcal{E}$ , pak  $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  tvoří bázi  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$  a platí

$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = s + 1 \neq s = \dim \langle \mathcal{A} \rangle.$$

Naopak, jestliže  $\mathbf{b}$  lze vyjádřit jako kombinaci  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ , pak  $\mathcal{E}$  je báze  $\langle \mathcal{A} \rangle$  i  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$  a platí

$$\dim \langle \mathcal{A} \rangle = s = \dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle.$$

- (ii) Jestliže platí (12.1) a  $\mathcal{A}$  je nezávislá množina vektorů, pak  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  tvoří bázi  $\langle \mathcal{A} \rangle$  a podle (i) lze vektor  $\mathbf{b}$  vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ . Podle věty 11.2 jsou koeficienty lineární kombinace určeny jednoznačně.
- (iii) Nechť platí (12.1). Předpokládejme opět, že  $\mathcal{E} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  tvoří bázi  $\langle \mathcal{A} \rangle$  a  $s < k$ . Podle (i) platí  $\mathbf{b} \in \langle \mathcal{A} \rangle$ , takže pro libovolné  $\xi_{s+1}, \dots, \xi_k$  platí také

$$\mathbf{b} - \xi_{s+1}\mathbf{a}_{s+1} - \dots - \xi_k\mathbf{a}_k \in \langle \mathcal{A} \rangle.$$

Existuje tedy  $\xi_1, \dots, \xi_s$  tak, že

$$\mathbf{b} - \xi_{s+1}\mathbf{a}_{s+1} - \dots - \xi_k\mathbf{a}_k = \xi_1\mathbf{a}_1 + \dots + \xi_s\mathbf{a}_s.$$

Vektor  $\mathbf{b}$  lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{b} = \xi_1\mathbf{a}_1 + \dots + \xi_k\mathbf{a}_k$$

s libovolnými  $\xi_{s+1}, \dots, \xi_k$ . Počet těchto koeficientů splňuje

$$d = k - s = k - \dim \langle \mathcal{A} \rangle.$$

□

Právě dokázaná věta obsahuje odpověď na otázku, kdy má soustava lineárních rovnic řešení, kdy má jediné řešení a kdy má nekonečně mnoho řešení, a to v termínech dimenze lineárních obalů sloupců matice soustavy a pravé strany. Stačí si za vektory  $\mathbf{a}_i$  dosadit sloupce  $\mathbf{s}_i^{\mathbf{A}}$  matice soustavy  $\mathbf{A}$  a za  $\mathbf{b}$  dosadit vektor pravé strany. Věta však nedává nijaký návod, jak dimenzi prostoru sloupců zjistit. To je předmětem následujících odstavců.

## 12.3 Řádkový prostor a řádková hodnost

Důležitým krokem k lepšímu pochopení otázek řešitelnosti rovnic je současné studium obalů řádků i sloupců matice soustavy. Tento postup nám umožní zejména využít známou techniku elementárních řádkových operací.

Zde se budeme zabývat lineárním obalem  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \rangle$  řádků  $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$  dané matice  $\mathbf{A}$  typu  $(m, n)$ , který nazýváme **řádkovým prostorem matice  $\mathbf{A}$** . Zejména si všimneme, že  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  se nemění elementárními řádkovými operacemi, a proto platí následující věta.

**Věta 12.4.** *Nechť matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou řádkově ekvivalentní. Pak*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}).$$

Dimenze  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  se nazývá též **řádková hodnost** matice  $\mathbf{A}$ , elementární řádkové operace ji nemění a snadno ji určíme ze schodového tvaru matice  $\mathbf{A}$ , neboť počet nenulových řádků matice ve schodovém či normovaném schodovém tvaru je zřejmě roven její řádkové hodnosti.

**Příklad 12.5.** Určete řádkovou hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

*Řešení.* Elementárními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \\ &\xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Řádková hodnost matice  $\mathbf{A}$  je tedy rovna dvěma. ▲

**Poznámka.** V příkladu jsme matici upravili až na normovaný schodový tvar, aby bylo vidět zcela triviálně, že nenulové řádky jsou nezávislé. Je však zřejmé, že jsme se mohli spokojit i se schodovým tvarem matice.

## 12.4 Sloupcová hodnost matice

Nyní se budeme zabývat lineárním obalem  $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \rangle$  sloupců dané matice  $\mathbf{A}$  typu  $(m, n)$ , který se také nazývá **sloupcový prostor** matice  $\mathbf{A}$ . Dimenze  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$  se nazývá **sloupcová hodnost** matice  $\mathbf{A}$ .

Co se dá říct o sloupcové hodnosti matice, která vznikla z dané matice pomocí elementárních řádkových úprav? Odpověď je o něco komplikovanější než u řádkových prostorů. Porovnáme-li totiž například matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

z příkladu 12.5 s jejím normovaným schodovým tvarem

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12.2}$$

zjistíme, že sloupcové prostory obou matic jsou různé, neboť například  $\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} \notin \mathcal{S}(\mathbf{B})$ . Přesto platí následující věta.

**Věta 12.6.** *Nechť matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou řádkově ekvivalentní. Pak*

$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

*Důkaz.* Jestliže matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  typu  $(m, n)$  jsou řádkově ekvivalentní, pak jsou také rozšířené matice  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{o} \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & | & \mathbf{o} \end{bmatrix}$  řádkově ekvivalentní. Odtud podle věty 2.2

$$x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \dots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} = \mathbf{o},$$

právě když

$$x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + \dots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} = \mathbf{o}.$$

Zde vidíme, že sloupce  $\mathbf{s}_{i_1}^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_{i_k}^{\mathbf{A}}$  jsou nezávislé, právě když sloupce  $\mathbf{s}_{i_1}^{\mathbf{B}}, \dots, \mathbf{s}_{i_k}^{\mathbf{B}}$  jsou nezávislé.  $\square$

Důkaz nám ukazuje, jak nalézt bázi sloupcového prostoru dané matice  $\mathbf{A}$ . U matice ve schodovém tvaru je báze zřejmě tvořena sloupci obsahujícími vedoucí prvky řádků a sloupce matice  $\mathbf{A}$  s týmiž indexy tvoří pak bázi  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ .

**Příklad 12.7.** Báze sloupcového prostoru matice  $\mathbf{B}$  z (12.2) je tvořena sloupci

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

První dva sloupce

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

matice  $\mathbf{A}$  proto tvoří bázi  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ , neboť  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou řádkově ekvivalentní.

## 12.5 Hodnost a řešitelnost soustav

Hlavním důsledkem vět 12.4 a 12.6 je to, že řádková hodnost matice se rovná sloupcové hodnosti matice. Věty totiž říkají, že elementární řádkové operace zachovávají obě hodnosti, a pro matice v normovaném schodovém tvaru je rovnost řádkové a sloupcové hodnosti matice zřejmá. Budeme proto mluvit stručně o **hodnosti matice**. Hodnost matice  $\mathbf{A}$  budeme značit  $h(\mathbf{A})$ .

Nyní můžeme zformulovat hlavní výsledek o řešitelnosti lineárních soustav, který se nazývá *Frobeniova věta*.



**Věta 12.8 (Frobeniova).** *Nechť  $\mathbf{A}$  je matice typu  $(m, n)$  a nechť  $\mathbf{b}$  je  $m$ -rozměrný sloupcový vektor. Potom platí následující tvrzení:*

(i) *Soustava*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (12.3)$$

*má řešení, právě když*

$$h(\mathbf{A}) = h([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]). \quad (12.4)$$

(ii) *Jestliže platí (12.4) a*

$$h(\mathbf{A}) = n,$$

*potom má soustava (12.3) jediné řešení.*

(iii) *Jestliže platí (12.4) a*

$$h(\mathbf{A}) < n,$$

*potom má soustava (12.3) nekonečně mnoho řešení. V řešení lze zvolit některých*

$$d = n - h(\mathbf{A})$$

*složek libovolně.*

*Důkaz.* Věta je speciálním případem věty 12.3 pro  $\mathbf{a}_i = \mathbf{s}_i^{\mathbf{A}}$ . Ukázali jsme také, že dimenze sloupcových prostorů můžeme nahradit hodnotami.  $\square$

## 12.6 Hodnost a regularita

Pojem hodnosti nám umožňuje zformulovat novou charakteristiku regulární matice.

**Věta 12.9.** *Čtvercová matice  $\mathbf{A}$  řádu  $n$  je regulární, právě když*

$$h(\mathbf{A}) = n.$$

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Jestliže  $\mathbf{A}$  má hodnost  $n$ , potom podle věty 12.8 má každá soustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{s}_k^{\mathbf{A}}$  jediné řešení, takže i soustava  $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$  má jediné řešení. Podle věty 6.3 je proto matice  $\mathbf{A}$  regulární.

Obráceně, jestliže  $\mathbf{A}$  je regulární, potom pro libovolný sloupcový vektor  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$  platí

$$\mathbf{y} = \mathbf{AA}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \dots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}},$$

takže  $\mathbf{A}$  má sloupcovou hodnost  $n$ .  $\square$

## 12.7 Hodnost matice a počítačová aritmetika

Pojem hodnosti předpokládá přesnou aritmetiku, neboť nepatrná změna matice může způsobit změnu její hodnosti. Například matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-99} & 10^{-99} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-98} & 10^{-99} \end{bmatrix}$$

se liší jen velmi málo, avšak  $h(\mathbf{A}) = 1$  a  $h(\mathbf{B}) = 2$ . Pokud jsou koeficienty matice výsledkem měření, nemá proto často vůbec smysl hovořit o hodnosti matice. Pro takové aplikace, stejně jako pro počítačové řešení soustav, byla proto vypracována teorie založená na jiných pojmech, se kterou se seznámíme později. Poznamenejme ještě, že při zjišťování hodnosti na počítači je nutno vyhnout se zaokrouhlovacím chybám.

### Příklady k procvičení

12.1. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

12.2. Nalezněte libovolnou bázi sloupcového prostoru  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$  matice  $\mathbf{A}$  z příkladu 12.5.

12.3. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ověřte, že množina  $\mathcal{M}$  všech řešení této soustavy je vektorový podprostor prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Určete  $\dim \mathcal{M}$  a najděte alespoň jednu bázi vektorového prostoru  $\mathcal{M}$ .

12.4. Najděte bázi a dimenzi vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ , kde

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

### Klíč k příkladům k procvičení

12.3. dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor  $[-5, 4, 3]$

12.4. dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor  $[0, 1, 1]$

## Část III

### Lineární a multilineární zobrazení

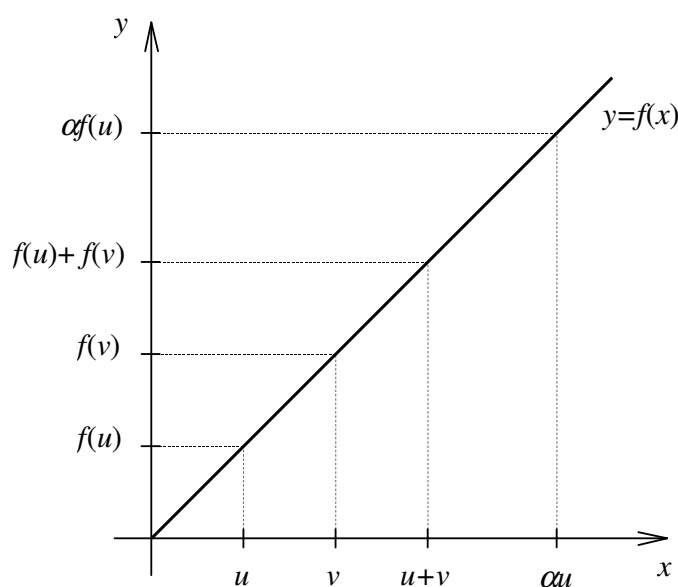
## Kapitola 13

### Lineární zobrazení

Řadu fyzikálních zákonů či přibližných experimentálních závislostí lze z matematického hlediska charakterizovat jako přímou úměrnost. Například Ohmův zákon říká, že proud  $I$  je při konstantním odporu  $R$  přímo úměrný napětí  $U$ , což můžeme zapsat ve tvaru

$$I(U) = \frac{1}{R} U.$$

Snadno si ověříme, že funkce  $I$  zobrazuje součet argumentů na součet jejich obrazů a skalární násobek argumentu na příslušný násobek jeho obrazu, tak jako funkce  $f$  na obr. 13.1. To však je vlastnost, která má smysl pro zobrazení jakéhokoliv vektorového prostoru do jiného vektorového prostoru. Zde se seznámíme se základními vlastnostmi těchto speciálních zobrazení, která mají velký význam v matematice, fyzice, inženýrství, společenských vědách i v ekonomii.



Obr. 13.1: Lineární zobrazení.

## 13.1 Definice a příklady lineárních zobrazení

**Definice 13.1.** Necht  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  jsou vektorové prostory. Zobrazení  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  se nazývá **lineární zobrazení (operátor)**, jestliže pro každé dva vektory  $u, v \in \mathcal{U}$  a skalár  $\alpha$  platí:

$$A(u + v) = A(u) + A(v)$$

$$A(\alpha u) = \alpha A(u)$$

Lineární zobrazení  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  se často nazývá **lineární transformace**. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru  $\mathcal{U}$  do vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  budeme značit  $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ . Místo  $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$  budeme psát stručně  $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ . V některých aplikacích jsou důležité lineární zobrazení vektorového prostoru  $\mathcal{U}$  do  $\mathbb{R}$ , které se nazývají **lineární formy** nebo **lineární funkcionály**.

**Příklad 13.2.** Funkce  $y = ax$  je lineární transformace  $\mathbb{R}$  pro libovolné pevně zvolené  $a \in \mathbb{R}$ , neboť

$$a(u + v) = au + av \quad \text{a} \quad a(\alpha u) = \alpha au$$

pro libovolná čísla  $u, v$  a  $\alpha$ .

**Příklad 13.3.** Funkce  $f : y = 2x + 1$  není lineární transformace  $\mathbb{R}$ , neboť

$$f(2 + 2) = f(4) = 9 \neq 10 = f(2) + f(2).$$

**Příklad 13.4.** Je-li  $\mathbf{A}$  libovolná reálná  $m \times n$  matice,  $\mathbb{R}^{n,1}(\mathbb{R}^{m,1})$  prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze  $n(m)$ , pak je

$$A : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

lineární zobrazení, neboť pro libovolné vektory  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  platí podle (5.2)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{Ax}.$$

**Příklad 13.5.** Zobrazení

$$D : \mathcal{P} \ni p \mapsto p' \in \mathcal{P},$$

které každému mnohočlenu  $p$  přiřadí jeho derivaci  $p'$ , je lineární zobrazení prostoru všech mnohočlenů  $\mathcal{P}$  do sebe, neboť pro libovolné reálné mnohočleny  $p, q$ , skalár  $\alpha$  a reálné  $x$  platí

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) \quad \text{a} \quad (\alpha p(x))' = \alpha p'(x).$$

## 13.2 Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  jsou vektorové prostory. Z definice 13.1 bezprostředně plyne, že pro libovolné lineární zobrazení  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$  platí

$$\begin{aligned} A(\mathbf{o}) &= A(0 \cdot \mathbf{o}) = 0 \cdot A(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \\ A(-\mathbf{v}) &= A((-1) \cdot \mathbf{v}) = (-1) \cdot A(\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Jestliže  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ , pak pro libovolné skaláry  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  a vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  prostoru  $\mathcal{U}$  platí

$$A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{v}_n),$$

neboť

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) &= A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n)) = \\ &= A(\alpha_1 \mathbf{v}_1) + A(\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \\ &= \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + A(\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \dots = \\ &= \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Z této rovnosti je vidět důležitou vlastnost lineárních zobrazení definovaných na prostorech konečné dimenze, a to že jsou úplně určeny obrazy vektorů libovolné báze, tedy obrazy konečného počtu vektorů.

## 13.3 Nulový prostor a obor hodnot

**Definice 13.6.** Nechť  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  jsou vektorové prostory a nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ . Pak **nulový prostor (jádro)**  $\mathcal{N}(A)$  zobrazení  $A$  je množina vektorů  $\mathbf{o}$ , t.j.

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

Jestliže  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{N}(A)$ , t.j.  $A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ ,  $A(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ , a je-li  $\alpha$  je libovolný skalár, pak platí

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u}) = \mathbf{o},$$

takže  $\mathcal{N}(A)$  je podprostorem  $\mathcal{U}$ .

Obdobnou vlastnost má i obor hodnot  $\mathcal{H}(A)$  lineárního zobrazení  $A$ . Jestliže  $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$  a  $\alpha$  je skalár, pak

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad \text{a} \quad \alpha \mathbf{u} = \alpha A(\mathbf{x}) = A(\alpha \mathbf{x}),$$

takže  $\mathcal{H}(A)$  je podprostorem vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ .

Pomocí nulového prostoru můžeme popsat strukturu řešení abstraktní operátorové rovnice.

**Věta 13.7.** *Nechť  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  jsou vektorové prostory, nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  a nechť  $A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}$ . Potom libovolné řešení  $\mathbf{x}$  rovnice*

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

*lze zapsat ve tvaru  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$ , kde  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(A)$ .*

*Důkaz.* Nechť  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Potom platí

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o},$$

takže vektor  $\mathbf{n} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  patří do jádra  $\mathcal{N}(A)$  a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$ . □

**Důsledek 13.8.** *Lineární zobrazení  $A$  je prosté, právě když  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{o}\}$ .*

Máme-li tedy rozhodnout, zda je dané lineární zobrazení prosté, stačí vyšetřit vzor nulového vektoru. Je to zvláštní vlastnost lineárního zobrazení, neboť u obecného zobrazení by bylo nutno vyšetřit vzory všech vektorů v oboru hodnot.

## 13.4 Hodnost a defekt zobrazení

**Definice 13.9.** Nechť  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ . Pak **hodnost**  $h(A)$  **zobrazení**  $A$  definujeme jako dimenzi  $\mathcal{H}(A)$  a **defekt**  $d(A)$  **zobrazení**  $A$  definujeme jako dimenzi  $\mathcal{N}(A)$ .

**Věta 13.10.** *Nechť  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ . Potom*

$$h(A) + d(A) = \dim(\mathcal{U}). \quad (13.1)$$

*Důkaz.* V důkazu se musíme především vypořádat se skutečností, že  $\mathcal{N}(A)$  a  $\mathcal{H}(A)$  mohou být podprostory různých prostorů.

Nechť  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m)$  je báze  $\mathcal{H}(A)$  a nechť  $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k)$  je báze  $\mathcal{N}(A)$ . Označme si  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  libovolné vzory  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m$ , takže platí

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{h}_1, \dots, A(\mathbf{v}_m) = \mathbf{h}_m.$$

Ukážeme, že vektory  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k)$  tvoří bázi  $\mathcal{U}$ .

Nechť platí

$$\xi_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{v}_m + \eta_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \eta_k \mathbf{n}_k = \mathbf{o} \quad (13.2)$$

Pak také

$$A(\xi_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{v}_m + \eta_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \eta_k \mathbf{n}_k) = \mathbf{o},$$

takže s využitím linearit  $A$  a definice vektorů  $\mathbf{v}_i$  a  $\mathbf{n}_i$  dostaneme

$$\xi_1 \mathbf{h}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{h}_m = \mathbf{o}.$$

Jelikož vektory  $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m)$  tvoří podle předpokladu bázi  $\mathcal{H}(A)$ , jsou nezávislé, takže  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$ . Po dosazení do (13.2) tedy platí

$$\eta_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \eta_k \mathbf{n}_k = \mathbf{o}.$$

Poněvadž jsou vektory  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$  také nezávislé, plyne odtud  $\eta_1 = \dots = \eta_k = 0$ . Vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$  jsou tedy nezávislé.

Nechť nyní  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  je libovolný vektor. Pak  $A(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}(A)$  a existuje  $\xi_1, \dots, \xi_m$  tak, že platí

$$A(\mathbf{x}) = \xi_1 \mathbf{h}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{h}_m.$$

Označme si

$$\mathbf{y} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{v}_m,$$

takže  $A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x})$ , a zapišme si  $\mathbf{x}$  ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Jelikož

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = \mathbf{o},$$

platí  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{N}(A)$  a tedy

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \eta_k \mathbf{n}_k.$$

Vektor  $\mathbf{x}$  lze potom vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{v}_m + \eta_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \eta_k \mathbf{n}_k.$$

Vektory  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k)$  tedy tvoří bázi  $\mathcal{U}$ , takže platí  $m + k = \dim(\mathcal{U})$ , t.j.  $h(A) + d(A) = \dim(\mathcal{U})$ .  $\square$

**Důsledek 13.11.** Lineární transformace  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  definovaná na vektorovém prostoru konečné dimenze  $\mathcal{V}$  je zobrazení na  $\mathcal{V}$ , právě když  $A$  je prosté zobrazení.



## 13.5 Součet zobrazení a násobení skalárem

**Definice 13.12.** Necht  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  jsou libovolné vektorové prostory. Pro libovolná zobrazení  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  a skalár  $\alpha$  můžeme definovat **součet zobrazení**  $A + B$  předpisem

$$(A + B)(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u})$$

a **součin skaláru a zobrazení**  $\alpha A$  předpisem

$$(\alpha A)(\mathbf{u}) = \alpha(A(\mathbf{u})).$$

Snadno se ověří, že  $A + B$  i  $\alpha A$  jsou lineární zobrazení. Například

$$\begin{aligned} (A + B)(\alpha \mathbf{u}) &= A(\alpha \mathbf{u}) + B(\alpha \mathbf{u}) = \alpha(A(\mathbf{u})) + \alpha(B(\mathbf{u})) = \alpha(A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u})) = \\ &= \alpha((A + B)(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Také **nulové zobrazení**  $O \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ , které každému  $u \in \mathcal{U}$  přiřazuje nulový prvek  $\mathbf{o}$  prostoru  $\mathcal{V}$ , je lineární, neboť například

$$O(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = O(\mathbf{u}) + O(\mathbf{v}).$$

Snadno lze ukázat, že  $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  tvoří vzhledem k právě definovanému sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem vektorový prostor, jehož nulový prvek je právě definované nulové zobrazení.

## 13.6 Skládání lineárních zobrazení

**Definice 13.13.** Necht  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  a  $\mathcal{W}$  jsou vektorové prostory a necht  $A : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$  a  $B : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  jsou zadaná lineární zobrazení. Pak lze definovat **složené zobrazení** (**součin zobrazení**)  $BA : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{W}$  předpisem

$$(BA)(\mathbf{u}) = B(A(\mathbf{u})).$$

Pořadí, ve kterém se zapisují faktory složeného zobrazení, je důležité a opačné k pořadí, ve kterém se definiční výraz vyhodnocuje. To naznačuje určitou nevhodnost zvyku psát argument do závorek za označení zobrazení.

Složené zobrazení je také lineární, neboť:

$$\begin{aligned} (BA)(\alpha \mathbf{u}) &= B(A(\alpha \mathbf{u})) = B(\alpha(A(\mathbf{u}))) = \alpha(B(A(\mathbf{u}))) = \alpha((BA)(\mathbf{u})) \\ (BA)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= B(A(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = B(A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})) = B(A(\mathbf{u})) + B(A(\mathbf{v})) = \\ &= (BA)(\mathbf{u}) + (BA)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Pro skládání zobrazení lze odvodit obdobné vztahy jako rovnosti (5.9) a (5.10) pro násobení matic. Je-li  $\alpha$  libovolný skalár a jsou-li  $A, B, C$  libovolná lineární zobrazení, pro která mají následující výrazy smysl, potom

$$A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B \quad (13.3a)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (13.3b)$$

$$(A + B)C = AC + BC \quad (13.3c)$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (13.3d)$$

## 13.7 Mnohočleny v lineárních transformacích

Jelikož skládání zobrazení je podle (13.3d) asociativní, můžeme při skládání zobrazení vynechat závorky. Pro libovolnou lineární transformaci  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  a kladné celé číslo  $m$  tak můžeme definovat **mocninu lineární transformace** předpisem

$$A^m = \underbrace{AA \cdots A}_m$$

přičemž platí

$$A^{m+n} = A^m A^n.$$

Poznamenejme, že pro dvě lineární transformace  $A$  a  $B$  vektorového prostoru  $\mathcal{U}$  do sebe nemusí platit  $(AB)^m = A^m B^m$ .

Snadno se ověří, že identita  $I$  definovaná na prostoru  $\mathcal{U}$  je lineární a pro libovolné  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  splňuje

$$AI = IA = A.$$

Jestliže  $p$  je libovolný mnohočlen definovaný vztahem

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

pak můžeme pro každé  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  definovat

$$p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n.$$

Jestliže  $D$  je například derivace na prostoru  $\mathcal{P}$  všech mnohočlenů a  $p(x) = x^2 - 1$ , pak

$$p(D) = D^2 - I,$$

takže pro každý mnohočlen  $q \in \mathcal{P}$  platí

$$p(D)(q) = q'' - q.$$

Všechna pravidla pro úpravu mnohočlenů jedné proměnné platí i pro mnohočleny jedné lineární transformace, neboť jsou odvozeny ze vztahů, které platí pro čísla i pro lineární transformace. Tak například z rovnosti

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

dostaneme po dosazení  $D$  za  $x$  rovnost

$$D^2 - I = (D - I)(D + I),$$

kterou si můžeme ověřit rozepsáním

$$\begin{aligned} (D - I)(D + I)(p) &= (D - I)((D + I)p) = (D - I)(p' + p) = \\ &= (p' + p)' - (p' + p) = p'' - p = (D^2 - I)(p). \end{aligned}$$

## 13.8 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Mnoho technických problémů lze zformulovat jako úlohu najít pro dané lineární zobrazení  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  a pro  $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$  vektor  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  tak, aby platilo

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \quad (13.4)$$

Například úlohu najít neznámé potenciály v 1. kapitole můžeme zapsat ve tvaru

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Obdobně lze zapsat podmínky pro průhyb  $y$  struny zatížené silou s jednotkovou hustotou, nataženou jednotkovou silou a uchycenou v bodech o souřadnicích 0 a 1 jako úlohu najít mnohočlen  $y$  tak, aby platilo:

$$-y''(x) = 1 \quad \text{pro } x \in (0, 1) \quad (13.5a)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (13.5b)$$

Označíme-li si  $\mathcal{P}$  prostor všech reálných mnohočlenů,  $\mathcal{P}_0$  jeho podprostor, do kterého patří všechny mnohočleny  $p$ , které splňují  $p(0) = p(1) = 0$ , a položíme-li  $b(x) = 1$ , pak  $b \in \mathcal{P}$  a zobrazení definované předpisem

$$A(p) = -p''$$

je lineární zobrazení patřící do  $\mathcal{L}(\mathcal{P}_0, \mathcal{P})$ . Úloha najít mnohočlen  $y$  tak, aby platilo (13.5) je tedy ekvivalentní úloze najít  $y \in \mathcal{P}_0$  tak, aby

$$A(y) = b.$$

Předpokládejme nyní, že známe například řešení  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  rovnice (13.4) pro dvě pravé strany  $\mathbf{b}_1$  a  $\mathbf{b}_2$ , tedy že platí

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1 \quad \text{a} \quad A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2,$$

a že navíc platí  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ . Pak můžeme určit řešení  $\mathbf{x}$  rovnice (13.4) pouhým sečtením  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$ , neboť pro  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  platí

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}.$$

Tomuto jednoduchému důsledku vlastností lineárních zobrazení se říká **princip superpozice**.

V našich příkladech lze najít fyzikální interpretaci principu superpozice pro obě úlohy. Stačí si uvědomit, že například u první úlohy je v pravé straně uchována informace o zdroji proudu a že neznámé jsou potenciály. Princip superpozice vyjadřuje také následující tvrzení.

**Věta 13.14.** *Nechť  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení vektorového prostoru  $\mathcal{U}$  na vektorový prostor  $\mathcal{V}$ . Pak existuje  $A^{-1}$ , které je rovněž lineární zobrazení.*

*Důkaz.* Inverzní zobrazení  $A^{-1}$  existuje pro každé vzájemně jednoznačné zobrazení. Nechť  $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$ , tedy  $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{u})$  a  $\mathbf{y} = A^{-1}(\mathbf{v})$ , a necht  $\alpha$  je libovolný skalár. Potom

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= A^{-1}(A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})) = A^{-1}(A(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \\ &= A^{-1}(\mathbf{u}) + A^{-1}(\mathbf{v}), \\ A^{-1}(\alpha\mathbf{u}) &= A^{-1}(\alpha A(\mathbf{x})) = A^{-1}(A(\alpha\mathbf{x})) = \alpha\mathbf{x} = \alpha A^{-1}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

□

## 13.9 Příklady

**Příklad 13.15.** Rozhodněte, zda-li zobrazení  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem

$$A([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_2 + x_3]$$

je lineární.

*Řešení.*

a)  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3) : A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})$  Zvolme  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ ,  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ .  
Pak

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= A([u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]) = \\ &= [(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3)] = \\ &= [u_1 - u_2 + v_1 - v_2, u_2 + u_3 + v_2 + v_3] = \\ &= [u_1 - u_2, u_2 + u_3] + [v_1 - v_2, v_2 + v_3] = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

b)  $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3) : A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u})$

$$\begin{aligned} A(\alpha \mathbf{u}) &= A([\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3]) = [(\alpha u_1) - (\alpha u_2), (\alpha u_2) + (\alpha u_3)] = \\ &= [\alpha(u_1 - u_2), \alpha(u_2 + u_3)] = \alpha[u_1 - u_2, u_2 + u_3] = \alpha A(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Z a) a b) tedy vyplývá, že zobrazení  $A$  je lineární. ▲

**Příklad 13.16.** Rozhodněte, zda-li zobrazení  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  definované předpisem

$$D(p) = 2ax + b, \quad \forall p \in \mathcal{P}_3 : p(x) = ax^2 + bx + c$$

je lineární.

*Řešení.*

a)  $(\forall p, q \in \mathcal{P}_3) : D(p + q) = D(p) + D(q)$

Zvolme  $p(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $q(x) = dx^2 + ex + f$ . Pak

$$\begin{aligned} D(p + q) &= D((a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)) = 2(a + d)x + (b + e) = \\ &= 2ax + b + 2dx + e = D(p) + D(q) \end{aligned}$$

b)  $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathcal{P}_3) : D(\alpha p) = \alpha D(p)$

$$\begin{aligned} D(\alpha p) &= D((\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + (\alpha c)) = 2(\alpha a)x + (\alpha b) = \\ &= \alpha(2ax + b) = \alpha D(p) \end{aligned}$$

Z a) a b) tedy vyplývá, že zobrazení  $D$  je lineární. ▲

**Příklad 13.17.** Je dáno lineární zobrazení  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisy

$$\begin{aligned} A([1, 1, 0]) &= [1, 2], \\ A([0, 1, 1]) &= [1, 1], \\ A([1, 0, 1]) &= [-1, 0]. \end{aligned}$$

a) Určete obraz  $A([2, 1, -1])$ .

b) Určete takové  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , aby  $A(\mathbf{x}) = [3, -1]$ .

*Řešení.*

a)  $A([2, 1, -1]) = ?$

Jelikož, jsou dány obrazy báze  $\mathbb{R}^3$ , můžeme nalézt takové  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , že

$$\begin{aligned} [2, 1, -1] &= \alpha_1 [1, 1, 0] + \alpha_2 [0, 1, 1] + \alpha_3 [1, 0, 1] \\ [2, 1, -1] &= [\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] \end{aligned}$$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{rclcl} \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 2 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & -1 \end{array}$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \\ & \xrightarrow{\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Podle předchozí věty pak můžeme psát

$$\begin{aligned} A([2, 1, -1]) &= A(\alpha_1 [1, 1, 0] + \alpha_2 [0, 1, 1] + \alpha_3 [1, 0, 1]) = \\ &= \alpha_1 A([1, 1, 0]) + \alpha_2 A([0, 1, 1]) + \alpha_3 A([1, 0, 1]) = \\ &= \alpha_1 [1, 2] + \alpha_2 [1, 1] + \alpha_3 [-1, 0] = \\ &= 2[1, 2] + (-1)[1, 1] + 0[-1, 0] = [1, 3]. \end{aligned}$$

Vektor  $[2, 1, -1]$  se tedy zobrazí na vektor  $[1, 3]$ , tj.  $A([2, 1, -1]) = [1, 3]$ .

b)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} = ?$ ,  $A(\mathbf{x}) = [3, -1]$

Zkusíme tedy zjistit, zda-li se dá vektor  $[3, -1]$  vyjádřit jako kombinace obrazů, pro které máme předepsáno zobrazení.

Dostáváme tedy soustavu 2 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= -1 \end{aligned}$$

Soustavu řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \end{array} \right]$$

Volíme  $\alpha_3 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a dostáváme  $\alpha_2 = 7 + 2t$ ,  $\alpha_1 = -4 - t$ .

Vektor  $[3, -1]$  lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci obrazů. Kdyby tomu tak nebylo, pak by vektor  $[3, -1]$  nepatřil do oboru hodnot a pak by neexistoval žádný vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , takový, že  $A(\mathbf{x}) = [3, -1]$ .

Každopádně můžeme psát

$$[3, -1] = (-4 - t)[1, 2] + (7 + 2t)[1, 1] + t[-1, 0], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

a tedy

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &= (-4 - t)A([1, 1, 0]) + (7 + 2t)A([0, 1, 1]) + tA([1, 0, 1]) = \\ &= A((-4 - t)[1, 1, 0] + (7 + 2t)[0, 1, 1] + t[1, 0, 1]) = \\ &= A([-4, 3 + t, 7 + 3t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Odtud tedy dostáváme, že  $A(\mathbf{x}) = [3, -1]$  pro  $\mathbf{x} = [-4, 3 + t, 7 + 3t]$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Na vektor  $[3, -1]$  se tedy zobrazí celá množina vektorů

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} &= [-4, 3 + t, 7 + 3t], \quad \forall t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = [-4, 3, 7] + [0, 1, 3]t, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

▲

## Příklady k procvičení

13.1. Necht  $\mathcal{F}$  je vektorový prostor všech reálných funkcí z příkladu 9.3. Ověřte, že zobrazení, které každé funkci  $f \in \mathcal{F}$  přiřazuje  $f(0) \in \mathbb{R}$ , je lineární funkcionál.

