**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

# Лабораторная работа №4 по курсу «Моделирование»

**Тема** Обслуживающий аппарат

**Студент** Прянишников А. Н.

**Группа** ИУ7-75Б

**Оценка (баллы)** ___________________

**Преподаватель** Рудаков И. В.

Москва — 2022 г.

# Условие лабораторной работы

Необходимо промоделировать систему, состоящую из генератора, памяти, и обслуживающего аппарата. Генератор подает сообщения, распределенные по равномерному закону, они приходят в память и выбираются на обработку по закону из ЛР1. Количество заявок конечно и задано. Предусмотреть случай, когда обработанная заявка возвращается обратно в очередь. Необходимо определить оптимальную длину очереди, при которой не будет потерянных сообщений. Реализовать двумя способами: используя пошаговый и событийный подходы.

Мой вариант – 4. Согласно требованиям к лабораторной работе, нужно провести работу с двумя распределениями:

1. Равномерное распределение.
2. Распределение Эрланга.

# Теоретическая часть

В этом разделе будет дано описание распределений, использованных в лабораторной работе, а также подходов к решению задачи.

## Равномерное распределение

**Равномерное распределение** – распределение случайной величины, принимающей значения, принадлежащие некоторому промежутку конечной длины, характеризующееся тем, что плотность вероятности на этом промежутке постоянна.

### Вывод основных формул

Пусть $A$ и $B$ – границы промежутка равномерного распределения. Исходя из определения, плотность можно посчитать по формуле 1:

$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{если } x \in [A, B] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Одно из важнейших свойств плотности распределения – нормированность. Его математическое представление выражено формуле 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \ = 1 \tag{2}$$

Для равномерного распределения вычислим интеграл, учитывая свойства интеграла и формулу 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \ = \int_{-\infty}^{A} 0\,dx + \int_{A}^{B} C\,dx + \int_{B}^{\infty} 0\,dx \ = \int_{A}^{B} C\,dx \ = C*(B-A) \tag{3}$$

Вычислим плотность распределения, сравняв полученное в формулах 2 и 3:

$$C * (B - A) = 1 \to C = 1/(B - A) \tag{4}$$

Окончательная формула плотности распределения для равномерной случайной величины представлена на формуле 5:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(B - A), & \text{если } x \in [A, B] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{5}$$

Функцию распределения, зная плотность, можно рассчитать по формуле 6:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \ = 1 \tag{6}$$

Для равномерного распределения требуется рассмотреть три случая: $x < A$; $x \in [A, B]$; $x > B$. Рассчитывая интеграл для каждого из трёх случаев, получим формулу 7:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < A \\ \frac{x-A}{B-A}, & \text{если } x \in [A, B] \\ 1, & x > B \end{cases} \tag{7}$$

## Распределение Эрланга

**Распределение Эрланга** – частный случай Гамма-распределения, двухпараметрическое абсолютно непрерывное распределение, в котором параметр $k$ принимает целочисленное значение.

### Основные формулы

Распределение Эрланга задаётся двумя параметрами: $\alpha > 0$ и $k > 0$, причём второй параметр обязательно должен быть целым числом.

Формула плотности вероятности случайной величины, распределённой по закону Эрланга, представлена на формуле 8:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha * x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha * x} & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Функция распределения случайной величины выражена формулой 9:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t^{k-1} * e^{-x/\alpha}\, dt}{(k-1)! * \alpha^k} & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

## Подходы к реализации задачи

По условию лабораторной работы требуется решить задачу двумя подходами:

1. **Пошаговый подход** основан на последовательном анализе состояний блоков системы в $t + dt$, новое состояние системы определяется алгоритмически.

2. **Событийный подход** основан на том, что состояния всех блоков системы анализируется только во время наступления какого-либо события. Момент наступления следующего события определяется минимальным значением из списка всех событий.

# Реализация

В этом разделе будет приведены листинги кода реализации алгоритмов, продемонстрирована работа программы и построены таблицы с результатами.

## Листинги кода

Для реализации ПО был использован язык Python, так как был использована библиотека scipy для генерации случайных чисел, распределённых по закону Эрланга.

На листинге 1 представлена реализация очереди.

На листинге 2 представлена реализация моделирования системы двумя подходами.

Листинг 1: Реализация очереди

```
    def enqueue(self, elem):
        if self.last_elem_index < (self.MaxLen - 1):
            self.last_elem_index += 1
            self.array[self.last_elem_index] = elem

    def is_empty(self):
        return self.last_elem_index < self.first_elem_index

    def dequeue(self):
        result = None
        if not self.is_empty():
            result = self.array[self.first_elem_index]
            self.first_elem_index += 1
        return result
```

Листинг 2: Реализация моделирования системы двумя подходами

```
request_generator = d.EvenDistribution(a, b)
k, alpha = 1, 1
oa_generator = d.ErlangDistribution(k, alpha)
event_model = m.EventModel(request_generator, oa_generator)
print(event_model.event())
delta = 0.001
time_model = m.TimeModel(request_generator, oa_generator, delta)
print(time_model.event())
```

## Полученные результаты

Тестирование проводилось при различных параметрах вероятности $p$ возврата обработанной заявки в очередь. Результаты для $p = 0.1$ приведены в таблице 1. Результаты для $p = 0.5$ приведены в таблице 2. Для обоих таблиц: первый столбец – количество обработанных заявок, во втором столбце – параметры равномерного распределения, в третьем – параметры распределения Эрланга. В двух последних – максимальная длина очереди для пошагового и событийного подходов соответственно. Для тестирования использовался один и тот же параметр seed для библиотеки random.

Таблица 1: Таблица полученных значений при $p = 0.1$

| N заявок | A, B | K, $\alpha$ | Пошаговый | Событийный |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | 1, 5 | 1, 1 | 6 | 6 |
| 1000 | 0, 2 | 1, 1 | 1092 | 1110 |
| 1000 | 0, 10 | 1, 1 | 5 | 6 |
| 1000 | 1, 5 | 1, 3 | 429 | 441 |

Таблица 2: Таблица полученных значений при $p = 0.5$

| N заявок | A, B | K, $\alpha$ | Пошаговый | Событийный |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | 1, 5 | 1, 1 | 163 | 168 |
| 1000 | 0, 2 | 1, 1 | 1493 | 1576 |
| 1000 | 0, 10 | 1, 1 | 7 | 7 |
| 1000 | 1, 5 | 1, 3 | 813 | 841 |