Math Logic

Если что пишите @TheMifik

June 2022

Содержание:

1.1) Исчисление высказываний (1)

а) **Язык**: {Предметный-язык, мета-язык}

Высказивание это либо:
- Большая латинская буква начала алфавита, возможно с индексами и штрихами.
- Выражение вида $(\alpha \& \beta)$ $(\alpha \vee \beta)$ $(\alpha \to \beta)$ $(\neg\alpha)$, где α, β - высказывания.

Метапеременные: α, β, γ;
X, Y, Z метапеременные для пропозициональных переменных.

Приоритеты: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\to$.
Истиностное значение { И, Л }.
$[\![\alpha]\!]$ - оценка высказывания.

Аксиомы - список высказываний.
Схема аксиом - высказивание с метапеременными, при любой подстановке высказываний вместо мето переменных, получаем аксиому.

$$1)\ \alpha \to \beta \to \alpha$$

$$2)\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$$

$$3)\ \alpha \& \beta \to \alpha$$

$$4)\ \alpha \& \beta \to \beta$$

$$5)\ \alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$$

$$6)\ \alpha \to \alpha \vee \beta$$

$$7)\ \beta \to \alpha \vee \beta$$

$$8)\ (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$$

$$9)\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha)$$

$$10)\ \neg\neg\alpha \to \alpha$$

1.2) Общезначимость (2)

α общезначима (истина), если $[\![\alpha]\!] = \text{И}$, при любой оценки пропозициональных переменных $\{\models\}$.
α невыполнима (ложна), если $[\![\alpha]\!] = \text{Л}$, при любой оценки пропозициональных переменных.
α выполнима, если $[\![\alpha]\!] = \text{И}$, при некоторой оценки пропозициональных переменных.
α опровержима, если $[\![\alpha]\!] = \text{Л}$, при некоторой оценки пропозициональных переменных.

1.3) Следование (3)

Будем говорить, что $\Gamma \models \alpha$, то есть α следует из Γ, если при всех оценках таких, что все $\gamma \in \Gamma[\![\gamma]\!] = \text{И}$, выполнена $[\![\alpha]\!] = \text{И}$.

1.4) Доказуемость (Выводимость) (4)

$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, где γ_i - либо аксиома, либо существует j, k < i, что $\gamma_k \equiv (\gamma_j \to \gamma_i)$ $\{\vdash\}$.

Modus Ponens - $\alpha,\ \alpha \to \beta \Rightarrow \beta$

1.5) Корректность (5)

Теория корректна, если доказуемость влечет общезначимость.

1.6) Полнота (6)

Теория полна, если общезначимость влечет доказуемость.

1.7) Непротиворечивость (7)

Множество формул Γ называется непротиворечивым, если для некоторой формулы a, не имеет место одновременно и $\Gamma \vdash a,\ \Gamma \vdash \neg a$.

1.8) Теорема о дедукции для исчисления высказываний (8)

$\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$ выводится тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

2.1) Теорема о полноте исчисления высказываний (9)

Исчисления высказываний полно: $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

3.1) Интуиционистское исчисление выказываний (10)

Рассмотрим К И В и заменим 10 схему аксиом на $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$.

Теория моделей
Примеры моделей:
1) Модели К И В подходят: корректны, но не полны.
2) Теория в которой $[\![\alpha]\!]$ - открытое множество в топологическом пространстве.
В ней определены:

$$1)[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$$

$$2)[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$$

$$3)[\![\alpha \to \beta]\!] = ((X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])^{\circ}$$

$$4)[\![\perp]\!] = \varnothing$$

$$5)[\![\neg\alpha]\!] = (X \setminus [\![\alpha]\!])^{\circ}$$

3.2) Вывод в Гильбертовском стиле и натуральный вывод (11)

Естественный натуральный вывод - способ доказательства в виде деревьев.
Вывод вы Гилбертовском стиле (смотретие на **1.4) доказуемость**)

3.3) ВНК - интерпретация (Логических связок) (12)

1) α, β, γ - конструкции.
2) $\alpha \& \beta$ - умеем строить α и β.
3) $\alpha \vee \beta$ - умеем строить α или β и знаем, что именно.
4) $\alpha \to \beta$ - умеем перестроить α в β.
5) $\perp$ - не имеет построения.
6) $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$.

3.4) Решетки (13)

X - частично упорядоченное множество отношений $\leq$.
Множество верхних граней a, b - $\{x \mid a \leq x, b \leq x\}$.
Множество нижних граней a, b - $\{x \mid x \leq a, x \leq b\}$.
$a + b$ - наименьший элемент множества верхних граней.
$a \cdot b$ - наибольший элемент множества нижних граней.