13.2. Necht  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor dimenze  $n$ . Dokažte s pomocí věty 13.10, že defekt jakéhokoliv lineárního funkcionálu definovaného na  $\mathcal{V}$  je roven  $n - 1$ .

13.3. Ověřte rovnosti (13.3).

13.4. Je dáno lineární zobrazení  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisy:

$$A([1, -1]) = [2, 3], \quad A([-1, -1]) = [1, 2]. \quad \text{Určete obraz vektoru } [5, 1], \text{ tj. } A([5, 1]).$$

13.5. Je dána lineární transformace  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definovaná předpisy

$$A([1, 1, 0]^\top) = [1, -1, 1]^\top, \quad A([1, 1, 1]^\top) = [1, 0, 1]^\top, \quad A([0, 1, 0]^\top) = [0, -1, 0]^\top.$$

- a) Nalezněte jádro a určete jeho dimenzi.
- b) Nalezněte obor hodnot a určete jeho dimenzi.

## Klíč k příkladům k procvičení

13.4.  $[1, 0]$

13.5. a)  $\mathcal{N}(A) = \langle [0, 1, 1]^\top \rangle$ ,  $\dim \mathcal{N}(A) = 1$

b)  $\mathcal{H}(A) = \langle [1, 0, 1]^\top, [0, -1, 0]^\top \rangle$ ,  $\dim \mathcal{H}(A) = 2$

# Kapitola 14

## Lineární zobrazení a matice

V této kapitole se budeme věnovat lineárním zobrazením prostorů aritmetických vektorů, která jsou definována pomocí součinu matice a vektoru tak jako v příkladu 13.4. Ukážeme si, že tak lze představit nejen každé lineární zobrazení prostoru aritmetických vektorů, ale s pomocí souřadnic dokonce každé lineární zobrazení vektorových prostorů konečné dimenze. Nové pojmy také využijeme k alternativní prezentaci teorie řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

### 14.1 Maticový zápis lineárních zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$

Jak lze popsat všechna lineární zobrazení  $\mathbb{R}^m$  do  $\mathbb{R}^n$ ? Nechť  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}})$  je standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^{m,1}$  všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze  $m$ , která je tvořena sloupci jednotkové matice  $\mathbf{I}_m$ . Nechť  $A : \mathbb{R}^{m,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$  je libovolné lineární zobrazení a nechť obrazy sloupcových vektorů  $\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}$  jsou sloupcové vektory

$$A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Jelikož libovolný vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$  lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \dots + x_m \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}},$$

lze  $A(\mathbf{x})$  zapsat pomocí

$$A(\mathbf{x}) = A(x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \dots + x_m \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = x_1 A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) + \dots + x_m A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde

$$\mathbf{A} = [A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}), \dots, A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}})] = [a_{ij}].$$

Platí tedy následující věta.



**Věta 14.1.** *Nechť  $A : \mathbb{R}^{m,1} \mapsto \mathbb{R}^{n,1}$  je libovolné lineární zobrazení. Pak existuje matice  $\mathbf{A}$  typu  $(n, m)$  tak, že pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$  platí*

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Lineární zobrazení

$$A : \mathbb{R}^{m,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

se často ztotožňuje s maticí  $\mathbf{A}$  a o matici  $\mathbf{A}$  se mluví jako o lineárním zobrazení. V tomto smyslu budeme i my používat pojmy **obor hodnot matice  $\mathbf{A}$** , **nulový prostor matice  $\mathbf{A}$** , nebo **defekt matice  $\mathbf{A}$** . Pojmy, které jsme si doposud zavedli jsou v souladu s touto konvencí. Například obor hodnot  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$  každé matice  $\mathbf{A}$  je totožný s jejím sloupcovým prostorem  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ , takže pro hodnoty matice a zobrazení platí

$$h(\mathbf{A}) = h(A).$$

## 14.2 Určení báze nulového prostoru matice

Bázi nulového prostoru matice tvoří jakákoliv maximální množina nezávislých řešení soustavy  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ , kterou najdeme tak, že matici  $\mathbf{A}$  převedeme na schodový tvar a za neznámé, které nejsou ve sloupcích s vedoucími prvky, budeme postupně dosazovat například řádky jednotkové matice. Získaná řešení pak zapíšeme do sloupců. Postup je v podstatě totožný s postupem řešení soustav rovnic s nekonečnou množinou řešení, který byl popsán v článku 2.4, avšak s pomocí nových pojmů můžeme lépe pochopit strukturu řešení.

**Příklad 14.2.** Určete bázi nulového prostoru matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

*Řešení.* Nejprve upravíme matici  $\mathbf{A}$  pomocí řádkových úprav na schodový tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud  $h(\mathbf{A}) = 2$  (počet nenulových řádků) a  $d(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ . Bázi  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  tedy tvoří jakékoliv dva nezávislé vektory, jejichž složky řeší soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vypočteme je tak, že za  $x_2$  a  $x_4$  dosadíme postupně například složky  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  a vypočteme  $x_1 = -1, x_3 = 0$  a  $x_1 = -3, x_3 = 0$ . Bázi nulového prostoru tedy tvoří vektory

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▲

Jestliže lze matici  $\mathbf{A}$  typu  $(m, n), m < n$  rozdělit na bloky tak, že

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{C}]$$

a  $\mathbf{B}$  je regulární, lze najít vzorec pro matici  $\mathbf{N}$  typu  $(n, n - m)$ , jejíž sloupce tvoří bázi  $\mathcal{N}(A)$ . V souladu s výše uvedeným výkladem budeme hledat  $\mathbf{N}$  ve tvaru:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} & n-m \\ \mathbf{X} & \\ \mathbf{I} & \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix}$$

Po rozepsání levé strany rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{N} = \mathbf{O}$$

s využitím blokové struktury a po vynásobení zleva maticí  $\mathbf{B}^{-1}$  dostaneme

$$\mathbf{B}^{-1} [\mathbf{B} \mid \mathbf{C}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{O},$$

odkud

$$\mathbf{X} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{O}.$$

Odtud  $\mathbf{X} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$  a

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

### 14.3 Matice jako lineární zobrazení a soustavy rovníc

Díváme-li se na matici  $\mathbf{A}$  jako na lineární zobrazení  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ , můžeme využít dosavadních výsledků o lineárních zobrazeních k alternativnímu výkladu teorie řešitelnosti lineárních soustav z článku 12.5. Například přeložíme-li tvrzení (i) do termínů zobrazení, zjistíme, že vyjadřuje zřejmou skutečnost, že soustava lineárních rovnic má řešení, právě když pravá strana patří do oboru hodnot matice soustavy. Tvrzení (ii) zase vyplývá z důsledku 13.11, podle něhož je řešení jediné, jestliže

$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{o}\}$ , tedy defekt  $d(A) = 0$ , což je podle (13.1) ekvivalentní  $h(A) = n$ , kde  $n$  je počet neznámých. Tvrzení (iii) lze dokonce prohloubit.

**Věta 14.3.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je matice typu  $(m, n)$  pro kterou platí  $d(\mathbf{A}) > 0$ , nechť  $\mathbf{b}$  je  $m$ -rozměrný sloupcový vektor, nechť  $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  a nechť  $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d)$  je báze  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ . Potom libovolné řešení soustavy  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  může být zapsáno ve tvaru*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{n}_d. \quad (14.1)$$

*Důkaz.* Podle věty 13.7 lze libovolné řešení soustavy (13.4) zapsat ve tvaru  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$ , kde  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(A)$ . Jelikož vektory  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$  tvoří bázi  $\mathcal{N}(A)$ , lze  $\mathbf{n}$  zapsat ve tvaru (14.1).  $\square$

**Příklad 14.4.** Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 2 \end{aligned} \quad (14.2)$$

ve tvaru (14.1).

*Řešení.* Rozšířenou matici soustavy nejprve upravíme na schodový tvar

$$[\mathbf{A} | \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Z něho dostaneme částečné řešení  $\mathbf{x}_0$  soustavy (14.2) řešením soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

tak, že položíme například  $x_2 = 0$  a  $x_4 = 0$ . Dostaneme  $x_1 = 2, x_3 = -1$ . Jelikož matice soustavy je stejná jako matice  $\mathbf{A}$  v příkladu 14.2, můžeme pomocí řešení tohoto příkladu napsat libovolné řešení soustavy (14.2) pomocí parametrů  $\alpha_1, \alpha_2$  ve tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▲

## 14.4 Definice matice lineárního zobrazení

V článku 14.1 jsme si ukázali, že libovolné lineární zobrazení  $\mathbb{R}^m$  do  $\mathbb{R}^n$  lze popsat pomocí vhodné matice. Nyní si ukážeme, že pomocí matic můžeme popsat libovolné zobrazení prostorů konečné dimenze. Použijeme k tomu báze definičního oboru a oboru hodnot. Pro stručnost budeme v celém článku předpokládat, že  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  a  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ .

**Definice 14.5.** Necht  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  je lineární zobrazení. Pak můžeme vektory  $A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_m)$  vyjádřit jako lineární kombinace vektorů  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$  ve tvaru:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{f}_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ A(\mathbf{e}_m) &= a_{1m}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{f}_n \end{aligned}$$

Matici

$$[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

nazýváme **maticí lineárního zobrazení  $A$  vzhledem k bázím  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$** . Jestliže  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  a  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ , pak budeme mluvit o **matici lineární transformace vzhledem k bázi  $\mathcal{E}$**  a místo  $[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  budeme psát stručně  $[A]_{\mathcal{E}}$ .

Indexy prvků  $a_{ij}$  jsou zvoleny tak, aby pro každé lineární zobrazení  $A : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$  platilo

$$[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = [[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \dots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}}],$$

obdobně jako v článku 14.1, kde byly  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{F}$  standardní báze. Z této rovnosti a z vlastností souřadnic (11.1) a (11.2) plyne pro libovolný skalár  $\alpha$ , případně pro libovolné další lineární zobrazení  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , že

$$\begin{aligned} [\alpha A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} &= \alpha [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}, \\ [A + B]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} &= [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} + [B]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}. \end{aligned}$$

**Příklad 14.6.** Necht  $\mathcal{P}_3$  je vektorový prostor všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně s bází  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ , kde  $e_1, e_2, e_3$  jsou mnohočleny  $e_1(x) = 1, e_2(x) = x$  a  $e_3(x) = x^2$ . Najděte matici derivace

$$D : \mathcal{P}_3 \ni p \mapsto p' \in \mathcal{P}_3.$$

*Řešení.* Nejdříve najdeme souřadnice  $D(e_1)$ ,  $D(e_2)$  a  $D(e_3)$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Jelikož  $D(e_1)(x) = 0$ ,  $D(e_2)(x) = 1$  a  $D(e_3)(x) = 2x$ , můžeme napsat přímo:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ 2x &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Souřadnice  $D(e_1)$ ,  $D(e_2)$  a  $D(e_3)$  tvoří zřejmě koeficienty na řádcích, které zapíšeme do sloupců a dostaneme

$$[D]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

▲

## 14.5 Souřadnice obrazu vektoru

Předpokládejme nyní, že  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  a  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , že  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  je lineární zobrazení,  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  a

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Potom s pomocí definice lineárního zobrazení, vztahů (11.1), (11.2) a definice součinu matice a vektoru odvodíme postupně

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} &= [A(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = [x_1A(\mathbf{e}_1) + \dots + x_mA(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\ &= x_1[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} + \dots + x_m[A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = [ [A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \dots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} ] [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \\ &= [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}, \end{aligned}$$

tedy

$$[A(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \quad (14.3)$$

**Poznámka.** Je-li  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  a  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ , má (14.3) tvar

$$[A(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \quad (14.4)$$

**Příklad 14.7.** S využitím řešení příkladu 14.6 vypočtete souřadnice derivace libovolného mnohočlenu  $p$  nejvýše druhého stupně pomocí souřadnic  $p$  v bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $e_1(x) = 1$ ,  $e_2(x) = x$ ,  $e_3(x) = x^2$ .

*Řešení.* Mnohočlen  $p(x) = ax^2 + bx + c$  má v bázi  $\mathcal{E}$  souřadnice

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}.$$

Jelikož jsme si v příkladu 14.6 ukázali, že derivace  $D$  má v bázi  $\mathcal{E}$  matici

$$[D]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

platí

$$[p']_{\mathcal{E}} = [Dp]_{\mathcal{E}} = [D]_{\mathcal{E}} [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

▲

## 14.6 Matice složeného zobrazení

Nechť  $\mathcal{U}$  je vektorový prostor konečné dimenze s bází  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  a necht  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  a  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  jsou lineární transformace. Pak s použitím vztahu (14.3) a definice součinu matic (5.6) odvodíme

$$\begin{aligned} [AB]_{\mathcal{E}} &= [[(AB)(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [(AB)(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}] = [[A(B(\mathbf{e}_1)))]_{\mathcal{E}}, \dots, [A(B(\mathbf{e}_n)))]_{\mathcal{E}}] = \\ &= [[A]_{\mathcal{E}} [B(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [A]_{\mathcal{E}} [B(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}] = [A]_{\mathcal{E}} [[B(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [B(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}] = \\ &= [A]_{\mathcal{E}} [[B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{E}}] = [A]_{\mathcal{E}} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}] = \\ &= [A]_{\mathcal{E}} [B]_{\mathcal{E}} \mathbf{I} = [A]_{\mathcal{E}} [B]_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$[AB]_{\mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{E}} [B]_{\mathcal{E}}. \quad (14.5)$$

Při odvození jsme použili toho, že souřadnice jednotlivých vektorů báze v téže bázi jsou prvky příslušného sloupce jednotkové matice.

**Příklad 14.8.** S využitím řešení příkladu 14.6 vypočítejte matici druhé derivace  $D^2 = DD$  na prostoru  $P_3$  všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně v bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $e_1(x) = 1$ ,  $e_2(x) = x$ ,  $e_3(x) = x^2$ .

*Řešení.* V příkladu 14.6 jsme si ukázali, že derivace  $D$  má v bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  matici

$$[D]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podle (14.5) tedy

$$\begin{aligned} [D^2]_{\mathcal{E}} &= [DD]_{\mathcal{E}} = [D]_{\mathcal{E}} [D]_{\mathcal{E}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

▲

## 14.7 Změna báze

Nyní se budeme zabývat otázkou, jak se změní souřadnice vektoru a matice lineárního zobrazení při změně báze.

Nechť  $\mathcal{U}$  je vektorový prostor konečné dimenze a nechť  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  a  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  jsou dvě báze  $\mathcal{U}$ . Nechť  $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  je libovolné lineární zobrazení a nechť  $C : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  je lineární zobrazení, které každému vektoru  $\mathbf{e}_i$  báze  $\mathcal{E}$  přiřazuje vektor  $C(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$ . Zobrazení  $C$  tedy zobrazuje bázi  $\mathcal{E}$  na bázi  $\mathcal{F}$ , takže podle důsledku 13.11 je  $C$  prosté a existuje  $C^{-1}$ .

Nejprve si ukážeme, jak se změní souřadnice  $x_i$  libovolného vektoru  $\mathbf{x}$  při přechodu od báze  $\mathcal{E}$  k bázi  $\mathcal{F}$  a obráceně. K tomu si stačí všimnout, že z

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

plyne

$$C(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{f}_1 + \dots + x_n \mathbf{f}_n,$$

takže

$$[C(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

Pomocí (14.4) odtud dostaneme

$$[C]_{\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}},$$

odkud s použitím označení  $\mathbf{T} = [C]_{\mathcal{F}}^{-1} = [C^{-1}]_{\mathcal{F}}$  dostaneme

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{T} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \quad (14.6)$$

Matice  $\mathbf{T}$  se nazývá **matice zpětného přechodu** od nové báze  $\mathcal{F}$  k bázi  $\mathcal{E}$ .

Nyní můžeme hledat vztah mezi  $[A]_{\mathcal{E}}$  a  $[A]_{\mathcal{F}}$ . Platí

$$\begin{aligned} [A]_{\mathcal{F}} &= [[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{F}}, \dots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{F}}] = [\mathbf{T}[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, \mathbf{T}[A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{E}}] = \\ &= \mathbf{T} [[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{E}}] = \mathbf{T} [[A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}}] = \\ &= \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{T}^{-1} [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}}, \dots, \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{F}}] = \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}] = \\ &= \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$[A]_{\mathcal{F}} = \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}^{-1}. \quad (14.7)$$

Místo matice  $\mathbf{T}$  můžeme uvažovat **matici přechodu**  $\mathbf{S} = [C]_{\mathcal{E}}$  od původní báze  $\mathcal{E}$  k bázi  $\mathcal{F}$ . Mezi maticí zpětného přechodu  $\mathbf{T}$  a maticí přechodu  $\mathbf{S}$  platí vztah

$$\mathbf{TS} = \mathbf{T} [[C(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [C(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}] = [\mathbf{T} [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}}, \dots, \mathbf{T} [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}}] = [[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}}, \dots, [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{F}}] = \mathbf{I},$$

takže  $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ . Dosazením do (14.6) dostaneme po úpravě

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{S} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}. \quad (14.8)$$

Povšimněme si, že názvy matice přechodu a matice zpětného přechodu se vztahují k popisu změny báze, nikoliv k popisu změny souřadnic.

## 14.8 Podobnost matic

Výše uvedená rovnost (14.7) je motivací pro nový pojem.

**Definice 14.9.** Čtvercové matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  stejného řádu jsou **podobné**, jestliže existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T}^{-1}.$$

Úvahy článku 14.7 můžeme shrnout pomocí nového pojmu do stručné věty.

**Věta 14.10.** Matice dané lineární transformace v různých bázích jsou podobné.

Dá se dokázat i tvrzení, že jsou-li matice podobné, pak jsou maticemi nějaké lineární transformace v různých bázích. Jelikož podstatné charakteristiky lineárních transformací (například hodnost nebo defekt) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že podobné matice budou mít podstatné charakteristiky shodné. Připomeňme, že o vektoru se ze souřadnic nedovíme obecně více než to, je-li nulový nebo nenulový.

Snadno lze dokázat, že každá matice je podobná sama sobě, že je-li  $\mathbf{A}$  podobná  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{B}$  podobná  $\mathbf{C}$ , pak  $\mathbf{A}$  je také podobná  $\mathbf{C}$ , a konečně je-li  $\mathbf{A}$  podobná  $\mathbf{B}$ , pak je i  $\mathbf{B}$  podobná  $\mathbf{A}$ . Například poslední tvrzení vyplývá z ekvivalence rovností  $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T}^{-1}$  a  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ .

## 14.9 Příklady

**Příklad 14.11.** Pro lineární zobrazení  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  definované předpisem

$$D(p) = 2ax + b, \quad \forall p \in \mathcal{P}_3 : \quad p(x) = ax^2 + bx + c$$

sestavte matici vzhledem k bázím  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $e_1(x) = 1$ ,  $e_2(x) = x$ ,  $e_3(x) = x^2$  a  $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ ,  $f_1(x) = x+1$ ,  $f_2(x) = x-1$ . Nalezněte souřadnice obrazu mnohočlenu  $p(x) = x^2 - 2x + 3$  vzhledem k bázi  $\mathcal{F}$ .



*Řešení.* Abychom mohli sestavit matici  $[\mathbf{D}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [[D(e_1)]_{\mathcal{F}}, [D(e_2)]_{\mathcal{F}}, [D(e_3)]_{\mathcal{F}}]$ , musíme nejdříve určit obrazy vektorů báze  $\mathcal{E}$ , tj.  $D(e_1) = 0$ ,  $D(e_2) = 1$ ,  $D(e_3) = 2x$ . Dále musíme určit souřadnice těchto obrazů vzhledem k bázi  $\mathcal{F}$ . Tzn. musíme řešit 3 rovnice

$$\begin{aligned}\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 &= D(e_1), \\ \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 &= D(e_2), \\ \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 &= D(e_3).\end{aligned}$$

Tyto 3 rovnice mají stejné levé strany a liší se pouze v pravých stranách. Proto rozepíšeme pouze první rovnici a ostatní budou analogické.

$$\begin{aligned}\alpha_1(x+1) + \alpha_2(x-1) &= 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 - \alpha_2) &= 0.\end{aligned}$$

Toto vede na soustavu

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Pro neznámé  $\beta$  a  $\gamma$  se pak změni pravé strany a tak můžeme řešit všechny 3 úlohy najednou pomocí Gaussovy-Jordanovy metody se 3 různými pravými stranami.

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - r_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \beta_1 = \frac{1}{2} & \gamma_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 & \beta_2 = -\frac{1}{2} & \gamma_2 = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Odtud

$$[D(e_1)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(e_2)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [D(e_3)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hledaná matice má tedy tvar

$$[\mathbf{D}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokud chceme určit souřadnice obrazu vektoru  $p$  vzhledem k bázi  $\mathcal{F}$ , pak nejdříve

vypočteme souřadnice  $[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , neboť  $p = 3e_1 - 2e_2 + e_3$ . Pak

$$[D(p)]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{D}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lehce se dá ověřit, že  $D(p) = 2x - 2 = 0f + 2f_2$ . ▲

**Příklad 14.12.** Je dáno lineární zobrazení  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  z předchozího příkladu. Určete takový vzor  $p \in \mathcal{P}_3$  aby  $D(p) = x + 1$ .

*Řešení.* K řešení využijeme matici zobrazení  $\mathbf{D}$ , kterou jsme sestavili v předchozím příkladě. Pro matici lineárního zobrazení totiž platí  $[D(p)]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{D}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [p]_{\mathcal{E}}$ , kde  $\mathcal{E}$  je báze  $\mathcal{P}_3$  a  $\mathcal{F}$  je báze  $\mathcal{P}_2$ .

Jelikož souřadnice obrazu  $D(p) = x + 1$  vzhledem k bázi  $\mathcal{F}$  jsou  $[D(p)]_{\mathcal{F}} = [1, 0]$  můžeme souřadnice  $[p]_{\mathcal{E}} = [x_1, x_2, x_3]$  hledaného mnohočlenu  $p$  vzhledem k bázi  $\mathcal{E}$  určit ze soustavy lineárních rovnic  $[\mathbf{D}]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [p]_{\mathcal{E}} = [D(p)]_{\mathcal{F}}$ . Řešíme tedy Gaussovou eliminační metodou.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 + r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Jelikož u neznámé  $x_1$  není vedoucí prvek volíme ji za parametr a tedy  $x_1 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dále dostáváme  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ . Souřadnice hledaného vzoru  $p$  vzhledem k bázi  $\mathcal{E}$  jsou tedy  $[p]_{\mathcal{E}} = [t, 1, \frac{1}{2}]$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Hledaný vzor má tedy tvar

$$p(x) = te_1(x) + 1e_2(x) + \frac{1}{2}e_3(x) = t + x + \frac{1}{2}x^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

▲

## Příklady k procvičení

14.1. Je dáno lineární zobrazení  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  předpisem

$$A([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_3].$$

Nalezněte matici lineárního zobrazení  $A$  vzhledem k bázím  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{F}$ , kde  $\mathcal{E}$  je standardní báze vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathcal{F} = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$  je báze prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Přitom  $\mathbf{f}_1 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (2, 2)$ .

14.2. Je dáno lineární zobrazení  $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definované předpisy:

$$\begin{aligned} A([1, 1, -1, 0]) &= [0, 0, 0], & A([1, 2, -1, -2]) &= [-1, -3, 1], \\ A([1, 0, 0, -1]) &= [0, 0, 0], & A([1, 1, 1, 1]) &= [5, 8, 2]. \end{aligned}$$

Sestavte matici lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím prostoru  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .

## Klíč k příkladům k procvičení

$$14.1. [A]_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

$$14.2. [A]_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Kapitola 15

## Bilineární formy

V 1. kapitole jsme si sestavili soustavu rovnic (1.6) pro neznámé potenciály  $x_1, x_2$  obvodu z obr. 1.1. Soustava lineárních rovnic však není jedinou možností, jak popsat elektrický obvod nebo jiný lineární problém. Ukazuje se, že někdy je výhodné přejít k jiné formulaci, která v našem případě spočívá v sečtení obou rovnic soustavy vynásobených postupně „virtuálními“ (myšlenými) potenciály  $y_1, y_2$  tak, že dostaneme

$$-2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2 = -10y_2. \quad (15.1)$$

Úloha najít řešení  $x_1, x_2$  soustavy (1.6) je pak ekvivalentní úloze najít  $x_1, x_2$  tak, aby rovnost (15.1) platila pro všechna  $y_1, y_2$ .

Výraz na levé straně rovnice (15.1) můžeme považovat za funkci dvou proměnných aritmetických vektorů  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$  a  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$ , která je při jednom zafixovaném argumentu lineární ve druhém argumentu. To však je vlastnost, která má smysl pro každou funkci dvou argumentů z vektorového prostoru. Ukazuje se, že takové funkce jsou nepostradatelným nástrojem pro vyjádření fyzikálních zákonů ve formě vhodné pro numerické řešení technických problémů pomocí takzvaných variačních metod. V tomto textu je využijeme ke studiu geometrie vektorového prostoru.

### 15.1 Definice a příklady

**Definice 15.1.** Necht  $\mathcal{V}$  je reálný vektorový prostor. Zobrazení  $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$  se nazývá **bilineární forma**, jestliže pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí:

$$B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (\text{B1})$$

$$B(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{B2})$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (\text{B3})$$

$$B(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{B4})$$

Bilineární funkce je tedy při zvolené hodnotě jedné proměnné lineární funkcí druhé proměnné. Můžeme ji považovat za zobecnění funkce  $z = axy$  dvou proměnných  $x$  a  $y$  na vektorové prostory.

**Příklad 15.2.** Na prostoru  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$  sloupcových vektorů dimenze 3 si definujeme formu  $B$  předpisem, který každé dvojici vektorů  $\mathbf{x} = [x_i]$  a  $\mathbf{y} = [y_i]$  přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \quad (15.2)$$

Interpretujeme-li  $\mathbf{x}$  jako sílu a  $\mathbf{y}$  jako dráhu, pak  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  je práce konaná silou  $\mathbf{x}$  po dráze  $\mathbf{y}$ . Snadno se ověří, že  $B$  je bilineární forma.

**Příklad 15.3.** Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každé dvojici sloupcových vektorů druhého řádu  $\mathbf{x} = [x_i]$  a  $\mathbf{y} = [y_i]$  přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2, \quad (15.3)$$

je bilineární forma.

**Příklad 15.4.** Nechť  $\mathcal{F}$  je vektorový prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé dvojici funkcí  $f \in \mathcal{F}$  a  $g \in \mathcal{F}$  přiřazuje

$$B(f, g) = f(1)g(1) + f(2)g(2), \quad (15.4)$$

definuje bilineární formu.

## 15.2 Klasifikace bilineárních forem

Nechť  $\mathcal{V}$  je libovolný vektorový prostor. Bilineární forma  $B$  se nazývá **symetrická**, jestliže pro libovolné vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  platí

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

a **antisymetrická**, jestliže

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (15.5)$$

Antisymetrické formy lze ekvivalentně charakterizovat též rovností

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad (15.6)$$

pro libovolné  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ . Skutečně, platí-li (15.6), pak

$$B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0,$$

odkud dostaneme (15.5). Obráceně z (15.5) plyne

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

tedy platí (15.6).

Bilineární formy (15.2) a (15.4) jsou zřejmě symetrické, zatímco forma (15.3) je symetrická, právě když  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ . Bilineární forma (15.3) bude antisymetrická, právě když  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$ , což splňuje například matice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilineární forma (15.3) s touto maticí splňuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -(y_1 x_2 - y_2 x_1) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Každou bilineární formu můžeme vyjádřit ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické formy, neboť

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})) + \frac{1}{2}(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})).$$

Bilineární formy

$$B^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \quad \text{a} \quad B^A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u}))$$

splňují

$$B^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B^S(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \text{a} \quad B^A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B^A(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Formy  $B^S$  a  $B^A$  se nazývají po řadě *symetrická část* a *antisymetrická část* bilineární formy  $B$ .

### 15.3 Matice bilineární formy

Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor s bází  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  a nechť  $B$  je bilineární forma na  $\mathcal{V}$ . Nechť  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$  jsou dva vektory, které lze zapsat pomocí souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n.$$

Pak

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= B(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = x_1 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) + \dots + x_n B(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = \\ &= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = \\ &= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)y_1 + \dots + B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n)y_n \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1)y_1 + \dots + B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)y_n \end{bmatrix} = \\ &= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \dots B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \dots B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

což můžeme pomocí označení  $[B]_{\mathcal{E}} = [B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]$  zapsat stručně ve tvaru

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}}. \quad (15.7)$$

Matici  $[B]_{\mathcal{E}}$  nazýváme **maticí bilineární formy**  $B$  v bázi  $\mathcal{E}$ .

**Příklad 15.5.** Najděte matici bilineární formy (15.4) definované na prostoru  $P_2$  všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně v bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ , kde  $e_1(x) = 1$ ,  $e_2(x) = x$ ,  $e_3(x) = x^2$ . Výsledek využijte k vyčíslení  $B(p, q)$  pro  $p(x) = 1 - x$  a  $q(x) = x^2 - x$ .

*Řešení.* Podle vztahu (15.4) vypočteme postupně:

$$B(e_1, e_1) = e_1(1)e_1(1) + e_1(2)e_1(2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$B(e_1, e_2) = e_1(1)e_2(1) + e_1(2)e_2(2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

$$B(e_1, e_3) = e_1(1)e_3(1) + e_1(2)e_3(2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5$$

$$B(e_2, e_2) = e_2(1)e_2(1) + e_2(2)e_2(2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$B(e_2, e_3) = e_2(1)e_3(1) + e_2(2)e_3(2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

$$B(e_3, e_3) = e_3(1)e_3(1) + e_3(2)e_3(2) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

Ostatní prvky matice formy dopočítáme ze symetrie

$$B(e_i, e_j) = e_i(1)e_j(1) + e_i(2)e_j(2) = e_j(1)e_i(1) + e_j(2)e_i(2) = B(e_j, e_i),$$

takže

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}.$$

Jelikož

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad [q]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

platí

$$B(p, q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = -2.$$

▲

## 15.4 Matice symetrické formy

**Věta 15.6.** *Nechť  $B$  je bilineární forma na vektorovém prostoru  $\mathcal{V}$  konečné dimenze. Pak  $B$  je symetrická, právě když matice  $B$  v libovolné bázi  $\mathcal{E}$  prostoru  $\mathcal{V}$  splňuje*

$$[B]_{\mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{E}}^{\top}. \quad (15.8)$$

*Důkaz.* Je-li  $B$  symetrická bilineární forma, pak  $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$  a vztah (15.8) platí.

Obráceně, nechť platí (15.8). Pak podle (15.7) pro libovolné vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$  platí

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} = \left( [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \right)^{\top} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}}^{\top} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \\ &= B(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

takže forma  $B$  je symetrická. □

Matice  $\mathbf{A}$ , která splňuje  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$ , se nazývá **symetrická matice**, takže větu lze zformulovat stručně také tak, že bilineární forma na prostoru konečné dimenze je symetrická, právě když má v libovolné bázi symetrickou matici.

## 15.5 Změna matice bilineární formy při změně báze

Nechť  $\mathcal{U}$  je vektorový prostor konečné dimenze a nechť  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  a  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  jsou dvě báze  $\mathcal{U}$ . Nechť  $\mathbf{S}$  je matice přechodu od báze  $\mathcal{E}$  k nové bázi  $\mathcal{F}$ , takže pro libovolný vektor  $x \in \mathcal{U}$  platí podle (14.8)

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{S} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}.$$

S použitím (15.7) dostaneme pro libovolné dva vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$  a bilineární formu  $B$  na  $\mathcal{U}$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^{\top} [B]_{\mathcal{F}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{F}} = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^{\top} \mathbf{S}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} \mathbf{S} [\mathbf{y}]_{\mathcal{F}}.$$

Zvolíme-li  $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i$  a  $\mathbf{y} = \mathbf{f}_j$ , snadno si ověříme, že prvky v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matic  $[B]_{\mathcal{F}}$  a  $\mathbf{S}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} \mathbf{S}$  jsou stejné, tedy

$$[B]_{\mathcal{F}} = \mathbf{S}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} \mathbf{S}. \quad (15.9)$$

Odtud dostaneme s použitím matice zpětného přechodu  $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$  od báze  $\mathcal{F}$  k bázi  $\mathcal{E}$

$$[B]_{\mathcal{E}} = \mathbf{T}^{\top} [B]_{\mathcal{F}} \mathbf{T}. \quad (15.10)$$

## 15.6 Kongruentní matice

Výše uvedená rovnost (15.9) je motivací pro nový pojem.

**Definice 15.7.** Čtvercová matice  $\mathbf{A}$  je *kongruentní* s maticí  $\mathbf{B}$ , jestliže existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}.$$

Úvahy předchozího článku můžeme shrnout pomocí nového pojmu do následující věty.

**Věta 15.8.** *Matice dané bilineární formy v různých bázích jsou kongruentní.*

Je možno dokázat i tvrzení, že jsou-li matice kongruentní, pak jsou maticemi nějaké bilineární formy v různých bázích. Jelikož podstatné vlastnosti bilineárních forem (například symetrie) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že kongruentní matice budou mít podstatné charakteristiky shodné.

Snadno lze také dokázat, že každá matice je kongruentní sama se sebou, že je-li  $\mathbf{A}$  kongruentní s  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{B}$  kongruentní s  $\mathbf{C}$ , pak  $\mathbf{A}$  je také kongruentní s  $\mathbf{C}$ , a konečně je-li  $\mathbf{A}$  kongruentní s  $\mathbf{B}$ , pak je i  $\mathbf{B}$  kongruentní s  $\mathbf{A}$ .

Například je-li  $\mathbf{A}$  kongruentní s  $\mathbf{B}$ , pak po přenásobení rovnosti  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{T}$  zleva  $\mathbf{T}^{-\top} = (\mathbf{T}^\top)^{-1}$  a zprava  $\mathbf{T}^{-1}$  dostaneme  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-\top} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ . Matice  $\mathbf{B}$  je tedy kongruentní s  $\mathbf{A}$ , neboť si můžeme snadno ověřit, že platí  $\mathbf{T}^{-\top} = (\mathbf{T}^{-1})^\top$ .

## 15.7 Příklady

**Příklad 15.9.** Rozhodněte, zda-li bilineární forma  $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$$

je symetrická či antisymetrická, případně nalezněte její symetrickou a antisymetrickou část.

