Pontos de Máximo e Mínimo e Pontos Críticos de uma Função de Duas Variáveis

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.*

Objetivo

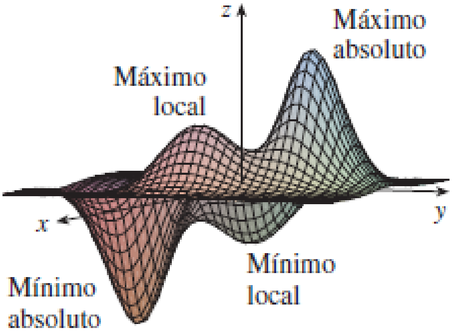
- *Usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.*

Bibliografia

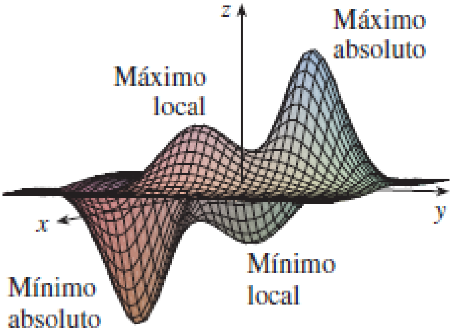
- *Cálculo III e IV*, ***Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.*** *Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Como vê-se no Cálculo I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo (valores extremos) de uma função de uma variável.
Veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.
Em particular veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade limitada de material para construí-la.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.

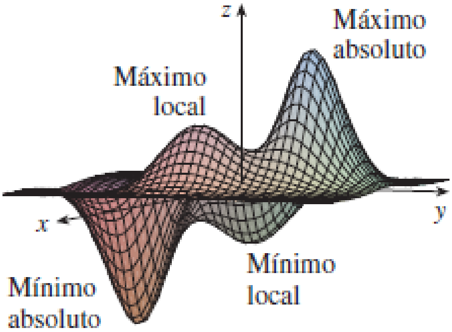


Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.



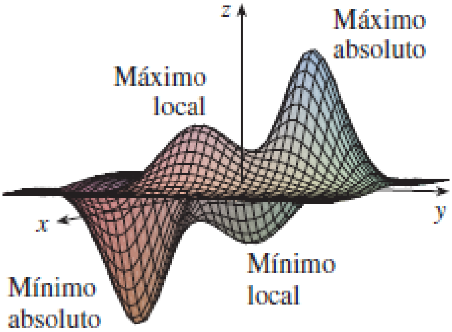
- Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um **máximo local**,

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.



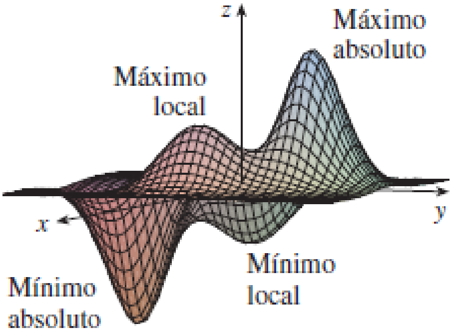
- Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um **máximo local**, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.



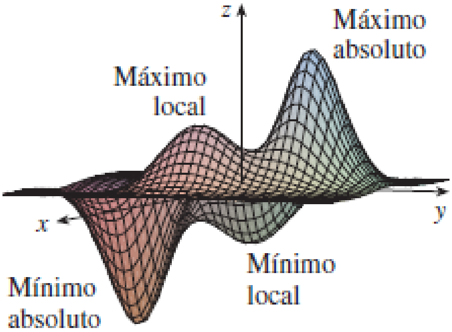
- Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um **máximo local**, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$.
- O maior destes dois valores é o **máximo absoluto**.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.



