**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

# Отчет по лабораторной работе №1 по курсу «Моделирование»

**Тема** Распределение вероятностей

**Студент** Прянишников А. Н.

**Группа** ИУ7-75Б

**Оценка (баллы)** ______________________

**Преподаватель** Рудаков И. В.

Москва — 2022 г.

# Условие лабораторной работы

Цель лабораторной работы: реализовать ПО, позволяющее по заданным параметрам построить графики функции распределения и плотности вероятности заданных распределений.

Для выполнения поставленной цели требуется:

- привести формулы функции распределения и плотности вероятности заданных распределений;
- объяснить физический смысл распределений;
- написать программу на любом средстве реализации для решения поставленной цели;
- привести листинги кода и демонстрацию работы программы.

Мой вариант – 4. Согласно требованиям к лабораторной работе, нужно провести работу с двумя распределениями:

1. Равномерное распределение.
2. Распределение Эрланга.

# Теоретическая часть

В этом разделе будут рассмотрены два распределения: равномерное и Эрланга. Будут приведены их формулы плотности распределения и функции распределения, а также рассмотрен физический смысл распределений.

## Равномерное распределение

**Равномерное распределение** – распределение случайной величины, принимающей значения, принадлежащие некоторому промежутку конечной длины, характеризующееся тем, что плотность вероятности на этом промежутке постоянна.

**Вывод основных формул**

Пусть $A$ и $B$ – границы промежутка равномерного распределения. Исходя из определения, плотность можно посчитать по формуле 1:

$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{если } x \in [A, B] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Одно из важнейших свойств плотности распределения – нормированность. Его математическое представление выражено формуле 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\ = 1 \tag{2}$$

Для равномерного распределения вычислим интеграл, учитывая свойства интеграла и формулу 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\ = \int_{-\infty}^{A} 0\,dx + \int_{A}^{B} C\,dx + \int_{B}^{\infty} 0\,dx\ = \int_{A}^{B} C\,dx\ = C*(B-A) \tag{3}$$

Вычислим плотность распределения, сравняв полученное в формулах 2 и 3:

$$C * (B - A) = 1 \to C = 1/(B - A) \tag{4}$$

Окончательная формула плотности распределения для равномерной случайной величины представлена на формуле 5:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(B - A), & \text{если } x \in [A, B] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{5}$$

Функцию распределения, зная плотность, можно рассчитать по формуле 6:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt\ = 1 \tag{6}$$

Для равномерного распределения требуется рассмотреть три случая: $x < A$; $x \in [A, B]$; $x > B$. Рассчитывая интеграл для каждого из трёх случаев, получим формулу 7:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < A \\ \frac{x-A}{B-A}, & \text{если } x \in [A, B] \\ 1, & x > B \end{cases} \tag{7}$$

### Физический смысл равномерного распределения

Равномерное распределение возникает в тех ситуациях, когда каждая реализация выборки равновероятна. Например, молекулы во время хаотического движения могут равновероятно двигаться в любом существующем направлении.

Имея генератор равномерного распределения и зная функцию, обратную к функции распределения случайной величины, можно построить генератор выборки любого непрерывного распределения (не обязательно равномерного) с помощью метода обратного преобразования.

Существуют также частные преобразования, позволяющие на основе равномерного распределения получить случайные распределения другого вида. Так, например, для получения нормального распределения используется преобразование Бокса — Мюллера.

## Распределение Эрланга

**Распределение Эрланга** – частный случай Гамма-распределения, двухпараметрическое абсолютно непрерывное распределение, в котором параметр $k$ принимает целочисленное значение.

### Основные формулы

Распределение Эрланга задаётся двумя параметрами: $\alpha > 0$ и $k > 0$, причём второй параметр обязательно должен быть целым числом.

