Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт по лабораторной работе №2 по курсу «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Прянишников А.Н.

Группа ИУ7-65Б

Оценка (баллы) ____________________

Преподаватели Андреева Т. В.

Москва — 2022 г.

1 Содержание работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n), \overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление оценок $\hat{\mu}$ и S^2 математического ожидания MX и дисперсии DX;

   (d) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n), \overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретические сведения

Интервальная оценка позволяет получить вероятностную характеристику точности оценивания неизвестного параметра. Пусть $\vec{X}_n$ – случайная выборка объёма n из генеральной совокупности $\vec{X}$ с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, для параметра θ был построен интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))$, где $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ являются функциями случайной выборки $\vec{X}_n$, таким чтобы выполнялось равенство:

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma \tag{2.1}$$

Интервал $\theta(\vec{X}_n), \theta(\vec{-}X_n)$ называют доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия γ или θ-доверительным интервалом.

Пусть известно, что у случайной величины нормальное распределение. Тогда в зависимости от известных параметров случайной величины можно построить доверительную оценку для неизвестных параметров системы.

Доверительная оценка для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, ..., X_n)$ – случайная выборка объёма n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами $\mu\sigma^2$, σ^2 известна.

В этом случае статистика $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} * \sqrt{n}$ имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому:

$$P\{-u_{1-\alpha} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} * \sqrt{n} < u_{1-\alpha}\} = 1 - 2\alpha \tag{2.2}$$

Доверительная оценка для математического ожидания при неизвестной дисперсии

При неизвестной дисперсии σ^2 статистика

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S\vec{X_n}} * \sqrt{n} \tag{2.3}$$

имеет распределение Стьюдента с n - 1 степенью свободы.

Поэтому нижнюю границу можно определить так:

$$\underline{\mu} = \overline{X} - \frac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \tag{2.4}$$

А верхнюю границу можно определить так:

$$\overline{\mu} = \overline{X} + \frac{S(\vec{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \tag{2.5}$$

В случае лабораторной работы используется именно этот вариант построения доверительного интервала.

Доверительная оценка для дисперсии при неизвестном математическом ожидании

В этом случае статистика

$$\frac{(n-1)S^2(\vec{X_n})}{\sigma^2} \tag{2.6}$$

имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенью свободы.

Поэтому доверительный интервал можно представить как:

$$P\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X_n})}{\chi^2_{1-\alpha} * (n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2(\vec{X_n})}{\chi^2_{\alpha} * (n-1)}\} \tag{2.7}$$

Код программы

На листинге 1 представлен код программы:

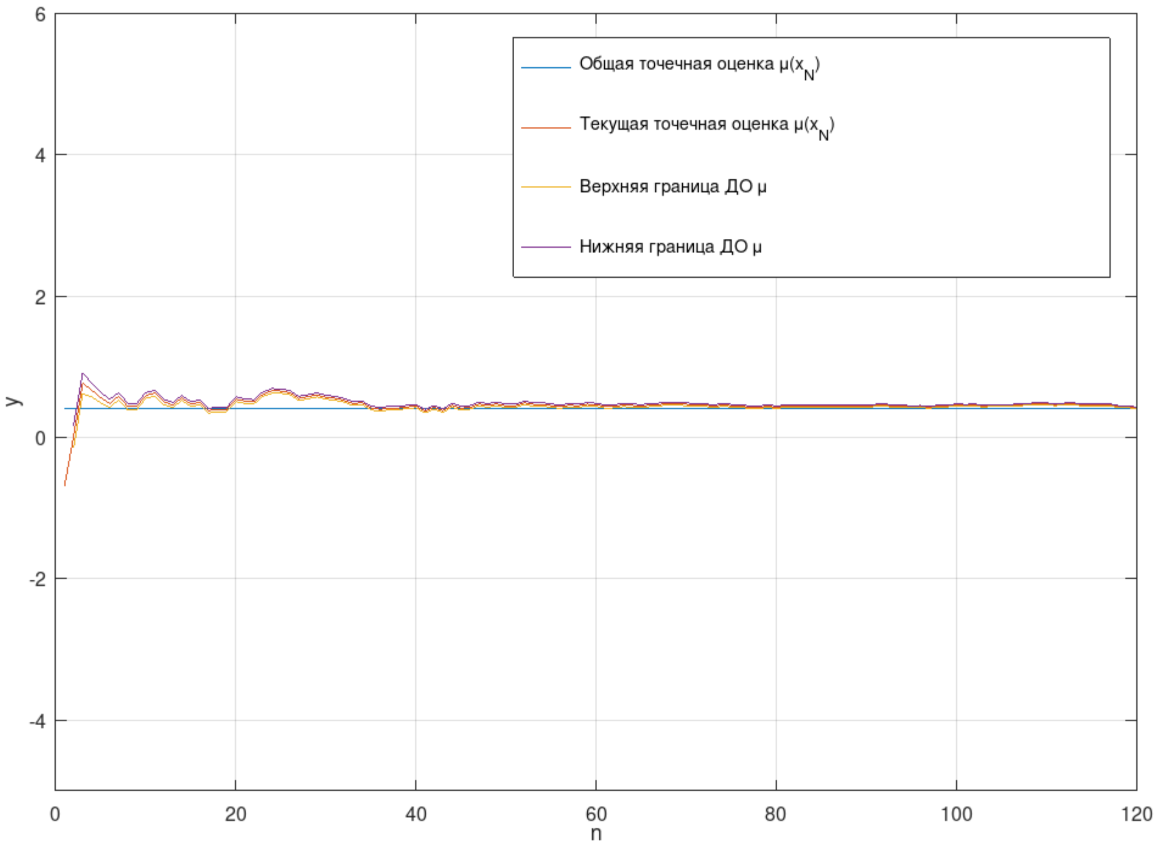
```
pkg load statistics

function mu_low = get_mu_low(n, mu, s2, gamma)
  mu_low = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function mu_high = get_mu_high(n, mu, s2, gamma)
  mu_high = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function s2_low = get_s2_low(n, s2, gamma)
  s2_low = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

function s2_high = get_s2_high(n, s2, gamma)
  s2_high = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end

X = [-0.68, 0.71, 2.27, 0.38, 0.14, 0.06, 1.21, -0.59, 0.44, 1.98, 1.00, ...
             - 0.88, -0.08, 1.87, -0.74, 0.83, -1.45, 0.58, 0.48, 3.26, 0.02, 0.26, ...
             2.96, 1.78, 0.58, 0.08, -1.60, 1.26, 1.28, -0.36, 0.15, -0.38, -1.04, ...
             0.95, -2.17, -0.30, 1.09, 0.39, 1.06, 0.98, -2.55, 2.62, -1.58, 3.75, ...
             -1.43, 0.92, 2.75, -0.55, 1.48, -0.96, 0.50, 2.67, -0.58, 0.41, -0.46, ...
             -0.48, 1.68, -0.08, 1.76, 0.08, -1.15, 0.66, 1.54, 0.17, -0.20, 1.34, ...
             1.08, 1.59, -0.05, 0.15, -0.35, 0.58, -0.87, 1.73, -0.27, 0.00, -0.67, ...
             0.13, 1.75, -0.59, 1.31, 1.20, 0.53, 0.14, -0.35, 1.00, -0.01, 0.21, ...
             1.58, -0.02, 1.28, 1.34, -1.66, 0.30, 0.08, 0.66, -0.26, 1.54, 1.22, ...
             1.24, 0.11, 0.79, -0.83, 1.41, 0.17, 0.55, 1.60, 1.26, 1.06, 0.39, ...
             -0.77, 1.49, 0.92, -1.58, 1.19, 0.13, 0.26, -2.14, 0.08, -1.75];

y = 0.9;
gamma = 1 - y;
N = length(X);

% Точечная оценка мат. ожидания
mu = mean(X);
```

```
% Смещённая оценка дисперсии
sigma2 = var(X);
% Исправленная оценка дисперсии
S2 = N / (N - 1) * sigma2;

% Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
mu_low = get_mu_low(N, mu, S2, gamma);

% Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
mu_high = get_mu_high(N, mu, S2, gamma);

% Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
s2_low = get_s2_low(N, S2, gamma);
% Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
s2_high = get_s2_high(N, S2, gamma);

% Вывод полученных ранее значений
fprintf('Доверительный интервал уровня = %.2f\n', y);
fprintf('а) Точечная оценка математического ожидания = %.3f\n', mu);
fprintf('   Точечная оценка дисперсии (смещенная) = %.3f\n', sigma2);
fprintf('   Точечная оценка дисперсии (исправленная) = %.3f\n', S2);

fprintf('б) Нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания = %.3f\n', mu_low);
fprintf('   Верхняя граница доверительного интервала для математического ожидания = %.3f\n', mu_high);

fprintf('в) Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n', s2_low);
fprintf('   Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n', s2_high);

% Создание массивов точечных оценок
mus = zeros(1, N);
s2s = zeros(1, N);

% Создание массивов границ доверительных интервалов
mus_low = zeros(1, N);
mus_high = zeros(1, N);
s2s_low = zeros(1, N);
s2s_high = zeros(1, N);

for i = 1:N
  mu = mean(X(1:i));
  sigma2 = var(X(1:i));

  if (i > 1)
    s2 = i / (i - 1) * sigma2;
```