Минимальный элемент - меньше которого нет.

Решетка - частичное упорядоченное множество, где для каждый двух элементов, существует $a + b$ и $a \cdot b$.

Дистрибутивная решетка $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
В дистрибутивной решетке $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Псевдодополнение - $a \to b$ - наибольший элемент $\{ c \mid a \cdot c \leq b\}$.

Импликативная решетка - Есть псевдодополнение для всех a, b.

0 и 1
0 - элемент, что $0 \leq x$, при всех x.
1 - элемент, что $x \leq 1$, при всех x.

3.5) Булевы и псевдобулевы алгебры (14)

Алгебра Гейтинга - импликативная решетка с 0 (псевдобулевая алгебра).

$\tilde{\mathbf{a}} \equiv a \to 0$ (псевдодополнение до нуля).

Булева алгебра - Алгебра Гейтинга, где a + ã = 1.

α, β - высказывания в И И В.
$\alpha \leq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.
$\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$.

4.1) Алгебра Линденбаума (15)

Пусть E - множество всех высказываний И И В. Тогда (факты множества E по отношению эквиволентности) $[E]_{\approx}$ - Алгебра Линденбаума.
Алгебра Линденбаум - Алгебра Гейтинга; Корректная модель И И В.

4.2) Полнота И И В в псевдобулевых алгебрах (16)

Алгебра Гейтинга - полная и корректная модель И И В.

4.3) Модели Крипке (17)

$<\Vdash, W>$
1) $\Vdash$ - вынужденность W - множество миров.
Вынуждение переменной A - определяется моделью, при этом если $W_x \leq W_y$ и $W_x \Vdash A$, то $W_y \Vdash A$.
2) Доопределим $\Vdash$ на всех множествах.

$$1)W \Vdash A\&B,\ if\ W \Vdash\ A\ and\ W \Vdash B.$$

$$2)W \Vdash A \vee B,\ if\ W \Vdash\ A\ or\ W \Vdash B.$$

$$3)W \Vdash \neg A,\ if\ not\ W \leq W_x,\ that\ W_x \Vdash A.$$

$$4)W \Vdash A \to,\ if\ in\ allW \leq W_x\ from\ W_x \Vdash A\ follow\ W_x \Vdash B.$$

4.5) Нетабличность И И В (18)

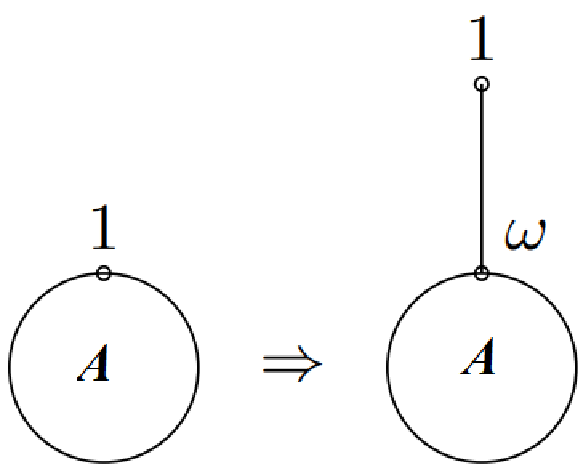
Модель называется табличной:
1) V = S (V - множество истинных значений).
2) $[\![\alpha * \beta]\!] = f_*([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$.
3) Существует истина $\in$ S - выделенная истина и $[\![\alpha]\!]$ = И тогда и только тогда, когда $\models [\![\alpha]\!]$.
У И И В нет полной конечной таблично модели.

5.1) Гёделева Алгебра (19)

Алгебра Гейтинга, в которой из a + b = 1, следует что a = 1 или b = 1.

5.2) Операция Γ(A) (20)

Пусть A - Алгебра Гейтинга, тогда:



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(A)}$, переименуем 1_A в ω.

Теорема - Γ(A) - Алгебра Гейтинга и Гёделева Алгебра.

5.3) Дизъюнктивность И И В (21)

Исчисление дизъюнктно - если для любых $\alpha,\ \beta \vdash \alpha \vee \beta$, влечет $\vdash \alpha$ и $\vdash \beta$.

6.1) Исчисление предикатов (22)

Предметные выражения:
1) Метапеременной $\theta\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$.
2) Одноместные и двухместные функциональные символы.
3) Нульместные функциональные символы.

Логические выражения:
Метапеременные $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
Предикатные символы.

Оценка И П

D - преметное множество.

F - оценка для функциональных символов: Пусть $f_n{-}n$ - местный функциональный символ $F_{f_n} : D^n \to$ D.

T - оценка для предикатных символов: Пусть $P_n{-}n$ - местный предикатный символ: $T_{p_n} : D^n \to$ V, где V = {И, Л}.