Формула плотности вероятности случайной величины, распределённой по закону Эрланга, представлена на формуле 8:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha * x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha * x} & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Функция распределения случайной величины выражена формулой 9:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t^{k-1} * e^{-x/\alpha}\, dt}{(k-1)! * \alpha^k} & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

**Физический смысл распределения**

Распределение Эрланга названо в честь математика Агнера Эрланга, впервые применившего его в задачах теории массового обслуживания и телефонии.

Это распределение интенсивно применяется в задачах телекоммуникации для моделирования входящего потока вызовов. Оно может быть также использовано для описания изменения работоспособности элемента системы, не имеющего резерва. Модель, построенная на этом распределении является более адекватной для описания поведения системы, чем экспоненциальная модель и охватывает два этапа эксплуатации, например, этапы проработки и нормальной эксплуатации.

# Практическая часть

В этом разделе будут выбраны средства разработки ПО, приведены листинги кода и демонстрация работы программы.

## Выбор средств разработки ПО

В качестве языка программирования выбран Golang. Это обусловлено тем, что автор имеет опыт разработки на данном языке, а также наличием пакетов, позволяющих настраивать построение графиков, требуемых для работы.

## Листинги кода

Абстрактное понятие распределение представлено интерфейсом Distribution. Структуры, его реализовывающие, должны иметь четыре функции: для подсчёта плотности случайной величины и функции распределения в конкретной точке, а также на определённом интервале.

На листинге  представлен интерфейс Distribution:

Листинг 1: Интерфейс для реализаций распределений

```
package distribution

type Distribution interface {
        ProbabilityDensityInPoint(x float64) (result float64)
        DistributionFunctionInPoint(x float64) (result float64)
        ProbabilityDensity(A, B float64) []float64
        DistributionFunction(A, B float64) []float64
        GetParams() (A, B float64)
}
```

Реализация требуемых распределений в конкретной точке для равномерного распределения представлена на листинге 2:

Листинг 2: Расчёт значений функций для равномерного распределения

```
func (ud *UniformDistribution) ProbabilityDensityInPoint(x float64) (result
   float64) {
        if x >= ud.A && x <= ud.B {
                result = 1 / (ud.B - ud.A)
        } else {
                result = 0
        }
        return result
}

func (ud *UniformDistribution) DistributionFunctionInPoint(x float64) (result
   float64) {
        switch {
        case x < ud.A:
                result = 0
        case x > ud.B:
                result = 1
        default:
                result = (x - ud.A) / (ud.B - ud.A)
        }
        return result
}
```

Реализация поиска плотности в конкретной точке для распределения Эрланга представлена на листинге 3:

Листинг 3: Расчёт функции плотности для распределения Эрланга

```

func (ed *ErlangDistribution) ProbabilityDensityInPoint(x float64) (result
   float64) {
        if x < 0 {
                result = 0
        } else {
                result = math.Pow(x, float64(ed.K)-1) * math.Exp(-x/ed.Alpha) /
                        (math.Pow(ed.Alpha, float64(ed.K)) * math.Gamma(float64(
                           ed.K)))
        }
        return result
}
```

Реализация поиска функции распределения в конкретной точке для распределения Эрланга представлена на листинге 4:

Листинг 4: Расчёт функции распределения случайной величины для распределения Эрланга

```
func (ed *ErlangDistribution) DistributionFunctionInPoint(x float64) (result
    float64) {
        if x < 0 {
                result = 0
        } else {
                result = lowGamma(x, float64(ed.K), ed.Alpha) /
                        (math.Pow(ed.Alpha, float64(ed.K)) * math.Gamma(float64(
                           ed.K)))
        }
        return result
}
```

## Демонстрация работы программы

На рисунке 1 представлен график функции плотности равномерного распределения с заданными параметрами.