*Řešení.*

$$\begin{aligned} B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= y_1 x_1 - y_1 x_2 + 3y_2 x_1 + 2y_2 x_2 - 2y_2 x_3 - 2y_3 x_2 + 5y_3 x_3 = \\ &= x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3. \end{aligned}$$

Odtud je patrné, že  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  ani  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq -B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ . Bilineární forma tedy není ani symetrická ani antisymetrická.



Nyní určíme její symetrickou a antisymetrickou část.

$$\begin{aligned}
 B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} (B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x})) = \\
 &= \frac{1}{2} (x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3 + \\
 &\quad + x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3) = \\
 &= \frac{1}{2} (2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2 + 10x_3y_3) = \\
 &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3 \\
 \\
 B_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} (B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - B(\mathbf{y}, \mathbf{x})) = \\
 &= \frac{1}{2} (x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3 \\
 &\quad - x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 5x_3y_3) = \\
 &= \frac{1}{2} (-4x_1y_2 + 4x_2y_1) = -2x_1y_2 + 2x_2y_1
 \end{aligned}$$

Snadno se dá ověřit, že opravdu platí  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B_A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . ▲

**Příklad 15.10.** Nalezněte kvadratickou formu příslušnou k bilineární formě  $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3.$$

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
 Q_B(\mathbf{x}) &= B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1x_1 - x_1x_2 + 3x_2x_1 + 2x_2x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_2 + 5x_3x_3 = \\
 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2.
 \end{aligned}$$

Kvadratická forma příslušná k bilineární formě  $B$  má tedy tvar  $Q_B(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$ . ▲

**Příklad 15.11.** Nalezněte matici kvadratické formy  $Q$  z předchozího příkladu vzhledem ke standardní bázi. Pomocí této matice určete  $Q(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = [1, 2]$ .

*Řešení.* Pro nalezení matice kvadratické formy musíme znát symetrickou část bilineární formy k níž kvadratická forma  $Q$  přísluší. Tuto část jsme však již našli v předchozím příkladě a má tvar

$$B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Dále připomeneme, že standardní bázi  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_2^I)$  tvoří sloupcové vektory jednotkové matice. Matice symetrické části bilineární formy příslušné ke  $Q$  má tedy složky:

$$\begin{aligned}
 B_S(\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_1^I) &= 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 4 \\
 B_S(\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_2^I) &= 4 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = -2 = B_S(\mathbf{s}_2^I, \mathbf{s}_1^I) \\
 B_S(\mathbf{s}_2^I, \mathbf{s}_2^I) &= 4 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3
 \end{aligned}$$

Matice kvadratické formy má tedy tvar

$$[Q]_S = [B]_S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pro určení obrazu kvadratické formy potřebujeme znát souřadnice vektoru vzhledem ke standardní bázi. To je ovšem triviální neboť  $[\mathbf{x}]_S = \mathbf{x}$ .

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_S^\top [Q]_S [\mathbf{x}]_S = [1, 2] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1, 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 8.$$

Vskutku  $Q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 8$ . ▲

## Příklady k procvičení

15.1. Je dána bilineární forma  $B$  na  $P_3$  předpisem  $B(p, q) = p(0)q(1)$ ,  $\forall p, q \in P_3$ . Pomocí matice bilineární formy nalezněte obraz  $B(p, q)$  kde  $p(x) = x + 1$ ,  $q(x) = x^2 + x - 1$ .

15.2. Nalezněte matici kvadratické formy  $Q$  z předchozího příkladu vzhledem k bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ,  $\mathbf{e}_1 = [1, 1]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [1, -1]$ .

15.3. Je dána bilineární forma  $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_3.$$

- Určete její symetrickou a antisymetrickou část.
- Určete matici bilineární formy  $B$  vzhledem ke standardní bázi, matici symetrické části  $B$  a matici antisymetrické části  $B$ .

15.4. Rozložte matici bilineární formy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

na součet matice symetrické a antisymetrické části.

## Klíč k příkladům k procvičení

15.3. a)  $B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 - x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{3}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_3y_2$ ,  
 $B_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 + x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_2$

$$\text{b) } [B]_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [B]_S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, [B_A]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$15.4. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Kapitola 16

## Kvadratické formy

Dosadíme-li do bilineární formy za oba argumenty tentýž vektor, dostaneme speciální funkci jedné vektorové proměnné. Například pro  $y_1 = x_1$  a  $y_2 = x_2$  dostaneme na levé straně rovnice (15.1) funkci jedné vektorové proměnné  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$  ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2. \quad (16.1)$$

Ukazuje se, že takové speciální funkce mohou v některých důležitých případech nahradit původní bilineární formu. Přechod ke skalární funkci jedné vektorové proměnné je základem takzvaných energetických metod řešení technických problémů a usnadňuje řešení některých dalších úloh, jak si v tomto textu ukážeme například na řešení nekonzistentních soustav.

### 16.1 Definice a příklady

**Definice 16.1.** Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor a nechť  $B$  je bilineární forma na  $\mathcal{V}$ . Zobrazení  $Q_B$  definované pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  předpisem

$$Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

se nazývá **kvadratická forma** příslušná bilineární formě  $B$ . Kvadratickou formou budeme stručně nazývat zobrazení  $Q$  definované na  $\mathcal{V}$ , pro které existuje bilineární forma  $B$  na  $\mathcal{V}$  tak, že  $Q = Q_B$ . Kvadratickou formu můžeme považovat za zobecnění funkce  $y = ax^2$  na vektorové prostory.

**Příklad 16.2.** Na prostoru  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$  sloupcových vektorů dimenze 3 je definováno zobrazení  $Q$ , které každému vektoru  $\mathbf{x} = [x_i]$  přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (16.2)$$

což je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované rovností (15.2). Interpretujeme-li  $\mathbf{x}$  jako polohový vektor, pak  $Q(\mathbf{x})$  je druhá mocnina jeho délky.

**Příklad 16.3.** Necht  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazí, které každému sloupcovému vektoru  $\mathbf{x} = [x_i]$  dimenze dvě přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované rovností (15.3).

**Příklad 16.4.** Necht  $\mathcal{F}$  je prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé funkci  $f \in \mathcal{F}$  přiřazuje

$$Q(f) = f(1)^2 + f(2)^2, \quad (16.3)$$

definuje kvadratickou formu příslušnou bilineární formě definované rovností (15.4).

## 16.2 Základní vlastnosti

Necht  $\mathcal{V}$  je reálný vektorový prostor. Jelikož pro každou bilineární formu  $B$  na  $\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  a reálné  $\alpha$  platí  $B(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , platí pro každou kvadratickou formu  $Q$  na  $\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  a reálné  $\alpha$  rovnost

$$Q(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 Q(\mathbf{x}).$$

Odtud bezprostředně plyne, že

$$Q(\mathbf{o}) = Q(0 \cdot \mathbf{o}) = 0$$

a že obor hodnot  $\mathcal{H}(Q)$  každé kvadratické formy  $Q$  obsahuje s každým číslem i jeho nezáporné násobky. Obor hodnot **nulové kvadratické formy** definované předpisem  $Q(\mathbf{x}) = 0$  obsahuje pouze číslo 0.

Pro každou bilineární formu  $B$  na  $\mathcal{V}$  a libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$  platí také

$$B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

takže

$$B^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x})) = \frac{1}{2}(Q_B(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q_B(\mathbf{x}) - Q_B(\mathbf{y})). \quad (16.4)$$

Jelikož pro libovolnou symetrickou bilineární formu  $B$  na  $\mathcal{V}$  platí  $B = B^S$ , plyne z (16.4), že každá symetrická bilineární forma  $B$  na  $\mathcal{V}$  je plně určena svou kvadratickou formou. Při studiu kvadratických forem se můžeme omezit na kvadratické formy příslušné symetrickým bilineárním formám, neboť pro libovolnou bilineární formu  $B$  na  $\mathcal{V}$  a  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  platí

$$Q_B(\mathbf{x}) = B^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \quad (16.5)$$

### 16.3 Matice kvadratické formy

Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor konečné dimenze s bází  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  a nechť  $Q$  je daná kvadratická forma příslušná bilineární formě  $B$ . Pak můžeme pro libovolný vektor  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  vyčíslit hodnotu  $Q(\mathbf{x})$  pomocí jeho souřadnic a matice bilineární formy  $B$  vzhledem k bázi  $\mathcal{E}$  ze vztahu

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}},$$

který dostaneme z (15.7). Je proto přirozené považovat matici  $[B]_{\mathcal{E}}$  za matici kvadratické formy  $Q$  příslušné bilineární formě  $B$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Podle (16.5) však kvadratická forma příslušná  $B$  přísluší též symetrické části  $B^S$  bilineární formy  $B$ . Jelikož matice libovolné symetrické formy v dané bázi je symetrická, je výhodné definovat **matice kvadratické formy**  $Q_B$  příslušné k bilineární formě  $B$  jako symetrickou matici

$$[Q_B] = [B^S].$$

Při studiu matic kvadratických forem se tedy můžeme omezit na symetrické matice.

### 16.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

Jedním z důležitých problémů při studiu kvadratických forem je určit, jakých hodnot může nabývat daná kvadratická forma. Na tuto otázku můžeme snadno odpovědět, máme-li matici kvadratické formy v diagonálním tvaru, neboť pak se hodnota kvadratické formy v daném vektoru vypočte jako součet druhých mocnin souřadnic tohoto vektoru, tedy kladných čísel, násobených diagonálními prvky. Tak například hned vidíme, že kvadratická forma (16.2) nabývá kladné hodnoty pro libovolný vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ .

Není-li matice kvadratické formy v diagonálním tvaru, nemůžeme obvykle najít její obor hodnot bezprostředně, avšak můžeme se pokusit upravit formu na tvar, ze kterého lze obor hodnot poznat. Například *doplňováním čtverců* formy  $Q$  definované rovností (16.1) dostaneme pro  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = -2 \left( x_1^2 - 2x_1 \left( \frac{1}{2}x_2 \right) + \left( \frac{1}{2}x_2 \right)^2 \right) + \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_2^2 = \\ &= -2 \left( x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right)^2 - \frac{5}{2}x_2^2, \end{aligned} \tag{16.6}$$

takže  $Q(\mathbf{x}) < 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ .

Úpravu, kterou jsme použili při redukci  $Q$  na lineární kombinaci mocnin, můžeme popsat jako změnu báze. Zapišeme-li si substituci  $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2, y_2 = x_2$  ve tvaru  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a všimneme-li si, že  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{S}}$ , kde  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}})$  je standardní báze  $\mathbb{R}^2$ , pak můžeme považovat  $\mathbf{y}$  za souřadnice  $\mathbf{x}$  v nové bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , která je určena maticí zpětného přechodu  $\mathbf{T}$  od  $\mathcal{E}$  k  $\mathcal{S}$ . Podle (15.10) tedy platí

$$[Q]_{\mathcal{S}} = \mathbf{T}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{T},$$

což si můžeme ověřit také vyhodnocením rovnosti

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

K matici zpětného přechodu  $\mathbf{T}$  můžeme určit matici přechodu  $\mathbf{S}$  od báze  $\mathcal{S}$  k bázi  $\mathcal{E}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterou můžeme také zapsat ve tvaru  $\mathbf{S} = [C]_{\mathcal{S}}$  pomocí matice lineárního zobrazení  $C$  zobrazujícího bázi  $\mathcal{S}$  na novou bázi  $\mathcal{E}$ . Odtud

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{S}} = [C]_{\mathcal{S}} [\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{S}} = [C]_{\mathcal{S}} [\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jelikož  $Q$  je kvadratická forma příslušná symetrické bilineární formě

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2,$$

můžeme ověřit výpočtem, že

$$B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -2, \quad B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -\frac{5}{2},$$

tedy

$$[Q]_{\mathcal{E}} = [Q_B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

## 16.5 Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Libovolnou kvadratickou formu na  $\mathbb{R}^2$  můžeme zapsat buďto pomocí složek ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \tag{16.7}$$

nebo maticově ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Matici  $\mathbf{A}$  přitom můžeme považovat za matici  $Q$  ve standardní bázi  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_2^I)$ . Budeme se zabývat otázkou, na jaký tvar lze redukovat matici  $\mathbf{A}$  přechodem ke vhodné nové bázi. Pro zjednodušení výkladu se omezíme na hledání redukovaného tvaru vhodného násobku formy  $Q$ , takže pro nenulovou formu můžeme předpokládat, že některý nenulový koeficient formy  $Q$  je roven jedné.

Předpokládejme nejprve, že  $a = 1$ , takže doplněním čtverců můžeme upravit (16.7) na tvar

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1^2 + 2x_1(bx_2) + (bx_2)^2) + (c - b^2)x_2^2 = (x_1 + bx_2)^2 + (c - b^2)x_2^2.$$

Budeme rozlišovat dva případy. Jestliže  $c - b^2 \neq 0$ , pak pomocí substituce

$$y_1 = x_1 + bx_2, \quad y_2 = \sqrt{|c - b^2|}x_2 \quad (16.8)$$

dostaneme jeden z tvarů

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2, \quad Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - y_2^2.$$

Zapišeme-li si substituci (16.8) v maticovém tvaru  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & \sqrt{|c - b^2|} \end{bmatrix},$$

můžeme provedenou úpravu zapsat též v maticovém tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}, \quad (16.9)$$

kde  $\mathbf{D}$  je jedna z matic

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (16.10)$$

Matici  $\mathbf{T}$  přitom můžeme považovat za matici zpětného přechodu od nové báze  $\mathcal{E}$  ke standardní bázi  $\mathcal{S}$ , takže platí

$$\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{T}[\mathbf{x}]_{\mathcal{S}} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad [Q]_{\mathcal{E}} = \mathbf{D}, \quad Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^\top [Q]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}.$$

Jestliže  $c - b^2 = 0$ , pak pomocí substituce  $y_1 = x_1 + bx_2$ ,  $y_2 = x_2$  dostaneme  $Q(\mathbf{x}) = y_1^2$ . Zapišeme-li si tuto substituci opět v maticovém tvaru s

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

můžeme provedenou úpravu zapsat též v maticovém tvaru (16.9) s

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16.11)$$

Ukazuje se, že každá nenulová kvadratická forma (nebo její násobek) má ve vhodné bázi jednu z matic (16.10) nebo (16.11). Pro  $a = 0$  a  $c \neq 0$  stačí zopakovat předchozí úvahy s tím, že zaměníme  $a$  s  $c$  a  $x_1$  s  $x_2$ . Pokud  $a = c = 0$ , pak pro vhodný násobek  $Q$  bude  $b = 1/2$ . Položíme-li

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2,$$

dostaneme

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - y_2^2.$$

Odtud najdeme transformaci

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

kterou můžeme považovat za přechod k souřadnicím v nové bázi s maticí zpětného přechodu

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Přímým výpočtem si lze ověřit, že platí (16.9) s maticí  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$  z (16.10).

Zahrneme-li do našich úvah i nulovou kvadratickou formu, dojdeme k závěru, že každou kvadratickou formu na  $\mathbb{R}^2$  můžeme redukovat vhodnou substitucí či přechodem k jiné bázi na jeden z tvarů

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad Q_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2, \quad Q_3(\mathbf{x}) = x_1^2, \quad Q_4(\mathbf{x}) = 0,$$

který lze identifikovat z hodnot, jichž může nabývat forma  $Q$  na množině  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$ . Každý z těchto tvarů má charakteristický název, který je uveden na obr. 16.1 spolu se znázorněním grafu  $z = Q(\mathbf{x})$ .

## 16.6 Pozitivně definitní kvadratické formy

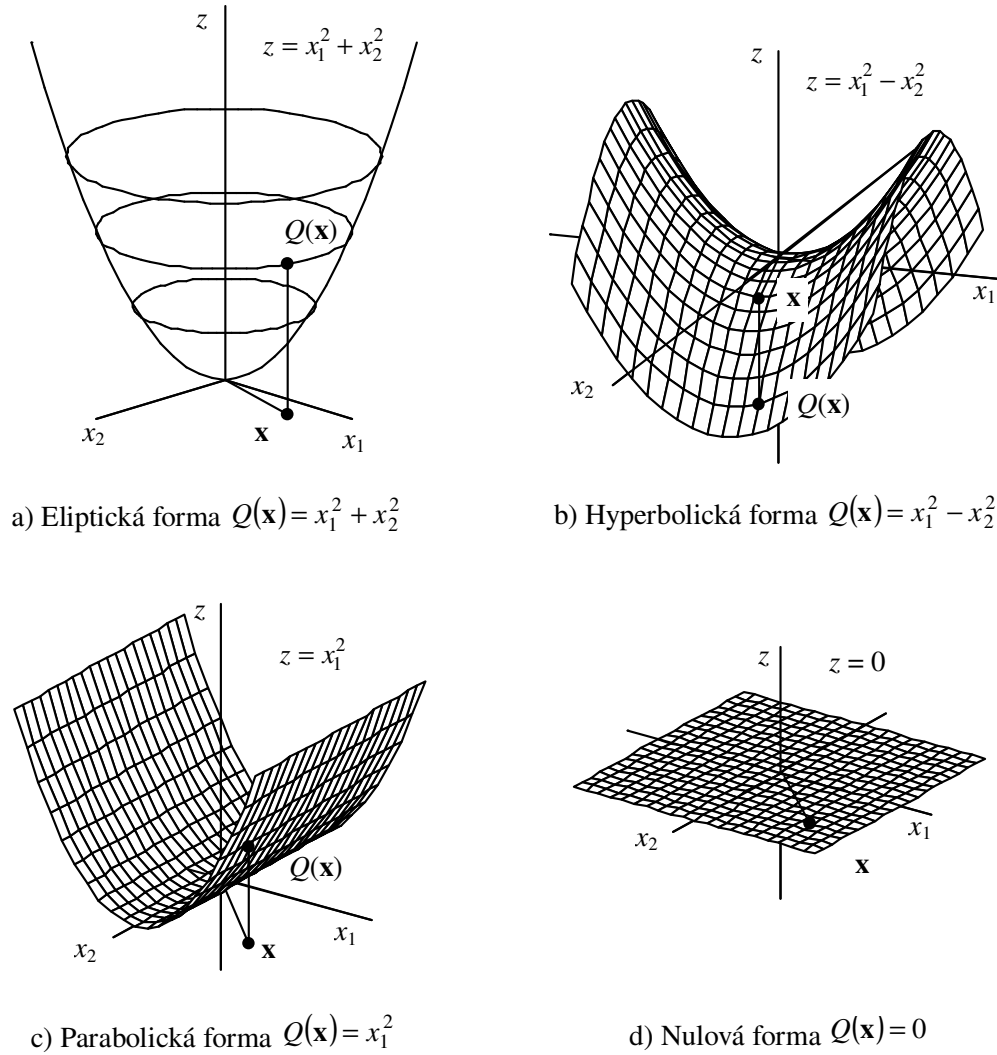
Mimořádný význam v aplikacích mají kvadratické formy, jejichž obor hodnot tvoří nezáporná čísla, takže je lze považovat za zobecnění eliptické a parabolické formy z obr. 16.1.

**Definice 16.5.** Kvadratická forma  $Q$  na vektorovém prostoru  $\mathcal{V}$  se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  platí  $Q(\mathbf{x}) > 0$ . Jestliže pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  platí  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ , pak se  $Q$  nazývá **pozitivně semidefinitní**.

**Příklad 16.6.** Kvadratická forma (16.2) je pozitivně definitní.

**Příklad 16.7.** Kvadratická forma  $q = -Q$ , kde  $Q$  je definována rovností (16.1), je pozitivně definitní. Vyplyvá to z úpravy formy na tvar (16.6).



Obr. 16.1: Kvadratické formy na  $\mathbb{R}^2$ .

**Příklad 16.8.** Kvadratická forma (16.3) také nabývá pouze nezáporných hodnot, avšak  $Q(f) = 0$  například pro nenulovou funkci  $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ . Kvadratická forma (16.3) je proto pouze pozitivně semidefinitní.

Je-li  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor konečné dimenze s bází  $\mathcal{E}$  a je-li  $Q$  je pozitivně definitní kvadratická forma, pak pro libovolné  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  platí  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \neq \mathbf{o}$  a

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} > 0. \quad (16.12)$$

Nerovnost (16.12), kterou splňuje matice pozitivně definitní kvadratické formy, má smysl pro každou symetrickou matici  $\mathbf{A}$ , kterou budeme nazývat **pozitivně definitní**, jestliže pro každý sloupcový vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  platí  $\mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , a **pozitivně semidefinitní**, jestliže  $\mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro libovolný sloupcový vektor  $\mathbf{x}$ . Kvadratická

forma je tedy pozitivně definitní (semidefinitní), právě když je její matice v libovolné bázi pozitivně definitní (semidefinitní).

Každá pozitivně definitní matice má kladnou diagonálu. Skutečně, je-li  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  pozitivně definitní matice, pak pro libovolný sloupec  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_i^T$  jednotkové matice platí

$$0 < \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} = a_{ii}.$$

Je-li  $\mathbf{D}$  diagonální matice s diagonálními prvky  $d_1, \dots, d_n$  a  $\mathbf{x} = [x_i]$ , pak

$$\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} = d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2.$$

Matice  $\mathbf{D}$  je tedy pozitivně definitní, právě když  $d_1 > 0, \dots, d_n > 0$ . Jelikož pozitivní definitnost je vlastnost kvadratické formy, která se přenáší na matice kvadratické formy, plyne odtud, že **symetrická matice kongruentní s diagonální maticí je pozitivně definitní, právě když tato diagonální matice má kladné diagonální prvky**. Obdobné tvrzení platí i pro pozitivně semidefinitní matice.

S dalšími vlastnostmi pozitivně definitních matic se budeme seznamovat postupně v dalších kapitolách.

## Příklady k procvičení

16.1. Je dána bilineární forma  $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 5x_2 y_1 - 3x_2 y_2.$$

Najděte kvadratickou formu příslušnou bilineární formě  $B$  a její matici ve standardní bázi.

16.2. Je dána bilineární forma  $B : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem

$$B(p(x), q(x)) = p(-1)q(2) + p(2)q(1)$$

- Nalezněte matici bilineární formy vzhledem ke standardní bázi  $\mathcal{E} = (x^2, x, 1)$  a potom nalezněte matice její symetrické a antisymetrické části.
- Určete obraz dvojice polynomů  $p(x) = -3x^2 + 5x + 2$  a  $q(x) = 4x^2 - 2x$ .
- Je kvadratická forma  $Q$  v  $P_2$  daná předpisem  $Q(p(x)) = 8a^2 + 2c^2 + 4ab + 10ac + 4bc$ , příslušná k bilineární formě  $B$ , jestliže  $p(x) = ax^2 + bx + c$ ? Své tvrzení zdůvodněte.

## Klíč k příkladům k procvičení

$$16.1. Q(x) = x_1^2 + 8x_1 x_2 - 3x_2^2, [Q]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$16.2. a) [B]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad [B_S]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [B_A]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) B(p, q) = -62,$$

c) ano.

## Kapitola 17

# Kongruence symetrických a diagonálních matic

V článku 15.6 jsme si zavedli pro symetrické matice relaci kongruence a ukázali jsme si, že jakékoliv kongruentní matice můžeme považovat za souřadnice téže kvadratické formy v různých bázích. Pro kvadratické formy na prostoru dimenze dvě jsme si dokonce dokázali, že mezi symetrickými maticemi dané kvadratické formy v různých bázích je vždy diagonální matice, přičemž počet jejích kladných či záporných prvků nezávisí na volbě báze. V této kapitole si tyto výsledky zobecníme a ukážeme si efektivní výpočetní postupy pro nalezení diagonální matice, která je kongruentní s danou symetrickou maticí.

### 17.1 Diagonální redukce pozitivně definitní matice

Pro další studium kongruencí použijeme elementární řádkové operace a jejich maticový zápis. Novinkou však bude to, že ke každé elementární operaci budeme následně uvažovat její sloupcovou variantu a místo o elementárních operacích budeme mluvit o *elementárních kongruencích*. Je-li tedy  $\mathbf{T}$  matice některé elementární operace s řádky čtvercové matice  $\mathbf{A}$  (viz článek 6.1), pak matici upravenou příslušnou elementární kongruencí lze zapsat ve tvaru  $\mathbf{TAT}^\top$ . Spojíme-li toto pozorování s postupy, které jsme používali při studiu LU rozkladů, snadno dokážeme následující tvrzení, které lze použít k ověření pozitivní definitnosti matice nebo k řešení soustav s pozitivně definitní maticí.

**Věta 17.1.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní matice. Pak existuje regulární dolní trojúhelníková matice  $\mathbf{L}$  a diagonální matice  $\mathbf{D}$  s kladnou diagonálou tak, že*

$$\mathbf{LAL}^\top = \mathbf{D}. \quad (17.1)$$

*Důkaz.* Necht  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je daná pozitivně definitní matice řádu  $n$ . V článku 16.6 jsme si ukázali, že každá pozitivně definitní matice má kladné diagonální prvky, takže  $a_{11} > 0$ .

S pomocí maticového zápisu elementárních operací najdeme, stejně jako v důkazu věty 7.2, dolní trojúhelníkovou matici  $\mathbf{L}_1$ , pro kterou platí

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}.$$

Jelikož  $\mathbf{A}$  je symetrická, plyne odtud, že matice  $(\mathbf{L}_1 \mathbf{A})^\top = \mathbf{A} \mathbf{L}_1^\top$  má stejný první sloupec jako  $\mathbf{A}$ , takže

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (17.2)$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}.$$

Matice  $\mathbf{A}_1$  je však nejen symetrická, jak je patrné z (17.2), nýbrž i pozitivně definitní, neboť pro každý vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

kde  $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ , platí

$$0 < \mathbf{x}^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_1 \mathbf{y}.$$

Opakováním tohoto postupu najdeme dolní trojúhelníkové matice  $\mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1$  tak, že pro

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1$$

platí (17.1). Jelikož  $\mathbf{L}$  je součin regulárních dolních trojúhelníkových matic, je  $\mathbf{L}$  podle článku 7.2 také dolní trojúhelníková matice.  $\square$

Důkaz je založen na mírné modifikaci postupu uvedeného v článku 7.4 a dává nám současně návod, jak  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{D}$  nalézt.

**Příklad 17.2.** Najděte diagonální matici  $\mathbf{D}$ , která je kongruentní s pozitivně definitní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (17.3)$$

*Řešení.* Matici  $\mathbf{A}$  upravíme spolu s jednotkovou maticí na horní trojúhelníkovou matici. Dostaneme:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} | \mathbf{I}] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] r_2 + \frac{1}{2}r_1 \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] r_3 + \frac{2}{3}r_2 \\ &\mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Snadno si ověříme, že pro

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (17.4)$$

platí

$$\mathbf{LAL}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

▲

## 17.2 $\mathbf{LDL}^T$ rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí

Rozklad (17.1) je základem efektivních algoritmů pro řešení soustav s pozitivně definitními maticemi, neboť je ekvivalentní rozkladům

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{A} = \bar{\mathbf{L}} \mathbf{D} \bar{\mathbf{L}}^T, \quad \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}.$$

**Příklad 17.3.** Využijte řešení příkladu 17.2 k řešení soustavy:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (17.5)$$

*Řešení.* Matice soustavy  $\mathbf{A}$  je dána rovností (17.3), takže pro  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{D}$  definované rovností (17.4) platí  $\mathbf{LAL}^T = \mathbf{D}$  a  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{L}^{-T}$ . Označíme-li si  $\mathbf{b}$  pravou stranu soustavy (17.5), můžeme si vyjádřit její řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{L}^T (\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} \mathbf{b})) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soustava (17.5) má tedy řešení  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

▲

## 17.3 Kongruence symetrické a diagonální matice

Doplněním důkazu věty 17.1 můžeme dokázat, že každá symetrická matice je kongruentní s diagonální maticí.

**Věta 17.4.** *Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je symetrická matice. Pak existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  a diagonální matice  $\mathbf{D}$  tak, že*

$$\mathbf{TAT}^\top = \mathbf{D}. \quad (17.6)$$

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je symetrická matice řádu  $n$ . Jestliže  $a_{11} = 0$  a některý mimodiagonální prvek  $a_{i1} = a_{1i}$  je nenulový, pak přičtením nebo odečtením  $i$ -tého řádku k prvnímu řádku a následným provedením obdobné operace se sloupci můžeme dostat do levého horního rohu nenulový prvek. Můžeme se o tom přesvědčit úpravou

$$\begin{array}{c} 1 \quad i \\ 1 \left[ \begin{array}{cc} 0 & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 + \alpha r_i \\ s_1 + \alpha s_i \end{array} \mapsto 1 \left[ \begin{array}{cc} \alpha a_{i1} & a_{1i} + \alpha a_{ii} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{array} \right] \mapsto 1 \left[ \begin{array}{cc} 2\alpha a_{i1} + \alpha^2 a_{ii} & a_{1i} + \alpha a_{ii} \\ a_{i1} + \alpha a_{ii} & a_{ii} \end{array} \right], \end{array}$$

kde jsme pro přehlednost vynechali řádky a sloupce matice  $\mathbf{A}$ , které neovlivní prvek v levém horním rohu upravené matice, a dosazením  $\alpha = 1$  nebo  $\alpha = -1$ . Maticový zápis takové úpravy má tvar

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_{ij}] = \mathbf{G}_1 \mathbf{A} \mathbf{G}_1^\top,$$

kde  $\bar{a}_{11} \neq 0$  a  $\mathbf{G}_1$  je matice tvaru (6.2), která při násobení zleva realizuje přičtení prvního řádku k  $i$ -tému řádku nebo odečtení prvního řádku od  $i$ -tého řádku, tedy  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_{i1}(1)$  nebo  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_{i1}(-1)$ . Pokud  $a_{11} \neq 0$ , pak položíme  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{I}$  a

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \mathbf{G}_1 \mathbf{A} \mathbf{G}_1^\top.$$

Jelikož  $\bar{a}_{11} \neq 0$ , pak najdeme, stejně jako v článku 17.1, dolní trojúhelníkovou matici  $\mathbf{L}_1$  tak, že

$$\mathbf{L}_1 \bar{\mathbf{A}} \mathbf{L}_1^\top = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Pro

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{G}_1$$

tedy platí

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}_1^\top = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Celý postup můžeme opakovat, nejprve s maticí  $\mathbf{A}_1$ , k postupné eliminaci mimodiagonálních prvků, až po  $n - 1$  krocích dostaneme pro

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{n-1} \cdots \mathbf{T}_1$$

rovnost (17.6). □

Důkaz věty ukazuje, jak lze najít diagonální matici, která je kongruentní s danou symetrickou maticí.

**Příklad 17.5.** Najděte regulární matici  $\mathbf{T}$  a diagonální matici  $\mathbf{D}$  tak, aby pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

platilo

$$\mathbf{TAT}^\top = \mathbf{D}.$$

*Řešení.* Matici  $\mathbf{A}$  nejprve upravíme na diagonální tvar pomocí elementárních kongruencí. Dostaneme postupně:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} r_1 + r_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1 + s_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} r_2 - \frac{1}{2}r_1 \mapsto \\ &\mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 - \frac{1}{2}s_1 \quad s_3 - \frac{1}{2}s_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} r_3 + r_2 \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 + s_3} \\ &\mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matici  $\mathbf{T}$  najdeme tak, že řádkové operace, které jsme použili k úpravě  $\mathbf{A}$ , postupně provedeme na jednotkové matici. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_1 + r_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_2 - \frac{1}{2}r_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} r_3 + r_2 \mapsto \\ &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Snadno si ověříme, že platí

$$\mathbf{TAT}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

▲

**Důsledek 17.6.** *Nechť  $Q$  je libovolná kvadratická forma na vektorovém prostoru konečné dimenze. Pak existuje báze  $\mathcal{F}$  prostoru  $\mathcal{V}$  tak, že  $[Q]_{\mathcal{F}}$  je diagonální.*

*Důkaz.* Nechť  $\mathcal{E}$  je libovolná báze prostoru  $\mathcal{V}$ . Jelikož  $[Q]_{\mathcal{E}}$  je symetrická matice, existuje podle věty 17.4 regulární matice  $\bar{\mathbf{S}}$  tak, že  $\bar{\mathbf{S}} [Q]_{\mathcal{E}} \bar{\mathbf{S}}^{\top} = \mathbf{D}$ , kde  $\mathbf{D}$  je diagonální matice. To však je pro  $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}^{\top}$  ekvivalentní vztahu  $\mathbf{S}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{S} = \mathbf{D}$ . Je-li  $\mathcal{F}$  báze  $\mathcal{V}$  definovaná maticí přechodu  $\mathbf{S}$ , pak podle (15.10) platí  $[Q]_{\mathcal{F}} = \mathbf{S}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{S} = \mathbf{D}$ .  $\square$

## 17.4 Zákon setrvačnosti kvadratických forem

Následující věta nám říká, že kongruence zachovává i počet kladných, záporných a nulových prvků na diagonále. Poznamenejme, že toto tvrzení jsme si už ukázali pro pozitivně definitní matice a symetrické matice řádu dvě.

**Věta 17.7.** *Nechť  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$  jsou diagonální matice řádu  $n$  s diagonálami  $d_1, \dots, d_n$  a  $e_1, \dots, e_n$ . Nechť  $\mathbf{T}$  je regulární a  $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{\top} \mathbf{E} \mathbf{T}$ . Pak počet kladných, záporných i nulových prvků na diagonálách obou matic je shodný.*

*Důkaz.* Jelikož násobení regulární maticí zachovává hodnotu matice, můžeme předpokládat, že obě matice mají stejný počet  $h$  nenulových prvků. Budeme také předpokládat, že diagonály jsou uspořádány tak, že

$$\begin{aligned} d_1 > 0, \dots, d_p > 0, \quad d_{p+1} < 0, \dots, d_h < 0 \\ e_1 > 0, \dots, e_q > 0, \quad e_{q+1} < 0, \dots, e_h < 0. \end{aligned}$$

V opačném případě je přeuspořádáme pomocí elementárních kongruencí odvozených z výměny řádků. Dále budeme předpokládat, že  $\mathbf{T}$  je regulární matice taková, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{\top} \mathbf{E} \mathbf{T}. \quad (17.7)$$

Kdyby  $p < q$ , pak by existovalo řešení  $\mathbf{x}$  soustavy rovnic

$$x_1 = 0, \dots, x_p = 0, \quad \mathbf{r}_{q+1}^{\top} \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{r}_h^{\top} \mathbf{x} = 0,$$

které má některou z prvních  $h$  složek nenulovou, neboť podle předpokladu je rovnic méně než  $h$ . Musí to být zřejmě některá ze složek  $x_{p+1}, \dots, x_h$  takže platí

$$\mathbf{x}^{\top} \mathbf{D} \mathbf{x} < 0, \quad \mathbf{x}^{\top} \mathbf{T}^{\top} \mathbf{E} \mathbf{T} \mathbf{x} \geq 0,$$

což je spor s (17.7).  $\square$



## 17.5 Příklady

**Příklad 17.8.** Určete bázi v níž má kvadratická forma

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$

diagonální matici.

