Derivadas Parciais

Priscila Bemm

UEM

3 de setembro de 2025

Objetivo

- *Introduzir derivadas parciais.*
- *Interpretação Geométrica de Derivadas Parciais*
- *Derivadas de Ordem Superior*
- *Regra da Cadeia*
- *Derivação Implícita*

Objetivo

- *Introduzir derivadas parciais.*
- *Interpretação Geométrica de Derivadas Parciais*
- *Derivadas de Ordem Superior*
- *Regra da Cadeia*
- *Derivação Implícita*

Bibliografia

- *Cálculo III e IV, **Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.** Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2, **James Stewart**; tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor.
Por outro lado, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa que a indicada no termômetro.
O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o **humidex** (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade.
O *humidex* I é a **temperatura aparente** do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H.
Desse modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$.
A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C)

$T \backslash H$	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de $H = 60\%$.

$$f(T, 60) = g(T)$$

$g(T)$ descreve como o humidex I varia à medida que a temperatura real T varia quando a umidade relativa é 60%.

A derivada de g quando $T = 30°C$ (ou seja, $g'(30)$) é a taxa de variação de I em relação a T quando $T = 30°C$.

$$g'(30) = \lim_{h\to 0} \frac{g(30+h) - g(30)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(30+h, 60) - f(30, 60)}{h}.$$

Podemos aproximar usando a Tabela 1 e tomando $h = 2$ e $h = -2$:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2.$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5.$$

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Se olharmos para a linha sombreada da Tabela 1 (veja slide anterior), que corresponde à temperatura fixa de $T = 30°C$. Os números nesta linha são valores da função

$$G(H) = f(30, H),$$

que descreve como o humidex varia à medida que a umidade relativa H varia quando a temperatura real é

$$T = 30°C$$

A derivada dessa função quando $H = 60\%$, é a taxa de variação de I com relação a H quando fixamos $T = 30°C$.

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60+h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60+h) - f(30, 60)}{h}.$$

Tomando $h = 5$ e $h = -5$, obtemos:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4,$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2.$$

Ao calcularmos média desses valores, obtemos a estimativa $G'(60) \approx 0, 3$.
Isso nos diz que, quando a temperatura é de $30°C$ e a umidade relativa é de 60%, o humidex aumenta em cerca de $0, 3°C$ para cada ponto percentual que a umidade relativa aumenta.

Em geral, seja f é uma função de duas variáveis x e y.
Suponha que deixemos somente x variar enquanto mantemos fixo o valor de y, por exemplo, fazendo $y = b$, onde b é uma constante.
Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável x, a saber, $g(x) = f(x, b)$
Se g tem derivada em a, nós a chamaremos **derivada parcial de f em relação a x em** (a, b) e a denotaremos por $f_x(a, b)$.

$$f_x(a,b) = g'(a) \qquad \text{onde } g(x) = f(x,b).$$

Pela definição de derivada de função de uma variável,

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Substituindo $g(x) = f(x,b)$, obtemos

$$\boxed{f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}}.$$

$$\boxed{f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}}.$$

Com essa notação para as derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do humidex I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando $T = 30$ °C e $H = 60\%$ como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1{,}75 \qquad f_H(30, 60) \approx 0{,}3$$

$$f_T(30,60) \approx 1{,}75 \qquad \text{e} \qquad f_H(30,60) \approx 0{,}3.$$

Definição de Derivadas Parciais

$$\boxed{f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}} \quad \text{e} \quad \boxed{f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}}.$$

Notações

Considere $z = f(x, y)$.

$$f_x(x, y) = f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = D_2 f = D_y f$$

Observação: a escrita $\partial f / \partial x$ é notação de derivada parcial, não devendo ser interpretada como razão de diferenciais neste contexto.

Regra para determinar as derivadas parciais de $z = f(x, y)$:

1. Para determinar f_x, trate y como constante e derive $f(x, y)$ em relação a x.
2. Para determinar f_y, trate x como constante e derive $f(x, y)$ em relação a y.

Exemplo

Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Exemplo

Se $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$.

