Regra da Cadeia

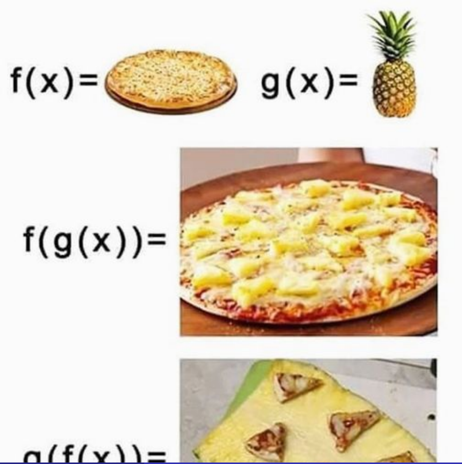
Priscila Bemm

UEM

Objetivos

- Derivar funções compostas pela regra da cadeia

- Propriedades de derivadas
- Composição de função.



Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

As fórmulas de derivação aprendidas até o momento não permitem calculá-la.

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

As fórmulas de derivação aprendidas até o momento não permitem calculá-la. Observe que F é uma função composta, pois se assumirmos

$$y = f(u) = u^{10} \quad \text{e} \quad u = g(x) = x^2 + 1,$$

então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$.

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

As fórmulas de derivação aprendidas até o momento não permitem calculá-la. Observe que F é uma função composta, pois se assumirmos

$$y = f(u) = u^{10} \quad \text{e} \quad u = g(x) = x^2 + 1,$$

então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de em termos das derivadas de f e g.

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

As fórmulas de derivação aprendidas até o momento não permitem calculá-la.
Observe que F é uma função composta, pois se assumirmos

$$y = f(u) = u^{10} \quad \text{e} \quad u = g(x) = x^2 + 1,$$

então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$.
Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de em termos das derivadas de f e g.
O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. $f'(u) \cdot u'(x)$

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10}$$

As fórmulas de derivação aprendidas até o momento não permitem calculá-la.
Observe que F é uma função composta, pois se assumirmos

$$y = f(u) = u^{10} \quad \text{e} \quad u = g(x) = x^2 + 1,$$

então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$.
Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de em termos das derivadas de f e g.
O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. $f'(u) \cdot u'(x)$
Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado Regra da Cadeia.

Regra da Cadeia

Se g for derivável em x e f for derivavel em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ será derivável em x e

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exemplo

Determine $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Expressando $F(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2 + 1$, então pela regra da cadeia,

$$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Como $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, então $f'(g(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Além disso, $g'(x) = 2x$.

Contudo,

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exemplos

Exemplo

Derive $y = sen(x^2)$.

Expressando $F(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = sen\ u$ e $g(x) = x^2$, então pela regra da cadeia,

$$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Como $f'(u) = \cos\ u$, então $f'(g(x)) = \cos\ g(x) = \cos x^2$.
Além disso, $g'(x) = 2x$.
Contudo,

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos\ (x^2) \cdot 2x = 2x \cos\ (x^2)$$

Regra da Potência combinada com a regra da cadeia

Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Exemplo

Derive $y = (x^2 - 3x)^{15}$.

Tomando $g(x) = x^2 - 3x$ e $n = 15$, temos

$$\frac{d}{dx}[(x^2 - 3x)^{15}] = 15(x^2 - 3x)^{15-1} \cdot (x^2 - 3x)' = 15(x^2 - 3x)^{14} \cdot (2x - 3)$$

Derivada da Função Exponencial

Temos que

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

Daí,

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}(e^{(x\ln a)}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(x\ln a) = e^{(\ln a)x}\cdot \ln\ a = a^x \ln\ a$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln\ a$$

Exemplo

Derive $f(x) = 4^x$ e $g(x) = x^4$.

Exemplo

Derive $f(x) = 4^x$ e $g(x) = x^4$.

$$f'(x) = 4^x \cdot \ln\ 4$$

Exemplo

Derive $f(x) = 4^x$ e $g(x) = x^4$.

$$f'(x) = 4^x \cdot \ln\ 4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

Exemplo

Derive $F(x) = e^{x^2+3x}$.

Considere $u = g(x) = x^2 + 3x$ e $f(u) = e^u$, assim $F(x) = f(g(x))$ e

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (2x+3) = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$$

Generalização da Regra da Cadeia

Suponha que $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $x = h(t)$, onde f, g e h são funções deriváveis. Então para calcular a derivada de y com relação a t, usamos duas vezes a regra da cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Exemplo

Derive $F(x) = \cos(sen(x^2+5))$.

Temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(\cos(sen(x^2+5))) \\ &= -sen(sen(x^2+5))\frac{d}{dx}(sen(x^2+5)) \\ &= -sen(sen(x^2+5))\cos(x^2+5)\frac{d}{dx}(x^2+5) - 2x\ sen(sen(x^2+5)) \end{aligned}$$

Resumo das derivadas

Sejam u e v funções diferenciáveis e n uma constante.

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}$
2. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$
3. $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u' \ \ (a > 0 \ \ a \neq 1)$
5. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
6. $y = sen \ \ u \Rightarrow y' = u' \cos \ \ u$
7. $y = cos \ \ u \Rightarrow y' = -u' sen \ \ u$
8. $y = \operatorname{tg} \ \ u \Rightarrow y' = u' \sec^2 \ \ u$
9. $y = \cot \ \ u \Rightarrow y' = -u' cossec \ \ u$
10. $y = \sec \ \ u \Rightarrow y' = u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
11. $y = cossec \ \ u \Rightarrow y' = u' cossec\, u \cdot \cot \ \ u$

Calcule as derivadas de:

1. $f(x) = (3x^2 + 1)^3$
2. $f(x) = x^2 e^{3x}$
3. $f(x) = x^2 e^{-3x}$
4. $f(x) = \cos(x^3 - 2x + e^{\operatorname{sen}(x)})$
5. $f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^4$
6. $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$