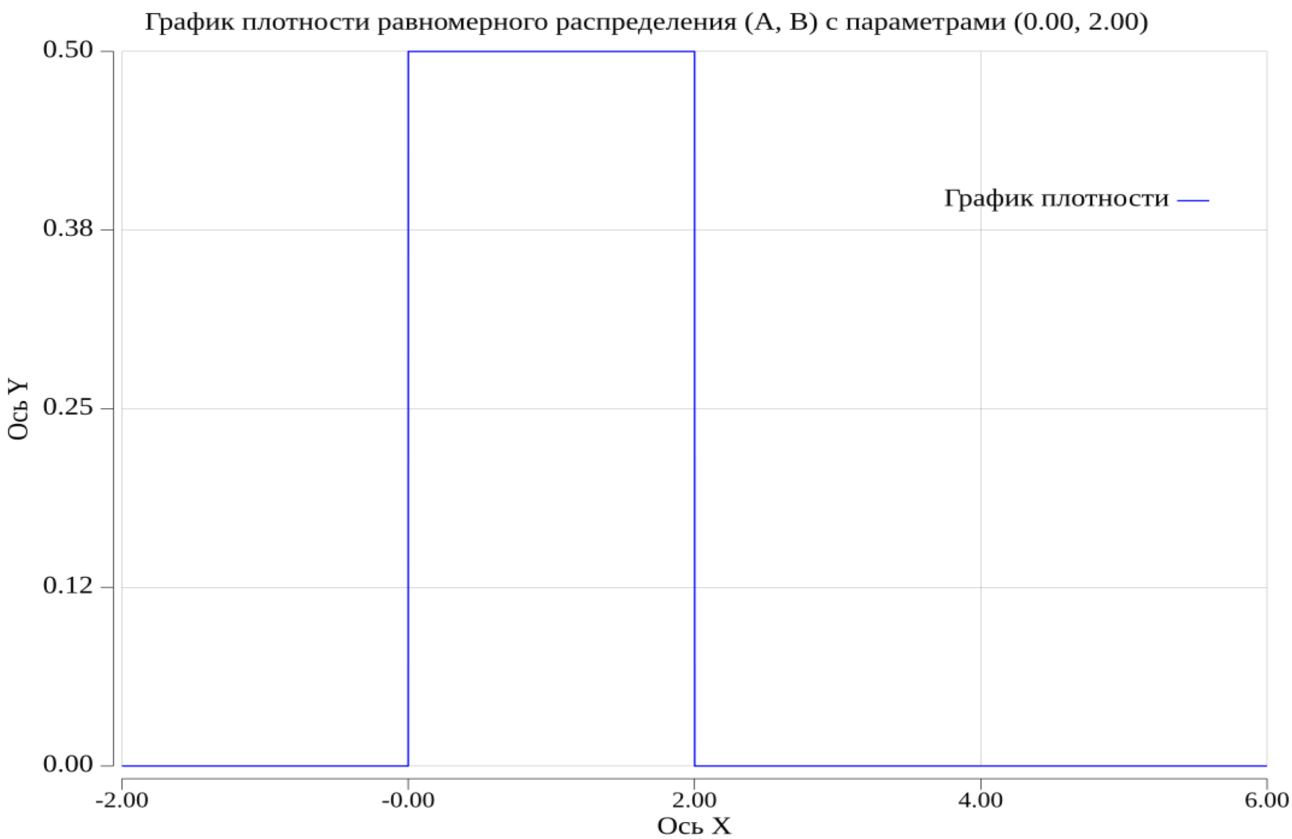


Рисунок 1: Демонстрация построения графика плотности для равномерного распределения

На рисунке 2 представлен график функции плотности распределения Эрланга с заданными параметрами.