Mantendo y constante e derivando em relação a x,

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad \Rightarrow \quad f_x(2,1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16.$$

Mantendo x constante e derivando em relação a y,

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y \quad \Rightarrow \quad f_y(2,1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8.$$

Interpretação geométrica

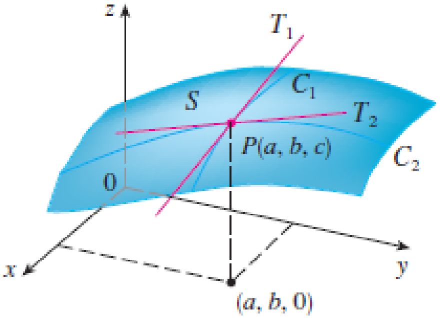


FIGURA 1

$z = f(x, y)$ representa uma superfície S, que chamamos de gráfico de f. Se

$f(a, b) = c$, então o ponto $P = (a, b, c)$ está em S.

Ao fixarmos $y = b$, o plano vertical $y = b$ intercepta S, obtendo a curva C_1.

Ao fixarmos $x = a$, o plano vertical $x = a$ intersecciona S definindo uma curva C_2.

As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P.

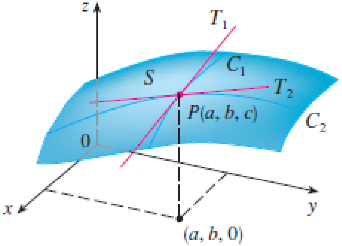


FIGURA 1

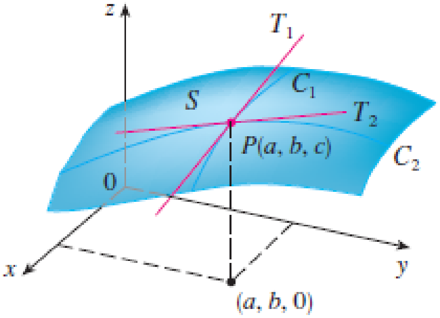
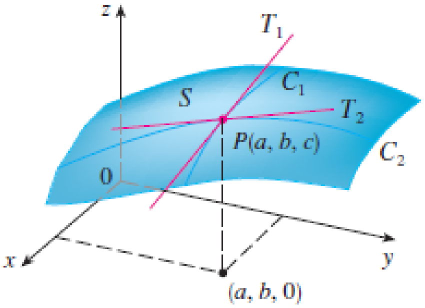


FIGURA 1

Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da reta tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$.

A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$.

As derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes no ponto $P=(a,b,c)$ aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos $y=b$ e $x=a$.



As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_1 e C_2.

Como vimos no caso da função humidex, as derivadas parciais podem ser interpretadas como taxas de variação.

Se $z = f(x, y)$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ representa a taxa de variação de z em relação a x quando y é mantido fixo.

Da mesma forma, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$*, determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, *determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$*, determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$*, determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.
- $f(1,1) = 4 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$.

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$*, determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.
- $f(1,1) = 4 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$.
- $f_x(x,y) = -2x$

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, *determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.
- $f(1,1) = 4 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$.
- $f_x(x,y) = -2x \Longrightarrow f_x(1,1) = -2$.

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, *determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.
- $f(1,1) = 4 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$.
- $f_x(x,y) = -2x \implies f_x(1,1) = -2$.
- $f_y(x,y) = -4y$

Exemplo

Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$*, determine* $f_x(1, 1)$ *e* $f_y(1, 1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.
- $f(1, 1) = 4 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$.
- $f_x(x, y) = -2x \Longrightarrow f_x(1, 1) = -2$.
- $f_y(x, y) = -4y \Longrightarrow f_y(1, 1) = -2$.

Exemplo

Se $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$*, determine* $f_x(1,1)$ *e* $f_y(1,1)$ *e interprete esses números como inclinações de retas.*

Temos:

- O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.
- $f(1,1) = 4 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$.
- $f_x(x,y) = -2x \Longrightarrow f_x(1,1) = -2$.
- $f_y(x,y) = -4y \Longrightarrow f_y(1,1) = -2$.
- Vamos interpretar esses números como inclinações de retas tangentes a duas curvas no ponto $(1,1,1)$.

