Derivada Direcional

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Introduziremos um tipo de derivada, chamada **derivada direcional**, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.*

Objetivo

- *Introduziremos um tipo de derivada, chamada **derivada direcional**, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.*

Bibliografia

- *Cálculo III e IV, **Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.** Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2, **James Stewart**; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis.
Lembramos que

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis.
Lembramos que

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Isso significa que nós estamos analisando o quociente

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

a medida que nos aproximamos de (x_0, y_0) por pontos que estão sobre a reta horizontal $y = y_0$.
Portanto, o limite representa a taxa de mudança de z na direção da reta horizontal $y = y_0$.
Como a reta horizontal $y = y_0$ é paralela ao eixo x, o limite representam as taxas de variação de z na direção na direção do eixo x, ou seja, na direção do vetor $\vec{i}$.

Analogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

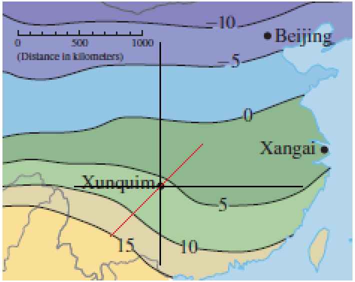
$$\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

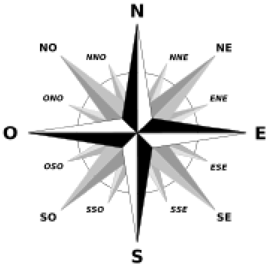
a medida que nos aproximamos de (x_0, y_0) por pontos que estão sobre a reta vertical $x = x_0$.

Portanto, o limite representam as taxas de mudança de z na direção da reta vertica $x = x_0$.

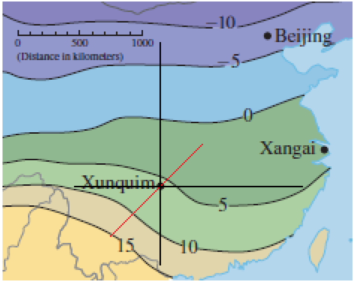
Como a reta vertical $x = x_0$ é paralela ao eixo y, o limite representa a taxa de variação de z na direção na direção do eixo y, ou seja, na direção do vetor $\vec{j}$.

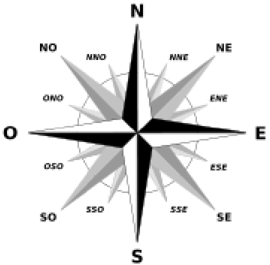
Por exemplo, a figura a seguir mostra um mapa de contorno da função temperatura $T(x,y)$ para a China às 15 horas em 28/12/2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam-se às localidades que têm a mesma temperatura.

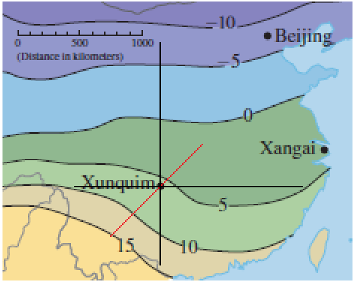


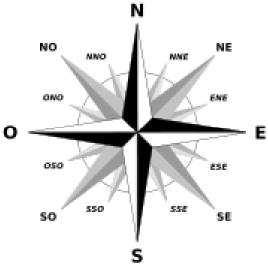


Por exemplo, a figura a seguir mostra um mapa de contorno da função temperatura $T(x, y)$ para a China às 15 horas em 28/12/2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam-se às localidades que têm a mesma temperatura.









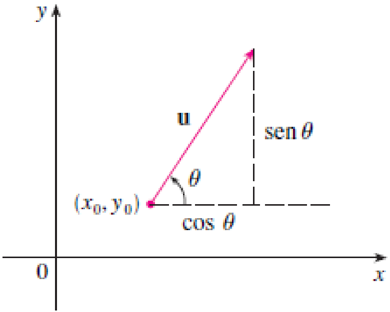
A derivada parcial T_x em um local como Xunquim é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Xunquim.

T_y é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte.

Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção?

Nessa aula, introduziremos um tipo de derivada, chamada **derivada direcional**, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis.
Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$.