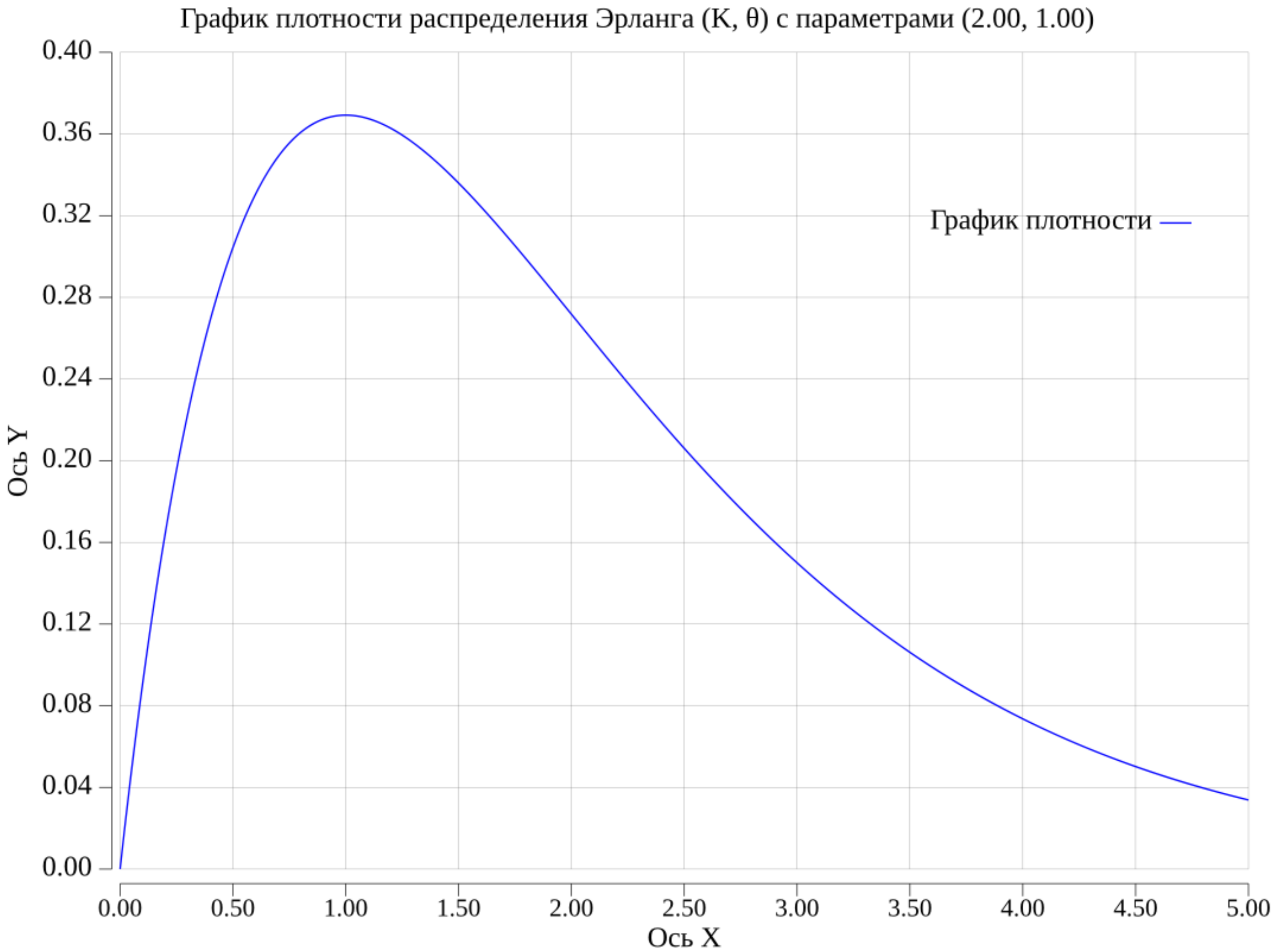


Рисунок 2: Демонстрация построения графика плотности для распределения Эрланга

На рисунке 3 представлен график функции распределения для равномерного распределения с заданными параметрами.