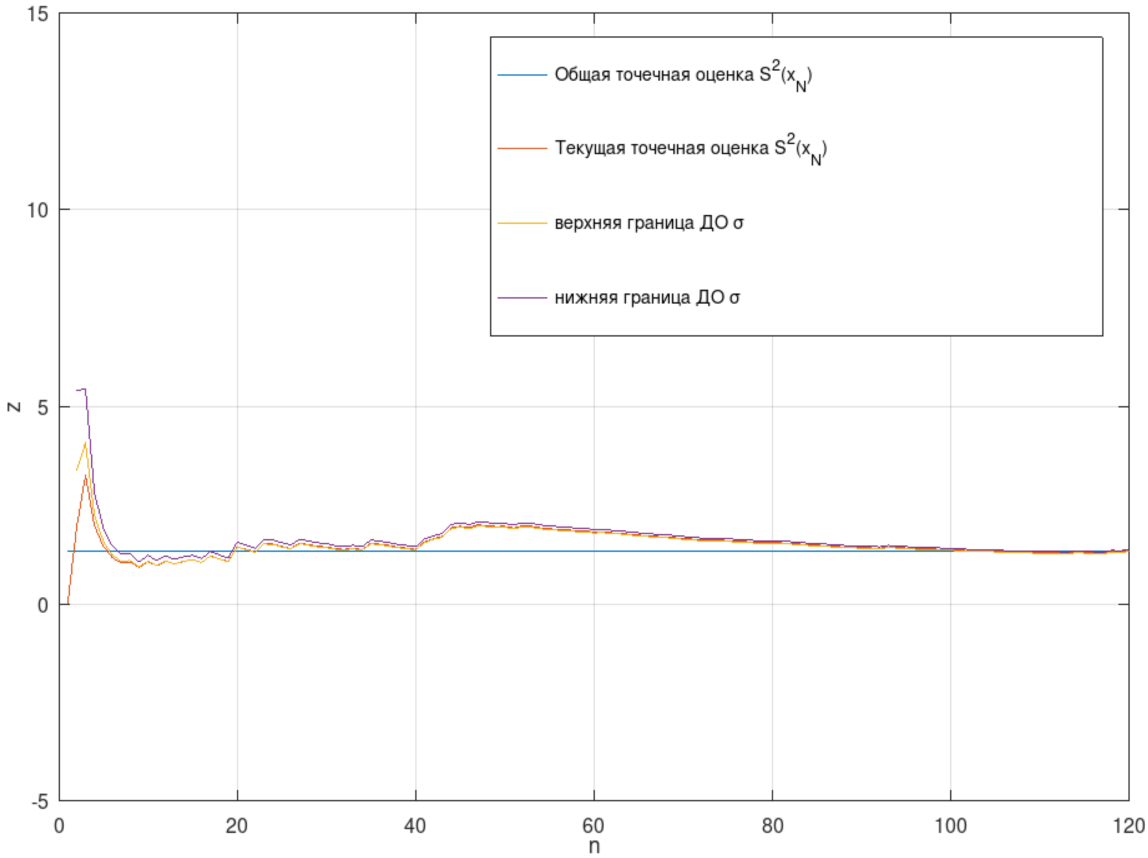
```
  else
    s2 = sigma2;
  endif

  % Точечная оценка матожидания
  mus(i) = mu;

  % Точечная оценка дисперсии
  s2s(i) = s2;
  % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
  mus_low(i) = get_mu_low(i, mu, s2, gamma);
  % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
  mus_high(i) = get_mu_high(i, mu, s2, gamma);
  % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
  s2s_low(i) = get_s2_low(i, s2, gamma);
  % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
  s2s_high(i) = get_s2_high(i, s2, gamma);
end

% Построение графиков
plot(1:N, [(zeros(1, N) + mu)', mus', mus_low', mus_high']);
set(gca, "fontsize", 16)
grid on;
xlabel('n');
ylabel('y');

legend('Общая точечная оценка \mu(x_N)', 'Текущая точечная оценка \mu(x_N)', 'Верхняя граница ДО \mu', ...
       'Нижняя граница ДО \mu');

set(gca, "ylim", [-5, 6]);
print -djpg g-1.jpg

figure;
plot(1:N, [(zeros(1, N) + s2)', s2s', s2s_low', s2s_high']);
set(gca, "fontsize", 16)
grid on;
xlabel('n');
ylabel('z');
legend('Общая точечная оценка S^2(x_N)', 'Текущая точечная оценка S^2(x_N)', 'верхняя граница ДО \sigma', ...
          'нижняя граница ДО \sigma');
print mus_low;
print mus_high;
set(gca, "ylim",[-5, 15]);
print -djpg g2-2.jpg
```

Результаты работы программы

На рисунке 1 представлен график функции точечных и интервальных оценок для математического ожидания:



На рисунке 2 представлен график функции точечных и интервальных оценок для дисперсии:



Результат работы программы представлен на рисунке 3:

```
Доверительный интервал уровня = 0.90
а) Точечная оценка математического ожидания = 0.416
   Точечная оценка дисперсии (смещенная) = 1.340
   Точечная оценка дисперсии (исправленная) = 1.351
б) Нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания = 0.403
   Верхняя граница доверительного интервала для математического ожидания = 0.430
в) Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии = 1.337
   Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии = 1.381
```