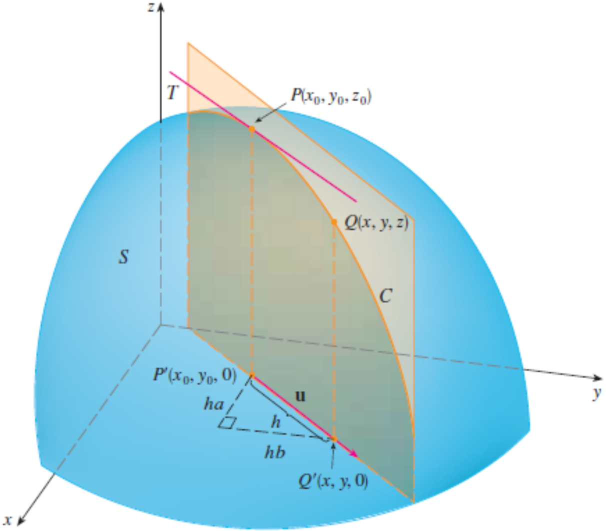


Um vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \text{sen}\ \theta \rangle$

Para isso, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. Então o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$

está em S.

O plano vertical que passa por P na direção de $\vec{u}$ intercepta S em uma curva C.
A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de $\vec{u}$.

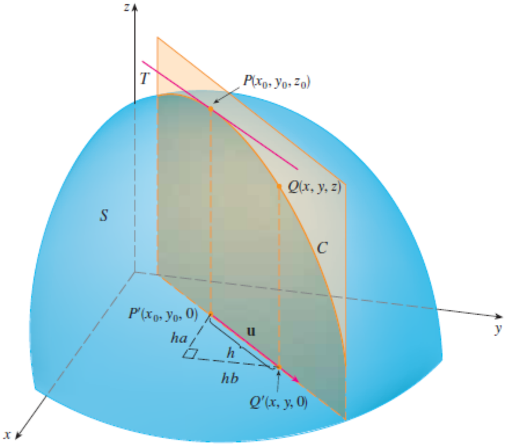


Sejam $Q=(x,y,z)$ outro ponto sobre C e P', Q' são as projeções de P e Q sobre o plano xy.
Então o vetor $\vec{P'Q'}$ é paralelo a $\vec{u}$ e, portanto, existe um escalar h tal que

$$\vec{P'Q'} = h\vec{u}$$

Sejam $Q = (x, y, z)$ outro ponto sobre C e P', Q' são as projeções de P e Q sobre o plano xy.
Então o vetor $\vec{P'Q'}$ é paralelo a $\vec{u}$ e, portanto, existe um escalar h tal que

$$\vec{P'Q'} = h\vec{u} \Rightarrow \langle x - x_0, y - y_0 \rangle = \langle ha, hb \rangle.$$



Portanto, $x = x_0 + ha$ e $y = y_0 + hb$.
Neste caso,

$$\frac{\Delta z}{h}$$

Portanto, $x = x_0 + ha$ e $y = y_0 + hb$.
Neste caso,

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h}$$

Portanto, $x = x_0 + ha$ e $y = y_0 + hb$.
Neste caso,

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Portanto, $x = x_0 + ha$ e $y = y_0 + hb$.
Neste caso,

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de $\vec{u}$, que é chamada **derivada direcional** de f na direção e sentido de $\vec{u}$.

Definição

Seja $z = f(x, y)$ *uma função de duas variáveis. A* ***derivada direcional*** *de* f *em* (x_0, y_0) *na direção de um vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ *é*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

quando esse limite existir.

Definição

Seja $z = f(x, y)$ *uma função de duas variáveis. A* ***derivada direcional*** *de* f *em* (x_0, y_0) *na direção de um vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ *é*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

quando esse limite existir.

Observação

- *Se* $\vec{u} = \vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$ *então*

$$D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 1h, y_0 + 0h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Definição

Seja $z = f(x, y)$ *uma função de duas variáveis. A* ***derivada direcional*** *de* f *em* (x_0, y_0) *na direção de um vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ *é*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

quando esse limite existir.

Observação

- *Se* $\vec{u} = \vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$ *então*

$$D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 1h, y_0 + 0h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0).$$

Definição

Seja $z = f(x, y)$ *uma função de duas variáveis. A* ***derivada direcional*** *de* f *em* (x_0, y_0) *na direção de um vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ *é*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

quando esse limite existir.

