Definição de Derivada

Priscila Bemm

UEM

Pré-requisitos

- Limites

Pré-requisitos

- Limites
- Definição de derivada

Objetivos

Nesta aula, vamos calcular a derivada de algumas funções especiais, como: funções polinomiais, raiz e exponenciais. Além disso, vamos apresentar regras de derivação com respeito à soma, produto e quociente de funções.

Para se calcular a derivada de uma função mais complexa, os matemáticos demonstraram uma série de teoremas que nos permitem calcular derivadas com certa facilidade sem recorrer à definição.
Esses teoremas, que aqui chamaremos de regras, são assunto desse slide. No entanto, não são demonstrados, pois julgamos que foge aos nossos objetivos.

Regras de derivada

(i) Se $g(x) = c$, então $g'(x) = 0$.
Exemplos:
- Se $f(x) = 5$ então $f'(x) = 0$.
- Se $f(x) = -35$ então $f'(x) = 0$.
- Se $f(x) = 0,125$ então $f'(x) = 0$.

(ii) Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplos:

- Se $f(x) = x^4$ então $f'(x) = 4x^3$.
- Se $f(x) = x^{10}$ então $f'(x) = 10x^9$.
- Se $f(x) = x^{15}$ então $f'(x) = 15x^{14}$.

(iii) Se $f(x) = \sqrt[n]{x}$, então f é derivável em $(0, +\infty)$, se n é par e é derivável em $\mathbb{R}^*$, se n é ímpar. Além disso,

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Exemplos:

- Se $f(x) = \sqrt[4]{x}$ então $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.
- Se $f(x) = \sqrt[5]{x}$ então $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.
- Se $f(x) = \sqrt[13]{x}$ então $f'(x) = \dfrac{1}{13\sqrt[13]{x^{12}}}$.

Exemplos

Exemplo

1. Se $f(x) = x^8$, então $f'(x) = 8x^7$.
2. Se $y = x^{99}$, então $y' = 99x^{98}$.
3. Outras notações podem ser utilizadas: se $y = t^5$, então a derivada de y em relação a t é $\dfrac{dy}{dt} = 5t^4$.
   e $\dfrac{d}{dr}(t^5) = 5r^4$.

Teorema

Sejam I um intervalo aberto, c uma constante e $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em I. Então $f + g$, cf e $f \cdot g$ são deriváveis em I e se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em I. Além disso,

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$;
3. $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Exemplo

Vamos calcular a derivada da função $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 1$.

Pelos resultados apresentados anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)) &= \frac{d}{dx}(3x^5 - 2x^3 + 1) = \frac{d}{dx}(3x^5) - \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(1) \\
&= 3 \cdot \frac{d}{dx}(x^5) - 2 \cdot \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(1) \\
&= 3 \cdot (5x^4) - 2 \cdot (3x^2) + 0 \\
&= 15x^4 - 6x^2.
\end{aligned}$$

Exemplo

Considere a função $g(r) = 7r^3 \cdot \sqrt{r}$.

Pela regra da derivada do produto, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}(f(r)) &= \frac{d}{dr}(7r^3 \cdot \sqrt{r}) = 7r^3 \cdot \frac{d}{dr}(\sqrt{r}) + \sqrt{r} \cdot \frac{d}{dr}(7r^3) \\
&= 7r^3 \cdot \frac{1}{2} r^{-1/2} + \sqrt{r} \cdot (21r^2) \\
&= \frac{7}{2} \cdot r^{5/2} + 21r^2 \cdot r^{1/2} = \frac{7}{2} \cdot r^{5/2} + 21r^{5/2} \\
&= \frac{49}{2} \cdot \sqrt{r^5} = \frac{49}{2} \cdot r^2\sqrt{r}.
\end{aligned}$$

Exemplos

Observação: Se n é um inteiro positivo e $x \neq 0$, a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ é dada por

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

De fato, pela regra da derivada do quociente, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot (1)' - 1 \cdot (x^n)'}{[x^n]^2} = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot (nx^{n-1})}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1} \\ &= -\frac{n}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

Exemplos

Observe que $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ também satisfaz a regra da Proposição (ii), já que

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)} = -nx^{-n-1}.$$

Assim, em particular,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

Exemplo

Calcule a derivada de $p(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^2 + 4}$.