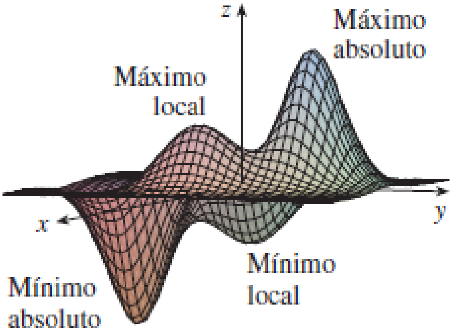
- Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um **máximo local**, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$.
- O maior destes dois valores é o **máximo absoluto**.
- Do mesmo modo, f tem dois **mínimos locais**,

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.



- Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um **máximo local**, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$.
- O maior destes dois valores é o **máximo absoluto**.
- Do mesmo modo, f tem dois **mínimos locais**, ou seja, onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na figura.



- Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um **máximo local**, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$.
- O maior destes dois valores é o **máximo absoluto**.
- Do mesmo modo, f tem dois **mínimos locais**, ou seja, onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos.
- O menor destes dois valores é o **mínimo absoluto**.

Definição

Seja f uma função de duas variáveis.

- *f tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). Isso significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) em algum disco aberta com centro (a, b). O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**.*
- *Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b). O número $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.*
- *Se $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos $(x, y) \in Dom(f)$ então f tem um **máximo absoluto** em (a, b).*
- *Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todos $(x, y) \in Dom(f)$ então f tem um **mínimo absoluto** em (a, b).*

Teorema

Se uma função f *tem um máximo ou mínimo local em* (a, b) *e as derivadas parciais de primeira ordem de* f *existem nesses pontos, então* $f_x(a, b) = 0$ *e* $f_y(a, b) = 0$.

Teorema

Se uma função f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

Observação

- *Note que pelo teorema anterior, nos pontos de máximo e mínimo locais, o plano tangente tem equação $z = z_0$, ou seja, nesses pontos o plano tangente é horizontal (paralelo ao plano xy).*
- *Observe que o teorema anterior afirma que nos pontos de máximo e mínimo locais, o vetor gradiente se anula.*
- *Porém, ele não afirma que se o vetor gradiente é nulo num ponto, então esse ponto é de mínimo ou máximo local.*

Definição

Um ponto (a, b) é chamado ***ponto crítico*** *(ou* ***ponto estacionário****) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir.*

O teorema anterior diz que se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f.

No entanto, como no Cálculo I, nem todos os pontos críticos originam máximos ou mínimos. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

A seguir veremos dois exemplos: no primeiro deles, há pontos críticos que são mínimos locais e no segundo há pontos críticos que não são máximos neme mínimos locais.

Seja

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14.$$

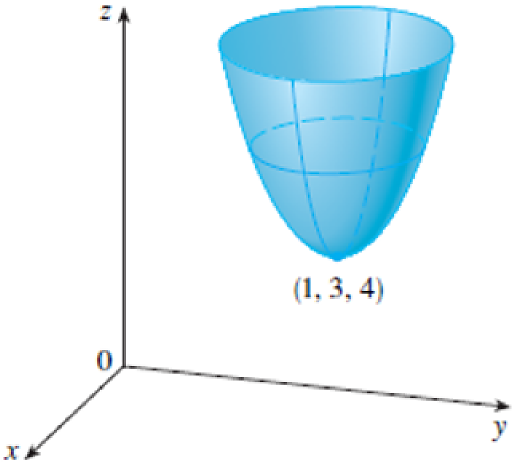
Então,

$$f_x(x,y) = 2x - 2 \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = 2y - 6$$

Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto, o único ponto crítico é $(1,3)$. Completando os quadrados, achamos

$$f(x,y) = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$$

Já que $(x-1)^2 \geq 0$ e $(y-3)^2 \geq 0$, temos $f(x,y) \geq 4$ para todos os valores de x e y. Logo, $f(1,3) = 4$ é um mínimo local e, de fato, é o mínimo absoluto de f.
Isso pode ser confirmado geometricamente a partir do gráfico de f, que é o paraboloide elíptico com vértice $(1,3,4)$.


z
(1, 3, 4)
0
x
y

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0,0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x,y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0,0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x,y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x,y) = y^2 > 0$ sempre que $y \neq 0$.