Observação

- *Se* $\vec{u} = \vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$ *então*

$$D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 1h, y_0 + 0h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0).$$

- *Se* $\vec{u} = \vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$ *então*

$$D_{\vec{j}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 0h, y_0 + 1h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Definição

Seja $z = f(x,y)$ *uma função de duas variáveis. A* ***derivada direcional*** *de* f *em* (x_0, y_0) *na direção de um vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ *é*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

quando esse limite existir.

Observação

- *Se* $\vec{u} = \vec{i} = \langle 1, 0\rangle$ *então*

$$D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + 1h, y_0 + 0h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0).$$

- *Se* $\vec{u} = \vec{j} = \langle 0, 1\rangle$ *então*

$$D_{\vec{j}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + 0h, y_0 + 1h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0).$$

Teorema

Se f *é uma função diferenciável de* x *e* y, *então* f *tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ *e*

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Teorema

Se f *é uma função diferenciável de* x *e* y, *então* f *tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário* $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ *e*

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle.$$

Teorema

Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle.$$

Observação

Se o vetor unitário $\vec{u}$ *faz um ângulo* θ *com o eixo* x *positivo então podemos escrever* $\vec{u} = \langle cos\theta, sen\theta \rangle$ *e a fórmula do teorema anterior fica*

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)cos\theta + f_y(x,y)sen\theta$$

Observação

Se o vetor unitário $\vec{u}$ *faz um ângulo* θ *com o eixo* x *positivo então podemos escrever* $\vec{u} = \langle cos\theta, sen\theta\rangle$ *e a fórmula do teorema anterior fica*

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x,y) &= f_x(x,y)cos\theta + f_y(x,y)sen\theta \\ &= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle cos\theta, sen\theta\rangle. \end{aligned}$$

Observação

A hipótese "$\vec{u}$ *unitário" é usada para interpretar* $D_{\vec{u}}$ *como taxa por unidade de comprimento. A igualdade algébrica acima vale para qualquer* $\vec{u}$*; se* $\vec{u}$ *não for unitário, a taxa escala com* $\|\vec{u}\|$.

Exemplo

Encontre a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(x,y)$ *se* $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ *e* $\vec{u}$ *é o vetor unitário que faz um ângulo* $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *com o eixo positivo* x*. Qual será* $D_{\vec{u}}f(1,2)$*?*

Solução

Pela fórmula anterior,

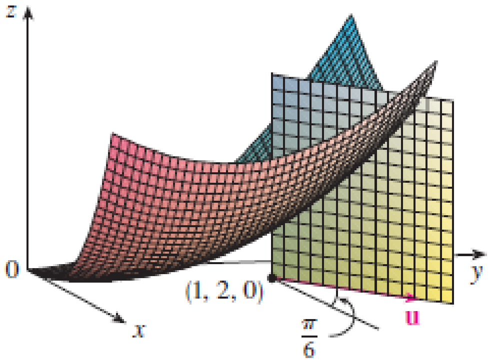
$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x,y) &= f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2-3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x+8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + (8-3\sqrt{3})y\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8-3\sqrt{3})(2)\right] = \frac{13-3\sqrt{3}}{2}.$$

A derivada direcional $D_{\vec{u}}f(x, y)$ no exemplo anterior representa a taxa de variação de z na direção de $\vec{u}$. Ou seja, é a inclinação da reta da tangente para a curva de

intersecção da superfície $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ e o plano vertical que passa por $(1, 2, 0)$ na direção de $\vec{u}$ mostrado na figura



Exercícios

1. Seja $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. No ponto $p = (0,1)$, calcule $D_{\vec{u}}f(p)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$.
2. Seja $f(x,y) = xe^y + y^2 \sin x$. No ponto $p = (0,0)$, calcule $D_{\vec{u}}f(p)$ na direção do vetor que aponta de p para $q = (2,-1)$
3. Seja $f(x,y) = x^2 - 3x^2y + y^3$. No ponto $p = (1,2)$, calcule a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(p)$ na direção do vetor unitário que faz ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ com o eixo x positivo