Pela regra da derivada do quociente de funções:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2+4)(3x^2-5) - (x^3-5x+1)(2x)}{[x^2+4]^2} \\
&= \frac{3x^4 - 5x^2 + 12x^2 - 20 - 2x^4 + 10x^2 - 2x}{[x^2+4]^2} \\
&= \frac{x^4 + 17x^2 - 2x - 20}{x^4 + 8x^2 + 16}.
\end{aligned}
$$

Exercício

Calcula-se que, daqui a t anos, a população de certo bairro será $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t-1}$ mil habitantes.

a) Qual será a variação da população durante o 3° ano?

b) Qual a taxa de variação daqui a 3 anos?

Exercícios

Calcule a derivada das funções a seguir:

a) $f(x) = x^4 - 2x^7 + 1 + \dfrac{3}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x^4 - 2x^7 + 1}$

c) $f(x) = x^3\sqrt{x}$

d) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^9}{x^3\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \dfrac{5x^{14} + \sqrt[4]{x^6} - 8x + 1}{3x^2 + 1}$

A velocidade do sangue pode ser descrita pela função $f(t) = 8\sqrt{t}$, a medida que vai do coração, percorre a aorta e outras artérias e, finalmente, atinge os vasos capilares, com consequente perda de velocidade.

a) Qual é a velocidade média entre $t = 4$ e $t = 9$.

b) Qual é a velocidade instantânea no momento $t = 4$? E em $t = 9$?

Derivada da função exponencial

Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

Exercício

Calcule a derivada de $f(x) = x^{10} - 2x^3 + e^x + 3e^x + 9$.

Exercício

Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3e^x}{e^x + 9}$.

Derivadas das Funções Trigonométricas

i) $\dfrac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos\ x$

ii) $\dfrac{d}{dx}(\cos\ x) = -\text{sen } x$

iii) $\dfrac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2\ x$

iv) $\dfrac{d}{dx}(cossec\ x) = -cossec\ x \cdot cotg\ x$

v) $\dfrac{d}{dx}(\sec\ x) = \sec\ x \cdot \text{tg } x$

vi) $\dfrac{d}{dx}(cotg\ x) = -cossec^2\ x$

Exercícios

Calcule as derivadas a seguir:

1. $y = \sin(x) - 2\cos(x) + e^x$
2. $y = x \cdot e^x - cossec\ x$
3. $y = \dfrac{1 - sec\ x}{\operatorname{tg}\ x}$

Derivadas de Ordem Superior

Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. A derivada de f, a função f', será chamada de derivada primeira de f ou de função derivada primeira de f.

Derivadas de Ordem Superior

Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. A derivada de f, a função f', será chamada de derivada primeira de f ou de função derivada primeira de f.
Caso a função f' seja derivável, a derivada de f' será denotada por f'' chamada de derivada segunda. Analogamente, se f'' for derivável, a derivada de f'' será denotada por f''' e chamada de derivada terceira de f.

Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. A derivada de f, a função f', será chamada de derivada primeira de f ou de função derivada primeira de f.
Caso a função f' seja derivável, a derivada de f' será denotada por f'' chamada de derivada segunda. Analogamente, se f'' for derivável, a derivada de f'' será denotada por f''' e chamada de derivada terceira de f.
Para $n > 3$, a derivada n-ésima da função f, denotada por $f^{(n)}$,é a derivada primeira da função $f^{(n-1)}$ (derivada $(n-1)$-ésima de f).

Derivadas de Ordem Superior

Notações

$$f^{(0)} = f$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f^{(1)}(x) = f'(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = f^{(2)}(x) = f''(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x) = f^{(3)}(x) = f'''(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n)}(x)$$

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos\ x$

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos\ x$
- $f''(x) = -\operatorname{sen}\ x$

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos\ x$
- $f''(x) = -\operatorname{sen}\ x$
- $f'''(x) = -\cos\ x$

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos\ x$
- $f''(x) = -\operatorname{sen}\ x$
- $f'''(x) = -\cos\ x$
- $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}\ x$

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos\ x$
- $f''(x) = -\operatorname{sen}\ x$
- $f'''(x) = -\cos\ x$
- $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}\ x$

Exemplo

Determine a 10ª derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos\ x$
- $f''(x) = -\operatorname{sen}\ x$
- $f'''(x) = -\cos\ x$
- $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}\ x$

Observe que as derivadas sucessivas correm em um ciclo de comprimento 4. Como $10 = 2 \cdot 4 + 2$, então

$$f^{(10)}(x) = f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen}\ x$$

Exercícios

1. Dado $y = 3x^5 + 6$, determine $y^{(3)}$.
2. Dado $y = x^5 + \cos(x)$, determine $y^{(6)}$.
3. Dado $y = 2x^5 + e^x$, determine $y^{(3)}$.

DÚVIDAS?