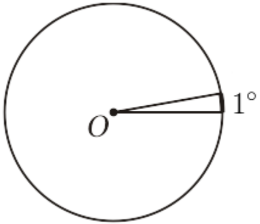
Funções Trigonométricas

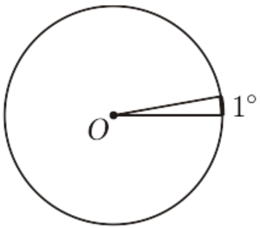
Priscila Bemm

UEM

Grau

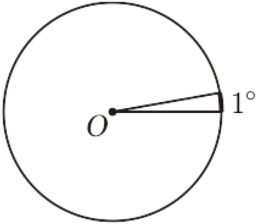


- Os ângulos podem ser medidos em graus ($^\circ$) ou radianos (rad).



- Os ângulos podem ser medidos em graus ($°$) ou radianos (rad).
- Quando marcamos sobre uma circunferência 360 pontos igualmente espaçados, estaremos dividindo-a em 360 arcos.

Grau



- Os ângulos podem ser medidos em graus ($^\circ$) ou radianos (rad).
- Quando marcamos sobre uma circunferência 360 pontos igualmente espaçados, estaremos dividindo-a em 360 arcos.
- Definimos que cada um desses arcos, bem como cada ângulo central determinado por eles (ou seja, cada ângulo que os arcos "enxergam") tem medida 1°.

Radianos

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.

Radianos

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.

Radianos

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.
- Portanto, $360^\circ = 2\pi rad$, ou seja,

$$\pi rad = 180^\circ.$$

Radianos

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.
- Portanto, $360° = 2\pi rad$, ou seja,

$$\pi rad = 180°.$$

- Assim,

$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57,3°$$

Radianos

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.
- Portanto, $360^\circ = 2\pi rad$, ou seja,

$$\pi rad = 180^\circ.$$

- Assim,

$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$$

e

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \approx 0,017rad$$

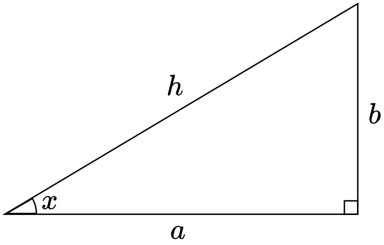
- O símbolo rad é utilizado para indicar explicitamente que o ângulo é medido em radianos.

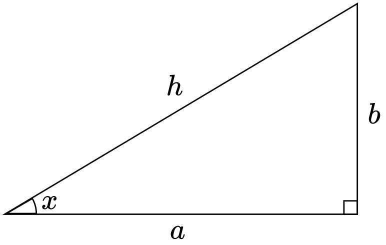
- No entanto, usualmente omite-se esse símbolo nos cursos de cálculo e assim faremos aqui também.

Por exemplo:

$$\cos(45) = \cos(45\,rad) \neq \cos(45^\circ)$$

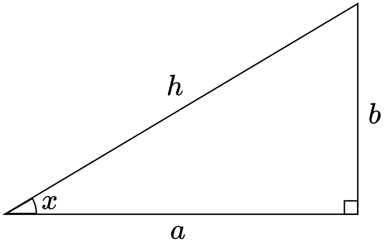
Razões Trigonométricas para Ângulos Agudos





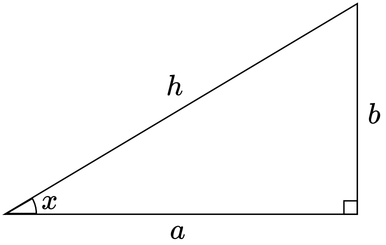
$sen\, x$

Razões Trigonométricas para Ângulos Agudos



$$sen\, x = \frac{b}{h}$$

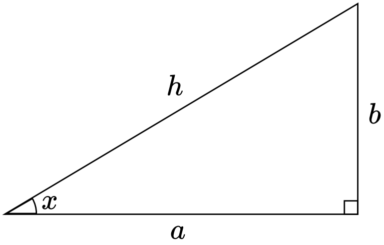
Razões Trigonométricas para Ângulos Agudos



$$sen\,x = \frac{b}{h}$$

$$cos\,x$$

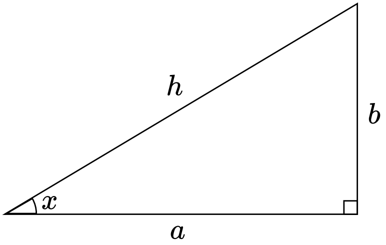
Razões Trigonométricas para Ângulos Agudos