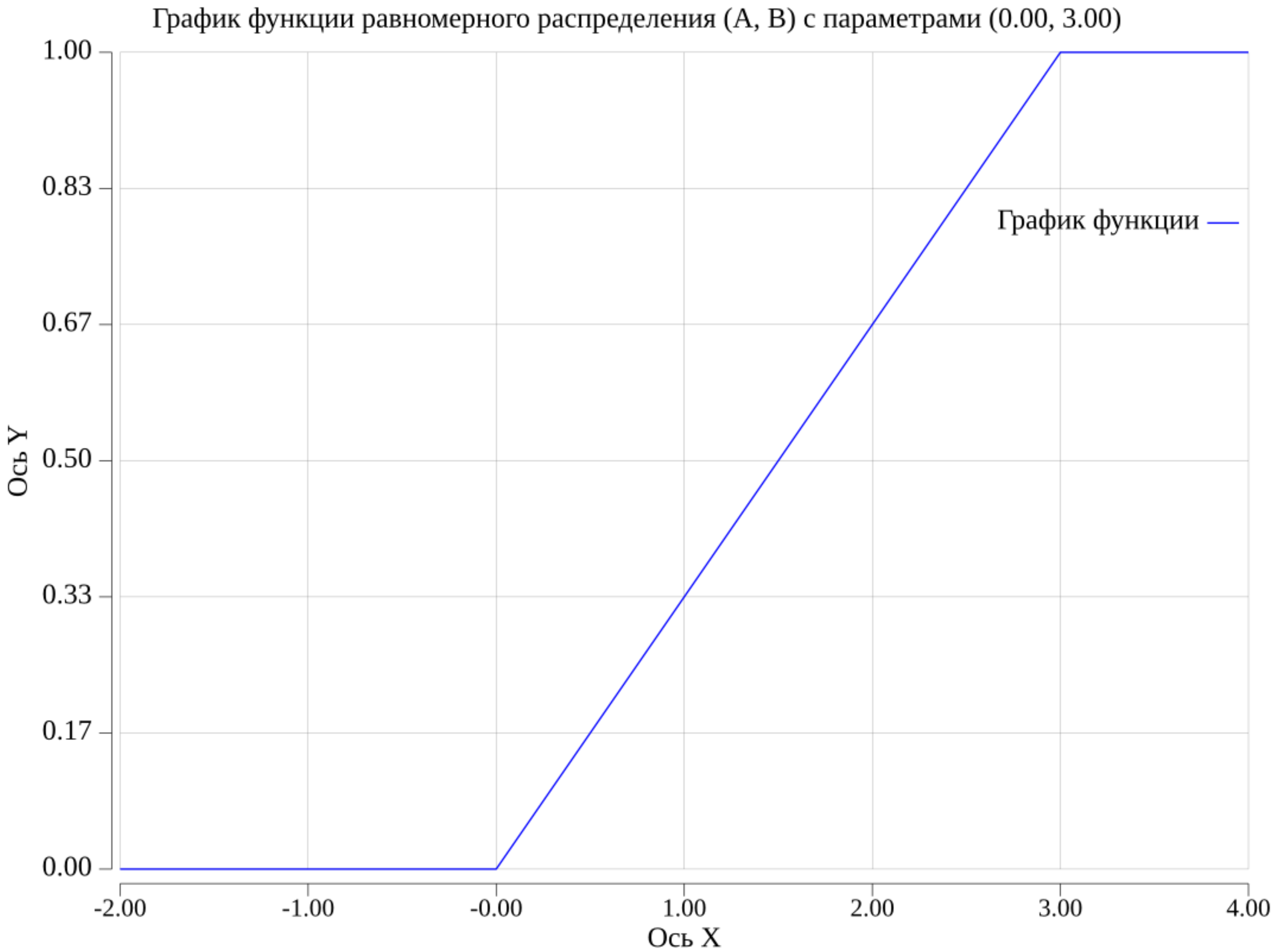


Рисунок 3: Демонстрация построения графика функции распределения для равномерного распределения

На рисунке 4 представлен график функции распределения для распределения Эрланга с заданными параметрами.