E - оценка для свободных переменных E(x) $\in$ D.

6.2) Общезначимость, следование, выводимость (23)

Формула И П общезначима, если истина при любой оценке $\{\models\}$.
Доказуемость, выводимость, полнота, корректность аналагично И В.

Схема аксиом такая же как и в И В с дополнением:
11) $\forall x.\phi[x := \theta] \to \phi$
12) $\phi[x := \theta] \to \exists x.\phi$ (везде θ свободен для подстановки x в ϕ).

Добавим еще два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в ϕ):
Введение $\forall$

$$\frac{\phi \to \psi}{\phi \to \forall x.\psi}$$

Введение $\exists$

$$\frac{\psi \to \phi}{(\exists x.\psi) \to \phi}$$

$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \models \alpha$ (α следует из $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$), если выполнено два условия:
1) α - выполнено всегда, когда выполнено $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.
2) α - не использует кванторов по переменным, входящих свободно в $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Свободные вхождения
$(\forall x.\phi)$ или $(\exists x.\phi)$. Здесь переменная x связана в ϕ. Все вхождения переменной x в ϕ связаны.

Переменная x входит свободно в ϕ, если не находится в области действия никакого квантора по x. Все её вхождения в ϕ свободны.

Подстановка, свободна для подстановки
Терм θ свободен для подстановки вместо x в ϕ ($\phi[x] := \theta$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть

$$(\forall x.P(y))[y := z]$$

$$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$$

Свободы нет

$$(\forall x.P(y))[y := x]$$

$$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$$

6.3) Теорема о дедукции для И П (24)

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$, и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

6.4) Теорема о корректности И П (25)

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ, то $\Gamma \models \alpha$.

7.1) Непротиворечивые множества формул (26)

Непротиворечивые множества формул это такое из которого не выводится противоречие.
$\Gamma = \{A \to B \to A\}$ (непротиворечивое множество).
$\Gamma = \{P \to \neg P,\ \neg P \to P\}$ (противоречивое множество).

textbfПолное непротиворечивое множество (бескванторных) формул
1) Γ содержит только замкнутые (бескванторные) формулы.
2) Если α - некотороя замкнутая (бескванторная) формула, то $\alpha \in \Gamma$ или $\neg\alpha \in \Gamma$.

Теорема
Пусть Γ - непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула ϕ, хотя бы $\Gamma \cup \{\phi\}$ или $\Gamma \cup \neg\{\phi\}$ - непротиворечиво.

Теорема
Пусть Γ - непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдется полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул $\triangle$, что $\Gamma \subseteq \triangle$.

7.2) Доказательства существования моделей у непротиворечивых множестсв формул в бескванторном И П

Теорема - Если у множества формул M есть модель M', оно непротиворечиво.

Определение
У множество есть модель, если любая его формула истина в данной модели.

Теорема
Любое непротиворечивое множество замкнутых бесквантореых формул имеет модель.

Определение
Пусть M - полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель M' задаётся так:
1) D - множество всевохможных предметных выражений без предметных переменных и дополниткльная строка **"ошибка"**.
2) $[\![f(\theta_1, \ldots, \theta_n)]\!] = "f(" + [\![\theta_1]\!] + "," + \ldots + [\![\theta_n]\!] + ")"$.

3) $[\![P(\theta_1, \ldots, \theta_n)]\!] = \begin{cases} True & \text{если } "P(" + [\![\theta_1]\!] + "," + \ldots + [\![\theta_n]\!] + ")" \in M \\ False & \text{иначе} \end{cases}$

4) $[\![x]\!]$ = "ошибка", так как формулы замкнуты.

Лемма
Пусть ϕ - бескванторная формула тогда $M' \models \phi$ тогда и только тогда, когда $\phi \in M$.

Доказательство
Пусть M - непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. По теореме о пополнении сузествует M^1 - полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M^1$. По лемме M^1 имеет модель, это модель подойдет для M.

7.3) Теорема Гёделя о полноте И П (27)

Если М - непротиворечивое множество замкнутых формул, то она имеет модель.

Определение
Формула имеет поверхностные кванторы, если соответсвует грамматике:

$$\phi ::= \forall x.\phi\ |\exists x.\phi|\ r$$

r - формула без кванторов.

Теорема
Для любых замкнутых формул ψ найдется такая формула ϕ с поверхностными кванторами, что

$$\vdash \psi \to \phi \ and\ \vdash \phi \to \psi$$

Лемма - Если М - непротиворечиво, то каждое множество из M_k - непротиворечиво.

