27 de Novembro de 2017

Métodos Computacionais de física I - 2017.2
Pedro Riba Mello

Relatório da tarefa 13

1 Introdução

O objetivo da tarefa foi calcular a integral 1 utilizando quatro métodos numéricos distintos. Os métodos Hitmiss, das médias, importance sampling e o método dos trapézios.

$$I = \int_0^1 x dx \tag{1}$$

2 Os quatro métodos distintos

2.1 O método HitMiss

Tal método consiste em sortear pontos aleatórios dentro de uma região fechada que contenha a curva a ser integrada. Como a integral é interpretada como a área abaixo da curva e os pontos sorteados são aleatórios temos a relação 2, onde $A_{região}$ é o espaço amostral sob o qual são sorteados os pontos, A_{figura} é a área abaixo da função a ser integrada, ou seja, o valor da integral e N_i é o número de pontos sorteados em determinada região.

$$\frac{A_{figura}}{A_{região}} = \frac{N_{figura}}{N_{região}} \tag{2}$$

No caso da equação 1 foi utilizado o retângulo $[(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)]$ como região delimitadora dos pontos sorteados.

2.2 Método das médias

O método das médias utiliza a equação 3 para calcular a integral.

$$I = (b-a) \cdot \langle f \rangle \tag{3}$$

Tal que:

$$\langle f \rangle \simeq \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

é a média de diversos pontos da função, **b** é o intervalo superior da integral e **a** é o intervalo inferior da integral. O erro associado ao método das médias pode ser calculado pela equação 4.

$$\delta I = (b-a) \cdot \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

Onde **N** é o número de pontos sorteados e σ_f é o desvio padrão dos pontos $f(x_i)$ sorteados.

2.3 Método "Importance Sampling"

O método "Importance Sampling" funciona com o mesmo principio do método das médias, porém, faz uma mudança de variável na integral com intuito de encontrar uma função equivalente que não varie tanto em seu valor, assim, consequentemente, diminuindo o erro numérico encontrado na integral. No caso da integral 1 foi utilizada uma função peso $p(x) = x^2$ de forma que:

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2}(x^2)dx \Rightarrow g(y) = x \text{ e } dy = x^2 dx \Rightarrow g(y) = (3y)^{\frac{1}{3}}$$

Logo, incorporando os novos limites para a integral 1 de acordo com $g(y)$ podemos re-escrever a integral como:

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (3y)^{\frac{1}{3}} dy \tag{5}$$

Finalmente, a integral 5 pode ser resolvida utilizando o método das médias.

2.4 Método dos trapézios

Tal método já foi discutido em detalhes anteriormente. Ele consiste em aproximar a área abaixo da curva por trapézios.

3 Conclusão

Foram escritas funções em C para efetuar o cálculo da integral 1 pelos quatro métodos citados, para os métodos que exigem sorteios foram utilizados 10000 pontos, já para o método dos trapézios, a precisão utilizada é igual ao erro obtido pelo método das médias. Os resultados são apresentados na tabela 1.

Tabela 1: Resultados

Método	I	Erro
Hitmiss	0.250200	-
Média	0.248723	0.002839
Sampling	0.248940	0.000656
Trapézios	0.249512	-

Por fim, percebe-se que os resultados são muito próximos do valor analítico da integral 1, que é **0.25**, além disso, o erro associado ao método Importance Sampling é menor que o erro associado ao método das médias, como esperado.