*Řešení.* Pokud si uvědomíme, že  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_S = [x_1, x_2, x_3]^\top$ , kde  $S$  je standardní báze  $\mathbb{R}^3$  a označíme-li

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathbf{x}]_E = \mathbf{T}[\mathbf{x}]_S$$

kde  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  a  $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$  jsou souřadnice vektoru  $\mathbf{x}$  vzhledem k nějaké

bázi  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Matice  $\mathbf{T}$  se obvykle nazývá matice přechodu od standardní báze  $S$  k nové bázi  $E$ . Vše uvedenou substitucí dostáváme kvadratickou formu ve tvaru  $Q(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ . Tento tvar můžeme dále upravit

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_E^T [Q]_E [\mathbf{x}]_E.$$

Odtud je patrné, že v bázi  $E$  má matice kvadratické formy

$$[Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonální tvar a jelikož všechny její diagonální prvky jsou kladné je kvadratická forma  $Q$  pozitivně definitní.

Zbývá tedy určit tuto bázi. Jelikož  $[\mathbf{x}]_E = \mathbf{T}[\mathbf{x}]_S$  a  $\mathbf{T}$  je regulární můžeme taktéž psát  $[\mathbf{x}]_S = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{x}]_E$ . Dosadíme-li za  $\mathbf{x}$  postupně všechny vektory báze  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  dostaneme

$$\mathbf{e}_i = [\mathbf{e}_i]_S = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{e}_i]_E = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{s}_i^I = \mathbf{s}_i^{T^{-1}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Vypočteme tedy nejdříve matici  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 + 2r_3 \\ \\ \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ \\ \end{array} \mapsto \\ \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{array}$$

Odtud

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  je tedy hledaná báze v níž má kvadratická forma  $Q$  diagonální matici.

Snadno to můžeme ověřit sestavením matice  $Q$  pro bázi  $E$ . Budeme tedy dosazovat do symetrické bilineární formy

$$B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3,$$

která přísluší kvadratické formě  $Q$ .

$$\begin{aligned} B_S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ B_S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = \\ &= 0 = B_S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ B_S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = \\ &= 0 = B_S(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ B_S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &= (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + \\ &+ 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ B_S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 + \\ &+ 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = B_S(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\ B_S(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) &= (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 + \\ &+ 5 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Odtud sestavíme matici kvadratické formy vzhledem k bázi  $E$  ve tvaru

$$[B_S]_E = [Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Báze  $E$  je tedy opravdu bází ve které má matice kvadratické formy diagonální tvar. ▲

**Příklad 17.9.** Určete bázi, ve které má kvadratická forma  $Q$  na  $\mathbb{R}^3$  definovaná předpisem

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

diagonální tvar a formu klasifikujte.

*Řešení.* Nejprve nalezneme matici kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi. Tedy budeme dosazovat postupně vektory standardní báze do symetrické části příslušné bilineární formy

$$B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$$

$$\begin{aligned}
B_S(\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_1^I) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\
B_S(\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_2^I) &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\
&= B_S(\mathbf{s}_2^I, \mathbf{s}_1^I) \\
B_S(\mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_3^I) &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = \\
&= B_S(\mathbf{s}_3^I, \mathbf{s}_1^I) \\
B_S(\mathbf{s}_2^I, \mathbf{s}_2^I) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 2 \\
B_S(\mathbf{s}_2^I, \mathbf{s}_3^I) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = -2 = \\
&= B_S(\mathbf{s}_3^I, \mathbf{s}_2^I) \\
B_S(\mathbf{s}_3^I, \mathbf{s}_3^I) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5
\end{aligned}$$

Matice kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi má tedy tvar:

$$[Q]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pomocí elementárních kongruencí nalezneme matici  $\mathbf{R}$  a diagonální tvar kvadratické formy.

$$\begin{aligned}
\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \\
& \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right] & \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{R}\mathbf{A})\mathbf{R}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Q]_E.$$

Bázi  $E$  určíme ze sloupců matice  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}^\top$ , t.j.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vzhledem k bázi  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  má kvadratická forma  $Q$  diagonální matici

$$[Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a jelikož jsou všechny diagonální prvky kladné je forma pozitivně definitní. ▲

**Příklad 17.10.** Nalezněte  $\mathbf{LDL}^\top$  rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Řešení.* Pomocí elementárních řádkových úprav nalezneme matici  $(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A})$  a  $\mathbf{L}^{-1}$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{4r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \\ & \xrightarrow{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{15r_3} \\ & \xrightarrow{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -15 & 30 & 0 & 0 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{L}^{-\top} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{bmatrix}.$$

Určíme ještě  $\mathbf{L}$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \\ & \xrightarrow{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{15}r_3]{\frac{1}{4}r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Řešením je tedy, že  $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top$ , kde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{bmatrix}.$$

▲

**Příklad 17.11.**  $\mathbf{LDL}^\top$  rozkladem řešte soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*Řešení.* Matice soustavy a vektor pravých stran má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

İhned jde vidět, že matice  $\mathbf{A}$  je totožná s maticí v zadání předchozího příkladu a proto využijeme řešení předchozího příkladu kde jsme určili Choleského rozklad

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{bmatrix}.$$

Hledání Choleského rozkladu bychom však mohli zkrátit o výpočet matice  $\mathbf{L}$  neboť k řešení soustavy nám plně postačí i její inverze tedy

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

Nyní vlastní řešení:

1. Dopředná substituce  $\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$ . Jelikož máme k dispozici  $\mathbf{L}^{-1}$  můžeme ji vyřešit

$$\text{součinem } \mathbf{z} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.  $\mathbf{Dy} = \mathbf{z}$ . Jelikož  $\mathbf{D}$  je diagonální matice můžeme řešení určit triviálně:

$$\begin{array}{rclcl} 4y_1 & = & 1 & \Leftrightarrow & y_1 = \frac{1}{4} \\ 60y_2 & = & -1 & \Leftrightarrow & y_2 = \frac{-1}{60} \\ 390y_3 & = & -1 & \Leftrightarrow & y_3 = \frac{-1}{390} \end{array} \quad \text{odtud } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{60} \\ \frac{-1}{390} \end{bmatrix}.$$

3. Zpětná substituce  $\mathbf{L}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Se znalostí  $\mathbf{L}^{-1}$  řešíme opět jako součin

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{60} \\ \frac{-1}{390} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{26} \\ \frac{-1}{13} \\ \frac{-1}{26} \end{bmatrix}.$$

Řešením soustavu tedy je  $x_1 = \frac{7}{26}$ ,  $x_2 = \frac{-1}{13}$ ,  $x_3 = \frac{-1}{26}$ . ▲

## Příklady k procvičení

17.1. Pomocí elementárních kongruencí převedte matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

na diagonální tvar.

17.2. Klasifikujte následující kvadratické formy:

- a)  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x_2^2 - 2x_1x_2,$
- b)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3,$
- c)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3,$
- d)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3,$
- e)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3.$

17.3. Je dána kvadratická forma  $Q$ . Určete bázi, ve které má tato kvadratická forma diagonální matici a formu klasifikujte.

- a)  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2,$
- b)  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2,$
- c)  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2,$
- d)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 29x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 4x_2x_3.$

## Klíč k příkladům k procvičení

17.1. Například  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

- 17.2. a) indefinitní,  
 b) negativně definitní,  
 c) indefinitní,  
 d) indefinitní,  
 e) pozitivně definitní.

17.3. a) indefinitní, báze  $\mathcal{D} = ([1, 0], [1, -3])$ ,  $[Q]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) negativně definitní, báze  $\mathcal{D} = ([1, 0], [1, 2])$ ,  $[Q]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$

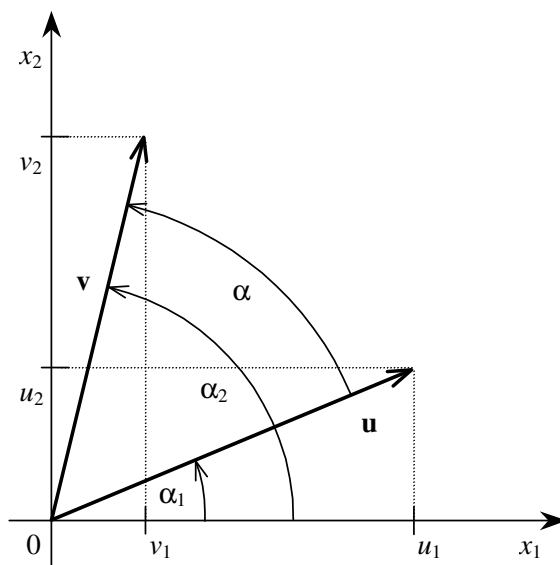
c) negativně semidefinitní, báze  $\mathcal{D} = ([1, 0], [1, -2])$ ,  $[Q]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) pozitivně definitní, báze  $\mathcal{D} = ([1, 0, 0], [-1, 1, 0])$ ,  $[Q]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

## Kapitola 18

# Skalární součin a ortogonalita

Až doposud jsme se v souvislosti s vektorovými prostory nezabývali velikostí vektorů ani úhly mezi vektory. Napravíme to v této kapitole, kde si zavedeme kosinus úhlu i délku vektorů pomocí bilineární formy a naznačíme možnosti jejich využití.



Obr. 18.1: Úhel vektorů.

### 18.1 Definice skalárního součinu

Jak rozšířit pojem úhlu (či spíše kosinu úhlu) vektorů a délky vektoru na obecný vektorový prostor nám napoví obr. 18.1. Pro kosinus úhlu  $\alpha$  vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  platí

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \\ &= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \cdot \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \cdot \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{aligned}$$

zatímco pro délky  $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|$  vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{a} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Prohlédneme-li si oba vzorce, můžeme si všimnout, že obě veličiny, které chceme zobecnit, tedy délka vektoru i kosinus úhlu vektorů, můžeme vyjádřit pomocí jediné symetrické pozitivně definitní bilineární formy

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

které budeme dále říkat **euklidovský skalární součin**. S jeho pomocí můžeme vyjádřit jak kosinus úhlu  $\alpha$  vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  v  $\mathbb{R}^2$ , tak délku  $\|\mathbf{u}\|$  pomocí vzorců

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}}, \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (18.1)$$

Vzorce (18.1) mají po zadání bilineární formy smysl pro vektory libovolného vektorového prostoru. To vede k následující definici.

**Definice 18.1. Skalární součin** na reálném vektorovém prostoru  $\mathcal{V}$  je bilineární symetrická pozitivně definitní forma na  $\mathcal{V}$ . Označíme-li si  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  skalární součin vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , platí tedy pro jakékoliv vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (\text{S1})$$

$$(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{S2})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (\text{S3})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad \text{pro} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{o} \quad (\text{S4})$$

Příklady skalárních součinů na různých vektorových prostorech jsou v článku 16.6.

## 18.2 Norma vektoru

Pokud použijeme vzorec (18.1) pro zavedení délky vektoru pomocí skalárního součinu, bude podle axiomu (S4) zřejmé, že délka vyjde kladná pro nenulový vektor, avšak nebude hned jasné, zda je taková definice v souladu s dalšími vlastnostmi, které obvykle připisujeme délce vektoru. Ukazuje se, že pro aplikace jsou hlavní vlastnosti, které si zformulujeme v následující definici normy vektoru, kterou můžeme považovat za rozšíření délky vektoru z  $\mathbb{R}^2$  na obecný vektorový prostor. Normu můžeme považovat také za zobecnění absolutní hodnoty reálného nebo komplexního čísla.



**Definice 18.2.** Necht  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor. Zobrazení, které každému vektoru  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  přiřazuje nezáporné reálné číslo  $\|\mathbf{v}\|$ , se nazývá **norma**, jestliže pro každé  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  a libovolný skalár  $\alpha$  platí:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad (\text{N1})$$

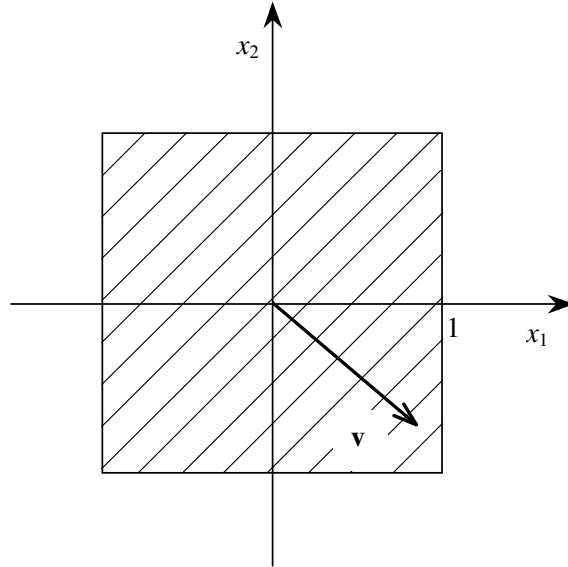
$$\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \quad (\text{N2})$$

$$\|\mathbf{u}\| = 0, \quad \text{právě když} \quad \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad (\text{N3})$$

**Příklad 18.3.** Předpis

$$\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \max\{|u_1|, |u_2|\}$$

definuje normu na  $\mathbb{R}^2$ . Množina vektorů s normou menší nebo rovnou 1 je na obr. 18.2.



Obr. 18.2: Množina vektorů  $\|\mathbf{v}\|_{\infty} \leq 1$ .

### 18.3 Norma indukovaná skalárním součinem

V tomto článku si ukážeme, že předpis (18.1) definuje normu ve smyslu odstavce 18.2. Použijeme při tom následující nerovnost.

**Věta 18.4 (Schwarzova nerovnost).** Necht  $\mathcal{V}$  je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro každé dva vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  platí

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (18.2)$$

Rovnost nastane, právě když jsou  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  závislé.

*Důkaz.* Tvzení je zřejmé, je-li některý z vektorů nulový. Předpokládejme proto, že  $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ , a všimněme si, že pro každé dva vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  platí

$$0 \leq (\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Zvolíme-li si

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

dostaneme po úpravě

$$0 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

odkud po vynásobení obou stran nerovnosti  $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  a jednoduché úpravě dostaneme (18.2). Rovnost nastane, jen když  $(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = 0$ , t.j.  $1 \cdot \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} = \mathbf{o}$ .  $\square$

Z (18.2) plyne, že ani ve vektorovém prostoru nepřevyší absolutní hodnota kosinu úhlu hodnotu 1.

**Důsledek 18.5.** *Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor se skalárním součinem a nechť je pro každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  definováno  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ . Pak pro každé dva vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  platí*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad (18.3)$$

a zobrazení  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$  je norma na  $\mathcal{V}$ .

*Důkaz.* S použitím axiomů skalárního součinu s Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2, \end{aligned}$$

takže platí (18.3). Platnost zbývajících dvou axiomů normy je bezprostředním důsledkem axiomů skalárního součinu.  $\square$

Norma definovaná předpisem  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$  se nazývá **eukleidovská norma**.

## 18.4 Ortogonální množiny vektorů

Definice ortogonality vektorů je motivována známou skutečností, že dva polohové vektory v rovině či prostoru jsou ortogonální, právě když je kosinus jejich úhlu roven nule.

**Definice 18.6.** Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor se skalárním součinem. Množina vektorů  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$  je **ortogonální**, právě když  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$  pro  $i \neq j$ . Jestliže navíc  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$  pro všechna  $i = 1, \dots, k$ , pak je  $\mathcal{E}$  **ortonormální**. Množina všech vektorů  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ , které jsou ortogonální k dané množině vektorů  $\mathcal{U}$ , se nazývá **ortogonální doplněk**  $\mathcal{U}$  (vzhledem k množině  $\mathcal{V}$ ) a značí se  $\mathcal{U}^\perp$ .

Je-li  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$  ortogonální množina nenulových vektorů, pak je  $\mathcal{E}$  nezávislá, neboť po skalárním vynásobení rovnosti

$$x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_k\mathbf{e}_k = \mathbf{o}$$

vektorem  $\mathbf{e}_i \in \mathcal{E}$  dostaneme

$$(\mathbf{e}_i, x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_k\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{o}),$$

odkud pomocí axiomů skalárního součinu získáme

$$x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0,$$

tedy  $x_i = 0$ .

Obdobným způsobem můžeme vypočítat souřadnice libovolného vektoru  $\mathbf{x}$  daného vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  v ortogonální bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , neboť z rovnosti

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$$

dostaneme po skalárním vynásobení obou stran vektorem  $\mathbf{e}_i \in \mathcal{E}$  a úpravě, že

$$x_i = \frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}. \quad (18.4)$$

Nemusíme tedy řešit žádnou soustavu rovnic.

Neméně snadné je vypočítat eukleidovskou normu  $\mathbf{x}$  ze souřadnic  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ , neboť

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Ortogonální soustavy vektorů mají rozsáhlé uplatnění například při analýze signálů, při ekonomickém uchovávání rozsáhlých dat i v matematice. Následující věta popisuje doplněk oboru hodnot matice.

**Věta 18.7.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je libovolná matice. Pak  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$  je ortogonální doplněk  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ .*

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathbf{A})$  a  $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ . Pak  $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{o}$  a  $\mathbf{x}$  lze vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ . Platí tedy

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{z})^\top \mathbf{y} = \mathbf{z}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = 0,$$

takže množiny  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$  a  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$  jsou ortogonální. Pro matici  $\mathbf{A}$  typu  $(m, n)$  odtud snadno plyne  $h(\mathbf{A}) + d(\mathbf{A}^\top) \leq m$ , takže podle (13.1) platí  $h(\mathbf{A}) \leq h(\mathbf{A}^\top)$ . Poslední nerovnost však platí i když nahradíme matici  $\mathbf{A}$  maticí k ní transponovanou, takže  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^\top)$  a  $h(\mathbf{A}) + d(\mathbf{A}^\top) = h(\mathbf{A}^\top) + d(\mathbf{A}^\top) = m$ , takže  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$  je ortogonální doplněk  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ .  $\square$

**Příklad 18.8.** Necht  $e_1(x) = x$  a  $e_2(x) = 1 - x$  jsou dvě lineární funkce vektorového prostoru  $P_2$  všech lineárních funkcí se skalárním součinem definovaným rovností

$$(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1). \quad (18.5)$$

Snadno se ověří, že předpis (18.5) skutečně definuje skalární součin na  $P_2$  a že  $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$  tvoří ortonormální bázi  $P_2$ , neboť

$$(e_1, e_2) = 0(1 - 0) + 1(1 - 1) = 0, \quad (e_1, e_1) = 1, \quad (e_2, e_2) = 1.$$

Pak libovolnou lineární funkci  $e(x) = a + bx$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (e, e_1) = e(0) \cdot e_1(0) + e(1) \cdot e_1(1) = e(1) = a + b \\ \alpha_2 &= (e, e_2) = e(0) \cdot e_2(0) + e(1) \cdot e_2(1) = e(0) = a. \end{aligned}$$

Snadno si ověříme, že skutečně platí

$$a + bx = (a + b)x + a(1 - x).$$

**Příklad 18.9.** Necht  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor všech po částech konstantních funkcí na intervalu  $(0, 8]$ , které mají skoky v celých číslech, v nichž jsou spojitě zleva. Na tomto prostoru definujeme skalární součin předpisem

$$(f, g) = \int_0^8 f(x)g(x) dx = f(1)g(1) + f(2)g(2) + \dots + f(8)g(8).$$

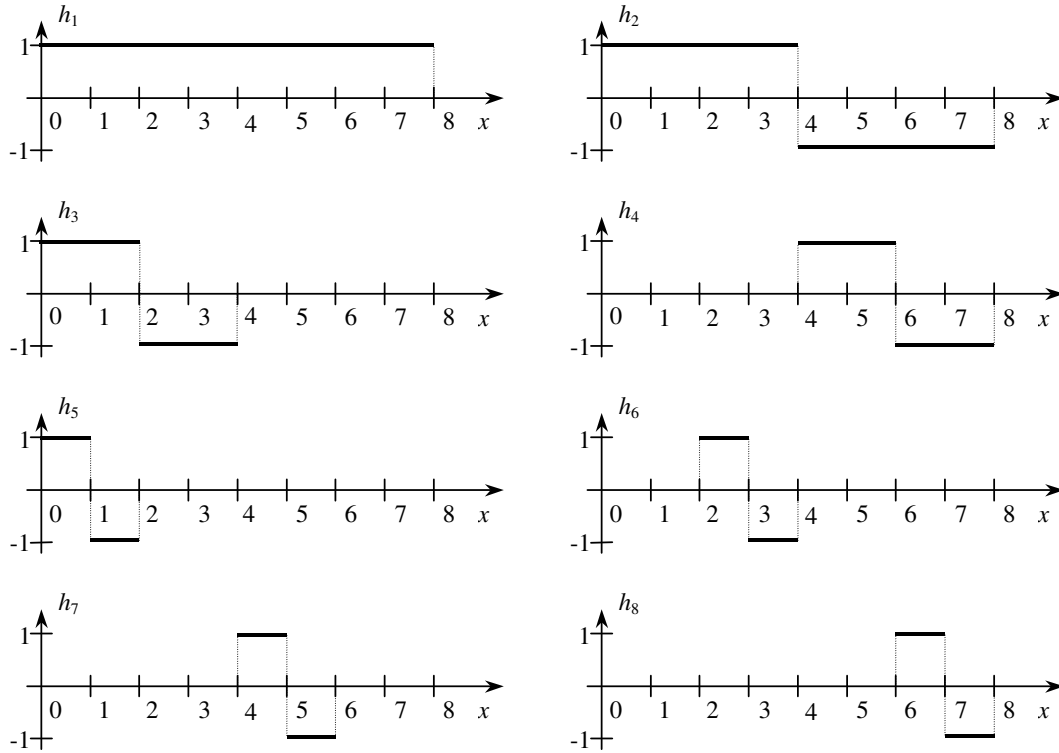
Snadno se ukáže, že vektory Haarovy báze  $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_8)$ , viz obr. 18.3, jsou ortogonální. Vektory jsou uspořádány podle délky intervalu, na kterém jsou nenulové. Takto zvolená báze nám umožňuje analyzovat frekvenci změn funkce. Například podle (18.4) je

$$[[f]_{\mathcal{H}}]_8 = \frac{(h_8, f)}{(h_8, h_8)} = \frac{f(8) - f(7)}{2},$$

odkud lze usoudit, že velké poslední souřadnice charakterizují častou změnu funkce.

## 18.5 Schmidtův ortogonalizační proces

Kde vzít ortogonální bázi? V tomto článku si ukážeme, že z každé báze  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  prostoru  $\mathcal{V}$  lze sestavit ortogonální bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , která má tu vlastnost, že každý vektor  $\mathbf{e}_i$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_i$ .



Obr. 18.3: Haarova báze.

Na začátku si všimneme, že  $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{o}$ , a položíme

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1.$$

Předpokládejme, že máme ortogonální vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  takové, že pro každé  $i \in \{1, \dots, k\}$  je vektor  $\mathbf{e}_i$  lineární kombinací vektorů  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_i$ . Najdeme koeficienty  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tak, aby

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \dots - \alpha_k \mathbf{e}_k$$

byl ortogonální k  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ . Jelikož pro  $i \in \{1, \dots, k\}$  by mělo platit

$$0 = (\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \dots - \alpha_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) - \alpha_i \|\mathbf{e}_i\|^2,$$

stačí položit  $\alpha_i = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) / \|\mathbf{e}_i\|^2$ . Vektor  $\mathbf{e}_{k+1}$  je zřejmě nenulový, neboť jej můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k+1}$  s koeficientem 1 u  $\mathbf{f}_{k+1}$ . Právě popsany algoritmus se nazývá **Schmidtův ortogonalizační proces**. Normalizací vektorů báze  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  dostaneme ortonormální bázi  $\mathcal{G} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n)$  s vektory

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}, \dots, \mathbf{g}_n = \frac{\mathbf{e}_n}{\|\mathbf{e}_n\|}.$$

**Příklad 18.10.** Necht

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najděte ortogonální bázi  $\mathbb{R}^3$  vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{A}} = \mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

*Řešení.* Bázi sestavíme Schmidtovým ortonormalizačním procesem ze standardní báze  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}})$ .

•

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

• Položíme  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} - \alpha \mathbf{e}_1$  a určíme  $\alpha$  aby platilo

$$0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)_{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_1^{\top} \mathbf{A} \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} - \alpha \mathbf{e}_1^{\top} \mathbf{A} \mathbf{e}_1 = -1 - 2\alpha,$$

odkud  $\alpha = -\frac{1}{2}$  a

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

• Položíme  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \alpha_2 \mathbf{e}_2$  a určíme  $\alpha_1, \alpha_2$  aby platilo

$$0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)_{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_1^{\top} \mathbf{A} \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}} - \alpha_1 \mathbf{e}_1^{\top} \mathbf{A} \mathbf{e}_1 = -2\alpha_1,$$

$$0 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)_{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_2^{\top} \mathbf{A} \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}} - \alpha_2 \mathbf{e}_2^{\top} \mathbf{A} \mathbf{e}_2 = -1 - \frac{3}{2}\alpha_2.$$

Řešením této soustavy dostaneme  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{2}{3}$  a

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▲

## 18.6 Ortogonální matice

Čtvercová matice  $\mathbf{U}$ , která splňuje  $\mathbf{U}^{\top} \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , se nazývá **ortogonální matice**. Ortogonální matice má tedy ortonormální sloupce a splňuje  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\top}$ . Následující věta nám říká, že násobení ortogonální maticí zachovává délky i úhly vektorů.

**Věta 18.11.** *Nechť  $\mathbf{U}$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i)

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I}.$$

(ii) *Pro všechny sloupcové vektory  $\mathbf{x}$  řádu  $n$  platí*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top (\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x}.$$

(iii) *Pro všechny sloupcové vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  řádu  $n$  platí*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top (\mathbf{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}.$$

*Důkaz.* Z (i) plyne (ii). Z  $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I}$  plyne

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top (\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x}.$$

Z (ii) plyne (iii). Ověří se použitím (16.4) a předpokladu.

Z (iii) plyne (i). Z předpokladu dostaneme pro sloupce  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$  jednotkové matice

$$[\mathbf{U}^\top \mathbf{U}]_{ij} = \mathbf{s}_i^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{U} \mathbf{s}_j = (\mathbf{U}\mathbf{s}_i)^\top \mathbf{U}\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_i^\top \mathbf{s}_j = \mathbf{s}_i^\top \mathbf{I} \mathbf{s}_j = [\mathbf{I}]_{ij}.$$

□

Ortogonální matice se uplatní v numerických metodách, neboť jejich inverzní matice lze získat transponováním a jejich násobením se nezesilují zaokrouhlovací chyby.

## 18.7 Příklady

**Příklad 18.12.** Rozhodněte, zda-li zobrazení definované předpisem

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$$

tvoří skalární součin na  $\mathbb{R}^3$ .

*Řešení.*

1.  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3) :$

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}] &= 2(u_1 + v_1)w_1 + 4(u_2 + v_2)w_2 + 2(u_3 + v_3)w_3 = \\ &= 2u_1w_1 + 4u_2w_2 + 2u_3w_3 + 2v_1w_1 + 4v_2w_2 + 2v_3w_3 = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]. \end{aligned}$$

2.  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3)(\forall \alpha \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} [\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}] &= 2(\alpha u_1)v_1 + 4(\alpha u_2)v_2 + 2(\alpha u_3)v_3 = \\ &= \alpha(2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3) = \alpha[\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

3.  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3) :$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = 2v_1u_1 + 4v_2u_2 + 2v_3u_3 = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3 = [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Body 1., 2., 3. jsme dokázali, že zadané zobrazení je symetrická bilineární forma. Nyní zbývá dokázat, že její příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 2u_1^2 + 4u_2^2 + 2u_3^2 > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}.$$

Z posledního vyplývá, že  $[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$  je pozitivně definitní a tedy předpis  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  je skalárním součinem na  $\mathbb{R}^3$ . ▲

**Příklad 18.13.** Rozhodněte, zda-li zobrazení  $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} \rightarrow \|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + |v_3|$  je normou na  $\mathbb{R}^3$ . Pokud ano, vypočtete  $\|\mathbf{x}\|_1$ , kde  $\mathbf{x} = [1, 3, -2]$ .

*Řešení.* Musíme ověřit všechny tři vlastnosti normy.

1.  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V) :$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_1 &= |u_1 + v_1| + |u_2 + v_2| + |u_3 + v_3| \leq \\ &\leq |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| + |u_3| + |v_3| = \\ &= |u_1| + |u_2| + |u_3| + |v_1| + |v_2| + |v_3| = \|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1. \end{aligned}$$

2.  $(\forall \mathbf{u} \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{u}\|_1 &= |\alpha u_1| + |\alpha u_2| + |\alpha u_3| = |\alpha| |u_1| + |\alpha| |u_2| + |\alpha| |u_3| = \\ &= |\alpha| (|u_1| + |u_2| + |u_3|) = |\alpha| \|\mathbf{u}\|_1. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + |u_3| = 0 &\Leftrightarrow |u_1| = |u_2| = |u_3| = 0. \\ &\Leftrightarrow u_1 = u_2 = u_3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Zobrazení  $\|\mathbf{v}\|_1$  tedy tvoří normu na  $\mathbb{R}^3$ . Pro  $\mathbf{x} = [1, 3, -2]$  je

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |3| + |-2| = 6.$$

▲



## Příklady k procvičení

18.1. Určete pomocí Schmidtova ortogonalizačního procesu ortonormální bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  lineárního obalu vektorů  $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 1, 1]$ ,  $\mathbf{v}_2 = [0, 1, 1, 1]$ ,  $\mathbf{v}_3 = [1, 0, 1, 1]$  a najděte souřadnice vektorů  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  v bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

18.2. Ověřte, že matice

$$\mathbf{U}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

je ortogonální. Popište geometricky účinek násobení maticí  $\mathbf{U}(\alpha)$ .

18.3. Využijte báze  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  z příkladu 18.10 k řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení hledejte ve tvaru lineární kombinace vektorů  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ .

18.4. Je dán skalární součin  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$  na vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Určete normu vektoru  $\mathbf{x} = [1, 3, -2]$  vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

18.5. Je dán vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$  se skalárním součinem  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ . Vypočtěte souřadnice vektoru  $\mathbf{x} = [3, 4, 5]^\top$  vzhledem k ortogonální bázi

$$\mathcal{E} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

K výpočtu využijte ortogonality báze.

## Klíč k příkladům k procvičení

18.4.  $\sqrt{46}$ .

18.5.  $\mathbf{x} = [\frac{4}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}]^\top$ .

## Kapitola 19

# Variační metody a metoda nejmenších čtverců

V této kapitole se seznámíme s výsledky, které dávají do souvislosti teorii lineárních zobrazení a bilineárních a kvadratických forem. Zobecnění těchto výsledků je základem moderních metod řešení rovnic, které popisují elektromagnetické, silové nebo deformační pole. Zde je použijeme k analýze soustav rovnic, které nemají řešení, s cílem naznačit zvědavému čtenáři užitečnost zavedených pojmů.

### 19.1 Variační princip

**Věta 19.1.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je symetrická pozitivně definitní matice řádu  $n$ , takže předpis*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{A}} = \mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (19.1)$$

*definuje skalární součin na  $\mathbb{R}^n$ . Nechť  $\mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  a nechť  $b$  značí lineární funkci definovanou předpisem*

$$b(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^{\top} \mathbf{x}.$$

*Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (i)  $\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ .
- (ii)  $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})_{\mathbf{A}} = b(\mathbf{y})$  pro všechna  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .
- (iii)  $\bar{\mathbf{x}}$  je jediný vektor  $\mathbb{R}^n$  takový, že pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$q(\bar{\mathbf{x}}) \leq q(\mathbf{x}), \quad (19.2)$$

kde

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbf{A}} - b(\mathbf{x}).$$

*Důkaz.* Z (i) plyne (ii). Jestliže  $\mathbf{x}$  splňuje rovnost (i), pak ji splňuje i po přenásobení  $\mathbf{y}^\top$  zleva, takže platí (ii).

Z (ii) plyne (iii). Označíme-li si  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ , pak

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) - q(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h})_{\mathbf{A}} - b(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})_{\mathbf{A}} + b(\bar{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}} + (\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}} - b(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Jestliže tedy  $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})_{\mathbf{A}} = b(\mathbf{y})$  pro libovolné  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , plyne z právě odvozené rovnosti, že

$$q(\mathbf{x}) - q(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}} \geq 0,$$

neboť skalární součin je nezáporný. Jelikož z  $(\mathbf{h}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}} = 0$  plyne  $\mathbf{h} = \mathbf{o}$ , je tím dokázáno i tvrzení o jednoznačnosti.

Z (iii) plyne (i). Nechť platí (19.2) a  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$ . Již jsme si dokázali, že pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$q(\bar{\mathbf{y}}) \leq q(\mathbf{x}).$$

Z jednoznačnosti minima pak dostaneme  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$ , tedy  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ . □

## 19.2 Metoda nejmenších čtverců

Nechť  $\mathbf{A}$  je matice typu  $(m, n)$  a nechť  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Budeme se zabývat otázkou, jak najít  $\mathbf{x}$  tak, aby rovnice  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  byla co nejlépe splněna, a to i v případě, že její přesné řešení neexistuje.

Taková úloha může vzniknout například při opakovaném měření některé fyzikální veličiny  $x$ . Jestliže například naměříme  $x_1 = 20, x_2 = 20, x_3 = 17$ , dostaneme pro  $x$  rovnice

$$\begin{aligned} x &= 20 \\ x &= 20 \\ x &= 17 \end{aligned} \tag{19.3}$$

které nemají řešení, přestože jsme přesvědčeni, že veličina  $x$  reálně existuje. Naší snahou bude určit  $x$  tak, aby vyhovovalo rovnicím (19.3) v určitém smyslu co nejlépe.