Лемма - Если $M_k \vdash \gamma \to W$, и $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, то $M_k \vdash W$.

Определение - $M^* = \cup_k M_k$

Теорема - M^* - непротиворечиво.

Определение
M^b - множество всех бескванторных формул из M^*. По непротиворечивому множеству М можем построить M^b и для него простроить модель М'.

Лемма - М' есть модель для M^*.

Теорема Гёделя о полноте И П - И П полно.

7.4) Доказательство полноты И П (28)

1) Построим по М, множество формул с поверхностными кванторами M^1.
2) По M^1 построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул M^b ($M^b \subseteq M^*$, теорема о непротиворечимости M^*).
3) Дополним его до полного построим для него модель М' (теорема о существовании модели).
4) М' будет моделью и для M^1. ($M^1 \subseteq M^*$, лемма о модели для M^*), и, очевидно для М.

8.1) Машина Тьюринга (29)

Упорядоченная тройка:
1) Внешний алфавит. $q_1, \ldots, q_n$.
2) Внутренний алфавит (состояния) $s_s, \ldots, s_f$ (s_s - начальное s_f - конечное).
3) Таблица переходов $< k, s > \Rightarrow < k', \ s', \ \leftrightarrows >$.

Состояния машины Тьюринга
Упорядоченная тройка.
1) Бесконечная лента с символом заполнителем q_e, текст конечной длины.
2) Головка над определенным символом.
3) Символ состояния - символ внутреннего алфавита.

Язык - множество строк.

Разрешимость языка
Язык L разрешим, если существует машина Тьюринга, которая для любого слово w возаращает ответ "да", если $w \in L$, и "нет", если иначе.

8.2) Задача об остонове, её неразрешимость (30)

Рассмотрим всевозможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык остонавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема - Язык всех остоновливающихся машин Тьюринга неразрешим.

8.3) Доказательство неразрешимости И П (31)

Ящык всех доказаумых формул И П неразрешимю То есть нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле s определяла, доказуема ли она.

9.1) Порядок теории (0, 1, 2) (32)

Порядок	Кванторы	Формализует суждения о...	Пример
нулевой	запрещены	об отдельных значениях	И.В.
первый	по предметным переменным	о множествах	И.П.
		$S = \{t \mid \psi[x := t]\}$	
второй	по предикатным переменным	о множествах множеств	
		$S = \{\{t \mid P(t)\} \mid \varphi[p := P]\}$	
	...		

9.2) Теори первого порядка, структуры и модели (33)

Теорией первого порядка назовем И П с дополнительными "нелогическими или "математическими".
1) Предикатными функциональными символами.
2) аксиомами.
Сущности взятые из исходного И П, назовем логическими.

Структура
Назовем структурой теории первого порядка такую модель И П, что для всех нелогическиъ функциональныъ и предикатных символов теории в ней задана оценка.

Модель
Назовём моделью теории первого порядка такую структуру, что все нелогичские аксиомы данной теоремы в ней истины.

9.3) Аксиоматика Пеано (34)

N соответсвует аксиоматике Пеано, если следующее выполнено:
1) Операция "'": N → N, причем нет a, b ∈ N, что a $\neq b$, но a' = b'. Если x = y', то x назовем следующим за y, а y предыдущим за x.
2) Константа 0 ∈ N, что x' = 0.
3) Индукция. Какова бы не было семейство $P : N \in V$, если P(0) и при любов $x \in N$ из P(x) следует P(x'), то при любом $x \in N$ выполнимо P(x).

Теорема
0 - единственнен: если t таков, что при лбом y выполнено $y' \neq t$, то t = 0.

9.4) Арифметические операции (35)

1 = 0', 2 = 0'', ..., 9 = 0'''''''''.

$$a+b=\begin{cases}a & \text{если b = 0}\\ (a+c)' & \text{если b = c'}\end{cases}$$

$$a\cdot b=\begin{cases}0 & \text{если b = 0}\\ a\cdot c+a & \text{если b = c'}\end{cases}$$

$$a^b=\begin{cases}1 & \text{если b = 0}\\ a^c\cdot a & \text{если b = c'}\end{cases}$$

Теорема a + b = b + a.