$$sen\, x = \frac{b}{h}$$

$$cos\, x = \frac{a}{h}$$

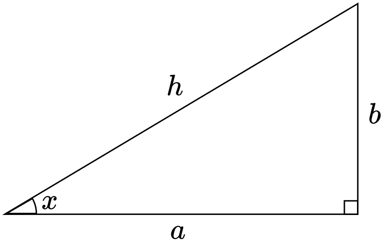
Razões Trigonométricas para Ângulos Agudos



$$sen\, x = \frac{b}{h}$$

$$cos\, x = \frac{a}{h}$$

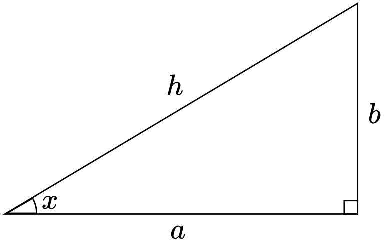
$$tg\, x = tan\, x$$



$$sen\, x = \frac{b}{h}$$

$$cos\, x = \frac{a}{h}$$

$$tg\, x = tan\, x = \frac{b}{a} = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$



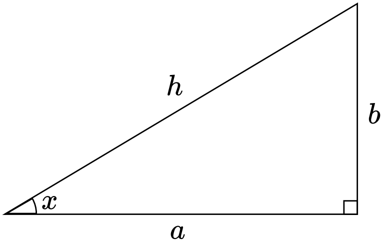
$$sen\, x = \frac{b}{h}$$

$$cos\, x = \frac{a}{h}$$

$$tg\, x = tan\, x = \frac{b}{a} = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$

Identidade Trigonométrica Fundamental

$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad (0^\circ < x < 90^\circ).$$



$$sen\, x = \frac{b}{h}$$

$$cos\, x = \frac{a}{h}$$

$$tg\, x = tan\, x = \frac{b}{a} = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$

Identidade Trigonométrica Fundamental

$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad (0^\circ < x < 90^\circ).$$

Mais adiante, definiremos seno, cosseno e tangente para qualquer ângulo.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3}\, rad$$

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} rad = \frac{\pi}{3} rad \cdot 1 rad$$

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3}\,rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot 1rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi\, rad}\right)$$

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3}\,rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot 1rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi\,rad}\right) = \frac{180^\circ}{3}$$

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3}\,rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot 1rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi\,rad}\right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ\,.$$

Exemplo

Calcule $sen(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3}\,rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot 1rad = \frac{\pi}{3}\,rad \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi\, rad}\right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ\,.$$

Logo,

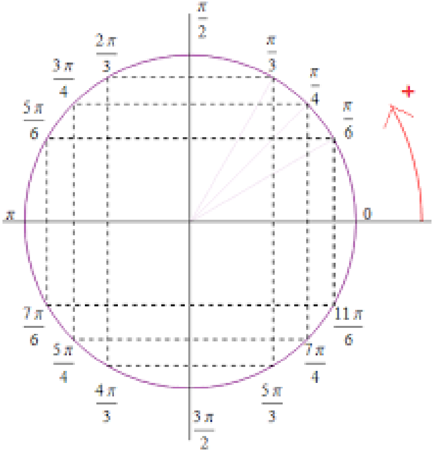
$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

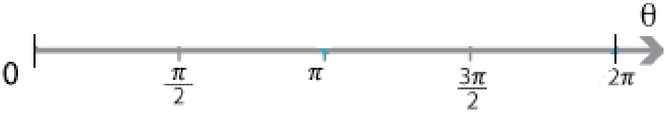
- Considere uma circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano.

- Considere uma circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano.
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[0, 2\pi)$.

- Considere uma circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano.
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[0, 2\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[0, 2\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

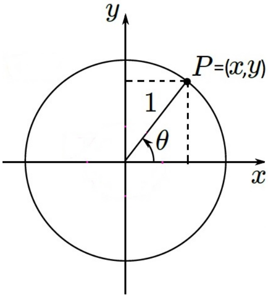
- Considere uma circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano.
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[0, 2\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[0, 2\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.