Zavedeme si označení

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

pro **reziduum** rovnice  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , jejíž řešení je ekvivalentní nalezení  $\mathbf{x}$ , pro které  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ . Snaze najít  $\mathbf{x}$ , které splňuje co nejlépe rovnici  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , tedy odpovídá požadavek, aby reziduum  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  bylo malé, tedy aby minimalizovalo vhodnou normu  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ . Z výpočetního hlediska se ukazuje nejjednodušší minimalizovat eukleidovskou normu  $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r}^\top \mathbf{r}}$ .

Podmínku pro minimum v případě matice  $\mathbf{A}$  s nezávislými sloupci si odvodíme pomocí věty 19.1.

**Věta 19.2.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je obdélníková matice typu  $(m, n)$  s hodnotí  $n$ . Nechť  $m \geq n$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Pak minimum  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$  na  $\mathbb{R}^n$  je dosaženo v řešení normální rovnice*

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}. \quad (19.4)$$

*Důkaz.* Pro Eukleidovskou normu rezidua  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$  platí

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2 = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \mathbf{x} - 2 (\mathbf{A}^\top \mathbf{b})^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{b}.$$

Jelikož matice  $\mathbf{A}$  má nezávislé sloupce, plyne z  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ , že  $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{o}$  a

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \mathbf{x} = \|\mathbf{Ax}\|^2 > 0,$$

takže  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  je symetrická pozitivně definitní matice. K dokončení důkazu stačí označit

$$b(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^\top \mathbf{b})^\top \mathbf{x}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} = \mathbf{x}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

a použít větu (19.1) k nalezení rovnice pro minimum

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} - 2b(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^\top \mathbf{b}.$$

□

**Poznámka.** Řešení  $\mathbf{x}$  normální rovnice splňuje  $\mathbf{A}^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{o}$ , tedy  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  je ortogonální ke sloupcovému prostoru  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ . Zapišeme-li si vektor  $\mathbf{b}$  ve tvaru

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} - \mathbf{r}(\mathbf{x}),$$

snadno zjistíme, že  $\mathbf{Ax}$  je ze všech bodů  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$  nejblíže k  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  je chyba ortogonální k  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ . Metoda současně minimalizuje mocninu normy chyby, která je určena součtem čtverců složek  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ . Odtud pochází název **metoda nejmenších čtverců**. Geometrický význam metody nejmenších čtverců ilustruje obr. 19.1.

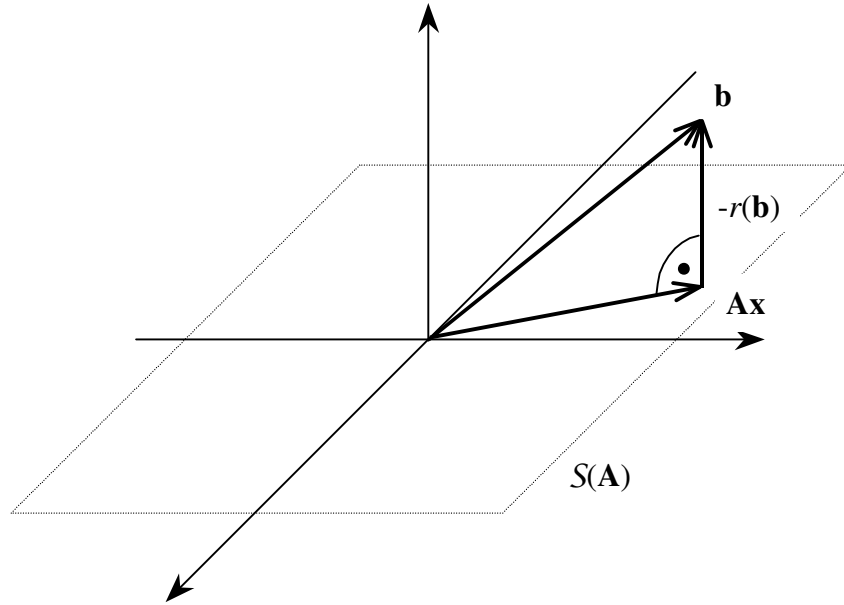
**Příklad 19.3.** Najděte  $x_1, x_2$  tak, aby byly rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned} \quad (19.5)$$

splněny co nejlépe ve smyslu eukleidovské normy rezidua.

*Řešení.* Označíme-li  $\mathbf{A}$  matici soustavy (19.5) a  $\mathbf{b}$  její pravou stranu, vypočteme, že

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$



Obr. 19.1 Geometrický význam metody nejmenších čtverců.

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix},$$

takže  $\mathbf{x}$  je řešením soustavy:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 6x_2 &= 20 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Odtud vypočteme  $x_1 = 2, x_2 = -\frac{4}{3}$ .

Řešení definuje přímku o rovnici  $y = 2t - \frac{4}{3}$ , která minimalizuje součet čtverců odchylek  $r_i$  předepsaných hodnot, jak je to vyznačeno na obr. 19.2. ▲

### 19.3 Aproximace a projektory

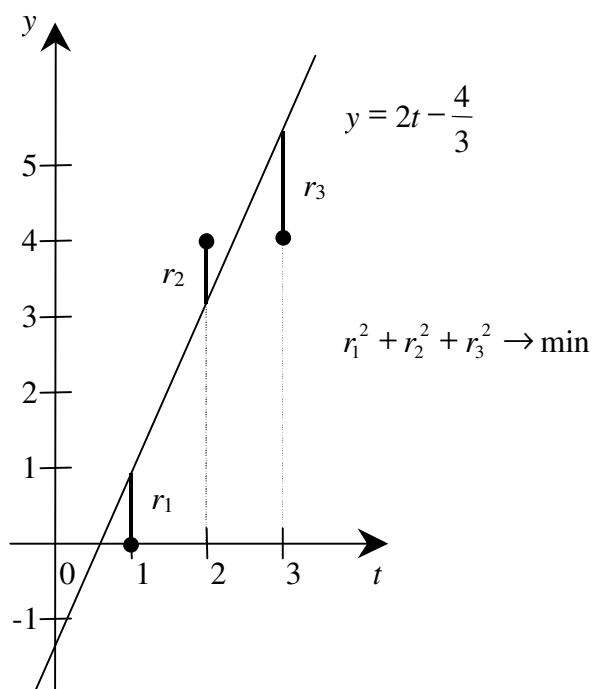
V aplikacích se často vyskytuje úloha najít k danému vektoru  $\mathbf{v}$  vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  vektor  $\mathbf{u}$ , který patří do podprostoru  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  a který je k  $\mathbf{v}$  nejbližší v dané normě.

Pro  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ , podprostor  $\mathcal{U}$  zadaný bází tvořenou sloupci matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$  a eukleidovskou normou je řešení této úlohy snadným důsledkem věty 19.2, neboť souřadnice  $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{A}}$  v bázi  $\mathcal{A} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_m^{\mathbf{A}})$  splňují normálovou rovnici (19.4), odkud

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{v}.$$

Násobení maticí

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$$



Obr. 19.2 Metoda nejmenších čtverců.

tedy každému vektoru přiřadí nejbližší vektor  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ . Matice  $\mathbf{P}$  se nazývá **ortogonální projektor** na  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ , neboť zobrazení  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{P}\mathbf{v}$  má podobné vlastnosti jako ortogonální projekce na osu souřadnic z obr. 19.3. Například pro libovolný vektor  $\mathbf{v}$  platí

$$\mathbf{P}^2\mathbf{v} = \left( \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \right) \left( \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \right) \mathbf{v} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{v},$$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v})^\top \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{P}\mathbf{v} - \mathbf{v}^\top \mathbf{P}^2\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{P}\mathbf{v} - \mathbf{v}^\top \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

Vektor  $\mathbf{P}\mathbf{v}$  je nejlepší **aproximací** (přiblížením) k vektoru  $\mathbf{v}$  z podprostoru  $\mathcal{U}$  ve smyslu Eukleidovské normy.

**Příklad 19.4.** Necht

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

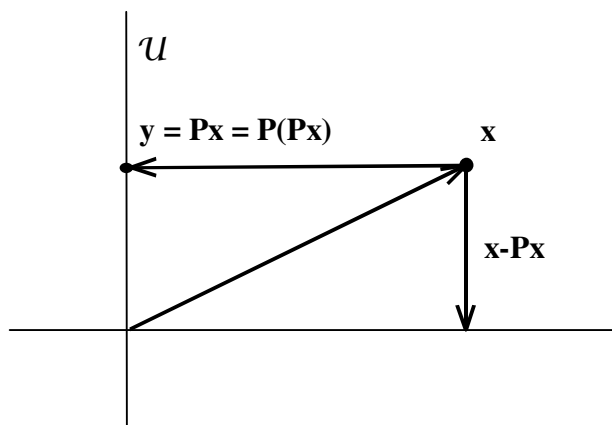
Najděte pomocí projektoru násobek  $\hat{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{v}$  vektoru  $\mathbf{v}$ , který je nejbližší vektoru  $\mathbf{u}$ .

*Řešení.* Pro naši úlohu

$$\mathbf{P} = \mathbf{v} (\mathbf{v}^\top \mathbf{v})^{-1} \mathbf{v}^\top,$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

▲



Obr. 19.3 Projekce.

## Příklady k procvičení

- 19.1. Najděte řešení soustavy (19.3) metodou nejmenších čtverců.
- 19.2. Zjednodušte vzorec pro řešení soustavy  $Ux = b$  metodou nejmenších čtverců v případě, že  $U$  je ortogonální matice.

# Část IV

## Determinanty



## Kapitola 20

# Induktivní definice determinantu

Snaha o nalezení vzorce pro řešení soustav lineárních rovnic vedla k zavedení funkce jejich koeficientů, která se nazývá determinant. Determinant má mnoho vlastností, které se uplatní v teorii a při číselném řešení některých problémů formulovaných pomocí malých matic. Pomocí determinantů lze například zformulovat kritéria pro testování pozitivní definitnosti nebo regulárnosti matic. S použitím determinantů se budeme seznamovat postupně. Mnoho problémů, jejichž řešení lze explicitně popsat pomocí determinantů, však lze řešit efektivněji bez jejich použití.

### 20.1 Explicitní řešení malých soustav

Abychom získali představu o struktuře vzorců pro řešení soustavy  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých, odvodíme si tyto vzorce pro  $n = 1, 2, 3$ .

Pro  $n = 1$  dostaneme pro  $a_{11} \neq 0$  elementárně

$$a_{11}x_1 = b_1, \quad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (20.1)$$

Pro  $n = 2$  budeme řešit soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Úpravami, které nepoužívají dělení, dostaneme

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right] a_{22}r_1 - a_{12}r_2 &\mapsto \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & b_1a_{22} - a_{12}b_2 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right] a_{11}r_2 - a_{21}r_1 &\mapsto \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{array} \right], \end{aligned}$$

odkud pro  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  dostaneme

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (20.3)$$

Obdobně, avšak pracněji, bychom mohli odvodit řešení soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (20.4)$$

Dostali bychom například vzorec

$$x_1 = \frac{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})b_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})b_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})b_3}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})},$$

který má také smysl pouze pro nenulový jmenovatel.

Nyní si všimněme, že ve všech třech případech lze čitatele i jmenovatele vyjádřit pomocí *jedné* funkce matice. Nejjednodušší je to pro  $n = 1$ , kdy stačí označit si formálně

$$\det [a] = |a| = a, \quad (20.5)$$

takže řešení (20.1) lze zapsat ve tvaru

$$x_1 = \frac{|b_1|}{|a_{11}|}.$$

Pro  $n = 2$  si označme

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = a |d| - b |c|. \quad (20.6)$$

Řešení soustavy (20.3) lze zapsat za pomoci tohoto označení ve tvaru

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} / d, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} / d,$$

kde

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Konečně pro  $n = 3$  si zavedme označení

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (20.7)$$

Řešení  $x_1$  lze pak zapsat ve tvaru

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} / d, \quad d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vzorce (20.5), (20.6) a (20.7) nám tedy definují funkce matic, s jejichž pomocí můžeme napsat *vzorce* pro řešení soustav (20.1), (20.2) a (20.4). Tyto vzorce nám dávají i určité vodítko k obecné definici determinantu, který zde chápeme jako funkci matice, s jejíž pomocí můžeme zapsat vzorec pro řešení soustavy lineárních rovnic.

## 20.2 Induktivní definice determinantu

Pro každou čtvercovou matici  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , nechť  $\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$  značí matici, která vznikne vyškrtnutím jejího  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce. Matice  $\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$  se nazývá *minor* matice  $\mathbf{A}$  příslušný k dvojici indexů  $(i, j)$ . Například

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Definice 20.1.** Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice řádu  $n$  s reálnými nebo komplexními prvky. **Determinant matice  $\mathbf{A}$**  je číslo, které značíme  $\det \mathbf{A}$  nebo  $|\mathbf{A}|$  a vypočteme jej podle následujících pravidel:

(D1) Je-li  $n = 1$ , pak  $\det \mathbf{A} = \det [a_{11}] = a_{11}$ .

(D2) Předpokládejme, že  $n > 1$  a že umíme určit determinant libovolné čtvercové matice řádu  $n - 1$ . Pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11} |\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{A}}| - a_{12} |\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}}| + a_{13} |\mathbf{M}_{13}^{\mathbf{A}}| - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} |\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{A}}| \quad (20.8)$$

Determinant matice je tedy funkce *prvků* matice, která je definována explicitně pro  $n = 1$  a pro  $n > 1$  je definována pomocí pravidla, které definuje determinant matice řádu  $n$  pomocí determinantů řádu  $n - 1$ . Výpočet determinantu matice  $n$ -tého řádu se tedy pomocí pravidla (D2) redukuje napřed na výpočty determinantů matice řádu  $n - 1$ , pak se výpočet determinantu každé matice řádu  $n - 1$  redukuje pomocí téhož pravidla na výpočty determinantů matic řádu  $n - 2$ , až se problém redukuje na výpočty determinantů matic prvního řádu, které se určí podle pravidla (D1). Například

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Pro obecnou dolní trojúhelníkovou matici  $\mathbf{L} = [l_{ij}]$  si můžeme odvodit, že determinant  $\mathbf{L}$  je roven součinu diagonálních prvků matice  $\mathbf{L}$ , neboť

$$\begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11} \begin{vmatrix} l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = \dots = l_{11} \dots l_{nn}. \quad (20.9)$$

Odtud speciálně plyne

$$\det \mathbf{I} = 1.$$

Pro mírné zpřehlednění zápisu vzorce (20.8) si definujme **algebraický doplněk** matice  $\mathbf{A}$  příslušný k dvojici indexů  $(i, j)$  předpisem

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mid \mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}} \mid.$$

Vzorec (20.8) lze pak přepsat ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}.$$

## 20.3 Výpočetní náročnost

Determinant matice  $n$ -tého řádu počítaný podle pravidla (D2) vyžaduje vyčíslení součtu  $n$  součinů čísel a determinantů matic řádu  $n - 1$ . Použijeme-li pravidlo (D2) na determinanty řádu  $n - 1$ , dostaneme, že vyčíslení determinantu matice  $n$ -tého řádu vyžaduje vyčíslení součtu  $n(n-1)$  součinů dvou čísel a determinantů řádu  $n-2$ . Opakováním tohoto postupu zjistíme, že vyčíslení determinantu matice  $n$ -tého řádu vyžaduje  $n!$  sčítanců tvořených součiny  $n$  čísel, tj. celkem  $(n-1)n!$  součinů. To je číslo tak obrovské, že vyčíslení determinantů řádu 30 podle indukční definice by na počítači s bilionem ( $10^{12}$ ) operací za sekundu trvalo biliony let! Naštěstí se sotva vyskytne potřeba počítat determinanty tak velkých matic (na rozdíl od řešení soustav). Navíc existují efektivnější postupy výpočtu determinantů, s nimiž se postupně seznámíme.

## Příklady k procvičení

20.1. Podle definice (20.8) vypočítejte determinant matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}.$$

## Klíč k příkladům k procvičení

20.1.  $\det \mathbf{A} = 0$ ,  $\det \mathbf{B} = 1$

## Kapitola 21

# Determinant a antisymetrické formy

V této kapitole se seznámíme s vlastnostmi determinantu, které nám umožní pochopit souvislosti s některými známými pojmy, zejména s lineárními funkcionaly a bili-neárními formami. Budou nás přitom zajímat zejména ty vlastnosti determinantu, které se objeví, když se na determinant budeme dívat jako na funkci celých řádků matice. Abychom se vyhnuli nepřehledným zápisům manipulací s řádky matice  $\mathbf{A}$ , budeme označovat hvězdičkou  $*$  submatice  $\mathbf{A}$ , které se manipulací nezúčastní.

### 21.1 Linearita v prvním řádku

**Lemma 21.1.** *Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  a  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  jsou čtvercové matice, které se liší nanejvýš v prvním řádku, a  $\alpha$  je libovolný skalár. Pak*

$$\left| \begin{array}{c} \alpha \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right| = \alpha \det \mathbf{A} \quad \text{a} \quad \left| \begin{array}{c} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{array} \right| = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

*Důkaz.* Podle definice determinantu platí

$$\left| \begin{array}{c} \alpha \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = \alpha a_{11} \mathbf{A}_{11} + \dots + \alpha a_{1n} \mathbf{A}_{1n} = \alpha \det \mathbf{A}$$

a

$$\begin{aligned}
\left| \begin{array}{c} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = (a_{11} + b_{11})\mathbf{A}_{11} + \dots + (a_{1n} + b_{1n})\mathbf{A}_{1n} = \\
&= (a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}) + (b_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + b_{1n}\mathbf{A}_{1n}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.
\end{aligned}$$

□

## 21.2 Antisymetrie v prvních dvou řádcích

**Lemma 21.2.** *Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice řádu  $n \geq 2$ . Pak*

$$\det \mathbf{A} = \left| \begin{array}{c} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{c} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right|.$$

*Důkaz.* Pro  $n = 2$  platí

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = - \left| \begin{array}{c} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \end{array} \right|.$$

Důkaz pro obecnější případ se provede rozepsáním determinantů minorů v (20.8) a vhodnou úpravou. Úplný důkaz je však komplikovaný. □

## 21.3 Antisymetrie v libovolné dvojici řádků

**Věta 21.3.** *Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice řádu  $n \geq 2$ , nechť  $i < j$  a nechť  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  je matice, která vznikla z matice  $\mathbf{A}$  vzájemnou výměnou  $i$ -tého a  $j$ -tého řádku. Pak*

$$\det \mathbf{A} = \left| \begin{array}{c} * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right|_i = - \left| \begin{array}{c} * \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right|_j = - \det \mathbf{B}. \quad (21.1)$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme indukcí. Pro  $n = 2$  tvrzení platí podle lemmatu 21.2. Abychom tvrzení dokázali pro  $n > 2$ , předpokládejme, že (21.1) platí pro matice řádu  $2, \dots, n-1$  a že  $1 \leq i < j \leq n$ . Rozepišme si  $\det \mathbf{A}$  podle definice na tvar

$$\det \mathbf{A} = a_{11}|\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{A}}| - a_{12}|\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}}| + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}|\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{A}}|.$$

Budeme rozlišovat dva případy:

1. Pro  $1 < i$  tvrzení platí, neboť každá submatice  $\mathbf{M}_{1k}^{\mathbf{B}}$  vznikne podle předpokladu z  $\mathbf{M}_{1k}^{\mathbf{A}}$  výměnou příslušných řádků, takže pomocí indukčního předpokladu a  $a_{11} = b_{11}, \dots, a_{1n} = b_{1n}$  dostaneme

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= b_{11}|\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{B}}| - b_{12}|\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{B}}| + \dots + (-1)^{n+1}b_{1n}|\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{B}}| = \\ &= a_{11}(-|\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{A}}|) - a_{12}(-|\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}}|) + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}(-|\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{A}}|) = -\det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

2. Jestliže  $i = 1$ , pak pomocí dokázaného tvrzení a lemmatu 21.2 dostaneme postupně

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} & 1 \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} & 2 \\ * & \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & j \\ * & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} & 1 \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & 2 \\ * & \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} & j \\ * & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & 1 \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} & 2 \\ * & \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} & j \\ * & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & 1 \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} & 2 \\ * & \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} & j \\ * & \end{vmatrix} = -\det \mathbf{A}.$$

□

## 21.4 Linearita v libovolném řádku

**Věta 21.4.** *Nechť  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou čtvercové matice, které mají stejné řádky s výjimkou  $k$ -tého. Pak pro libovolné  $\alpha$  platí*

$$k \begin{vmatrix} * \\ \alpha \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A} \quad \text{a} \quad k \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

*Důkaz.* Pro  $k = 1$  jsme tvrzení dokázali lemmatem 21.1.

Pro  $k > 1$  dostaneme postupným použitím věty 21.3 a lemmatu 21.1

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & 1 \\ * & \\ \alpha \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & k \\ * & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & 1 \\ * & \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & k \\ * & \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & 1 \\ * & \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & k \\ * & \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & 1 \\ * & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & k \\ * & \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A}$$

a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \end{matrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \end{matrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

□

Věty 21.3 a 21.4 můžeme shrnout tvrzením, že **determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice řádků matice.**

**Důsledek 21.5.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je libovolná čtvercová matice:*

- (i) *Má-li  $\mathbf{A}$  dva stejné řádky, pak  $\det \mathbf{A} = 0$ .*
- (ii) *Má-li  $\mathbf{A}$  nulový řádek, pak  $\det \mathbf{A} = 0$ .*
- (iii) *Je-li  $\mathbf{B}$  čtvercová matice, která má stejné řádky jako  $\mathbf{A}$  s výjimkou  $k$ -tého, a*

$$\mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}}, \quad k \neq l,$$

*pak  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$ .*

- (iv) *Jsou-li řádky  $\mathbf{A}$  lineárně závislé, pak  $\det \mathbf{A} = 0$ .*

*Důkaz.*

- (i) Jestliže v matici  $\mathbf{A}$  vyměníme dva stejné řádky, matice se nezmění, avšak podle věty 21.4 dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}.$$

Odtud  $\det \mathbf{A} = 0$ .

- (ii) Nechť  $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \mathbf{o}$ . Pak s použitím věty 21.3 dostaneme

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{o} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} * & & \\ 0 \cdot \mathbf{o} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \end{matrix} = 0 \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{o} & & \\ * & & \end{vmatrix} = 0.$$

- (iii) Podle vět 21.3 a 21.4 platí

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \end{matrix} = \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \end{matrix} + \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \end{matrix} = \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \end{matrix} + \alpha \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \end{matrix} = \\ &= \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$



- (iv) Jsou-li řádky matice  $\mathbf{A}$  lineárně závislé, pak podle věty 10.5 existuje index  $i$  a koeficienty  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$  tak, že

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \dots + \alpha_{i-1} \mathbf{r}_{i-1}^{\mathbf{A}}.$$

Odtud

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} - \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} - \dots - \alpha_{i-1} \mathbf{r}_{i-1}^{\mathbf{A}} = \mathbf{o},$$

takže podle (iii) a (ii) platí

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} i = \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} - \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} i = \dots = \\ &= \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} - \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} - \dots - \alpha_{i-1} \mathbf{r}_{i-1}^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} i = \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{o} & & \\ * & & \end{vmatrix} i = 0. \end{aligned}$$

□

## 21.5 Výpočet hodnoty determinantu

V článcích 21.3 a 21.4 jsme si ukázali, že elementární řádkové úpravy ovlivňují velmi jednoduše hodnotu determinantu. Přičtení násobku některého řádku k jinému ji nezmění vůbec, vzájemná výměna dvou řádků změní její znaménko a vynásobení řádku skalárem ji vynásobí tímto skalárem. Elementární řádkové úpravy matice proto můžeme využít k převodu matice na speciální tvar vhodný pro výpočet determinantu. Pro nás je to prozatím dolní trojúhelníková matice, jejíž determinant je podle (20.9) roven součinu diagonálních prvků. Brzy uvidíme, že stejně se vypočte i determinant horní trojúhelníkové matice.

**Příklad 21.6.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 + r_3 \\ r_2 + 2r_3 \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 - 3r_2 \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-6) \cdot 1 \cdot (-1) = 12 \end{aligned}$$

**Příklad 21.7.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_3 \\ r_2 \end{matrix} &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 - r_3 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 - r_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -(-2) \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

## 21.6 Determinant součinu matic

**Věta 21.8.** *Nechť  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou čtvercové matice řádu  $n$ . Pak*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že  $\mathbf{A}$  je diagonální, tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Pak

$$\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} d_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ d_n \mathbf{r}_n^{\mathbf{B}} \end{vmatrix} = d_1 \cdots d_n \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Je-li  $\mathbf{A}$  libovolná regulární matice, pak existuje posloupnost  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$  sestávající z  $l$  elementárních permutačních matic (6.1) a  $k - l$  Gaussových transformací (6.2), která splňuje

$$\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Jelikož násobení Gaussovou transformací realizuje přičtení některého řádku k jinému a násobení permutací realizuje výměnu řádků, platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= (-1)^l \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}) = (-1)^l \det(\mathbf{DB}) = (-1)^l \det \mathbf{D} \cdot \det \mathbf{B} = \\ &= (-1)^l \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}) \cdot \det \mathbf{B} = (-1)^l (-1)^l \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \\ &= \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Je-li konečně  $\mathbf{A}$  singulární, pak  $\mathbf{A}$  má závislé řádky a existuje posloupnost  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$  Gaussových transformací tak, že matice  $\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$  má nulový řádek. Pak má však nulový řádek i matice  $\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}$  a podle důsledku (ii) z článku 21.4 platí

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}) = 0.$$

□

## Příklady k procvičení

21.1. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  řádu  $n$  a skalár  $\alpha$  platí

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A}.$$

21.2. Vypočtěte:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

21.3. Ověřte, že

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

je antisymetrická bilineární forma definovaná pro reálné aritmetické vektory  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$  a  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$ .

## Klíč k příkladům k procvičení

21.2. a) 6, b) 7

## Kapitola 22

# Determinant a inverzní matice

Spojením induktivní definice determinantu s výsledky předchozí kapitoly dostaneme vztahy, jejichž maticová interpretace vede ke vzorcům pro inverzní matici a řešení soustav. Snadno odvodíme i některé další vlastnosti determinantů. Budeme přitom používat stejné konvence jako v kapitole 21.

### 22.1 Rozvoj determinantu podle prvků libovolného řádku

**Věta 22.1.** *Jestliže  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice řádu  $n > 1$ , pak pro libovolný index  $k$  platí*

$$\det \mathbf{A} = a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \dots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn}. \quad (22.1)$$

*Důkaz.* Pro libovolné  $k$  dostaneme postupnou výměnou původně  $k$ -tého řádku s řádkem bezprostředně nad ním

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k-2}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{k-1} (a_{k1}|\mathbf{M}_{k1}^{\mathbf{A}}| - a_{k2}|\mathbf{M}_{k2}^{\mathbf{A}}| + \dots + (-1)^{n+1}|\mathbf{M}_{kn}^{\mathbf{A}}|) = \\ &= (-1)^{k+1}a_{k1}|\mathbf{M}_{k1}^{\mathbf{A}}| + \dots + (-1)^{k+n}|\mathbf{M}_{kn}^{\mathbf{A}}| = \\ &= a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \dots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn}. \end{aligned}$$

□

**Důsledek 22.2.** Necht  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice řádu  $n > 1$ .

(i) Jsou-li  $k, l$  dva různé indexy řádků matice  $\mathbf{A}$ , pak

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \dots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = 0. \quad (22.2)$$

(ii) Je-li  $\mathbf{A}$  trojúhelníková matice, pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdots a_{nn}. \quad (22.3)$$

*Důkaz.*

(i) Povšimněme si, že hodnota  $\mathbf{A}_{li}$  vůbec nezávisí na  $l$ -tém řádku matice  $\mathbf{A}$ . Platí tedy

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \dots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = \begin{vmatrix} * & & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} & & \\ * & & \end{vmatrix} \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} = 0.$$

(ii) Je-li  $\mathbf{A}$  dolní trojúhelníková matice, platí (22.3) podle (20.8). Je-li  $\mathbf{A}$  horní trojúhelníková matice, pak opakovaným použitím (22.1) dostaneme postupně

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

□

## 22.2 Adjungovaná a inverzní matice

Abychom si mohli zapsat rovnosti (22.1) a (22.2) maticově, zavedeme si nejprve nový pojem.

**Definice 22.3.** Necht  $\mathbf{A}$  je libovolná čtvercová matice řádu  $n > 1$ . Pak **adjungovaná matice**  $\tilde{\mathbf{A}}$  k matici  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice stejného řádu definovaná předpisem

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Příklad 22.4.** Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (22.4)$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, & \mathbf{A}_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8, \\ \mathbf{A}_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, & \mathbf{A}_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3, \\ \mathbf{A}_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6, & \mathbf{A}_{23} &= - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3, \\ \mathbf{A}_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & \mathbf{A}_{32} &= - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\ \mathbf{A}_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \end{aligned}$$

takže

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}. \quad (22.5)$$

**Věta 22.5.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová regulární matice řádu  $n > 1$ . Pak  $\det \mathbf{A} \neq 0$  a*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}. \quad (22.6)$$

*Důkaz.* Je-li  $\mathbf{A}$  čtvercová regulární matice, pak existuje posloupnost elementárních řádkových operací, která převede  $\mathbf{A}$  na jednotkovou matici  $\mathbf{I}$ . Jelikož determinant matice upravené elementární transformace se může od determinantu původní matice lišit jen nenulovým násobkem a  $\det \mathbf{I} = 1$ , platí  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Nyní si povšimněme, že (22.1) a (22.2) můžeme zapsat maticově pomocí adjungované matice ve tvaru

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{A}} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}.$$

Odtud

$$\mathbf{A} \left( \frac{1}{\det \mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}} \right) = \mathbf{I}.$$

□

**Příklad 22.6.** Pro matici  $\mathbf{A}$  definovanou rovností (22.4) dostaneme s využitím (22.5)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Správnost výsledku si můžeme ověřit vynásobením.

**Důsledek 22.7.** Matice  $\mathbf{A}$  je regulární, právě když  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

*Důkaz.* Je-li  $\mathbf{A}$  singulární, pak má závislé sloupce, takže podle důsledku (iv) části 21.4 platí  $\det \mathbf{A} = 0$ . Obrácené tvrzení plyne z právě dokázané věty.  $\square$

## 22.3 Determinant transponované matice

**Věta 22.8.** Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice. Pak

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}. \quad (22.7)$$

*Důkaz.* Podle článku 7.1 lze každou permutační matici  $\mathbf{P}$  vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_k$$

součinu elementárních permutačních matic  $\mathbf{P}_i$ , které jsou symetrické, takže

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1$$

a

$$\det \mathbf{P}^T = |\mathbf{P}_k| \cdots |\mathbf{P}_1| = \det \mathbf{P}.$$

Jelikož transponování nemění diagonálu matice a determinant trojúhelníkové matice je podle důsledku (ii) článku 22.1 roven součinu jejích diagonálních prvků, platí (22.7) také pro každou trojúhelníkovou matici.

Jestliže je  $\mathbf{A}$  obecná čtvercová matice, pak podle věty 7.2 o **LUP** rozkladu existují dolní trojúhelníková matice  $\mathbf{L}$ , horní trojúhelníková matice  $\mathbf{U}$  a permutační matice  $\mathbf{P}$  tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{LUP}.$$

S použitím věty o součinu determinantů 21.8 odtud plyne

$$\det \mathbf{A}^T = \det(\mathbf{P}^T \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T) = |\mathbf{P}^T| |\mathbf{U}^T| |\mathbf{L}^T| = |\mathbf{L}| |\mathbf{U}| |\mathbf{P}| = \det(\mathbf{LUP}) = \det \mathbf{A}.$$

$\square$

## 22.4 Determinant jako funkce sloupců

Ze vztahu (22.7) vyplývá, že determinant považovaný za funkci sloupců má stejné vlastnosti jako determinant považovaný za funkci řádků. Například **determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice sloupců matice**.

Způsob odvození si budeme ilustrovat na důkazu následující věty o rozvoji determinantu podle sloupců, kterou upotřebíme v článku 22.5.

**Věta 22.9.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice řádu  $n > 1$ . Pak pro  $i = 1, \dots, n$  platí*

$$\det \mathbf{A} = a_{1i} \mathbf{A}_{1i} + \dots + a_{ni} \mathbf{A}_{ni}.$$

*Důkaz.* S použitím věty 22.8 dostaneme

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det \mathbf{A}^\top = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \dots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\mathbf{M}_{1i}^\top| + \dots + (-1)^{i+n} a_{ni} |\mathbf{M}_{ni}^\top| = \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\mathbf{M}_{1i}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{ni} |\mathbf{M}_{ni}| = \\ &= a_{1i} \mathbf{A}_{1i} + \dots + a_{ni} \mathbf{A}_{ni}. \end{aligned}$$

□

## 22.5 Cramerovy vzorce pro řešení soustav

Použijeme-li vzorec (22.6) pro inverzní matici k řešení soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

s regulární čtvercovou maticí  $\mathbf{A}$  řádu  $n > 1$ , dostaneme pro složky  $x_i$  řešení  $\mathbf{x}$  vzorce

$$x_i = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}]_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}_{1i} b_1 + \dots + \mathbf{A}_{ni} b_n). \quad (22.8)$$

Povšimneme-li si, obdobně jako při odvození (22.2), že minory příslušné k prvkům  $i$ -tého sloupce neobsahují prvky  $i$ -tého sloupce, můžeme výraz v kulaté závorce (22.8) považovat za rozvoj determinantu matice

$$\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} * & \mathbf{b} & * \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{s}_{i-1}^{\mathbf{A}} & \mathbf{b} & \mathbf{s}_{i+1}^{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \end{bmatrix}_i,$$



která vznikne z  $\mathbf{A}$  záměnou  $i$ -tého sloupce za  $\mathbf{b}$  podle  $i$ -tého sloupce. Výrazy

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad i = 1, \dots, n$$

se nazývají **Cramerovy vzorce**. Jejich speciální případy jsme si odvodili elementárními výpočty v kapitole 20.

**Příklad 22.10.** Najděte řešení soustavy

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 &+ 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

pomocí Cramerových vzorců.