9.5) Формальная Арифметика (36)

Формальная Арифметика - теория первого порядка, со следующими добовлениями нелогическими.
1) Двуместными функциональными символами (+), (·); Одноместными функциональными символами ('); Нульместными функциональными символами (0).
2) Двуместными предикатными символами (=).
3) Восемью нелогическими аксиомами:

$$1) a=b\rightarrow a=c\rightarrow b=c$$

$$2) a=b\rightarrow a'=b'$$

$$3) a'=b'\rightarrow a=b$$

$$4) \neg a'=0$$

$$5) a+0=0$$

$$6) a+b'=(a+b)'$$

$$7) a\cdot 0=0$$

$$8) a\cdot b'=a\cdot b+a$$

4) Нелогической съемой аксиом индукции (с метапеременными x и ψ).

$$\psi[x:=0]\&(\forall x.\psi\rightarrow\psi[x:=x'])\rightarrow\psi$$

10.1) Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции (37)

Примитивы (Z, N, U, S).
1) Примитив "ноль" (Z) - $Z: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 Z(x_1) = 0$.
2) Примитив "инкремент" (N) - $N: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 N(x_1) = x_1 + 1$.
3) Примитв "проекция" (U) - семейство функций: пусть $k, n \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n\ U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0\ U_n^k(x^{\to}) = x_k$.
4) Примитив "подстановка" (S) - семейство функций; пусть $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0,\ f_1, \ldots,\ f_k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$.
$S < g, f_1, \ldots,\ f_k > (x^{\to}) = g(f_1(x^{\to}), \ldots,\ f_k(x^{\to}))$

Примитивная рекурсия (R)
Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. Тогда $R < f,\ g >: \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$,

$$R < f, g > (x^{\to}, y) = \begin{cases} f(x^{\to}) & \text{если y} = 0 \\ g(x^{\to}, y-1, R < f, g > (x^{\to}, y-1)) & \text{если y} > 0 \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивные функции
Все функции, которые могут быть выражены как композиция примитивов <Z, N, U, S, R>.

Теорема x + 2 примитивно-рекурсивна.

Лемма f(a, b) = a + b примитивно-рекурсивна.

Общерекурсивные функции
Функция общерекурсивна если может быть построена при помощи примитивов <Z, N, U, S, R> и примитива минимизации (M)
$M < f > (x_1, \ldots, x_n) = min\{y : f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$. Если $f(x_1 \ldots, x_n, y) > 0$ при любом y, результат неопроделен.

Функция Аккурмана

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{если m} = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{если m} > 0\text{, n} = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{если m} > 0\text{, n} > 0 \end{cases}$$

теорема - Функция Аккермана общерекурсивна, но не примитивно-рекурсивна.

Тезис Чёрча
Для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ является общерекурсивной.

Определение
Запись вида $\psi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \ldots, x_n := \theta_n]$.

Литерал числа

$$\overline{a} = \begin{cases} 0 & \text{если a = 0} \\ (\overline{b})' & \text{если a = b + 1} \end{cases}$$

10.2) Примитивная рекурсивность арифметических функций, функция вычисления простых чисел, частичного логорифма

$(+)$, $(\cdot)$, (x^y), $(:)$, $(\sqrt{})$, (деление с остатком) - примитивно-рекурсивные функции.

Лемма
$p_1 \ldots$ – простые числа
$p(i) : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ p(i) - p_i$ - примитивно-рекурсивная функция.
$p\log_n k = maxt :\ n^t | k$ - примитивно-рекурсивная функция.

10.3) Выразимость отношений и представимость функций в Ф А

Выразимость отношений в Ф А
Будем говорить, что отношени $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в Ф А, есть существует формула ρ, что:
1) если $< a_1, \ldots,\ a_n > \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \ldots,\ \overline{a_n})$.
2) если $< a_1, \ldots,\ a_n > \notin R$, то $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \ldots,\ \overline{a_n})$.

Теорема
Отношение "равно" выразимо в Ф А: $R = \{< x, x > | x \in \mathbb{N}_0\}$.

Представимость функций в Ф А
Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ представима в Ф А, если существует формула ϕ, что:
1) если $f(a_1, \dots, a_n) = $ u, то $\vdash \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{u})$.
2) если $f(a_1, \dots, a_n) \neq $ u, то $\vdash \neg\phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{u})$.

3) $\vdash (\exists x.\phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{x}))\ \&\ (\forall p.\forall q.\phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, p)\ \&\ \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, q) \to p = q)$.

Теорема - любая рекурсивная функция представима в Ф А.

Теорема - любая представимая функция в Ф А рекурсивна.

Теорема - Z, N, и U_n^k, предаставимы в Ф А.

Теорема
Пусть фнкции $f,\ g_1, \dots, g_k$ представимы в Ф А. Тогда $S < f,\ g_1, \dots, g_k >$ представима в Ф А.

10.4) Харктеристические функции (38)

Назовем харктеристически отношением c_f для функции $f : \mathbb{N}^n / to \mathbb{N}$ такое отношение $c_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, что $< k_1, \dots, k_n > \in c_f$ тогда и только тогда, когда $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$

Лемма
Если функция представима в Ф А, то её харктеристическое отношени вырозимо в Ф А.