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0,0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x,y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x,y) = y^2 > 0$ sempre que $y \neq 0$.
- Agora, observe todo disco aberto com centro $(0,0)$ contém pontos do eixo x e do eixo y.

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0,0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x,y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x,y) = y^2 > 0$ sempre que $y \neq 0$.
- Agora, observe todo disco aberto com centro $(0,0)$ contém pontos do eixo x e do eixo y.
- Portanto, em todo disco aberto com centro $(0,0)$ há pontos em que f tem valores positivos,

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0,0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x,y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x,y) = y^2 > 0$ sempre que $y \neq 0$.
- Agora, observe todo disco aberto com centro $(0,0)$ contém pontos do eixo x e do eixo y.
- Portanto, em todo disco aberto com centro $(0,0)$ há pontos em que f tem valores positivos, bem como pontos em que f tem valores negativos.

Exemplo

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x, y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x, y) = y^2 > 0$ sempre que $y \neq 0$.
- Agora, observe todo disco aberto com centro $(0, 0)$ contém pontos do eixo x e do eixo y.
- Portanto, em todo disco aberto com centro $(0, 0)$ há pontos em que f tem valores positivos, bem como pontos em que f tem valores negativos.
- Então, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f.

Exemplo

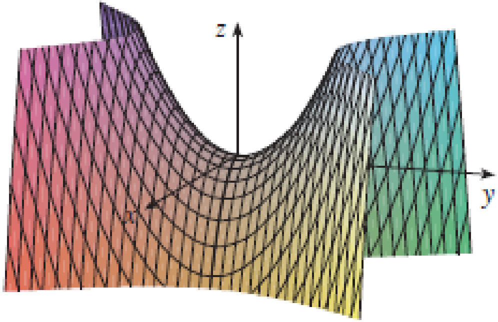
Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

- Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.
- Observe que, para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x, y) = -x^2 < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Entretanto, para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x, y) = y^2 > 0$ sempre que $y \neq 0$.
- Agora, observe todo disco aberto com centro $(0, 0)$ contém pontos do eixo x e do eixo y.
- Portanto, em todo disco aberto com centro $(0, 0)$ há pontos em que f tem valores positivos, bem como pontos em que f tem valores negativos.
- Então, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f.
- Portanto, f não tem valores máximos e mínimos locais.

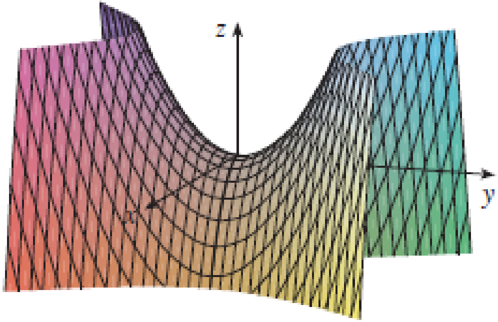
- O exemplo anterior ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico.

- O exemplo anterior ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico.
- O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tem plano tangente horizontal $z = 0$ na origem.



$z = y^2 - x^2$

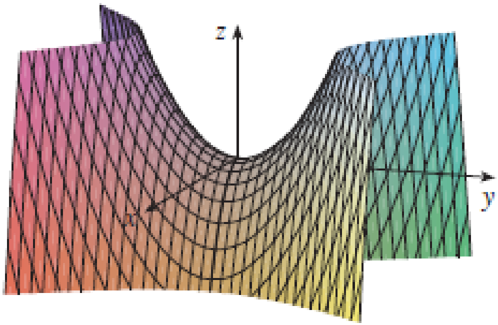
- O exemplo anterior ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico.
- O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tem plano tangente horizontal $z = 0$ na origem.



$z = y^2 - x^2$

- É possível observar que $f(0,0) = 0$ é um máximo na direção do eixo x, mas um mínimo na direção do eixo y.