*Řešení.* Postupně vypočteme determinant matice soustavy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

a čitatele Cramerových vzorců

$$|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48, \quad |\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Odtud

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = 1, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = 4, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = -1.$$

▲

## 22.6 Použití Cramerových vzorců

Cramerovy vzorce, které jsme si odvodili v kapitole 22.5, lze považovat za úplné řešení soustavy lineárních rovnic v tom smyslu, že ho redukuje na vyčíslení součtů a součinů, prakticky dosazení do vzorečku. To je užitečné zejména v případech, kdy potřebujeme vyjádřit řešení malé soustavy s proměnnými koeficienty. Jelikož se k efektivnímu výpočtu determinantu číselné matice obvykle vyplatí upravit matici na trojúhelníkový tvar, který lze přímo použít k řešení soustavy, lze si jen těžko představit efektivní využití Cramerových vzorců k řešení rovnic s číselnými koeficienty. Obdobné úvahy platí i pro vzorce pro výpočet inverzní matice.

## Příklady k procvičení

22.1. Vypočtěte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- a) rozvojem podle třetího řádku,
- b) rozvojem podle druhého sloupce.

22.2. Vyjádřete řešení soustavy

$$\begin{aligned} (p+2)x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

v závislosti na parametru  $p \geq 0$ . K řešení použijte:

- a) vzorce pro inverzní matici,
- b) Crammerovy vzorce.

22.3. Najděte nenulové řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

s využitím věty 22.1 a vzorce (22.2).

NÁPOVĚDA: Povšimněte si, že když opíšete kteroukoliv rovnici ještě jednou, získáte soustavu, jejíž determinant je roven nule.

22.4. Rozhodněte pomocí determinantu, zda má soustava

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

jediné řešení.

22.5. Pomocí Crammerových vzorců nalezněte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

22.6. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Klíč k příkladům k procvičení**

$$22.5. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$22.6. [-1, 2, -1]^{\top}.$$

## Část V

# Úvod do spektrální teorie

## Kapitola 23

# Vlastní čísla a vektory

Lineární transformace  $A$  obvykle nezobrazí daný vektor  $\mathbf{e}$  na jeho násobek, takže  $\mathbf{e}$  a  $A\mathbf{e}$  jsou typicky nezávislé vektory. Výjimečně se však může stát, že existuje číslo  $\lambda$  tak, že  $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ . Ukazuje se, že takové dvojice  $\lambda$  a  $\mathbf{e}$  jsou velmi důležité pro pochopení lineárních transformací a matic. V aplikacích se s nimi setkáme například při studiu stability systémů, při analýze kmitání a při numerickém řešení rovnic rovnováhy či elektrického pole.

### 23.1 Vlastní čísla a vektory

**Definice 23.1.** Necht  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$  je lineární transformace definovaná na vektorovém prostoru  $\mathcal{V}$ . Jestliže existuje nenulový vektor  $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$  a skalár  $\lambda$  tak, že

$$A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}, \quad (23.1)$$

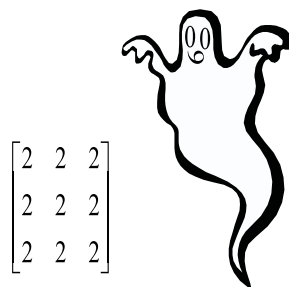
pak se  $\lambda$  nazývá **vlastní číslo** transformace  $A$ ,  $\mathbf{e}$  se nazývá **vlastní vektor** příslušný k  $\lambda$  a  $(\lambda, \mathbf{e})$  se nazývá **vlastní dvojice** transformace  $A$ .

Rovnost (23.1) si můžeme zapsat pomocí identity ve tvaru

$$(A - \lambda I)\mathbf{e} = \mathbf{o},$$

takže  $\lambda$  je **vlastním číslem**  $A$ , právě když  $A - \lambda I$  není prosté zobrazení, a **vlastní vektory**  $A$  příslušné k  $\lambda$  jsou prvky jádra  $A - \lambda I$ .

Množina všech vlastních čísel  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$  je podmnožinou množiny  $\sigma(A)$  všech skalárů  $\lambda$ , pro které neexistuje  $(A - \lambda I)^{-1}$ . Množina  $\sigma(A)$  se nazývá **spektrum** transformace  $A$  a pro transformace prostorů konečné dimenze je totožná s množinou všech vlastních čísel  $A$ . Slovo „spektrum“ znamená „duch“ a vystihuje skutečnost, že spektrum na matici není vidět, avšak s jeho pomocí se mnohé vlastnosti matic snadno vyloží, obdobně jako hýbání stolu na spiritistické seanci pomocí nějakého ducha. Je tu ovšem i rozdíl – pokud se něco dovíme o spektru matice, pomůže nám to řešit konkrétní úlohy.



Obr. 23.1: Matice a její spektrum.

**Příklad 23.2.** Necht

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pak vektory standardní báze  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$  odpovídající po řadě vlastním číslům 1 a 2, neboť

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyjádříme-li si vektor  $\mathbf{x}$  ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{s}_1 + x_2 \mathbf{s}_2,$$

můžeme si  $\mathbf{Ax}$  vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = 1 \cdot x_1 \mathbf{s}_1 + 2 \cdot x_2 \mathbf{s}_2.$$

**Příklad 23.3.** Necht  $\mathcal{F}$  je prostor všech reálných funkcí, které mají všechny derivace spojitě. Označíme-li si  $D$  zobrazení, které každé funkci  $f$  přiřazuje její derivaci  $f'$ , pak exponenciální funkce  $f(x) = e^{\lambda x}$  splňuje

$$Df(x) = f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x).$$

Každé reálné číslo je tedy vlastním číslem  $D$ . Označíme-li si  $g(x) = \sin(\lambda x)$ , pak

$$-D^2 g(x) = -g''(x) = \lambda^2 \sin(\lambda x) = \lambda^2 g(x),$$

takže každé nezáporné číslo je vlastním číslem  $-D^2$ .

**Příklad 23.4.** Necht  $\mathcal{V}$  je libovolný vektorový prostor a  $I$  je identické zobrazení definované na  $\mathcal{V}$ . Pak pro každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  platí

$$I\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v},$$

takže každý nenulový vektor je vlastním vektorem identity odpovídající vlastnímu číslu 1 a  $\sigma(I) = \{1\}$ .

## 23.2 Charakteristický mnohočlen a spektrum

Je-li  $\mathbf{A}$  čtvercová matice, tak násobení maticí  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  není podle článku 13.4 prosté zobrazení, právě když  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  je singulární. Podle důsledku 22.7 tedy skalár  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ , právě když  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ .

Výraz  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  se nazývá **charakteristický mnohočlen** matice  $\mathbf{A}$  a každé vlastní číslo  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  je kořenem **charakteristické rovnice**

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0. \quad (23.2)$$

Násobnost vlastního čísla  $\lambda$  jako kořene rovnice (23.2) se nazývá **algebraická násobnost**.

Podle takzvané základní věty algebry má každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty alespoň jeden komplexní kořen. Odtud vyplývá, že **každá čtvercová matice** považovaná za transformaci komplexního prostoru **má neprázdné spektrum**.

Ukazuje se, že komplexní kořeny charakteristické rovnice mohou mít význam pro pochopení vlastností reálných matic, které obvykle vznikají při formulaci technických problémů. V dalším výkladu proto budeme uvažovat pouze komplexní vektorové prostory a komplexní matice. Připomeňme, že reálnou matici považujeme za zvláštní případ komplexní matice.

Řešením charakteristické rovnice můžeme vypočítat vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory malých matic. Například vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

vypočteme řešením rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

odkud  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ . Vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$  vypočteme postupně řešením soustav

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 : -x_1 + x_2 = 0 & \lambda_2 : x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 & x_1 + x_2 = 0, \end{array}$$

odkud

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

## 23.3 Neprázdnost spektra transformace

**Věta 23.5.** *Nechť  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$  je lineární transformace komplexního prostoru  $\mathcal{V}$  konečné dimenze. Pak  $\sigma(A) \neq \emptyset$ .*

*Důkaz.* Nechť  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  je báze  $\mathcal{V}$ . Jelikož matice  $\mathbf{A} = [A]_{\mathcal{F}}$  má neprázdné spektrum, podle článku 23.2, existuje  $\lambda \in \mathbb{C}$  a sloupcový vektor  $\mathbf{x} = [x_i]$  tak, že

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Označme si

$$\mathbf{e} = x_1\mathbf{f}_1 + \dots + x_n\mathbf{f}_n,$$

takže  $[\mathbf{e}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{x}$ . Pak

$$[\mathbf{A}\mathbf{e}]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{A}]_{\mathcal{F}}[\mathbf{e}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda[\mathbf{e}]_{\mathcal{F}} = [\lambda\mathbf{e}]_{\mathcal{F}},$$

takže  $\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$  a  $\lambda \in \sigma(A)$ . □

## 23.4 Invariantnost vzhledem k podobnosti

Vzhledem k tomu, že podobné matice lze považovat za matice téhož zobrazení v různých bázích, dá se očekávat, že podstatné charakteristiky podobných matic budou stejné.

Nechť  $\mathbf{A}$  je libovolná čtvercová matice a nechť

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}. \tag{23.3}$$

Po přenásobení (23.3) libovolnou regulární maticí  $\mathbf{T}$  dostaneme

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{T}\mathbf{e},$$

odtud

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{T}\mathbf{e}).$$

Odtud plyne, že **podobné matice mají stejná vlastní čísla**.

Podobnost zachovává nejen spektrum, ale i charakteristický mnohočlen. Skutečně, použitím věty 21.8 o součinu determinantů a jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} - \lambda\mathbf{I}) &= |\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} - \lambda\mathbf{T}\mathbf{I}\mathbf{T}^{-1}| = |\mathbf{T}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}^{-1}| = |\mathbf{T}||\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{T}^{-1}| = \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}), \end{aligned}$$

takže **podobné matice mají stejný charakteristický mnohočlen**.



## 23.5 Součet a součin vlastních čísel

I když jsme si řekli, že spektrum není na matici obvykle vidět, neznamená to, že na matici není vidět žádná informace o spektru. Ukážeme si to podrobnějším rozбором charakteristické rovnice.

Pomocí matematické indukce a induktivní definice determinantu lze dokázat, že pro čtvercovou matici  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$   $n$ -tého řádu platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + p_{n-2}(\lambda), \quad (23.4)$$

kde  $p_{n-2}$  je mnohočlen řádu nejvýše  $n - 2$ . Charakteristický mnohočlen (23.4) můžeme dále upravit na tvar

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-\lambda)^n + (a_{11} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + q_{n-2}(\lambda), \quad (23.5)$$

s mnohočlenem  $q_{n-2}$  stupně nejvýše  $n - 2$ . Jelikož charakteristický mnohočlen (23.4) je mnohočlen  $n$ -tého stupně, můžeme ho také vyjádřit pomocí základní věty algebry ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = \\ &= (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \dots + \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{aligned} \quad (23.6)$$

Po dosazení  $\lambda = 0$  do (23.6) dostaneme

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdots \lambda_n \quad (23.7)$$

a porovnáním koeficientů u  $(-\lambda)^{n-1}$  v (23.5) a (23.6)

$$a_{11} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Součet diagonálních prvků matice se nazývá **stopa matice**.

**Příklad 23.6.** Určete součet a součin vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Řešení.* Necht  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ . Pak

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2 + 2 = 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

▲

## 23.6 Lokalizace vlastních čísel

Při řešení některých úloh není nutné mít úplnou informaci o spektru, ale stačí jen určit část komplexní roviny, kde se spektrum nachází. Například najdeme-li část komplexní roviny, která obsahuje spektrum dané matice  $\mathbf{A}$  a neobsahuje nulu, budeme mít, podle (23.7), zaručeno, že  $\mathbf{A}$  je regulární. Z tohoto důvodu je užitečná následující věta.

**Věta 23.7 (Geršgorin).** *Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová komplexní matice řádu  $n$  a nechť*

$$r_i = |a_{i1}| + \dots + \widehat{|a_{ii}|} + \dots + |a_{in}| \quad \text{a} \quad \mathcal{S}_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\},$$

*kde stříška nad symbolem značí jeho vynechání. Pak*

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n.$$

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = [x_i]$  a  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ . Pak

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = \lambda x_i$$

odkud převedením členu  $a_{ii}x_i$  na pravou stranu dostaneme

$$a_{i1}x_1 + \dots + \widehat{a_{ii}x_i} + \dots + a_{in}x_n = (\lambda - a_{ii})x_i.$$

Pomocí vlastností absolutní hodnoty tak snadno ověříme, že platí

$$|a_{i1}||x_1| + \dots + \widehat{|a_{ii}||x_i|} + \dots + |a_{in}||x_n| \geq |\lambda - a_{ii}||x_i|. \quad (23.8)$$

Nechť  $i$  je takové, že  $|x_i| = \max_j |x_j|$ . Jelikož  $|x_i| > 0$ , platí

$$|x_j|/|x_i| \leq 1. \quad (23.9)$$

Vydělíme-li rovnost (23.8)  $|x_i|$ , dostaneme s použitím (23.9)

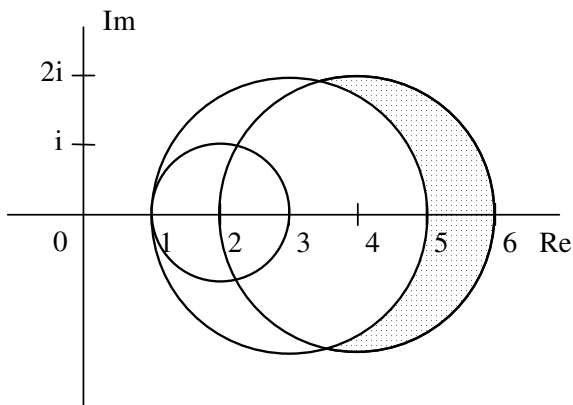
$$|a_{i1}| + \dots + \widehat{|a_{ii}|} + \dots + |a_{in}| \geq |\lambda - a_{ii}|,$$

tedy  $\lambda \in \mathcal{S}_i$ . □

**Příklad 23.8.** Pomocí Geršgorinovy věty najděte co nejmenší část komplexní roviny, která obsahuje spektrum matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & i & 4 \end{bmatrix}.$$

*Řešení.*  $r_1 = |i| + |0| = 1, r_2 = 1 + 1 = 2, r_3 = 1 + |i| = 2$ . Odtud  $\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 2| \leq 1\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 3| \leq 2\}$ ,  $\mathcal{S}_3 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 4| \leq 2\}$ , takže  $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ . Část komplexní roviny obsahující  $\sigma(\mathbf{A})$  je na obrázku 23.2, kde je vyšrafována oblast obsahující  $\sigma(\mathbf{A})$ . Z obrázku 23.2 plyne, že  $0 \notin \sigma(\mathbf{A})$ , takže matice  $\mathbf{A}$  je regulární. ▲



Obr. 23.2: Spektrum matice.

## Příklady k procvičení

23.1. Najděte všechna vlastní čísla a vlastní vektory matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23.2. Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

23.3. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vypočtěte vlastní čísla matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$ .

23.4. Nechť  $\mathbf{A}$  je libovolná regulární matice s vlastním číslem  $\lambda$ . Dokažte:

- a)  $\lambda^2 \in \sigma(\mathbf{A}^2)$ .
- b)  $\lambda^{-1} \in \sigma(\mathbf{A}^{-1})$ .
- c)  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 \in \sigma(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{I})$ .

23.5. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2i & 1 & 0 \\ -1 & 4i & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Vypočtěte součet a součin vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ .
- b) Znázorněte část komplexní roviny, která podle Geršgorinovy věty obsahuje  $\sigma(\mathbf{A})$ .

## Kapitola 24

# Spektrální rozklad symetrické matice

V kapitole 23 jsme viděli, že obrazy vlastních vektorů jsou určeny vlastními čísly, které splňují některé podivuhodné relace. Nyní si ukážeme, že z vlastních vektorů symetrické matice můžeme sestavit ortonormální bázi. Toto tvrzení je snad to nej důležitější, co se dá říct o symetrických maticích.

### 24.1 Spektrum symetrické matice

**Věta 24.1.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je reálná symetrická matice. Pak  $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$ .*

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $\lambda$  je komplexní vlastní číslo reálné symetrické matice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  řádu  $n$ , jemuž přísluší vlastní vektor  $\mathbf{e} = [e_i]$ , takže

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}. \quad (24.1)$$

Pak pro  $\bar{\lambda}$  komplexně sdružené s  $\lambda$  a vektor  $\bar{\mathbf{e}} = [\bar{e}_j]$  se složkami  $\bar{e}_j$  komplexně sdruženými s  $e_j$  platí, podle pravidla o součinu komplexně sdružených čísel, že

$$[\mathbf{A}\bar{\mathbf{e}}]_i = a_{i1}\bar{e}_1 + \dots + a_{in}\bar{e}_n = \overline{a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n} = \overline{\lambda e_i} = \bar{\lambda}\bar{e}_i = [\bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}]_i$$

pro každý index  $i$ , takže

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{e}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}. \quad (24.2)$$

Přenásobíme-li nyní rovnici (24.1) zleva  $\bar{\mathbf{e}}^\top$  a rovnici (24.2) zleva  $\mathbf{e}^\top$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}^\top \mathbf{A}\mathbf{e} &= \lambda \bar{\mathbf{e}}^\top \mathbf{e} = \lambda (|e_1|^2 + \dots + |e_n|^2), \\ \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\bar{\mathbf{e}} &= \bar{\lambda} \mathbf{e}^\top \bar{\mathbf{e}} = \bar{\lambda} (|e_1|^2 + \dots + |e_n|^2), \end{aligned}$$

odkud s pomocí

$$\bar{\mathbf{e}}^\top \mathbf{A}\mathbf{e} = (\bar{\mathbf{e}}^\top \mathbf{A}\mathbf{e})^\top = \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\bar{\mathbf{e}}$$

snadno odvodíme  $\lambda = \bar{\lambda}$ . □

## 24.2 Vlastní vektory reálné symetrické matice

**Věta 24.2.** *Vlastní vektory reálné symetrické matice  $\mathbf{A}$  odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $\lambda \neq \mu$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ , kterým odpovídají vlastní vektory  $\mathbf{e}$  a  $\mathbf{f}$ , takže

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}\mathbf{f} = \mu\mathbf{f}. \quad (24.3)$$

Přenásobíme-li rovnice (24.3) postupně zleva  $\mathbf{f}^\top$  a  $\mathbf{e}^\top$ , dostaneme

$$\mathbf{f}^\top \mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{e} \quad \text{a} \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\mathbf{f} = \mu \mathbf{e}^\top \mathbf{f},$$

odkud s pomocí

$$\mathbf{f}^\top \mathbf{A}\mathbf{e} = (\mathbf{f}^\top \mathbf{A}\mathbf{e})^\top = \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\mathbf{f} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}^\top \mathbf{e} = (\mathbf{f}^\top \mathbf{e})^\top = \mathbf{e}^\top \mathbf{f}$$

plyne

$$\lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{e} = \mu \mathbf{f}^\top \mathbf{e}.$$

Pro  $\lambda \neq \mu$  tedy musí platit  $\mathbf{f}^\top \mathbf{e} = 0$ . □

**Poznámka.** Vlastní vektory libovolně blízkých matic se mohou výrazně lišit. Například matice

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

má, až na skalární násobky, pouze tři nezávislé vlastní vektory tvořené sloupci matice  $\mathbf{I}_3$ , avšak jakýkoli sloupcový vektor, který je lineární kombinací prvních dvou sloupců jednotkové matice  $\mathbf{I}_3$ , je vlastním vektorem matice  $\mathbf{A}_0$ . Výpočet vlastních vektorů odpovídajících blízkým vlastním číslům proto může být významně ovlivněn zaokrouhlovacími chybami. Je však možné dokázat, že vlastní čísla blízkých matic jsou si také blízká.

## 24.3 Invariantní podprostory

**Definice 24.3.** Necht  $\mathcal{U}$  je podprostorem vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  a necht  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ . Jestliže

$$A(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U},$$

pak se  $\mathcal{U}$  nazývá **invariantní podprostor**  $A$  a **zúžení**  $A|_{\mathcal{U}}$  **transformace**  $A$  **na**  $\mathcal{U}$  definované předpisem

$$A|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \ni \mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u} \in \mathcal{U}$$

je také lineární transformace  $\mathcal{U}$ .

**Příklad 24.4.** Necht

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pak

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : [\mathbf{x}]_3 = 0\} \quad \text{a} \quad \mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : [\mathbf{x}]_1 = [\mathbf{x}]_2 = 0\}$$

jsou invariantní podprostory  $\mathbf{A}$ .

**Příklad 24.5.** Necht  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  a  $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ . Pak pro každý vektor  $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\lambda$  platí

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{A}^2 - \lambda\mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{o} = \mathbf{o},$$

takže  $\mathcal{N}_\lambda$  je invariantní podprostor  $\mathbf{A}$ . Jelikož  $\mathbf{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ , právě když  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ , platí

$$\mathbf{A}|_{\mathcal{N}_\lambda} = \lambda\mathbf{I}|_{\mathcal{N}_\lambda}.$$

**Věta 24.6.** Necht  $\mathcal{U}$  je invariantní podprostor reálné symetrické matice  $\mathbf{A}$  dimenze  $n$ . Pak

$$\mathcal{U}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^\top \mathbf{u} = 0 \text{ pro všechna } \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$$

je invariantní podprostor  $\mathcal{U}$ .

*Důkaz.* Necht  $\mathcal{U}$  je invariantní podprostor matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}^\perp$ , takže  $\mathbf{v}^\top \mathbf{u} = 0$ . Pak

$$(\mathbf{A}\mathbf{v})^\top \mathbf{u} = \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{v}^\top \mathbf{u} = 0.$$

Dokázat, že  $\mathcal{U}^\perp$  je vektorový prostor, ponecháváme jako cvičení. □

V dalším výkladu budeme potřebovat ještě jedno snadné pozorování.

**Lemma 24.7.** Necht  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{W}$  jsou invariantní podprostory  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ . Pak  $\mathcal{U} + \mathcal{W}$  a  $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$  jsou invariantní podprostory  $A$ .

*Důkaz.* Jestliže  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{W}$  jsou invariantní podprostory  $A$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  a  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ , pak  $\mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathcal{W}$  a

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathcal{U} + \mathcal{W}.$$

Obdobně se dokáže i druhé tvrzení. □

**Důsledek 24.8.** Necht  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  jsou vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$ . Pak

$$\mathcal{U} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle$$

i  $\mathcal{U}^\perp$  jsou invariantní podprostory  $\mathbf{A}$ .

**Poznámka.** I když vlastní vektory mohou být velmi citlivé na drobné změny matice, snadno se ověří, že obdobné tvrzení neplatí pro invariantní podprostory tvořené obalem vlastních vektorů izolovaného shluku vlastních čísel symetrické matice.

## 24.4 Spektrální rozklad reálné symetrické matice

**Věta 24.9.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je reálná symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice  $\mathbf{U}$  a diagonální matice  $\mathbf{D}$  tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}. \quad (24.4)$$

*Řádky  $\mathbf{r}_i^{\mathbf{U}}$  matice  $\mathbf{U}$  jsou transponované ortonormální vlastní vektory matice  $\mathbf{A}$  příslušné vlastním číslům  $\lambda_i = [\mathbf{D}]_{ii}$ .*

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{e}_1$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  řádu  $n$ . Pak  $\mathcal{E}_2 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp$  je podle věty 24.6 invariantní podprostor  $\mathbf{A}$ , takže podle věty 23.5 existuje vlastní vektor  $\mathbf{e}_2$  transformace  $\mathbf{A}|_{\mathcal{E}_2}$ , který je ovšem také vlastní vektor  $\mathbf{A}$  ortogonální k  $\mathbf{e}_1$ . Z  $\mathbf{e}_1$  a  $\mathbf{e}_2$  vytvoříme invariantní podprostory  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  a  $\mathcal{E}_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp \cap \langle \mathbf{e}_2 \rangle^\perp$ . Opakováním postupu pro  $\mathcal{E}_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle^\perp, \dots, \mathcal{E}_n = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle^\perp$  dostaneme postupně ortogonální vlastní vektory  $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$ . Sestavíme-li z normalizovaných vlastních vektorů matici  $\mathbf{U}^\top = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$ , dostaneme

$$\mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^\top = \mathbf{U} [\mathbf{A} \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A} \mathbf{e}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^\top \end{bmatrix} [\lambda_1 \mathbf{e}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

odkud po přenásobení  $\mathbf{U}^\top$  zleva a  $\mathbf{U}$  zprava dostaneme s použitím  $\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^{-1}$  rovnost (24.4).  $\square$

**Příklad 24.10.** Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pak  $\mathbf{A}$  má vlastní čísla  $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$ , kterým odpovídají vlastní vektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Jelikož

$$\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_1} = \sqrt{2}$$

a

$$\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{\mathbf{e}_2^\top \mathbf{e}_2} = \sqrt{2},$$

můžeme sestavit z normalizovaných vlastních vektorů matici

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top / \|\mathbf{e}_1\| \\ \mathbf{e}_2^\top / \|\mathbf{e}_2\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

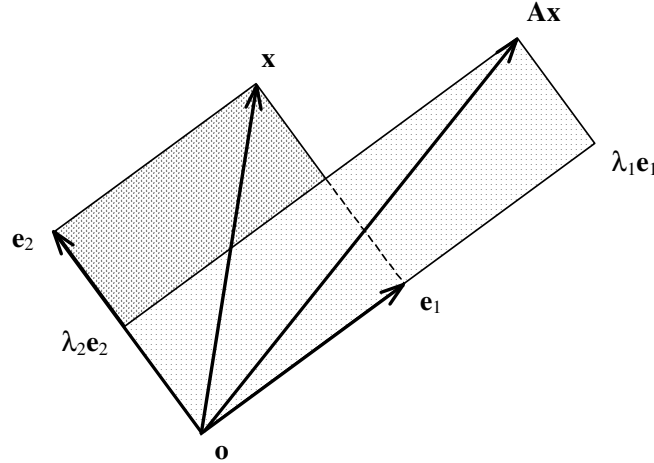
## 24.5 Geometrie spektrálního rozkladu

Jelikož z vlastních vektorů symetrické matice  $\mathbf{A}$  lze sestavit ortonormální bázi prostoru sloupcových vektorů stejné dimenze jako  $\mathbf{A}$ , lze si účinek  $\mathbf{A}$  představit tak, že roztahuje, zkracuje a případně překlápí složku každého vektoru rovnoběžnou s vlastním vektorem  $\mathbf{e}_i$  v závislosti na jeho vlastním čísle  $\lambda_i$ , tak jako na obrázku 24.1. Odtud plyne, že pro obsah  $P'$  obrazu libovolného obrazce o původním obsahu  $P$  při zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$  bude platit

$$P' = |\det \mathbf{A}|P.$$

Kružnice se přitom zobrazí na elipsu s hlavními osami  $|\lambda_1|, |\lambda_2|$  tak jako na obrázku 24.2.

Obdobné úvahy platí i pro prostorové útvary a lze jim dát smysl i v prostorech vyšší dimenze.

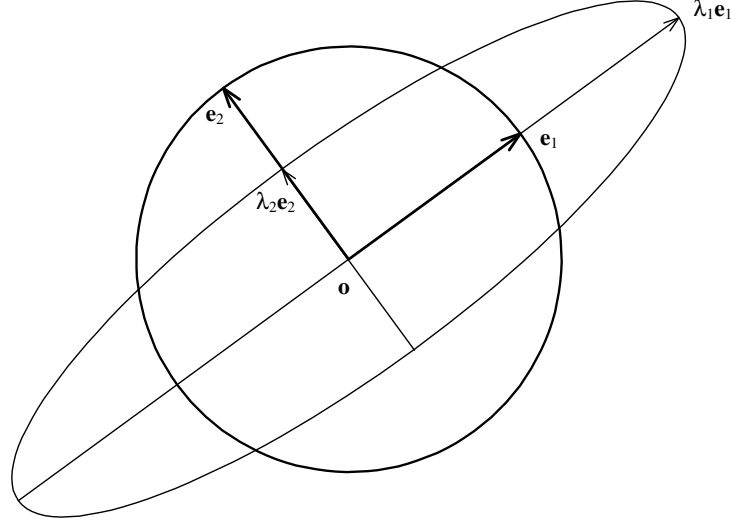


Obr. 24.1: Účinek zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ .

## 24.6 Extremální vlastnosti vlastních čísel

Jelikož pro jednotkové vektory platí  $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1$ , lze z předchozích úvah, zejména z obrázku 24.2, očekávat, že extrémní hodnoty výrazu  $\mathbf{x}^\top \mathbf{Ax}$  pro  $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1$  bude v případě symetrické matice dosaženo v příslušných vlastních vektorech. Dokážeme si toto tvrzení konkrétněji.



Obr. 24.2: Obsah obrazu kruhu při zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ .

**Věta 24.11.** *Nechť  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  jsou vzestupně uspořádaná vlastní čísla symetrické matice  $\mathbf{A}$ . Pak*

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1} \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} \quad \text{a} \quad \lambda_n = \max_{\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1} \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax}.$$

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{DU}$  je spektrální rozklad matice  $\mathbf{A}$ . Pak platí

$$(\mathbf{Ux})^\top \mathbf{Ux} = \mathbf{x}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{Ux} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x},$$

takže

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1} \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} &= \max_{\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1} \mathbf{x}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{DUx} = \max\{(\mathbf{Ux})^\top \mathbf{DUx} : (\mathbf{Ux})^\top \mathbf{Ux} = 1\} = \\ &= \max_{\mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 1} \mathbf{y}^\top \mathbf{Dy} = \max_{\mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 1} \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \max_{\mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 1} \lambda_n \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = \lambda_n. \end{aligned}$$

Přímým výpočtem si lze ověřit, že maxima je dosaženo ve vlastním vektoru příslušném k  $\lambda_n$ .

Obdobně se dokáže i tvrzení o minimu. □

## Příklady k procvičení

24.1. a) Nechť  $\mathbf{A}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$  značí matice z příkladu 24.4 a její invariantní podprostory. Najděte matici zúžení  $\mathbf{A}|_{\mathcal{U}}$  v bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ ,

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Najděte  $\sigma(\mathbf{A}|_{\mathcal{U}})$  a  $\sigma(\mathbf{A}|_{\mathcal{V}})$ .

c) Najděte spektrální rozklad matice  $\mathbf{A}$ .

24.2. Tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

lze považovat za zobrazení, které každému vektoru  $\mathbf{n}$  přiřazuje vektor  $\mathbf{T}\mathbf{n}$ , který určuje sílu působící na úsečku délky  $d = \sqrt{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}}$  určenou normálou  $\mathbf{n}$ . Najděte vzorec pro maximální a minimální sílu působící na jednotkovou úsečku.

## Kapitola 25

# Důsledky spektrálního rozkladu

### 25.1 Lokalizace spektra pomocí kongruence

Věta o spektrálním rozkladu 24.9 říká, že *každá symetrická matice  $A$  je současně podobná a kongruentní s diagonální maticí  $D$  mající na diagonále spektrum  $\sigma(A)$  matice  $A$* . Jelikož podobnost zachovává spektrum matice, kongruence zachovává znaménka diagonálních prvků a pozitivní definitnost či semidefinitnost diagonální matice poznáme podle diagonálních prvků, platí, že *symetrická matice  $A$  je pozitivně definitní (semidefinitní), právě když má kladné (nezáporné) spektrum  $\sigma(A)$* .

Větu o spektrálním rozkladu můžeme použít též jako základní teoretický nástroj k odvození postupu pro určení počtu vlastních čísel symetrické matice v daném intervalu nebo na polopřímce. Postupem uvedeným v článku 17.3 totiž můžeme najít poměrně snadno diagonální matici  $E$ , která je kongruentní s maticí  $D$  ze spektrálního rozkladu. Podle zákona setrvačnosti kvadratických forem 17.7 však mají matice  $D$  a  $E$  stejný počet kladných, záporných a nulových diagonálních prvků, takže podle diagonály  $E$  můžeme určit počet kladných, záporných a nulových prvků  $\sigma(A)$ .

Jelikož z  $Ae = \lambda e$  plyne  $(A - cI)e = (\lambda - c)e$ , můžeme použitím téhož postupu na matici  $A - cI$  zjistit počet vlastních čísel  $A$ , která jsou větší než  $c$ , menší než  $c$ , nebo se rovnají  $c$ . Jednoduchou modifikací tohoto postupu můžeme určit, kolik vlastních čísel je v daném intervalu.

**Příklad 25.1.** Určete, zda má matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nějaké vlastní číslo větší než 2.

*Řešení.* Matice  $A$  má vlastní číslo větší než 2 právě tehdy, když má matice  $A - 2I$

nějaké kladné vlastní číslo. Postupnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + \frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 + \frac{1}{2}s_1} \\ &\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3 + 2s_2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jelikož  $0 \in \sigma(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ , platí  $2 \in \sigma(\mathbf{A})$ , avšak žádné vlastní číslo  $\mathbf{A}$  není větší než 2. ▲

## 25.2 Sylvesterovo kritérium pozitivní definitnosti

Spojíme-li pozorování předchozích odstavců s našimi znalostmi determinantů a kongruence, můžeme dokázat podmínku pro pozitivní definitnost matice pomocí determinantů.

**Věta 25.2 (Sylvester).** *Nechť  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  je čtvercová matice a necht*

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Pak matice  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní, právě když*

$$\det \mathbf{A}_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Důkaz.* Je-li matice  $\mathbf{A}$  pozitivně definitní, pak je pozitivně definitní i každá její submatice  $\mathbf{A}_i$ , neboť pro libovolný nenulový vektor  $\mathbf{y}$  řádu  $i$  a

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{n-i} \end{bmatrix}$$

platí  $0 < \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_i \mathbf{y}$ . Pozitivně definitní matice však mají podle odstavce 25.1 kladná vlastní čísla, takže i jejich součin, rovnající se  $\det \mathbf{A}_i$ , je kladný.