10.5) Представимость примитивов N, Z, S, U в Ф А (39)

Примитивы Z, N, S, U представимы в Ф А.

11.1) Бетта-функция Гёделя (40)

$$\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c).$$

Теорема
Бета-функция Гёделя представима в Ф А формулой:

$$\beta(b,c,i,d) := \exists q.(b = q\cdot(1+c\cdot(i+1))+d)\&(d<1+c\cdot(i+1))$$

Деление на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что b = q · x + d и $0 \le d < x$.

Теорема
Если $a_0, \ldots,\ a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие b, c $\in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b,c,i)$.

Китайская теорема об остатках
Если $u_0, \ldots,\ u_n$ - попарно взаимно-просты и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\% u_i$. Положим, что $c = max(a_0, \ldots,\ a_n,\ n)$ и $u_i = 1 + c\cdot(i+1)$. Тогда НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$. Пусть p - простое число, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p (i<j)$. Заметим что $u_j - u_i = c\cdot(j-i)$. Значит, $c \vdots p$ или $(j-i)\vdots p$. Так как $j-i \le n$, то $c \vdots (j-i)$, потому, если и $(j-i)\vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1+c\cdot(i+1))\vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ - что невозможно.
$0 \le a_i < u_i$
Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся b, что

$$a_i = b\%(1+c\cdot(i+1)) = \beta(b,c,i)$$

11.2) Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в Ф А
Примитив $R<f,g>$ представим в Ф А формулой $\rho(x_1, \ldots,\ x_n,\ y,\ a)$

$$\exists b.\exists c.(\exists a_0,\ \beta(b,c,0,a_0)\&\phi(x_1, \ldots,\ x_n,\ a_n))$$

$$\&\forall k.k\ k<y \to \exists d.\exists e.\ \beta(b,c,k,d)\&\beta(b,c,k',e)$$

$$\&\gamma(x_1, \ldots, x_n,\ k,\ ,d,\ e)\&\beta(b,c,y,a).$$

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ представима в Ф А формулой $\phi(x_1, \ldots,\ x_n,\ y)$. Тогда примитив M<f> представим в Ф А формулой.

$$\mu(x_1, \ldots,\ x_n,\ y) := \phi(x_1, \ldots,\ x_n,\ y,\ 0)\&\forall u,\ u<y \to \neg\phi(x_1, \ldots,\ x_n,\ u,\ 0).$$

Если f - рекурсивная функция, то она представима в Ф А.

11.3) Гёделева нумерация (41)

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(	17	&	0	$0,0$	$27+6$
5	)	19	$\forall$	$(')$	$0,1$	$27+6\cdot 3$
7	,	21	$\exists$	$(+)$	$0,2$	$27+6\cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1,2$	$27+6\cdot 2\cdot 9$
11	$\neg$	$25+6\cdot k$	x_k	$(=)$	$0,2$	$29+6\cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27+6\cdot 2^k\cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29+6\cdot 2^k\cdot 3^n$	P_k^n			

11.4) Рекурсивность представимых в Ф А функций (42)

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и f представима в Ф А формулой ϕ, то f - рекурсивна.

Теорема
Существует формула w_1 со свободными переменными x_1 и x_2 такая что:
1) $\vdash w_1(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}, \overline{\rho})$, если ρ - гёделев номер доказательства самоприменения ϕ.
2) $\vdash \neg w_1(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}, \overline{\rho})$ иначе.

12.1) Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности) и ω - непротиворечивость
Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0)$, $\vdash \phi(\overline{1})$, $\vdash \phi(\overline{2})$, ... выполнено $\not\vdash \exists x.\neg\phi(x)$, то теория ω - непротиворечива.

12.2) Первая теорема о неполноте арифметики (43)

Если формальная арифметика непротиворечива, то $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.
Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то $\not\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

12.3) Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в Форме Россера
$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \neg\theta_1 = \theta_2$
Пусть $\langle\ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_2$, если $\vdash \neg\xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

12.4) Неполнота арифметики. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифетики. Consis

Ф А с классической моделью неполна.

Обозначим за $\psi(x,p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p\rangle \in$ Proof, если p — гёделев номер доказательства ξ.

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x,p)$
Формулой Consis назовём формулу $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$
Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Теорема
Если Consis доказуем, то Ф А противоречива.

12.5) Неформальное пояснение метода доказательств (44)

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash$ Consis $\rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Однако, если формальная арифметика непротиворечива, то $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

13.1) Теория множест (45)

Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двуместным функциональным символом $\in$, и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.

