Derivadas e os Esboços de Gráficos

Priscila Bemm

UEM

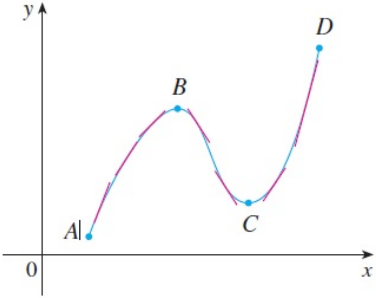
Objetivo

- *Aplicações da derivada como taxa de variação na física, química, biologia, economia e em outras ciências.*

O que f' nos diz sobre f?

Teste Crescente/Decrescente

- Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.
- Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.



Exemplo

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ *é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.*

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ *é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.*

$$f'(x) = 2x - 4$$

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$2x - 4 < 0$ quando $x < 2$, assim a função é decrescente em $(-\infty, 2)$

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$2x - 4 < 0$ quando $x < 2$, assim a função é decrescente em $(-\infty, 2)$
$2x - 4 > 0$ quando $x > 2$, assim, a função é crescente em $(2, -\infty)$

Exemplo

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$2x - 4 < 0$ quando $x < 2$, assim a função é decrescente em $(-\infty, 2)$
$2x - 4 > 0$ quando $x > 2$, assim, a função é crescente em $(2, -\infty)$

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ *é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.*

Exemplo

Determine os intervalos em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ *é crescente e os intervalos em que ela é decrescente.*

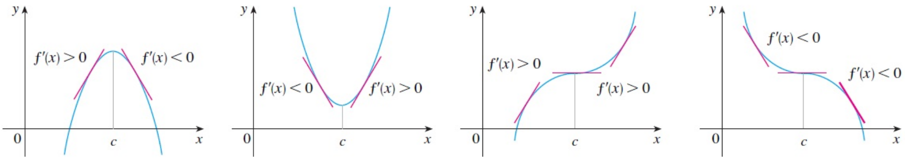
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

O que f' nos diz sobre f?

Teste da derivada primeira

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

- Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.
- Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.
- Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

Exemplo

Exemplo

Encontre os máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Exemplo

Encontre os máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Exemplo

Exemplo

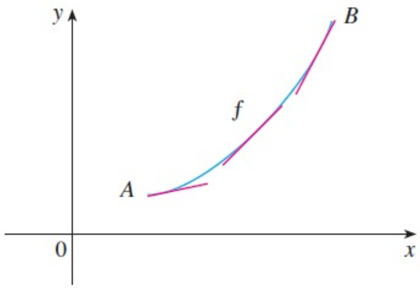
Encontre os máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

São mínimos locais $f(-1)$ e $f(1)$. É máximo local $f(0)$.

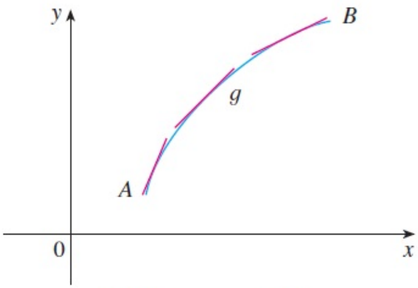
O que f'' nos diz sobre f?

Definição

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada côncava para cima em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada côncava para baixo em I.



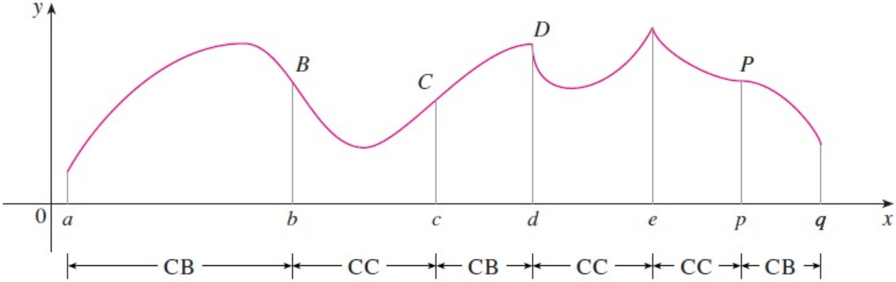
(a) Côncava para cima



(b) Côncava para baixo

Teste da Concavidade

- Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.
- Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.



Exemplo

Encontre os intervalos em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ *é côncava para cima e os intervalos em que é côncava para baixo.*

Exemplo

Encontre os intervalos em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ *é côncava para cima e os intervalos em que é côncava para baixo.*

$$f''(x) = 144x^2 - 24x - 24$$

Exemplo

Exemplo

Encontre os intervalos em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ *é côncava para cima e os intervalos em que é côncava para baixo.*

$$f''(x) = 144x^2 - 24x - 24$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Exemplo

Encontre os intervalos em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é côncava para cima e os intervalos em que é côncava para baixo.

$$f''(x) = 144x^2 - 24x - 24$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

f é côncava para cima em $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.
f é côncava para baixo em $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Definição

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P

Exemplo

Determine os pontos de inflexão da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Exemplo

Determine os pontos de inflexão da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

R:$x = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{2}$.