- O exemplo anterior ilustra o fato de que uma função pode não ter nem máximo nem mínimo em um ponto crítico.
- O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tem plano tangente horizontal $z = 0$ na origem.



$z = y^2 - x^2$

- É possível observar que $f(0,0) = 0$ é um máximo na direção do eixo x, mas um mínimo na direção do eixo y.

Teste da Derivada Segunda

Teste da Derivada Segunda

Seja f um função de duas variáveis tal que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em um disco aberta com centro em (a, b).

Teste da Derivada Segunda

Seja f um função de duas variáveis tal que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em um disco aberta com centro em (a, b). Suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f.

Teste da Derivada Segunda

Seja f um função de duas variáveis tal que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em um disco aberta com centro em (a, b). Suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

Teste da Derivada Segunda

Seja f um função de duas variáveis tal que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em um disco aberta com centro em (a, b). Suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um ponto de mínimo local e $f(a, b)$ é um valor de mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto de máximo local e $f(a, b)$ é um valor de máximo local.

(c) Se $D < 0$ então (a, b) não é um ponto de mínimo local e nem de máximo local.

Observação 1. No caso (c) o ponto (a, b) é chamado *ponto de sela* de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

Observação 2. Se $D = 0$, não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

Observação 3. Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Exemplo

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Exemplo

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Solução: Primeiro localizamos os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolvê-las, substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

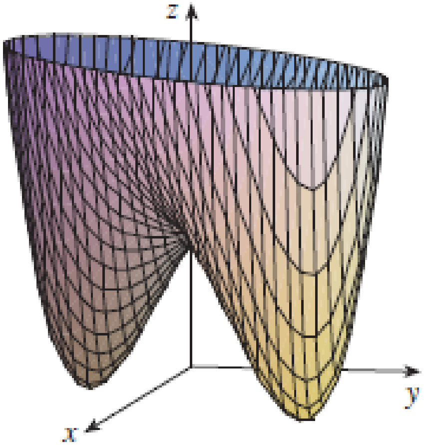
$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

- Como $D(0,0) = -16 < 0$, segue do item (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem $(0,0)$é um ponto de sela; e ou seja, f não tem nem máximo local nem mínimo local em $(0,0)$.
- Como
$$D(1,1) = 128 > 0 \text{ e } f_{xx}(1,1) = 12 > 0,$$
temos do item (a) Teste da Segunda Derivada que $(1,1)$ é um ponto de mínimo local $f(1,1) = -1$ é um valor de mínimo local.
- Da mesma forma, temos
$$D(-1,-1) = 128 > 0 \text{ e } f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0,$$
temos do item (a) Teste da Segunda Derivada que $(-1,-1)$ também é um ponto de mínimo local $f(-1,-1) = -1$ é um valor de mínimo local.



$$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Exemplo

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ *e o plano*

$$x + 2y + z = 4.$$

Exemplo

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ *e o plano*

$$x + 2y + z = 4.$$

Solução: A distância entre um ponto qualquer (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

Mas, se (x, y, z) pertence ao plano $x + 2y + z = 4$, então $z = 4 - x - 2y$ e assim temos

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

Podemos minimizar d minimizando a expressão mais simples

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

- Como

$$f_{xx} = 4, f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$

- Como
$$f_{xx} = 4, f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$
temos
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 4 \cdot 10 - 4^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0,$$

- Como
$$f_{xx} = 4, f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$
temos
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 4 \cdot 10 - 4^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0,$$
- Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$

- Como

$$f_{xx} = 4, f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$

temos

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 4 \cdot 10 - 4^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0,$$

- Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$
- Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de $(1, 0, -2)$.

- Como
$$f_{xx} = 4, f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$
temos
$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 4 \cdot 10 - 4^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0,$$
- Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$
- Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de $(1, 0, -2)$.
- Se $x = \frac{11}{6}$ e $y = \frac{5}{3}$, então $d = \frac{5}{6}\sqrt{6}$.