O plano vertical $y = 1$ intercepta o paraboloide segundo a parábola

$$z = 4 - x^2 - 2 \cdot 1^2$$

O plano vertical $y = 1$ intercepta o paraboloide segundo a parábola

$$z = 4 - x^2 - 2 \cdot 1^2 = 2 - x^2, \; y = 1.$$

A inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 1, 1)$ é $f_x(1, 1) = -2$. Como na discussão anterior, rotulamos esta parábola como C_1.

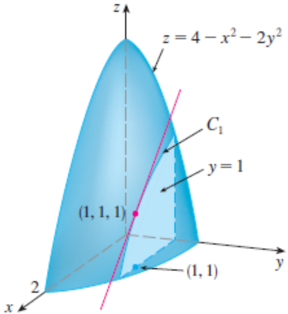


FIGURA 2

De forma análoga, o plano vertical $x = 1$ intercepta o paraboloide segundo a parábola

$$z = 4 - 1^2 - 2y^2 = 3 - 2y^2, \ x = 1.$$

A inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 1, 1)$ é $f_y(1, 1) = -4$. Rotulamos esta parábola como C_2.

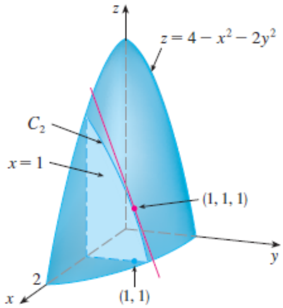


FIGURA 3

A Figura 4 nos mostra o gráfico desenhado pelo computador correspondente à Figura 2. O item (a) exibe o plano $y = 1$ interceptando a superfície para formar a curva C_1, e o item (b) mostra C_1 e T_1.

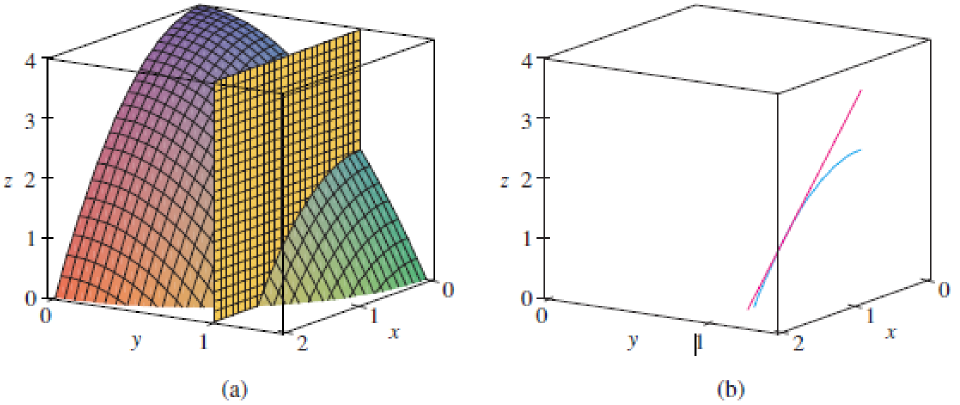
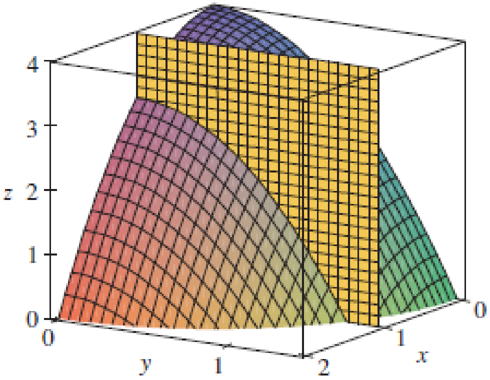
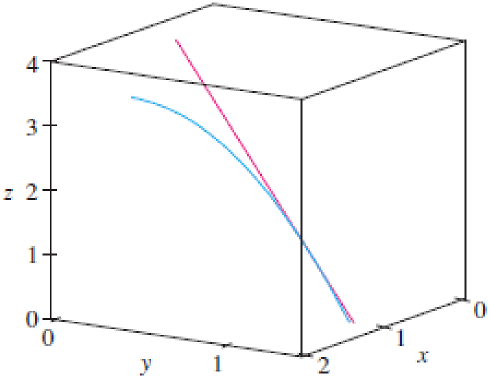