O que f'' nos diz sobre f?

Teste da derivada segunda

Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.
- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Observação

O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo quando $f''(c) = 0$ *. Em outras palavras, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois. Esse teste também falha quando* $f''(c)$ *não existe. Em tais casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes são aplicáveis, o Teste da Primeira da Derivada é frequentemente mais fácil de aplicar.*

Exemplo

Esboce o gráfico da função que satisfaz as seguintes condições:

- *Tem assíntota vertical em* $x = 0$;
- $f'(x) > 0$ se $x < -2$
- $f'(x) < 0$ se $x > -2(x \neq 0)$
- $f''(x) < 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 0$.

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

Exemplo

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}.$$

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}.$$

O cálculo das duas primeiras derivadas dá

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}.$$

O cálculo das duas primeiras derivadas dá

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

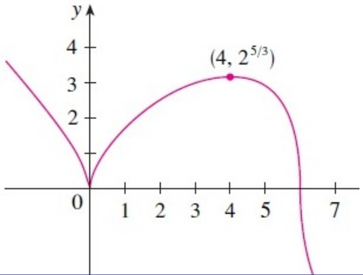
Uma vez que $f'(x) = 0$ quando $x = 4$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ ou $x = 6$, os números críticos são 0, 4 e 6.

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$x<0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(-\infty,0)$
$0<x<4$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(0,4)$
$4<x<6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(4,6)$
$x>6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(6,\infty)$

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$x<0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(-\infty,0)$
$0<x<4$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(0,4)$
$4<x<6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(4,6)$
$x>6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(6,\infty)$

O gráfico de $f(x)$ apresenta um ponto de máximo relativo em $x=4$, onde

$$f(4)=4^{2/3}(6-4)^{1/3}=4^{2/3}\cdot 2^{1/3}=2^{4/3}\cdot 2^{1/3}=2^{5/3}.$$



1º) Determinar o Domínio;

O conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

A intersecção com o eixo y ocorre no ponto $(0, f(0))$.
Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e isolamos x. (Você pode omitir esse passo se a equação for difícil de resolver.)

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

3º) Verificar se existe simetria e periodicidade;

Se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$ a função é par.

Se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$ a função é ímpar.

Se $f(x) = f(x+p)$, para todo $x \in Dom(f)$ e para algum p constante positiva, a função é periódica de período p.

Esboço de Curvas

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

3º) Verificar se existe simetria e periodicidade;

4º) Calcular assíntotas;

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, então $y = L$ é uma assíntota horizontal.

Se $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, então $x = a$ é uma assíntota vertical.

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

3º) Verificar se existe simetria e periodicidade;

4º) Calcular assíntotas;

5º) Verificar intervalos de crescimento ou decrescimento;

Use o Teste do crescimento/descrescimento. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais $f'(x)$ é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais $f'(x)$ é negativa (f é decrescente).

Esboço de Curvas

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

3º) Verificar se existe simetria e periodicidade;

4º) Calcular assíntotas;

5º) Verificar intervalos de crescimento ou decrescimento;

6º) Encontrar valores máximos e mínimos locais;

Encontre os números críticos de f (os números c nos quais $f'(c) =$ ou $f(c)$ não existe). Use então o Teste da Primeira Derivada. Se f' muda de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é um máximo local. Se f' muda de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Apesar de ser usualmente preferível usar o Teste da Primeira Derivada, você pode usar o Teste da Segunda Derivada se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um local mínimo, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

Esboço de Curvas

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

3º) Verificar se existe simetria e periodicidade;

4º) Calcular assíntotas;

5º) Verificar intervalos de crescimento ou decrescimento;

6º) Encontrar valores máximos e mínimos locais;

7º) Verificar a concavidade e pontos de Inflexão;

Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

Esboço de Curvas

1º) Determinar o Domínio;

2º) Determinar Intersecções com os Eixos;

3º) Verificar se existe simetria e periodicidade;

4º) Calcular assíntotas;

5º) Verificar intervalos de crescimento ou decrescimento;

6º) Encontrar valores máximos e mínimos locais;

7º) Verificar a concavidade e pontos de Inflexão;

8º) A partir das informações obtidas em todos os itens anteriores,

Exemplo

Esboce o gráfico de $y = \ln(4 - x^2)$.

Exemplo

Esboce o gráfico de $y = xe^x$.

Dúvidas?