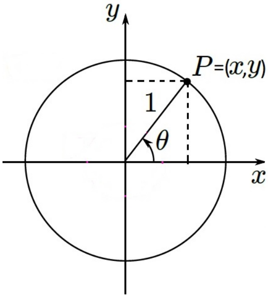


- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.

- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad.

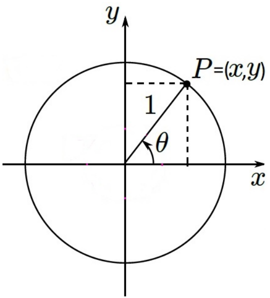


- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad.



DEFINE-SE:

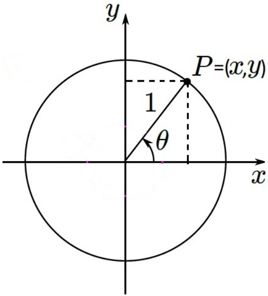
- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad.



DEFINE-SE:

$$sen(\theta) = y;$$

- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad.

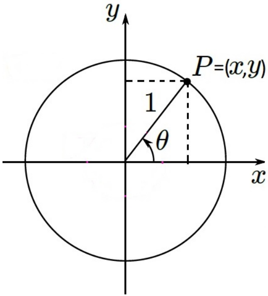


DEFINE-SE:

$$sen(\theta) = y;$$

$$cos(\theta) = x;$$

- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad.

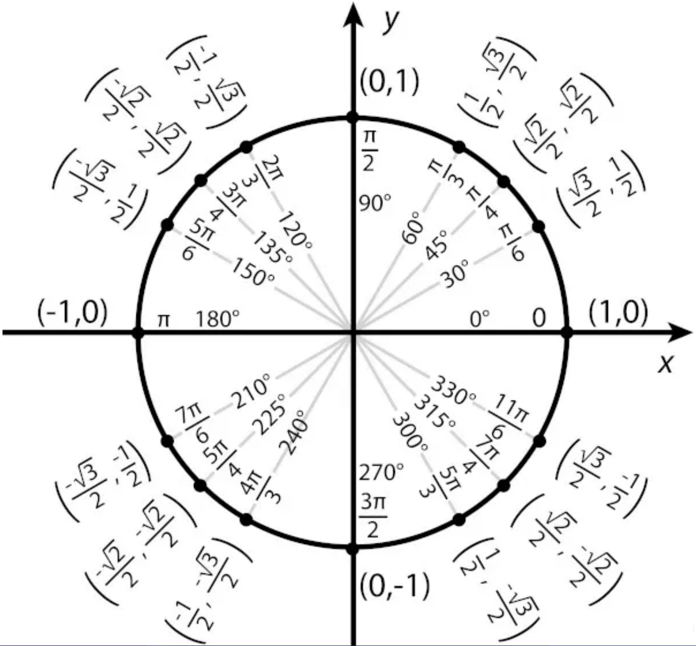


DEFINE-SE:

$$sen(\theta) = y;$$

$$cos(\theta) = x;$$

$$tg(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0.$$


y
x
(0,1)
(1,0)
(-1,0)
(0,-1)
0°
0
30°
45°
60°
90°
120°
135°
150°
180°
π
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
π/6
π/4
π/3
π/2
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6
5π/4
4π/3
3π/2
5π/3
7π/4
11π/6
(√3/2, 1/2)
(√2/2, √2/2)
(1/2, √3/2)
(-1/2, √3/2)
(-√2/2, √2/2)
(-√3/2, 1/2)
(-√3/2, -1/2)
(-√2/2, -√2/2)
(-1/2, -√3/2)
(1/2, -√3/2)
(√2/2, -√2/2)
(√3/2, -1/2)

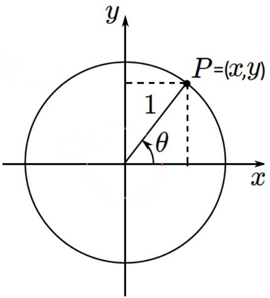
- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

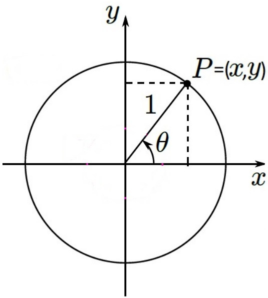
- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.