Figura 4

Da mesma forma, a figura a seguir corresponde a Figura 3





Derivadas de Segunda Ordem

No Cálculo I, dada uma função de uma variável f, a derivada f' (quando existe) é uma nova função e por isso podemos estudar sua derivada $(f')'$.

Para funções de duas variáveis, temos algo parecido.

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y (quando existem) são funções de duas variáveis.

Desse modo, podemos considerar suas derivadas parciais

$$(f_x)_x \text{ e } (f_x)_y;$$
$$(f_y)_x \text{ e } (f_y)_y,$$

chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f.

Se $z = f(x, y)$, usamos as seguintes notações para as possíveis derivadas parciais de f:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

- A notação f_{xy} ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y.

- A notação f_{xy} ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y.
- Por outro lado, f_{yx} ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ significa que primeiro derivamos com relação a y e depois em relação a x.

Exemplo

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Exemplo

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Solução: Temos:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \text{ e } f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

Exemplo

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Solução: Temos:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \text{ e } f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3, \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2,$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2, \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4.$$

Observação

- *Observe que no exemplo anterior,* $f_{xy} = f_{yx}$.

Observação

- *Observe que no exemplo anterior,* $f_{xy} = f_{yx}$.
- *Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas* f_{xy} *e* f_{yx} *são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática.*

Observação

- *Observe que no exemplo anterior,* $f_{xy} = f_{yx}$.
- *Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas* f_{xy} *e* f_{yx} *são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática.*
- *O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que* $f_{xy} = f_{yx}$.

Observação

- *Observe que no exemplo anterior,* $f_{xy} = f_{yx}$.
- *Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas* f_{xy} *e* f_{yx} *são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática.*
- *O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que* $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema

Suponha que f *seja definida em um disco aberto* D *que contenha o ponto* (a, b).

Observação

- *Observe que no exemplo anterior,* $f_{xy} = f_{yx}$.
- *Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas* f_{xy} *e* f_{yx} *são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática.*
- *O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que* $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema

Suponha que f *seja definida em um disco aberto* D *que contenha o ponto* (a, b). *Se as funções* f_{xy} *e* f_{yx} *forem ambas contínuas em* D, *então*

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Derivadas parciais de ordem 3 (ou maior) também podem ser definidas.
Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}.$$

Pelo Teorema de Clairaut, se as derivadas de segunda ordem forem contínuas, então

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \text{e} \quad f_{xyy} = f_{yyx}.$$

Exemplo

Calcule f_{xxyz} *se* $f(x, y, z) = sen(3x + yz)$.

Exemplo

Calcule f_{xxyz} *se* $f(x, y, z) = sen(3x + yz)$.

1º Derivamos f em relação a x mantendo y e z constantes e obtemos:

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

2º Derivamos f_x em relação a x mantendo y e z constantes e obtemos:

$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$

3º Derivamos f_{xx} em relação a y mantendo x e z constantes e obtemos:

$$f_{xy} = -9z\cos(3x + yz)$$

4º Derivamos f_{xy} em relação a z mantendo x e y constantes e obtemos

$$f_{xyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\sin(3x + yz)$$

1. $f(x,y,z) = e^{xyz^2}; \quad f_{xyz}$
2. $g(r,s,t) = e^t(st); \quad g_{rst}$
3. $u = e^{r\theta}\,\theta; \quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$
4. $z = u\sqrt{v-w}; \quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$
5. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m} + \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

7. O índice de sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13,12 + 0,6215T - 11,37v^{0,16} + 0,3965Tv^{0,16}$$

onde T é a temperatura (°C) e v a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ °C e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente W caia se a temperatura real decrescer em 1°C? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?