- Como
$$f_{xx} = 4, f_{xy} = 4 \text{ e } f_{yy} = 10,$$
  temos
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 4 \cdot 10 - 4^2 = 24 > 0 \text{ e } f_{xx} > 0,$$
- Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, f tem um mínimo local em $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$
- Intuitivamente podemos ver que esse mínimo local é, na verdade, um mínimo absoluto, porque precisa haver um ponto no plano dado que esteja mais próximo de $(1, 0, -2)$.
- Se $x = \frac{11}{6}$ e $y = \frac{5}{3}$, então $d = \frac{5}{6}\sqrt{6}$.
- Logo, a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$ é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$

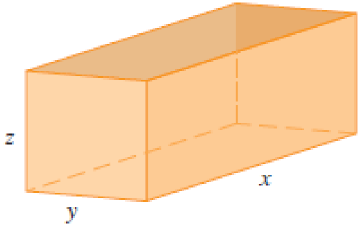
Exemplo

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ *de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.*

Exemplo

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ *de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.*

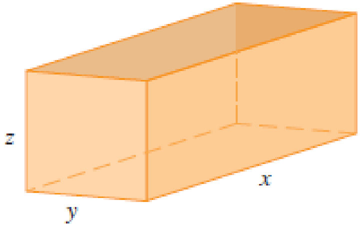
Soução: Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) como mostrado na figura



Exemplo

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ *de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.*

Soução: Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) como mostrado na figura



Então, o volume da caixa é

$$V = xyz.$$

Podemos expressar V como função só de x e y e usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Isolando z nessa equação, obtemos $z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$, e V fica

$$V = xy \cdot \frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

Se V é um máximo, então $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$, mas $x = 0$ ou $y = 0$ dá $V = 0$, de modo que precisamos resolver as equações

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

- Disso obtemos

$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy$$

- Disso obtemos

$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2$$

- Disso obtemos

$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.

- Disso obtemos
$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$
sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.
- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$x^2 = 12 - 2x^2$$

- Disso obtemos

$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.

- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos

$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

- Disso obtemos
$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$
sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.
- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4,$$

- Disso obtemos

$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.

- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos

$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4, \text{ ou seja, } x = 2.$$

- Disso obtemos
$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$
sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.
- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4, \text{ ou seja, } x = 2.$$
- Analogamente, substituindo $x = y$ em $y^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$y^2 = 12 - 2y^2,$$

- Disso obtemos

$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.

- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos

$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4, \text{ ou seja, } x = 2.$$

- Analogamente, substituindo $x = y$ em $y^2 = 12 - 2xy$, obtemos

$$y^2 = 12 - 2y^2, \text{ ou seja, } y = 2.$$

- Disso obtemos
$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$
sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.
- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4, \text{ ou seja, } x = 2.$$
- Analogamente, substituindo $x = y$ em $y^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$y^2 = 12 - 2y^2, \text{ ou seja, } y = 2.$$
- Substituindo esses valores em $2xz + 2yz + xy = 12$, obtemos
$$4z + 4z + 4 = 12,$$

- Disso obtemos
$$x^2 = 12 - 2xy \text{ e } y^2 = 12 - 2xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$
sendo a última implicação válida pois x é y são positivos por serem medidas.
- Substituindo $x = y$ em $x^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$x^2 = 12 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4, \text{ ou seja, } x = 2.$$
- Analogamente, substituindo $x = y$ em $y^2 = 12 - 2xy$, obtemos
$$y^2 = 12 - 2y^2, \text{ ou seja, } y = 2.$$
- Substituindo esses valores em $2xz + 2yz + xy = 12$, obtemos
$$4z + 4z + 4 = 12, \text{ ou seja, } z = 1.$$

- Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V.

- Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V.
- Ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V.

- Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V.
- Ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V.
- Portanto, esse máximo pode ocorrer quando $x = y = 2$ e $z = 1$.

- Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V.
- Ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V.
- Portanto, esse máximo pode ocorrer quando $x = y = 2$ e $z = 1$.
- Assim, $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, e o volume máximo da caixa é $4m^3$.

Observação

- *Para uma função f de uma variável, o Teorema do Valor Extremo diz que, se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto.*
- *De acordo com o Método dos Intervalos Fechados, achamos esses valores calculando f não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.*
- *Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante.*

- Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto **fechado** de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto D que contém todos os seus pontos da fronteira.

- Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto **fechado** de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto D que contém todos os seus pontos da fronteira.
- Um ponto da **fronteira** de D é um ponto (a, b) tal que qualquer disco aberto com centro em (a, b) contém pontos pertencentes a D e pontos que não pertencem a D.

- Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto **fechado** de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto D que contém todos os seus pontos da fronteira.
- Um ponto da **fronteira** de D é um ponto (a, b) tal que qualquer disco aberto com centro em (a, b) contém pontos pertencentes a D e pontos que não pertencem a D.
- Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

é um conjunto fechado.

- Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto **fechado** de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto D que contém todos os seus pontos da fronteira.
- Um ponto da **fronteira** de D é um ponto (a, b) tal que qualquer disco aberto com centro em (a, b) contém pontos pertencentes a D e pontos que não pertencem a D.
- Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  é um conjunto fechado.
- De fato, esse conjunto é constituído por todos os ponto dentro e sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

- Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto **fechado** de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto D que contém todos os seus pontos da fronteira.
- Um ponto da **fronteira** de D é um ponto (a,b) tal que qualquer disco aberto com centro em (a,b) contém pontos pertencentes a D e pontos que não pertencem a D.
- Por exemplo, o disco

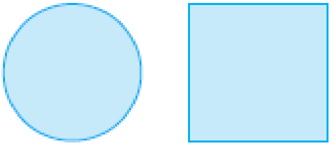
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  é um conjunto fechado.
- De fato, esse conjunto é constituído por todos os ponto dentro e sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- Os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ são os pontos de fronteira.

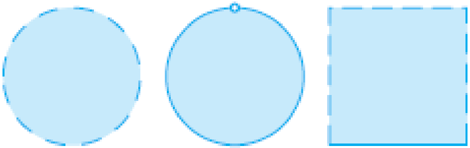
- Do mesmo modo que os intervalos fechados contêm suas extremidades, um conjunto **fechado** de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto D que contém todos os seus pontos da fronteira.
- Um ponto da **fronteira** de D é um ponto (a, b) tal que qualquer disco aberto com centro em (a, b) contém pontos pertencentes a D e pontos que não pertencem a D.
- Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  é um conjunto fechado.
- De fato, esse conjunto é constituído por todos os ponto dentro e sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- Os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ são os pontos de fronteira.
- Se um único ponto da fronteira for omitido, o conjunto deixa de ser fechado.



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos que não são fechados

- Um conjunto **limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em algum disco aberto.

- Um conjunto **limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em algum disco aberto.
- Um semiplano ou uma reta não são conjuntos limitados.

- Um conjunto **limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em algum disco aberto.
- Um semiplano ou uma reta não são conjuntos limitados.
- Em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos enunciar o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para duas dimensões.

Teorema do Valor Extremo

Se f é uma função contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em certos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D, podendo tais pontos estarem sobre a fronteira.

Observação

- *Para acharmos os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo teorema anterior, observamos que, se f tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f, ou é um ponto da fronteira de D.*

Observação

- *Para acharmos os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo teorema anterior, observamos que, se f tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f, ou é um ponto da fronteira de D.*
- *Portanto, temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados.*

Observação

- *Para acharmos os pontos extremos, cuja existência é garantida pelo teorema anterior, observamos que, se f tem um valor extremo em (x_1, y_1), então (x_1, y_1) ou é um ponto crítico de f, ou é um ponto da fronteira de D.*
- *Portanto, temos a seguinte extensão do Método dos Intervalos Fechados.*

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Solução:

- Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Solução:

- Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.
- Pelo teorema anterior, existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto de f.