13.2) Определения равенства (46)

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.
Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей.
$A \subseteq B \equiv \forall x.x \in A \rightarrow x \in B$
$A = B \equiv A \subseteq BB \subseteq A$

13.3) Аксиоматика Цермело-Френкеля (47)

1) Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.
$\forall x.\forall y.\forall z.x = y \,\&\, x \in z \to y \in z.$

2) Аксиома пустого. Существует пустое множество
$\varnothing$. $\exists s.\forall t.\neg t \in s.$

3) Аксиома пары. Существует $\{a, b\}$. Каковы бы ни были два множества a и b, существует множество, состоящее в точности из них.
$\forall a.\forall b.\exists s.a \in s \,\&\, b \in s \,\&\, \forall c.c \in s \to c = a \vee c = b.$

4) Аксиома объединения: существует $\cup x$. Для любого непустого множества x найдется такое множество, которое состоит в точности из тех элементов, из которых состоят элементы x.
$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x.$

5) Аксиома степени: существует $\mathcal{P}(x)$. Каково бы ни было множество x, существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества x.
$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x.$

) Схема аксиом выделения: существует $\{t \in x | \varphi(t)\}$. Для любого множества x и любой формулы от одного аргумента $\varphi(y)$ (b не входит свободно в φ), найдется b, в которое входят те и только те элементы из множества x, что $\phi(y)$ истинно.
$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow (y \in x \,\&\, \varphi(y)).$

Теорема
Для любого множества x существует с множество {x}, содержащее в точности x.

Теорема - Пустое множество единственно.

Теорема
Для двух множеств s и t существует множество являющейся их пересечением.

Упорядоченная пара
Упорядоченной парой двух множеств a и b назовём $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, или $\langle a, b\rangle$.

Теорема
Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.

Теорема
<a, b> = <c, d> тогда и только тогда, когда a = b т c = d.

Инкремент - $x' \equiv x \cup \{x\}$.

13.4) Частичный, линейный, полный порядок (48)

Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).

Линейный: частичный + $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.

Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

13.5) Ординальные числа аксиома бесконечности (49)

Аксиома бесконечности - Существует $N : \varnothing \in N$ & $\forall x.x \in N \to x' \in N$.

Транзитивные множества - элемент его элемента, его элемент.

Ординал - Вполне упорядоченное отношением ($\in$), транзитивное множество.

Предельный ординал - такой x, что $x \neq \varnothing$ и нет y: y' = x.

Ординальные числа
$\overline{1} = \varnothing$.
$\overline{2} = \varnothing' = \{\varnothing\}$.
$\overline{3} = \{\varnothing\}' = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
$\dots$

13.6) Конечные ординалы (50)

Конечный ординал - если меньше любого предельного.

Теорема - x, y - ординалы, то $x \in y$ или $y \in x$.

13.7) Существования ординала ω (51)

ω - наименьший предельный ординал.

Теорема - ω существует.

sup x - наименьнший ординал, содержащий $x : x \subseteq sup\ x$.

13.8) Операции над ординалами (52)

$$a + b = \begin{cases} a & \text{если b} = 0 \\ (a+c)' & \text{если b} = \text{c'} \\ sup\{a + c \mid c < b\} & \text{если b предельный ординал} \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & \text{если b} \equiv \varnothing \\ (a\cdot \text{ c}) + \text{a'} & \text{если b} \equiv \text{c'} \\ sup\{a\cdot \text{ c} \quad | \quad \text{c} < \text{b}\} & \text{если b предельный ординал} \end{cases}$$

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{если b} \equiv \varnothing \\ (a^c)\cdot \text{ a} & \text{если b} \equiv \text{c'} \\ sup\{a^c \mid c < b\} & \text{если b предельный ординал} \end{cases}$$

Дизъюнкьное множество - множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \to \neg \exists t.t \in y \ \& \ t \in z$$

Прямое произведение дизъюнктного множества
Прямое произведение дизъюнктного множества a - множество $\times a$ всех таких множеств b, что:
1) b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе.
2) b содержит элементы только из $\cup a$.

14.1) Кардинальные числа (53)

t - ординал x: для всех $y \in x : |y| \neq |x|$ ординальное число у которого нет меньшего его равномощного.

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, если существует биекция $a \to b$.

$|\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}|$, если существует инъекция $a \to b$.

Кардинальное число - множество всех равномощных ординальных чисел.

14.2) Мощность множества (54)

Мощность множества |x| - такое кардинальное число t, что |t| = |x|.

$|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$, если |x| ≤ |y| & |x| ≠ |y|.

14.3) Теорема Кантора-Бернштейна (55)

Если |x| ≤ |y| & |y| ≤ |x|, то |x| = |y|.