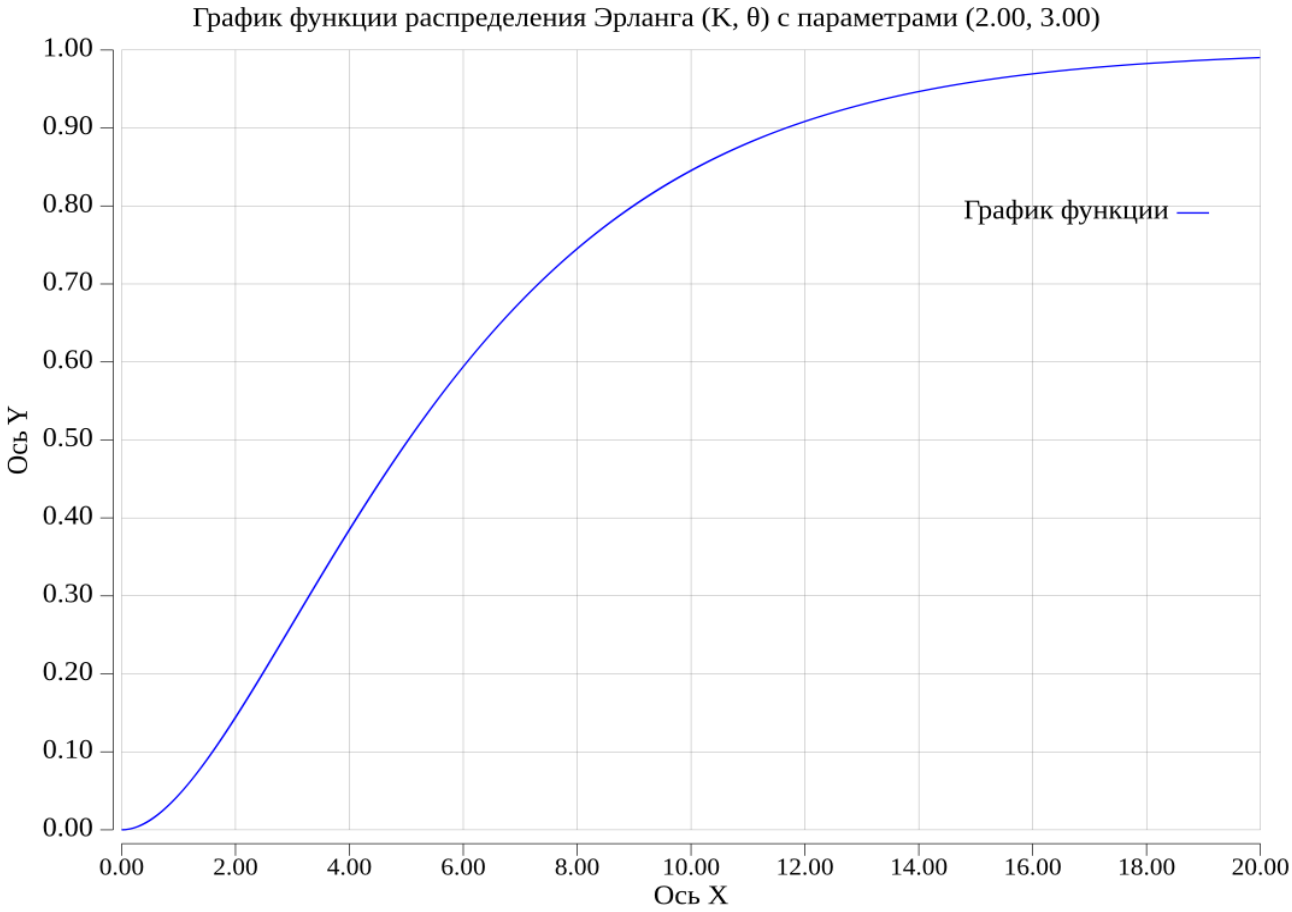


Рисунок 4: Демонстрация построения графика функции распределения для распределения Эрланга