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Solução:

- Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.
- Pelo teorema anterior, existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto de f.
- De acordo com o passo 1 anterior, inicialmente devemos calcular os pontos críticos.

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Solução:

- Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.
- Pelo teorema anterior, existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto de f.
- De acordo com o passo 1 anterior, inicialmente devemos calcular os pontos críticos.
- Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \text{ e } f_y = -2x + 2 = 0$$

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Solução:

- Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.
- Pelo teorema anterior, existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto de f.
- De acordo com o passo 1 anterior, inicialmente devemos calcular os pontos críticos.
- Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \text{ e } f_y = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1.$$

Exemplo

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ *no retângulo*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

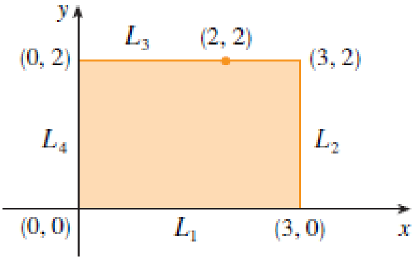
Solução:

- Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D.
- Pelo teorema anterior, existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto de f.
- De acordo com o passo 1 anterior, inicialmente devemos calcular os pontos críticos.
- Eles ocorrem quando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \text{ e } f_y = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1.$$

- Logo, $(1, 1)$ é o único ponto crítico de f e nesse ponto temos $f(1, 1) = 1$.

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3 e L_4 mostrados na Figura

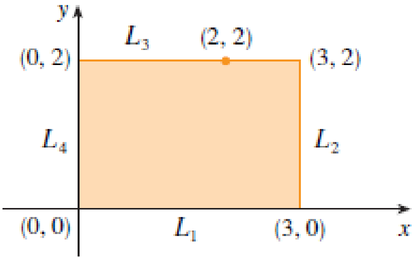


Em L_1, temos $y = 0$ e

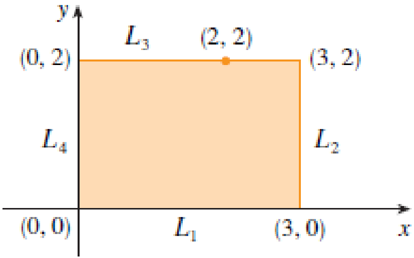
$$f(x,0) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3$$

Isso corresponde a uma função crescente de x, que tem valor mínimo $f(0,0) = 0$ e máximo $f(3,0) = 9$.

No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3 e L_4 mostrados na Figura



No passo 2 olhamos para os valores de f na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta L_1, L_2, L_3 e L_4 mostrados na Figura



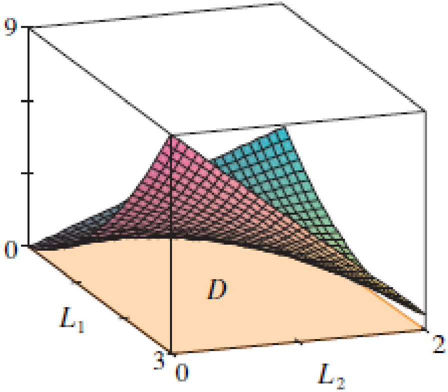
Em L_2, temos $x = 3$ e

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leq y \leq 2$$

Essa é uma função decrescente de y, portanto seu máximo é $f(3, 0) = 9$ e seu mínimo é $f(3, 2) = 1$.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1,1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3,0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0,0) = f(2,2) = 0$.

No passo 3 comparamos esses valores com o valor $f(1,1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3,0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0,0) = f(2,2) = 0$.



$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Exercícios

Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio convenientes para mostrar os aspectos importantes da função.

1. $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
2. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
3. $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$
4. $f(x,y) = xe^{-2x^2-2y^2}$
5. $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$