Nechť obráceně  $\det \mathbf{A}_i > 0$  pro  $i = 1, \dots, n$ . Pak speciálně  $a_{11} = \det \mathbf{A}_1 > 0$ , takže stejně jako v důkazu věty 17.1 najdeme matici  $\mathbf{L}_1$  tak, že platí

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{L}_1^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_1 \end{bmatrix}.$$

Nyní si připomeňme, že  $\mathbf{L}_1$  lze zapsat obdobným předpisem jako (7.3) pomocí součinu matic, jejichž násobením se realizuje přičtení násobku prvního řádku nebo sloupce násobené matice k jinému řádku nebo sloupci téže matice. To však znamená, že násobení maticí  $\mathbf{L}_1$  zleva ani násobení maticí  $\mathbf{L}_1^\top$  zprava nemění determinanty matic  $\mathbf{A}_i$ . Speciálně odtud vyplývá, že pro prvek  $a_{22}^1$  v levém horním rohu matice  $\bar{\mathbf{A}}_1$  platí

$$\det \mathbf{A}_2 = a_{11}a_{22}^1 > 0,$$

takže  $a_{22}^1$  je kladný. Opakováním tohoto postupu nakonec lze ukázat, že matice  $\mathbf{A}$  je kongruentní s diagonální maticí s kladnými čísly na diagonále, tedy že  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní.  $\square$

**Poznámka.** Pro Sylvesterovo kritérium platí to, co bylo řečeno o determinantech obecně. Pro rozhodnutí o pozitivní definitnosti větší matice je vhodnější použít  $\mathbf{LDL}^\top$  rozkladu (viz článek 17.2).

## 25.3 Skalární funkce symetrické matice

V článku 13.7 jsme si ukázali, že do jakéhokoliv mnohočlenu můžeme „dosadit“ lineární transformace tak, že výsledek nezáleží na konkrétním zápisu mnohočlenu, takže mnohočleny lineární transformace můžeme upravovat obdobně jako skalární mnohočleny. Pro mnohé aplikace je však důležité umět dosazovat alespoň symetrické matice do funkcí, které jsou obecnější než mnohočlen, ovšem tak, aby byla splněna pravidla, která jsou nezbytná k počítání s maticovými funkcemi.

**Definice 25.3.** Nechť  $\mathbf{A}$  je symetrická matice řádu  $n$  a nechť  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  je množina všech reálných funkcí definovaných na jejím spektru  $\sigma(\mathbf{A})$ . Zobrazení, které každé funkci  $f \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  přiřazuje symetrickou matici  $f(\mathbf{A})$  řádu  $n$ , definuje **skalární funkce matice  $\mathbf{A}$** , jestliže pro libovolné funkce  $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$  a identitu  $id_{\mathbb{R}}$  platí:

$$(F1) \quad id_{\mathbb{R}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

$$(F2) \quad (f + g)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}).$$

$$(F3) \quad (f \cdot g)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) \cdot g(\mathbf{A}).$$

$$(F4) \quad \text{Jestliže } f(x) \geq x \text{ pro } x \in \sigma(\mathbf{A}), \text{ pak } f(\mathbf{A}) \text{ je pozitivně semidefinitní.}$$

Snadno se ověří, že skalární funkce diagonální matice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

můžeme definovat předpisem

$$f(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

který má smysl pro libovolnou reálnou funkci  $f$  definovanou na  $\sigma(\mathbf{D}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Pro libovolnou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  se spektrálním rozkladem  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}$  pak předpis

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{U}^\top f(\mathbf{D}) \mathbf{U} \quad (25.1)$$

definuje skalární funkci matice  $\mathbf{A}$  pro každou reálnou funkci definovanou na  $\sigma(\mathbf{A})$ . Například pro funkce  $f$  a  $g$  definované na  $\sigma(\mathbf{A})$  platí

$$(f \cdot g)(\mathbf{A}) = \mathbf{U}^\top (f \cdot g)(\mathbf{D}) \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top f(\mathbf{D}) g(\mathbf{D}) \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top f(\mathbf{D}) \mathbf{U} \mathbf{U}^\top g(\mathbf{D}) \mathbf{U} = f(\mathbf{A}) g(\mathbf{A}).$$

Porovnáme-li (25.1) s větou o spektrálním rozkladu 24.9, snadno zjistíme, že  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ , právě když  $f(\lambda) \in \sigma(f(\mathbf{A}))$ , což se dá vyjádřit stručně ve tvaru

$$\sigma(f(\mathbf{A})) = f(\sigma(\mathbf{A})). \quad (25.2)$$

**Příklad 25.4.** Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

vypočtete  $\sqrt{\mathbf{A}}$ .

*Řešení.* Podle příkladu 24.10 platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U},$$

kde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{A}} &= \mathbf{U}^\top \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Přímým výpočtem si můžeme ověřit, že

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

▲

## 25.4 Polární rozklad

I když spektrální rozklad platí jen pro symetrické matice, můžeme s jeho pomocí lépe pochopit i obecnější matice.

**Věta 25.5.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je libovolná čtvercová matice. Pak existuje symetrická pozitivně semidefinitní matice  $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}$  a ortogonální matice  $\mathbf{U}$  tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{B}. \quad (25.3)$$

Rozklad (25.3) se nazývá **polární rozklad**.

*Důkaz.* Omezíme se pro jednoduchost jen na případ regulární matice  $\mathbf{A}$ . Kdyby rozklad (25.3) existoval, pak by platilo

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{U}^\top \mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{B}^2.$$

Matice  $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  je pozitivně definitní, neboť pomocí regularity  $\mathbf{A}$  dostaneme pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , že

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{B}^2 \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 > 0.$$

Podle úvahy v článku 25.1 má tedy  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  kladné spektrum, takže existuje odmocnina z  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  a

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}.$$

Z (25.3) dostaneme

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1},$$

odkud

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\top = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-\top}\mathbf{A}^\top = \mathbf{I},$$

takže  $\mathbf{U}$  je ortogonální. Z (25.2) také plyne, že  $\mathbf{B}$  je pozitivně definitní. □

**Poznámka.** Má-li matice  $\mathbf{A}$  tak malé prvky, že prvky  $\mathbf{A}^2$  jsou zanedbatelné ve srovnání s  $\mathbf{A}$ , pak můžeme najít **přibližný polární rozklad** matice  $\mathbf{I} + \mathbf{A}$  pomocí

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} \doteq \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \right) \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) \right).$$

Matice  $\mathbf{B} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)$  je zřejmě symetrická, pozitivně definitní, zatímco  $\mathbf{U} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)$  je, až na zanedbatelnou chybu, ortogonální, neboť

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}) \right) \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) \right) = \mathbf{I} - \frac{1}{4}(\mathbf{A}^\top - \mathbf{A})^2 \doteq \mathbf{I}.$$

Přibližný polární rozklad se používá například v lineární pružnosti k definici tenzoru deformace. Využívá se přitom toho, že matice  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)$ , která charakterizuje deformaci tělesa vzhledem k referenční konfiguraci, závisí lineárně na  $\mathbf{A}$ .

## 25.5 Geometrický význam determinantu

Porovnáním věty o polárním rozkladu 25.5 s článkem 25.3 vyplývá, že zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  definované *libovolnou* čtvercovou maticí změní libovolnou plochu  $P$  na plochu

$$P' = |\det \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}| P. \quad (25.4)$$

Pomocí věty o součinu determinantů 21.8 a o determinantu transponované matice 22.8 dostaneme

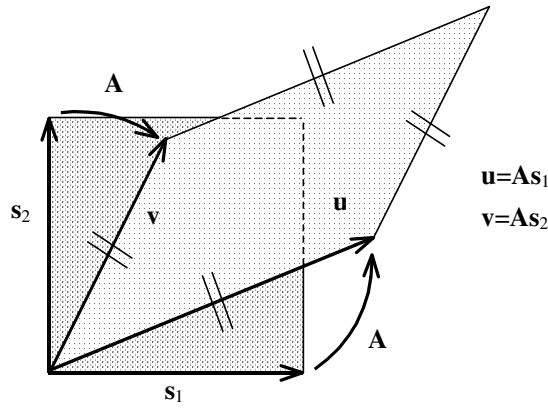
$$\begin{aligned} |\det \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}|^2 &= |\det \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} \det \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}| = |\det \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}| = \\ &= |\det \mathbf{A}^\top \mathbf{A}| = |\det \mathbf{A}^\top \det \mathbf{A}| = |\det \mathbf{A}|^2, \end{aligned}$$

odkud po dosazení do (25.4) vychází

$$P' = |\det \mathbf{A}| P.$$

**Příklad 25.6.** Najděte vzorec pro plochu  $P$  rovnoběžníka určeného vektory

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$



Obr. 25.1: Plocha rovnoběžníka.

*Řešení.* Povšimněme si napřed, že

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rovnoběžník určený vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  je tedy možno považovat za obraz jednotkového čtverce určeného vektory standardní báze

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



při zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  s maticí

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Platí tedy

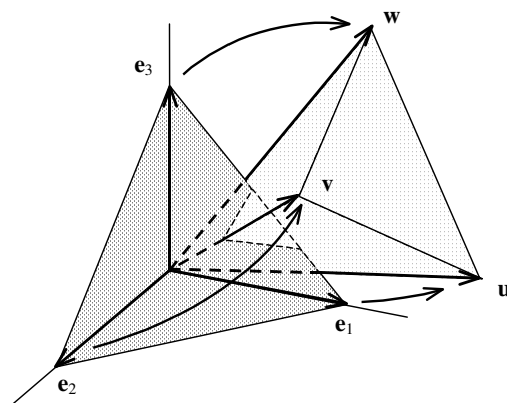
$$P = |\det \mathbf{A}| \cdot 1 = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \right|.$$

▲

**Příklad 25.7.** Určete objem  $V$  čtyřstěnu s vrcholy určenými polohovými vektory  $\mathbf{o}$  a

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

tak jako na obrázku 25.2.



Obr. 25.2: Objem čtyřstěnu.

*Řešení.* Objem čtyřstěnu určeného nulovým vektorem a jednotkovými vektory standardní báze je roven  $1/6$ . Čtyřstěn s vrcholy  $\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  můžeme považovat za obraz čtyřstěnu určeného vrcholem a jednotkovými vektory standardní báze při zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  s maticí

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}],$$

takže

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right|.$$

▲

## 25.6 Singulární rozklad a podmíněnost matice

Další důležitý rozklad je jednoduchým důsledkem vět o polárním a spektrálním rozkladu.

**Věta 25.8.** *Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je libovolná reálná matice. Pak existují ortogonální matice  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a diagonální matice  $\mathbf{S}$ , na jejíž diagonále jsou vlastní čísla matice  $\sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}$  (pro  $m \geq n$ ) nebo  $\sqrt{\mathbf{A} \mathbf{A}^\top}$  (pro  $n \geq m$ ) tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V}. \quad (25.5)$$

Diagonální matici zde chápeme ve zobecněném smyslu, takže předpokládáme, že  $\mathbf{S}$  má jeden z následujících tvarů:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}}^{m=n}, \quad \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{m>n}, \quad \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{m<n},$$

Rozklad (25.5) se nazývá **singulární rozklad** a vlastní čísla matice  $\sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}$  (respektive  $\sqrt{\mathbf{A} \mathbf{A}^\top}$  pro  $n < m$ ) se nazývají **singulární čísla matice  $\mathbf{A}$** .

*Důkaz.* Pro  $m = n$ : Podle věty o polárním rozkladu 25.5 existuje ortogonální matice  $\mathbf{W}$  a pozitivně definitní matice  $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}}$  tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{B}. \quad (25.6)$$

Podle věty o spektrálním rozkladu 24.9 existuje ortogonální matice  $\mathbf{V}$  tak, že pro matici  $\mathbf{S}$  se singulárními čísly matice  $\mathbf{A}$  na diagonále platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^\top \mathbf{S} \mathbf{V}.$$

Nahradíme-li tímto výrazem  $\mathbf{B}$  v (25.6) a označíme-li si  $\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{V}^\top$ , dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{V}^\top \mathbf{S} \mathbf{V} = (\mathbf{W} \mathbf{V}^\top)^\top \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V}$$

a

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{V}^\top \mathbf{W} \mathbf{V}^\top = \mathbf{I}.$$

Pro  $m > n$ : Označme  $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Pak dle předchozího důkazu existuje singulární rozklad

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}}^\top \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{V}}$$

matice  $\tilde{\mathbf{A}}$ , kde matice  $\tilde{\mathbf{S}}$  má na diagonále vlastní čísla matice

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Je zřejmé, že matice  $\tilde{\mathbf{B}}$  má alespoň  $m - n$  vlastních čísel nulových a můžeme označit bloky matic

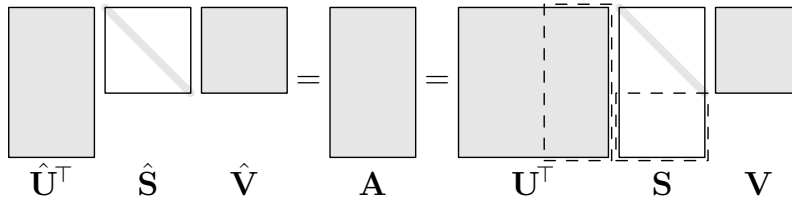
$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b & \mathbf{V}_c \end{bmatrix}, \quad \text{kde } \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Konečně

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}}^\top \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Pro  $m < n$  je matice  $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n > m$  a existuje tedy její singulární rozklad

Je zřejmé, že  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V}$ , kde  $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{U}}$  a  $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}^\top$ . □



Obr. 25.3: Redukovaný singulární rozklad ( $m > n$ ).

**Poznámka.** V pravé části obrázku 25.3 je znázorněn výše výše zmíněný singulární rozklad matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pro  $m > n$ . Je patrné, že při násobení  $\mathbf{U}^\top \mathbf{S}$  je zbytečné znát posledních  $m - n$  sloupců matice  $\mathbf{U}^\top$ , které by zbytečně zabíraly paměť. Proto se používá pojem *redukovaný singulární rozklad*

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}}^\top \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{V}},$$

kde matice  $\mathbf{U}$ , (respektive matice  $\mathbf{V}$  v případě  $m < n$ ) není čtvercová, viz levá část obrázku 25.3. Matici  $\mathbf{A}$  můžeme často aproximovat součinem mnohem menších matic, když použijeme jen části matic singulárního rozkladu, které přísluší relativně velkým diagonálním prvkům matice  $\hat{\mathbf{S}}$ . Je to jedno z pozorování, které umožnilo úspěch vyhledávače Google.

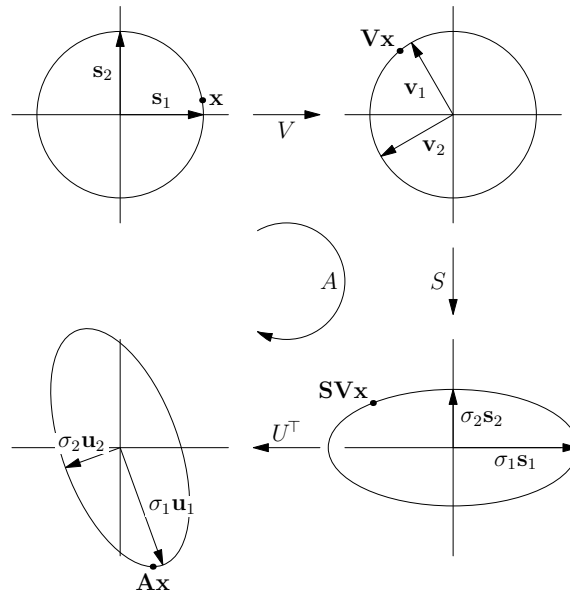
Věta o singulárním rozkladu říká, že lineární zobrazení

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{x}$$

s libovolnou čtvercovou maticí  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si můžeme představit jako složení tří zobrazení. První a poslední zobrazení je násobení ortonormální maticí  $\mathbf{V}$ , respektive  $\mathbf{U}^\top$ . Pro matici  $\mathbf{U}^\top$  to znamená, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{s}_i \mapsto \mathbf{U}^\top \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$$

kde  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)$  je standartní báze v  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_i$  jsou souřadnice vektoru  $x$  ve standartní bázi a vektory  $\mathbf{u}_i$  jsou řádky matice  $\mathbf{U}$ , které si lze představit jako nové bazové vektory. Analogický geometrický význam má zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{V}\mathbf{x}$ . Geometricky lze toto zobrazení chápat jako otočení a změnu směru některých bazových vektorů za opačný (zrcadlení). Zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}\mathbf{x}$  znamená roztažení/zkrácení ve směru souřadnicových os. Uvědomme si, že zobrazení dané ortonormální maticí  $(\mathbf{V}, \mathbf{U}^\top)$  zobrazí jednotkovou sféru  $\|\mathbf{x}\| = 1$  na sebe sama a násobení maticí  $\mathbf{S}$  zobrazí jednotkovou sféru na  $n$ -dimenzionální elipsu. Jelikož SVD rozklad existuje ke každé matici  $\mathbf{A}$ , tak jakékoli lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$  zobrazí jednotkovou sféru na  $n$ -dimenzionální elipsu, viz obrázek 25.4.



Obr. 25.4: Geometrická interpretace SVD rozkladu v  $\mathbb{R}^2$ .

Právě singulární čísla tedy definují změnu délky vektorů. Z toho vyplývá, že matice je singulární, právě když nejmenší singulární číslo  $\sigma_{\min}$  je nulové. Z těchto úvah je také patrné, že nenulová matice je blízká singulární matici, právě když je  $\sigma_{\min}$  mnohem menší než největší singulární číslo  $\sigma_{\max}$ . Pro regulární matici  $\mathbf{A}$  charakterizuje číslo

$$\kappa(\mathbf{A}) = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} \geq 1$$

míru regularity matice  $\mathbf{A}$  a nazývá se **číslo podmíněnosti matice  $\mathbf{A}$** . Číslo podmíněnosti lze vypočítat pomocí numerických metod.

**Poznámka.** Jelikož matice je singulární, právě když je její determinant nulový, mohlo by se zdát, že kvantitativní mírou regularity matice by mohl být její determinant. Příklad matice

$$\mathbf{A} = 0.1 \mathbf{I}_{100},$$

která má inverzi  $\mathbf{A}^{-1} = 10 \mathbf{I}_{100}$  a  $\det \mathbf{A} = 10^{-100}$  však ukazuje, že **determinant není vhodná kvantitativní míra regularity matice!**

## 25.7 Pseudoinverzní matice

I když k singulární čtvercové matici  $\mathbf{A}$  neexistuje inverzní matice, můžeme pomocí singulárního rozkladu 25.8

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix},$$

definovat matici

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}^\top \mathbf{S}^+ \mathbf{U},$$

kde  $\mathbf{S}^+$  je diagonální matice s diagonálními prvky  $\sigma_i^+$  splňujícími  $\sigma_i^+ = \sigma_i^{-1}$  pro  $\sigma_i \neq 0$  a  $\sigma_i^+ = 0$  pro  $\sigma_i = 0$ , která v některém smyslu nahrazuje neexistující inverzní matici. Snadno se ověří, že takto definovaná matice splňuje **Moore–Penroseovy podmínky**:

$$(\text{MP1}) \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$(\text{MP2}) \quad \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$$

$$(\text{MP3}) \quad (\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^\top = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$$

$$(\text{MP4}) \quad (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$$

Je-li  $\mathbf{A}$  čtvercová matice, pak

$$\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$$

splňuje normálovou rovnici

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_{LS} = \mathbf{V}^\top \mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{U}^\top \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{V}^\top \mathbf{S}^+ \mathbf{U} \mathbf{b} = \mathbf{V}^\top \mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{b} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b},$$

takže pro libovolný vektor  $\mathbf{h}$  platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{x}_{LS} + \mathbf{h}) - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{A} \mathbf{x}_{LS} - \mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{h}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_{LS} - \mathbf{A}^\top \mathbf{b}) + \|\mathbf{A} \mathbf{h}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{A} \mathbf{x}_{LS} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{h}\|^2 \geq \|\mathbf{A} \mathbf{x}_{LS} - \mathbf{b}\|^2. \end{aligned}$$

Vektor  $\mathbf{x}_{LS}$  tedy minimalizuje  $\|\mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{b}\|$ , čili řeší rovnici

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{25.7}$$

ve smyslu nejmenších čtverců. Jelikož poslední nerovnost přejde v rovnost jen když je splněno  $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{o}$ , lze libovolné řešení rovnice (25.7) ve smyslu nejmenších čtverců zapsat ve tvaru  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{LS} + \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ . Z (MP2) a (MP3) dále dostaneme

$$\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^\top \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}^+ \mathbf{A}^+ \mathbf{b},$$

tedy  $\mathbf{x}_{LS}$  patří do oboru hodnot  $\mathcal{H}(\mathbf{A}^\top)$  matice  $\mathbf{A}^\top$ . Libovolný vektor  $\mathbf{n}$  z nulového prostoru  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  matice  $\mathbf{A}$  je však podle věty 18.7 ortogonální k  $\mathcal{H}(\mathbf{A}^\top)$  a tedy i k  $\mathbf{x}_{LS}$ . Pro vektor  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{LS} + \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$  tedy platí

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_{LS} + \mathbf{n}\|^2 = \|\mathbf{x}_{LS}\|^2 + \|\mathbf{n}\|^2 \geq \|\mathbf{x}_{LS}\|^2,$$

takže vektor  $\mathbf{x}_{LS}$  nejen řeší rovnici (25.7) ve smyslu nejmenších čtverců, ale ***má ze všech řešení nejmenší normu.***

## Kapitola 26

# Jordanova forma matice

Jak víme ze 14. kapitoly, matici můžeme považovat za reprezentaci lineární transformace prostoru konečné dimenze v dané bázi a matice téže transformace v různých bázích jsou si podobné. Vzniká tak otázka, na jaký tvar lze vhodným výběrem báze redukovat matici lineární transformace. Odpověď je jednoduchá v případě, že existuje báze prostoru sestávající z vlastních vektorů, takže dostaneme diagonální matici. V této kapitole se budeme zabývat obecným případem. Vzhledem k tomu, že vlastní čísla reálné matice mohou být komplexní, budeme do konce kapitoly uvažovat výhradně komplexní matice a vektorové prostory.

### 26.1 Jordanova forma matice s jedním vlastním vektorem

V článku 23.3 jsme si dokázali, že každá matice má alespoň jeden vlastní vektor. Víc jich mít nemusí. Například matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

má jediné vlastní číslo  $\lambda = 2$ , avšak soustava

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{o}$$

má, až na skalární násobek, jediné řešení

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ukazuje se, že vektor  $\mathbf{e}_1$  lze doplnit vektory  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  do báze, v níž má lineární zobrazení  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  speciální tvar. K jejich nalezení si povšimneme, že existuje  $\mathbf{e}_2$  tak, že

$$\mathbf{e}_1 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{e}_2.$$

V našem případě najdeme  $\mathbf{e}_2$  řešením

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

odkud

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podobně najdeme vektor

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

který splňuje

$$\mathbf{e}_2 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{e}_3.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

takže matice zobrazení  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  v bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  je dána předpisem

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podobným způsobem lze dokázat, že je-li  $\mathbf{A}$  libovolná čtvercová matice s jediným vlastním vektorem  $\mathbf{e}_1$  odpovídajícím vlastnímu číslu  $\lambda$ , pak  $\mathbf{e}_1$  lze doplnit do báze tak, že zobrazení  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  má v  $\mathcal{E}$  matici

$$\mathbf{J}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Matice  $\mathbf{J}_{\lambda}$  se nazývá **Jordanův blok** příslušný k vlastnímu číslu  $\lambda$ . Připomeňme, že za Jordanův blok řádu jedna považujeme matici řádu jedna s vlastním číslem na diagonále.



## 26.2 Jordanova forma obecné matice

Je-li  $\mathbf{A}$  libovolná čtvercová matice, pak lze dokázat, i když to není snadné, že existují nezávislé vlastní vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  příslušné k vlastním číslům  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , které lze v případě potřeby doplnit do báze  $\mathcal{E}$  vektory  $\mathbf{e}_{il}$  splňujícími  $\mathbf{e}_{il} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^l \mathbf{e}_i$ , a to tak, že zobrazení  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$  má v  $\mathcal{E}$  blokově diagonální matici s Jordanovými bloky  $\mathbf{J}_{\lambda_i}$  na diagonále. Platí tedy následující věta.

**Věta 26.1.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je libovolná čtvercová matice, která má  $k$  nezávislých vlastních vektorů příslušných k vlastním číslům  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Pak existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T},$$

kde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda_1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_{\lambda_2} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Počet Jordanových bloků  $\mathbf{J}_{\lambda}$  matice  $\mathbf{A}$  příslušných  $\lambda$  je roven počtu nezávislých vlastních vektorů příslušných k  $\lambda$  a nazývá se **geometrická násobnost vlastního čísla**  $\lambda$ . Geometrická násobnost je také rovna defektu matice  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ . Z naší definice je zřejmé, že algebraická násobnost jakéhokoliv vlastního čísla není menší než jeho geometrická násobnost.

Struktura Jordanovy formy matice je určena defekty  $d_{il} = d(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^l$ . K pochopení pravidla si připomeňme, že podobné matice mají stejný defekt a že defekt blokově diagonální matice je roven součtu defektů jejích diagonálních bloků. Stačí tedy sledovat defekty mocnin jednoho Jordanova bloku  $\mathbf{N} = \mathbf{J}_{\lambda_i} - \lambda_i \mathbf{I}$  řádu  $m$  matice  $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ , který má tvar

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Násobení maticí  $\mathbf{N}$  si můžeme představit tak, že se vynechá první řádek, ostatní řádky se posunou nahoru a poslední řádek se vyplní nulami. Proto

$$\mathbf{N}^p = \mathbf{O}$$

pro  $p \geq m$  a pro  $p < m$  platí, že defekt matice  $\mathbf{N}^p$  je právě o jedničku menší než defekt matice  $\mathbf{N}^{p+1}$ . Zavedeme-li tedy označení  $w_{i1} = d_{i1}, w_{i2} = d_{i2} - d_{i1}, w_{i3} = d_{i3} - d_{i2}, \dots$ , pak  $w_{il}$  bude celkový počet Jordanových bloků řádu nejméně  $l$  s vlastním číslem  $\lambda_i$ . Čísla  $w_{il}$  se nazývají **Weyrovy charakteristiky** matice podle

vynikajícího profesora matematiky na české technice Eduarda Weyra (1852-1903).  
Například nenulové Weyrovy charakteristiky matice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_1 = 2$  jsou  $w_{11} = 2, w_{12} = 2$ , což odpovídá tomu, že matice má dva Jordanovy bloky řádu nejméně jedna a dva Jordanovy bloky řádu nejméně 2.

## 26.3 Mocnina matice

Jako příklad použití Jordanovy formy se budeme zabývat studiem mocnin matice. Začneme Jordanovým blokem

$$\mathbf{J}_\lambda = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{N}$$

řádu  $m$ , kde  $\mathbf{N} = \mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}$  je, jako v odstavci 26.2, matice s nulovými prvky kromě jedniček nad diagonálou. Pak

$$\mathbf{J}_\lambda^2 = (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N})^2 = \lambda^2 \mathbf{I} + 2\lambda \mathbf{N} + \mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Podobně

$$\mathbf{J}_\lambda^3 = (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N})^3 = \lambda^3 \mathbf{I} + 3\lambda^2 \mathbf{N} + 3\lambda \mathbf{N}^2 + \mathbf{N}^3.$$

Obecněji dostaneme s použitím binomické věty

$$\mathbf{J}_\lambda^k = (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N})^k = \lambda^k \mathbf{I} + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} \mathbf{N} + \dots + \binom{k}{k} \mathbf{N}^k,$$

což můžeme pomocí  $\mathbf{N}^m = \mathbf{O}$  upravit pro  $k > m$  na tvar

$$\mathbf{J}_\lambda^k = \lambda^k \mathbf{I} + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} \mathbf{N} + \dots + \binom{k}{m-1} \lambda^{k-m+1} \mathbf{N}^{m-1}.$$

Dále si všimněme, že platí

$$\left| \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \right| = \frac{k(k-1) \dots (k-i+1)}{1 \dots i} |\lambda|^{k-i} \leq k^i |\lambda|^{k-i},$$

a že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^i \lambda^{k-i} = 0,$$

právě když  $|\lambda| < 1$ . Prvky matice  $\mathbf{J}_\lambda^k$  proto konvergují k nule pro  $k \rightarrow \infty$ , právě když  $|\lambda| < 1$ . Je-li však  $\mathbf{A}$  libovolná čtvercová matice, pak existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  a blokově diagonální matice  $\mathbf{J}$  s Jordanovými bloky na diagonále tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}.$$

Jelikož

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T} \dots \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}^k \mathbf{T}$$

a

$$\mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda_1}^k & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_{\lambda_2}^k & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_{\lambda_p}^k \end{bmatrix},$$

dostáváme odtud tvrzení, že prvky libovolné matice  $\mathbf{A}^k$  konvergují k nule pro  $k \rightarrow \infty$ , právě když **spektrální poloměr**

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$$

je menší než 1. Toto tvrzení je důležité pro studium iteračních procesů.

## 26.4 Význam Jordanovy formy

Jordanova forma má velký význam pro teorii, neboť umožňuje redukovat úlohy s obecnými maticemi na úlohy s Jordanovými bloky, jak jsme to viděli v odstavci 26.3. Umožňuje nám například definovat skalární funkce libovolné matice. Početní využití Jordanovy formy je však velmi omezené, neboť je numericky nestabilní. Například matice

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 - \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 2 + \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

má pro libovolné  $\varepsilon \neq 0$  tři různá vlastní čísla, takže její Jordanův tvar je

$$\mathbf{J}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

zatímco

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Část VI

Analytická geometrie

## Kapitola 27

# Přímky, roviny a metrické úlohy

V závěrečných kapitolách si ukážeme použití aparátu lineární algebry k formulaci a řešení úloh analytické geometrie, což je oblast matematiky, která se zabývá studiem geometrických objektů charakterizovaných číselnými množinami. Budeme přitom vycházet z vlastností trojrozměrného eukleidovského prostoru  $\mathcal{E}_3$ , jehož základní vlastnosti budeme považovat za známé.

### 27.1 Eukleidovský prostor

Při studiu geometrie lze vystačit s vektorovými prostory, jak jsme se ostatně mohli přesvědčit při odvození vzorců pro objemy těles v 25. kapitole. Ukazuje se však, že pro řešení některých úloh je vhodnější uvažovat algebraické struktury s vektory i body.

**Definice 27.1.** Necht je dán vektorový prostor  $\mathcal{V}$  se skalárním součinem, množina bodů  $\mathcal{E}$  a zobrazení

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}.$$

Množina  $\mathcal{E}$  se nazývá *eukleidovský bodový prostor se zaměřením*  $\mathcal{V}$ , jestliže platí:

(A1) Ke každému  $A \in \mathcal{E}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  existuje jediný bod  $B \in \mathcal{E}$  tak, že

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}.$$

(A2) Pro libovolné body  $A, B, C \in \mathcal{E}$  platí

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Slovo „eukleidovský“ připomíná řeckého matematika Eukleida ze 4. století před naším letopočtem, který v třinácti dílech Základů rozpracoval deduktivní metodu řešení problémů.

Z axiomů lze odvodit rovnosti, které odpovídají naší intuici. Například

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{o},$$

neboť pro daný bod  $A \in \mathcal{E}$  existuje podle (A1) k libovolnému  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  bod  $B \in \mathcal{E}$  tak, že  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ , a z komutativity operace sčítání vektorů a (A2) plyne, že

$$\mathbf{v} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{v}.$$

Obdobně lze dokázat, že pro libovolné body  $A, B \in \mathcal{E}$  platí

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

V následujícím výkladu budeme uvažovat trojrozměrný eukleidovský bodový prostor  $\mathcal{E}_3$ , za jehož zaměření budeme považovat množinu všech volných vektorů. Každé uspořádané dvojici bodů  $A, B \in \mathcal{E}_3$  přiřadíme volný vektor, který je určen orientovanou úsečkou s počátečním bodem  $A$  a koncovým bodem  $B$ .

Zvolíme-li si libovolný bod  $O \in \mathcal{E}_3$  a ortonormální bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  zaměření  $\mathcal{E}_3$ , pak zobrazení

$$\mathcal{E}_3 \ni A \mapsto [\overrightarrow{OA}]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^3$$

bude každému bodu  $A$  přiřazovat jednoznačně aritmetický vektor. Bod  $O$  se nazývá **počátek soustavy souřadnic** a čtveřice  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  **kartézská soustava souřadnic**  $\mathcal{E}_3$ . S její pomocí můžeme  $\mathcal{E}_3$  i jeho zaměření ztotožnit s prostorem třírozměrných aritmetických vektorů se standardním skalárním součinem definovaným předpisem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Abychom mohli jednoznačně definovat nové operace v původním eukleidovském bodovém prostoru pomocí souřadnic, musíme specifikovat tzv. **orientaci** soustavy souřadnic. V dalším budeme používat výhradně **pravotočivé soustavy souřadnic**, jejichž bázevé vektory lze umístit (bez vykloubení prstů) po řadě ve směru palce, ukazováku a prostředníku pravé ruky, jako na obr. 27.1.

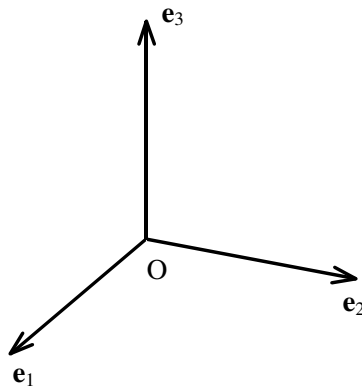
## 27.2 Přímký v $\mathcal{E}_3$

Nechť  $A \in \mathcal{E}_3$  je zadaný bod a  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_3$  zadaný nenulový vektor. Pak **přímka**  $p$  procházející bodem  $A$  se **směrem**  $\mathbf{u}$  je množina

$$p = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Rozepíšeme-li si tento zápis po složkách, dostaneme pro body  $X = [X_1, X_2, X_3]$  přímky  $p$  procházející bodem  $A = [A_1, A_2, A_3]$  ve směru  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  tzv. **parametrické rovnice přímky**

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 + tu_1 \\ X_2 &= A_2 + tu_2 \\ X_3 &= A_3 + tu_3, \end{aligned}$$



Obr. 27.1: Pravotočivá soustava souřadnic.

kde  $t \in \mathbb{R}$  se nazývá *parametr*.