14.4) Теорема Кантора (56)

Если x - некоторое множество, то |X| < |P(x)|

14.5) Аксиома выбора (57)

1) На любом семействе непустых множеств $\{A_S\}_{S \in \mathbb{S}}$ можно определить функцию $f : S \to \cup_S A_s$, которая по множеству возвращает его элемент.
2) Любое множество можно вполне упорядочить.
3) Для любых сюрьективной функции $f : A \to B$, найдется частично обратная $g : B \to A,\ g(f(x)) = x$.

14.6) Теорема Диаконеску (58)

Рассмотрим аксиоматику Цермело Френкеля поверх И И П, если добавим аксиому выбора то $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

15.1) Теорема Лёвенгейма-Сколема (59)

Номер вещественного числа
Номер вещественного числа - первое упоминание в литературе <j, y, n, p, r, c>
j - гёделев номер;
y - год издания;
n - номер;
p - страница;
r - страна;
c - позиция;

Пусть задана модель $< D, F_n, P_n >$, для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать, мощность D.

Пусть задана формальная теория с аксиомами a_n. Её мощность - мощность множества $\{a_n\}$.

$M' =< D', F'_n, P'_n >$ - элементарная подмодель

$M =< D, F_n, P_n >$, если:
1) $D' \subseteq D,\ F'_n,\ P'_n$ - сужение $F_n,\ P_n$ (замкнутая на D').
2) $M' \models \phi(x_1, \dots,\ x_n)$ тогда и только тогда, когда $M' \models \phi(x_1, \dots,\ x_n)$, при $x_i \in D'$.

Теорема
Пусть T - множество всех фопмул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель M'. Тогда найдется элементарная подмодель M", причем $|''| = max(\aleph_0,\ |T|)$.

15.2) Парадокс Сколема (60)

1) Как известно $\mathbb{R} = |P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако ZFC-счетно-аксиматизируемая теория. Значит, существует счетная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чем ошибка?
2) У равенств разный смысл, первое - в предметном языке, второе - в метаязыке. Внутри теории не выразить все способы нумерации, которые возможны.

16.1) Система S_∞ (61)

1) Язык: связки $\neg$, $\vee$, $\forall$; нелогические символы: $(+)$,$(\cdot)$,$(')$,0,$(=)$.
2) Аксиомы: все истинные формулы вида $\theta_1 = \theta_2$; все истинные отрицания формул вида $\neg\theta_1 = \theta_2$ (θ_i — термы без переменных).
3) Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \qquad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

сильные правила

$$\frac{\delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

и ещё два правила ...

бесконечная индукция

$$\frac{\alpha[x := \overline{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

сечение

$$\frac{\zeta \vee \alpha \qquad \neg\alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь:
α — секущая формула
Число связок в $\neg\alpha$ — степень сечения.

Дерево доказательства
1) Доказательства образуют деревья.
2) Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
3) Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).
4) Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).

Теорема - Если $\vdash_{\text{фа}} \alpha$, то $\vdash_\infty |\alpha|_\infty$.

Теорема - Если Ф.А. противоречива, то противоречива и S_∞.

Обратимость правил Теорема
Если формула α доказана и имеет вид, похожий на заключение правил де Моргана, отрицания и бесконечной индукции - то посылки соответствующих правил могут быть получены из самой формулы α доказательством, причём доказательством с не большей степенью и не большим порядком.

Устранение сечений Теорема
Если α имеет вывод степени $m > 0$ порядка t, то можно найти вывод степени строго меньшей m с порядком 2^t.

Итерационная экспонента

$$(a\uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a\uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

Теорема
Если $\vdash_\infty \sigma$ степени m порядка t, то найдётся доказательство без сечений порядка $(2\uparrow)^m(t)$

16.2) Доказательство непротиворечивости Ф А (62)

Два вида индукции
1) (Принцип математической индукции) Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \to \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.
2) (Принцип полной математической индукции) Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t.x < t \to \psi(x)) \to \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема - Приципы математической индукции эквивалентны.

Теорема
Принцип трансфинитной индукции. Если для $\varphi(x)$ - некоторого утверждения теории множеств — выполнено:

$$1)\ \varphi(\varnothing)$$

$$2)\ \text{Если } \forall \text{u.u} \in \upsilon \to \varphi(u),\ \text{то } \varphi(\upsilon) \text{ (где } \upsilon - \text{это ординал)}$$

то $\forall u.\varphi(u)$.

Лемма
Свойство индукции выполнено для натуральных чисел: если $\varphi(0)$ и $\forall x \in \mathbb{N}_0.f(x) \to f(x')$, то $\forall x \in \mathbb{N}_0.f(x)$.

Теорема - Система S_∞ непротиворечива ($\Rightarrow$ Ф А непротиворечива).