**Příklad 27.2.** Přímka, která prochází body  $A = [1, 2, 0]$  a  $B = [3, 2, 1]$ , má směr

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A,$$

takže její parametrická rovnice má tvar:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 + 2t \\ X_2 &= 2 \\ X_3 &= t \end{aligned}$$

Pro  $t = 0$  dostaneme  $X = A$ , pro  $t = 1$  dostaneme  $X = B$ .

Nechť  $p$  a  $q$  jsou přímky zadané předpisy

$$p = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{a} \quad q = \{B + s\mathbf{v} : s \in \mathbb{R}\}.$$

Budeme se zabývat jejich vzájemnou polohou.

Přímky  $p$  a  $q$  nemají **žádný společný bod**, právě když soustava

$$A + t\mathbf{u} = B + s\mathbf{v}$$

nemá řešení, což nastane, právě když

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] < h[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}]. \quad (27.1)$$

Platí-li (27.1) a

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2,$$

pak jsou  $p$  a  $q$  **mimoběžné**. Když platí (27.1) a

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1,$$

pak jsou  $p$  a  $q$  **rovnoběžné**.

Přímky  $p$  a  $q$  **mají alespoň jeden společný bod**, právě když

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = h[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}]. \quad (27.2)$$

Platí-li (27.2) a

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2,$$

pak  $p$  a  $q$  leží ve stejné rovině a mají společný jediný bod, takže jsou **různoběžné**.  
Když platí (27.2) a

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1,$$

pak jsou  $p$  a  $q$  **totožné**.

## 27.3 Roviny v $\mathcal{E}_3$

Nechť  $A$  je zadaný bod a  $\mathbf{n}$  je zadaný nenulový vektor. Pak **rovina** procházející bodem  $A$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n}$  je množina

$$r = \{X \in \mathcal{E}_3 : (\mathbf{n}, \overrightarrow{AX}) = 0\}.$$

Rozepíšeme-li si tuto definici po složkách, dostaneme pro body  $X = [X_1, X_2, X_3]$  roviny  $r$  procházející bodem  $A = [A_1, A_2, A_3]$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$  **normálovou rovnici roviny**

$$n_1(X_1 - A_1) + n_2(X_2 - A_2) + n_3(X_3 - A_3) = 0 \quad (27.3)$$

nebo **obecnou rovnici roviny**

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + d = 0,$$

kde

$$a = n_1, \quad b = n_2, \quad c = n_3 \quad \text{a} \quad d = -n_1A_1 - n_2A_2 - n_3A_3.$$

Koeficienty u neznámých v obou rovnicích jsou tedy složky normálového vektoru roviny, zatímco absolutní člen  $d$  nemá přímý geometrický význam.

Je-li dán bod  $A$  a dva nezávislé vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , pak

$$r = \{A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : t, s \in \mathbb{R}\}$$

definuje rovinu procházející body  $A$ ,  $A + \mathbf{u}$  a  $A + \mathbf{v}$ . Rozepíšeme-li si tento zápis po složkách, dostaneme pro body  $X = [X_1, X_2, X_3]$  roviny  $r$  **parametrické rovnice roviny**

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 + tu_1 + sv_1 \\ X_2 &= A_2 + tu_2 + sv_2 \\ X_3 &= A_3 + tu_3 + sv_3, \end{aligned}$$



v nichž můžeme snadno identifikovat souřadnice bodu A i vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Bod X je bodem roviny  $r$ , právě když  $\overrightarrow{AX}$  je lineární kombinací  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , což nastane, právě když

$$\det \begin{bmatrix} X_1 - A_1 & X_2 - A_2 & X_3 - A_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Rozvojem determinantu podle prvního řádku dostaneme normálovou rovnici roviny (27.3) s  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ , kde

$$n_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad n_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad n_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Abychom mohli vyšetřit vzájemnou polohu dvou rovin, označme si  $r$  a  $s$  roviny

$$r = \{X \in \mathcal{E}_3 : (\overrightarrow{AX}, \mathbf{n}) = 0\} \quad \text{a} \quad s = \{X \in \mathcal{E}_3 : (\overrightarrow{BX}, \mathbf{m}) = 0\}.$$

Roviny  $r$  a  $s$  nemají **žádný společný bod**, právě když soustava

$$(\mathbf{n}, \overrightarrow{AX}) = 0 \quad \text{a} \quad (\mathbf{m}, \overrightarrow{BX}) = 0$$

nemá žádné řešení. Rozepíšeme-li si rovnice soustavy na tvar

$$\begin{aligned} n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 &= n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3 \\ m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 &= m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3, \end{aligned}$$

lze ověřit, že to může nastat, jen když

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 1 \quad \text{a} \quad (\mathbf{m}, \overrightarrow{AB}) \neq 0.$$

V tomto případě jsou roviny **rovnoběžné**, ale **různé**. Jestliže

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 2,$$

pak roviny  $r$  a  $s$  jsou **různoběžné** a mají společnou přímku, jejíž směrový vektor je ortogonální k  $\mathbf{m}$  a  $\mathbf{n}$ . Jestliže

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 1 \quad \text{a} \quad (\mathbf{m}, \overrightarrow{AB}) = 0,$$

pak jsou roviny  $r$  a  $s$  **totožné**.

Podobně můžeme podat výčet možností vzájemné polohy přímky  $p$  procházející bodem A se směrem  $\mathbf{u}$  a roviny  $r$  procházející bodem B s normálovým vektorem  $\mathbf{n}$ . Snadno se ověří, že přímka  $p$  má **jediný společný bod** s  $r$ , právě když

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) \neq 0. \quad (27.4)$$

Jestliže neplatí (27.4), pak lze rozlišit dva případy. Buď je přímka  $p$  **rovnoběžná** s  $r$ , ale neleží v  $r$ , což nastane když

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0 \quad \text{a} \quad (\mathbf{n}, \overrightarrow{AB}) \neq 0,$$

nebo  $p$  leží v  $r$ , což nastane, když

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0 \quad \text{a} \quad (\mathbf{n}, \overrightarrow{AB}) = 0.$$

## 27.4 Vektorový součin

Nechť  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  a  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  jsou dva vektory. Pak jakýkoliv vektor  $\mathbf{w}$ , který je ortogonální k  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  splňuje rovnice:

$$\begin{aligned} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0 \end{aligned} \quad (27.5)$$

Soustava (27.5) má však stejné řešení jako soustava

$$\begin{aligned} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant splňuje

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0,$$

i jako soustava

$$\begin{aligned} v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0 \\ u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant splňuje

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = v_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vzorce

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \quad (27.6)$$

tedy definují složky vektoru  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ , který je kolmý k  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$ . Budeme ho značit

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

a nazývat **vektorový součin** vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Vzorce (27.6) si můžeme zapamatovat pomocí mnemotechnického zápisu

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (27.7)$$

Jelikož

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2,$$

má **rovnoběžnostěn** na obr. 27.2 objem

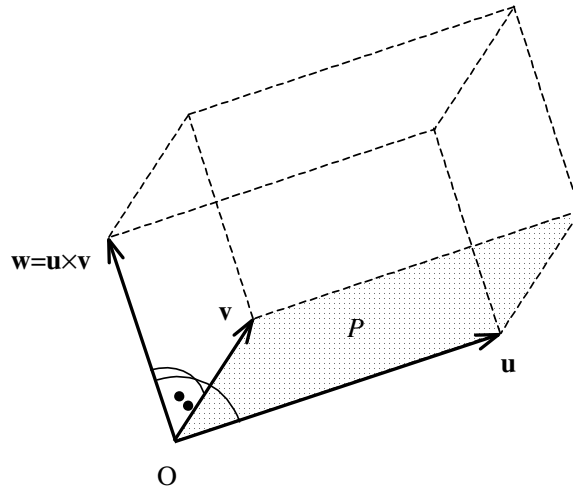
$$V = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \|\mathbf{w}\|^2.$$

Poněvadž má uvažovaný rovnoběžnostěn výšku  $\|\mathbf{w}\|$  a plochu **základny**

$$P = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha, \quad (27.8)$$

kde  $\alpha$  je odchylka přímek procházejících počátkem O se směrovými vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , platí

$$P = \|\mathbf{w}\|. \quad (27.9)$$



Obr. 27.2: Vektorový součin.

Lze ukázat, že vektory  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  tvoří kladně orientovanou bázi zaměření  $\mathcal{E}_3$ . Z (27.8) a (27.9) plynou ihned vzorce pro **plochu rovnoběžníka či trojúhelníka** v  $\mathcal{E}_3$ . Například plocha  $P$  trojúhelníka určeného body  $A, B, C \in \mathcal{E}_3$  je dána vzorcem

$$P = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Je-li  $\mathbf{a}$  nenulový vektor, pak můžeme definovat zobrazení

$$A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Jsou-li  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$  a  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ , pak podle (27.7) platí:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= \mathbf{a} \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3\mathbf{e}_2 - a_2\mathbf{e}_3 \\ A\mathbf{e}_2 &= \mathbf{a} \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a_3\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_3 \\ A\mathbf{e}_3 &= \mathbf{a} \times \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Pro matici  $\mathbf{A}$  v bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tedy platí

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matice  $[\mathbf{A}]_{\mathcal{E}}$  je antisymetrická matice, takže matice  $\mathbf{U} = \mathbf{I} + [\mathbf{A}]_{\mathcal{E}}$  splňuje

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{\top} = (\mathbf{I} + [\mathbf{A}]_{\mathcal{E}})(\mathbf{I} - [\mathbf{A}]_{\mathcal{E}}) = \mathbf{I} - [\mathbf{A}]_{\mathcal{E}}[\mathbf{A}]_{\mathcal{E}}^{\top}.$$

Zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}$  proto pro malé  $\|\mathbf{a}\|$  zachovává, až na veličiny srovnatelné s  $\|\mathbf{a}\|^2$ , úhly i délky vektorů, takže ho lze považovat za **otočení okolo  $\mathbf{a}$  o úhel  $\|\mathbf{a}\|$** , a zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$  pro libovolný vektor  $\mathbf{a}$  přiřazuje každému  $\mathbf{x}$  vektor, který můžeme považovat podle obr. 27.3 za **vektor rychlosti otáčení  $\mathbf{x}$  kolem  $\mathbf{a}$  s úhlovou rychlostí  $\|\mathbf{a}\|$** , a to ve směru, který je v souladu s kladnou orientací trojice  $(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{a} \times \mathbf{x})$ .

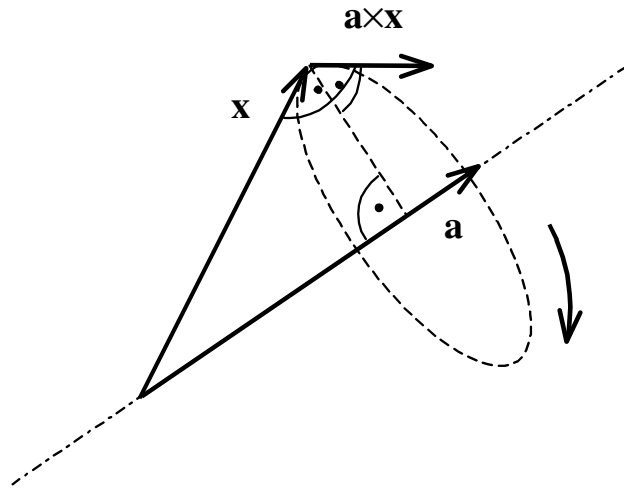
## 27.5 Určení některých úhlů

Jsou-li  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dva nenulové vektory, pak **odchylka  $\varphi$  vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$**  je úhel  $\varphi \in [0, \pi]$ , který splňuje vztah

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

**Odchylka** přímek  $p$  a  $q$  se směrovými vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  se definuje jako nejmenší odchylka dvou vektorů, které lze umístit na  $p$  nebo  $q$ , takže splňuje

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$



Obr. 27.3: Rychlost otáčení.

Obdobně se definuje **odchylka**  $\varphi$  **přímky**  $p$  se směrovým vektorem  $\mathbf{u}$  a **roviny**  $r$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n}$ . Můžeme ji vypočítat pomocí odchylky přímky  $p$  a libovolné jiné přímky se směrovým vektorem  $\mathbf{n}$  ze vztahu

$$\sin \varphi = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{u}\|}.$$

**Odchylka dvou rovin**, což je nejmenší úhel dvou přímek, z nichž každá leží v jedné z rovin, vyjádříme snadno pomocí jejich normálových vektorů  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  a vztahu

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

## 27.6 Některé metrické úlohy

K určení **vzdálenosti**  $d$  **bodu**  $M$  **od roviny**

$$r = \{X \in \mathcal{E}_3 : (\overrightarrow{AX}, \mathbf{n}) = 0\}$$

stačí najít průmět vektoru  $\overrightarrow{AM}$  do normálového směru  $\mathbf{n}$ . Platí tedy

$$d = \frac{|(\overrightarrow{AM}, \mathbf{n})|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

**Vzdálenost**  $d$  **bodu**  $M$  **od přímky**  $p$  procházející bodem  $A$  se směrem  $\mathbf{u}$  určíme s pomocí obr. 27.5. Z

$$P = \|\mathbf{u} \times \overrightarrow{AM}\| \quad \text{a} \quad P = \|\mathbf{u}\| \cdot d$$

dostaneme snadno

$$d = \frac{\|\mathbf{u} \times \overrightarrow{AM}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Obdobně určíme i **nejkratší vzdálenost dvou mimoběžek**  $p$  a  $q$ , kde

$$p = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{a} \quad q = \{B + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Podle obr. 27.6 platí pro objem  $V$  rovnoběžnostěnu určeného hranami  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$

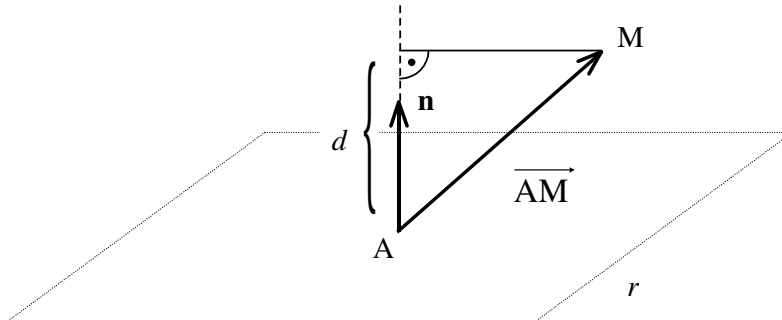
$$V = \left| \det [\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \right| = P \cdot d,$$

zatímco pro plochu  $P$  jeho základny platí

$$P = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Odtud

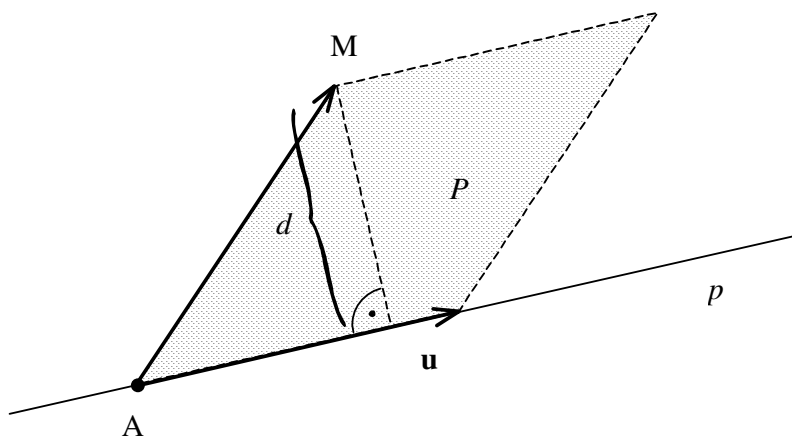
$$d = \frac{V}{P} = \frac{\left| \det [\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \right|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}.$$



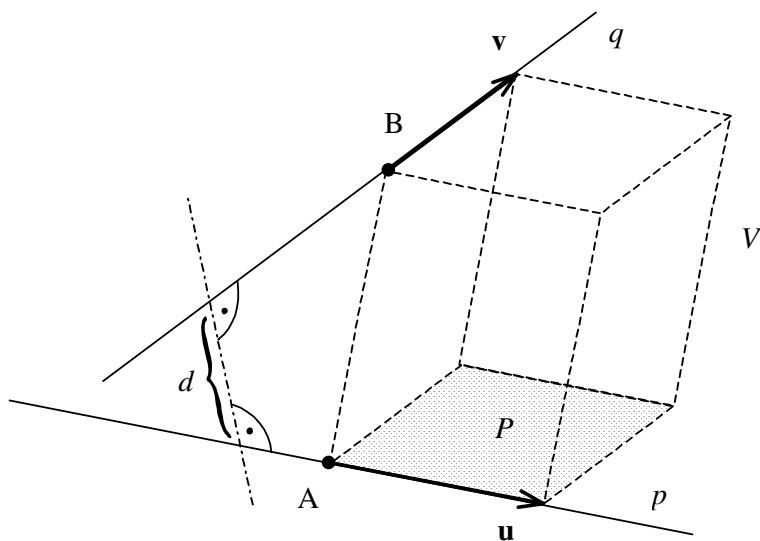
Obr. 27.4: Vzdálenost bodu od roviny.

## 27.7 Support Vector Machine

Jedním z procesů, který je potřeba řešit v oborech počítačové vědy a umělé inteligence, je automatizované učení, speciálně pak metody SVM (Support Vector Machine). Počítač si na tzv. tréninkovém vzorku dat vybuduje model, který těmto datům “co nejvíce” vyhovuje a tento model pak dále používá při rozhodovacích procesech. Pro jednoduchou představu o co v automatizovaném učení jde, si představme v  $\mathbb{R}^2$  množinu bodů a ke každému z nich příslušící ohodnocení 1, nebo  $-1$ . Počítač se na tréninkovém vzorku pokusí rozdělit  $\mathbb{R}^2$  na oblast obsahující body s ohodnocením 1 a na zbytek, obsahující body s ohodnocením  $-1$ . Pro jednoduchost se budeme zabývat případem, kdy jako matematický model zvolíme přímku a navíc předpokládejme, že body tréninkové množiny dat lze přímkou oddělit.



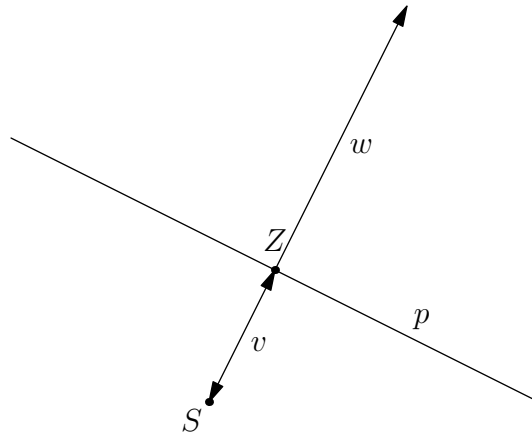
Obr. 27.5: Vzdálenost bodu od přímky.



Obr. 27.6: Vzdálenost (příčka) dvou mimoběžek.

Reálné úlohy automatizovaného učení se samozřejmě zabývají klasifikací dat více než dvou ( $\{1, -1\}$ ) kategorií v prostorech větší dimenze ( $\mathbb{R}^n$ ) a samozřejmě složitějším modelem pro oddělení bodů různých kategorií. Na zvolené jednoduché úloze se však pojmy probírané v této kapitole lépe ukazují a není naším cílem učit čtenáře počítačové vědě. Pomocí pojmů jako vzdálenost bodů a přímek, kolmost vektorů nastíníme, na jakou matematickou formulaci tato úloha vede.

Předně potřebujeme matematicky vyjádřit přímku  $p$  v  $\mathbb{R}^2$ , kterou popíšeme rovnicí, která je splněna pouze pro všechny body  $(x_1, x_2) \in p$ . Ze střední školy jistě znáte směrnicový tvar přímky  $x_2 = ax_1 + b$ , který však nebude vhodný, jelikož neumí popsat přímku  $x_1 = c$ . Doufáme, že čtenáře příliš nepobouříme tím, že nepoužijeme ani rovnici přímky z kapitoly 27.2 ale jiný, pro tento účel ještě vhodnější tvar. K jednoznačnému popisu přímky  $p$  například stačí znát směr  $w \in \mathbb{R}^2$ , ke kterému je přímkou  $p$  kolmá a vzdálenost  $v$  od počátku souřadnic  $S = (0, 0)$ . Uvědomme si, že bod  $Z \in p$ , který je nejbližší počátku je od bodu  $O$  ve směru  $w$ , viz obrázek 27.7.



Obr. 27.7: Přímka daná bodem a normálou.

Vezmeme-li v úvahu, že pro všechny body  $X \in p$  je směr  $XZ$  kolmý k vektoru  $w$ , lze tedy vyjádřit přímkou  $p$  jako

$$p = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w^T(X - kw) = w^T X - k\|w\|^2 = 0\},$$

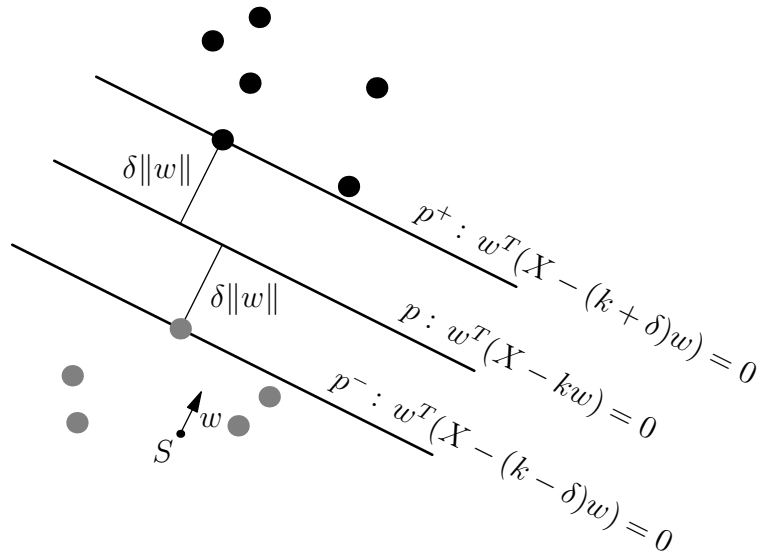
kde  $v = k\|w\|$ . Navíc  $w^T(X - kw)$  je lineární funkce  $\mathbb{R}^2 \ni X \mapsto \mathbb{R}$  a  $p$  je její nulovou vrstevnicí. Všíravý čtenář si již jistě všiml, že přímkou  $p$  není trojicí parametrů  $(w_1, w_2, k)$  určena jednoznačně, jelikož  $(cw_1, cw_2, c^{-1}k)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  určují tutéž přímkou.

Mějme dále tréninkovou sadu dat

$$\mathcal{T} = \{X_i = (x_{1i}, x_{2i}) \in \mathbb{R}^2, y_i \in \{1, -1\} \mid i = 1, \dots, n\}$$

čítající  $n$  bodů a jejich kategorií. Přímka oddělující body obou kategorií, je určena parametry  $(w_1, w_2, k)$  takovými, že  $y_i(w^T(X_i - kw)) > 0$  pro všechny  $i = 1, \dots, n$ .





Obr. 27.8: Přímka daná bodem a normálou.

Takovýchto (různých) přímek je nekonečně mnoho a proto budeme hledat takovou, která má největší vzdálenost od obou kategorií, viz obrázek 27.8.

Jaká je vzdálenost bodů obou kategorií? Je to vzdálenost přímek  $w^T(X_a - (k + \delta)w) = 0$  a  $w^T(X_b - (k - \delta)w) = 0$ . Z obrázku je rovněž zřejmé, že body  $X_a$  a  $X_b$  budou mít nejmenší vzdálenost, když  $X_a = X_b + lw$ , tedy

$$w^T(X_b + lw - (k + \delta)w) = w^T(X_b - (k - \delta)w) \Rightarrow l = 2\delta$$

a proto vzdálenost bodů obou kategorií je  $\|X_a - X_b\| = 2\delta\|w\|$ . Nyní je třeba vzít v úvahu nejednoznačnost parametrů určující přímku  $p$ . Zvolme je tedy (nyní již jednoznačně) tak, aby  $\delta\|w\|^2 = 1$ , tedy přímky  $p^+$  a  $p^-$  měly tvar

$$\begin{aligned} p^+ : w^T X - b &= 1 \\ p^- : w^T X - b &= -1 \end{aligned}$$

kde  $b = k\delta^{-1} = k\|w\|^2$  a jejich vzdálenost je  $2\|w\|^{-1}$ .

Chceme-li maximalizovat vzdálenost bodů obou kategorií, je třeba minimalizovat  $\|w\|$ . Upravme ještě podmínku, kterou musí splňovat přímka oddělující body obou kategorií, tj.  $y_i(w^T(X_i - kw)) = y_i(w^T X_i - b) > 0$ . Jelikož mezi přímkami  $p^+$  a  $p^-$  neleží žádný bod, lze tuto podmínku zpřísnit na  $y_i(w^T X_i - b) \geq 1$ . Úlohu nalézt přímku oddělující body obou kategorií jsme převedli na úlohu

$$\text{Najděte } (w_1, w_2, b) \in \mathbb{R}^3 \text{ takové, že } \min_{\substack{\forall i=1, \dots, n: \\ y_i(w^T X_i - b) \geq 1}} \|w\|.$$

# Kapitola 28

## Kvadratické plochy

V této kapitole se budeme zabývat kvadratickými plochami, čili **kvadrikami**, které jsou popsány rovnicemi s kvadratickými formami. Tak jako v kapitole 27, omezíme se na kvadratické plochy v prostoru  $\mathcal{E}_3$ . Budeme také předpokládat, že v  $\mathcal{E}_3$  je zadána soustava souřadnic  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , s jejíž pomocí můžeme body  $\mathcal{E}_3$  ztotožnit s třírozměrnými aritmetickými vektory, stejně jako vektory zaměření  $\mathcal{E}_3$ .

### 28.1 Kanonický tvar kvadratické formy

Nechť  $\mathbf{A}$  je symetrická čtvercová matice řádu tři, nechť  $\mathbf{b} = [b_i]$  je třírozměrný sloupcový vektor a nechť  $c$  je reálné číslo. **Kvadratická plocha**  $q$  je množina všech bodů, jejichž souřadnice  $X$  splňují rovnici

$$X^T \mathbf{A} X + 2\mathbf{b}^T X + c = 0. \quad (28.1)$$

Kvadratická forma  $Q(X) = X^T \mathbf{A} X$  se nazývá **kvadratický člen** rovnice kvadratické plochy, lineární forma  $\ell(X) = 2\mathbf{b}^T X$  se nazývá **lineární člen** a  $c$  se nazývá **absolutní člen** rovnice kvadratické plochy. Tak, jak je rovnice (28.1) napsána, není vyloučeno, že jí nevyhovuje žádný bod  $\mathcal{E}_3$ . V některých případech se proto uvažují i komplexní řešení. My se však omezíme jen na reálná řešení (28.1), která mohou být ztotožněna s body  $\mathcal{E}_3$ .

Podobně, jako nemá absolutní člen rovnice roviny bezprostřední geometrický význam, nemají ani prvky matice  $\mathbf{A}$  či vektoru  $\mathbf{b}$  obecně žádnou bezprostřední geometrickou interpretaci. Naším prvním krokem proto bude nalezení takového tvaru rovnice kvadratické plochy, jejíž koeficienty mají geometrický význam.

Jelikož matice  $\mathbf{A}$  je symetrická, existuje podle věty o spektrálním rozkladu 24.9 ortogonální matice  $\mathbf{Q}$  tak, že  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q}$ , kde  $\mathbf{D}$  je diagonální matice s vlastními čísly  $\lambda_i$  matice  $\mathbf{A}$  na diagonále. Po dosazení do (28.1) dostaneme

$$X^T \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} X + 2\mathbf{b}^T X + c = 0. \quad (28.2)$$

Povšimneme-li si, že

$$2\mathbf{b}^T X = 2(\mathbf{Q}\mathbf{b})^T \mathbf{Q}X,$$

můžeme pomocí substituce  $Y = QX$  přepsat (28.2) na tvar

$$Y^T D Y + 2(Qb)^T Y + c = 0. \quad (28.3)$$

Podle úvah z článku 14.7 můžeme (28.3) považovat za definici téže kvadratické plochy jako (28.1) v jiné kartézské soustavě souřadnic  $(O, f_1, f_2, f_3)$ .

Položme  $\tilde{b} = Qb$  a rozepišme si (28.3) na tvar

$$\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 + \lambda_3 Y_3^2 + 2\tilde{b}_1 Y_1 + 2\tilde{b}_2 Y_2 + 2\tilde{b}_3 Y_3 + c = 0.$$

Nyní si všimněme, že pokud  $\lambda_i \neq 0$ , pak

$$\lambda_i Y_i^2 + 2\tilde{b}_i Y_i = \lambda_i \left( Y_i^2 + 2\frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} Y_i + \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i^2} \right) - \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i^2} = \lambda_i \left( Y_i + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i^2}.$$

Pomocí vhodné substituce tak můžeme zapsat každou kvadratickou plochu definovanou kvadratickou formou hodnoty 3 ve tvaru

$$\lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \lambda_3 Z_3^2 = d \quad (28.4)$$

a každou kvadratickou plochu definovanou kvadratickou formou hodnoty 2 ve tvaru

$$\lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + c Z_3 = d. \quad (28.5)$$

Lze ukázat, že každou kvadratickou plochu definovanou kvadratickou formou hodnoty 1 můžeme zapsat ve tvaru

$$\lambda_1 Z_1^2 + c Z_2 = d. \quad (28.6)$$

Substituce typu

$$Z_i = Y_i + c_i$$

lze interpretovat jako přechod od soustavy  $(O, f_1, f_2, f_3)$  k soustavě  $(O', f_1, f_2, f_3)$ , kde v původní soustavě

$$\overrightarrow{OO'} = [c_1, c_2, c_3].$$

## 28.2 Kvadratické plochy v kanonickém tvaru

Zatímco ve tvarech (28.4), (28.5) a (28.6) jsou zachovány vlastní čísla kvadratické formy, která definuje kvadratickou plochu, pro znázornění je vhodnější převést kvadratickou formu na **kanonický tvar**, v němž lze připsat všem koeficientům geometrický význam související s řezy kvadratické plochy souřadnicovými rovinami. Omezíme se zde na stručný výčet kanonických tvarů důležitějších ploch a jejich řezů. Čtenáři doporučujeme doplnit výčet obrázky. Souřadnice bodů kvadrik budeme značit v analytické geometrii obvyklým  $x, y, z$ .

(i) **Elipsoid**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Řezy elipsoidu souřadnicovými rovinami představují elipsy. Pokud  $a = b = c$ , dostaneme kulovou plochu.

(ii) **Jednodílný hyperboloid**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Řezem rovinou  $z = 0$  dostaneme elipsu s poloosami  $a, b$ , zatímco řezy zbývajících souřadnicovými rovinami dostaneme hyperboly.

(iii) **Dvojdílný hyperboloid**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Rovina  $z = 0$  odděluje oba díly dvojdílného hyperboloidu. Řezy zbývajících souřadnicovými rovinami jsou hyperboly.

(iv) **Eliptický paraboloid**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0, \quad a > 0, b > 0, p \neq 0.$$

V rovině  $z = 0$  leží jediný bod, řezy zbývajících souřadnicovými rovinami jsou paraboly.

(v) **Hyperbolický paraboloid**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0, \quad a > 0, b > 0, p \neq 0.$$

Řezem v rovině  $z = 0$  dostaneme dvě přímky, řezy zbývajících souřadnicovými rovinami jsou paraboly.

(vi) **Eliptická kuželová plocha**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Řez rovinou  $z = 0$  je bod, řezy zbývajících souřadnicovými rovinami tvoří různoběžky.

(vii) **Eliptická válcová plocha**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0.$$

Řez libovolnou rovinou  $z = c$  je elipsa s výše uvedenou rovnicí.

(viii) **Parabolická válcová plocha**

$$x^2 = 2py, \quad p \neq 0.$$

Řez libovolnou rovinou  $z = c$  je parabola s výše uvedenou rovnicí.

(ix) **Hyperbolická válcová plocha**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0.$$

Řez libovolnou rovinou  $z = c$  je hyperbola s výše uvedenou rovnicí.

# Literatura

- [1] Demlová, M. – Pondělíček, B. *Úvod do algebry*. Praha: ČVUT, 1996.
- [2] Bican, L.: *Lineární algebra*. Praha: SNTL, 1979.
- [3] Borůvka, O.: *Základy teorie matic*, Praha: Academia, 1971.
- [4] Budinský, B. – Charvát, J.: *Matematika I*. Praha: SNTL, 1987.
- [5] Havel, V. – Holenda, J.: *Lineární algebra*, Praha: SNTL/ALFA, 1984.
- [6] Schmidtmayer, J.: *Maticový počet a jeho použití v technice*, Praha: SNTL Praha, 1967.
- [7] M. Zahradník, L. Motl: *Pěstujeme lineární algebru*, Praha: Karolinum, 1998.  
Též na <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/>
- [8] Gantmacher, F. R.: *Teoria matric*, Moskva: Nauka, 1967 (anglický překlad Chelsea, New York, 1959).
- [9] Golub, G. – van Loan, Ch.: *Matrix Computations*, London: The John Hopkins University Press, 1991.

# Rejstřík

## D

### definice

Adjungovaná matice, 178  
Algebraická operace, 59  
Asociativní operace, 60  
Báze vektorového prostoru, 80  
Bilineární forma, 120  
Determinant matice, 168  
Dimenze vektorového prostoru, 90  
Eukleidovský prostor, 218  
Grupa, 63  
Hodnost a defekt zobrazení, 100  
Invariantní podprostory, 194  
Inverzní matice, 40  
Inverzní prvek, 62  
Komutativní operace, 61  
Komutativní těleso, 65  
Kongruentní matice, 125  
Kvadratická forma, 128  
Lineárně nezávislé vektory, 76  
Lineární zobrazení, 98  
Matice lineárního zobrazení, 113  
Neutrální prvek, 61  
Norma vektoru, 150  
Nulový prostor, 99  
Ortogonální množina vektorů, 151  
Podobné matice, 117  
Podprostor, 68  
Pozitivně definitní kvadratické formy, 133  
Skalární funkce symetrické matice, 202  
Skalární součin, 149  
Skládání lineárních zobrazení, 102

Součet zobrazení a násobení skalárem, 102

Souřadnice vektoru, 85

Vektorový prostor, 66

Vlastní čísla a vektory, 186

Zobrazení, 3