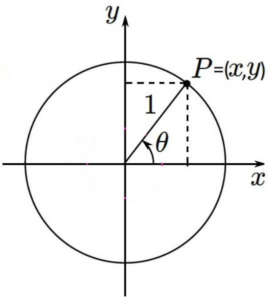


- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.



$$sen(\alpha) = sen(\theta + 2\pi) = sen(\theta) = y;$$

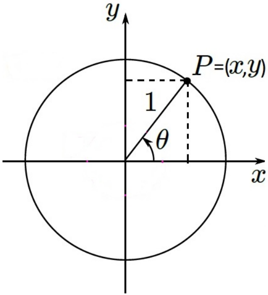
- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.



$$sen(\alpha) = sen(\theta + 2\pi) = sen(\theta) = y;$$

$$cos(\alpha) = cos(\theta + 2\pi) = cos(\theta) = x;$$

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.



$$sen(\alpha) = sen(\theta + 2\pi) = sen(\theta) = y;$$

$$cos(\alpha) = cos(\theta + 2\pi) = cos(\theta) = x;$$

$$tg(\alpha) = tg(\theta + 2\pi) = tg(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0.$$

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in [0, \infty)$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in [0, \infty)$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.
- Mas e os números negativos?

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in [0, \infty)$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.
- Mas e os números negativos?
- Veremos na sequência.

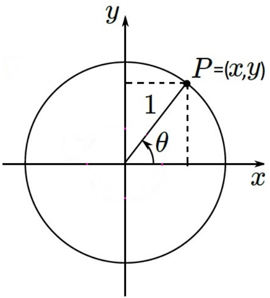
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

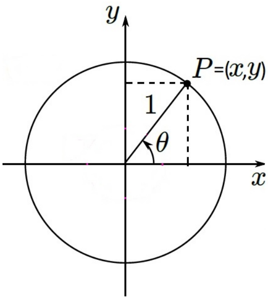
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.

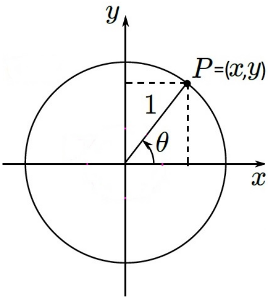


- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.



$$sen(\alpha) = sen(\theta - 2\pi) = sen(\theta) = y;$$

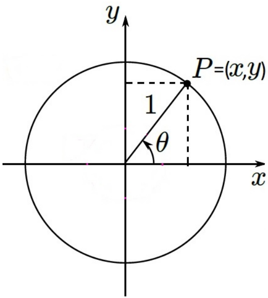
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.



$$sen(\alpha) = sen(\theta - 2\pi) = sen(\theta) = y;$$

$$cos(\alpha) = cos(\theta - 2\pi) = cos(\theta) = x;$$

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos "enrolar" o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ.



$$sen(\alpha) = sen(\theta - 2\pi) = sen(\theta) = y;$$

$$cos(\alpha) = cos(\theta - 2\pi) = cos(\theta) = x;$$

$$tg(\alpha) = tg(\theta - 2\pi) = tg(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0.$$

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.

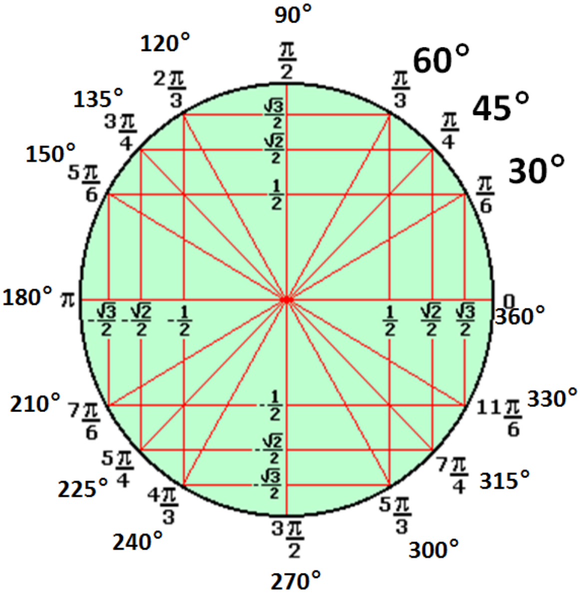
- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.
- É preciso tomar cuidado, com a função tangente, pois

$$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$$

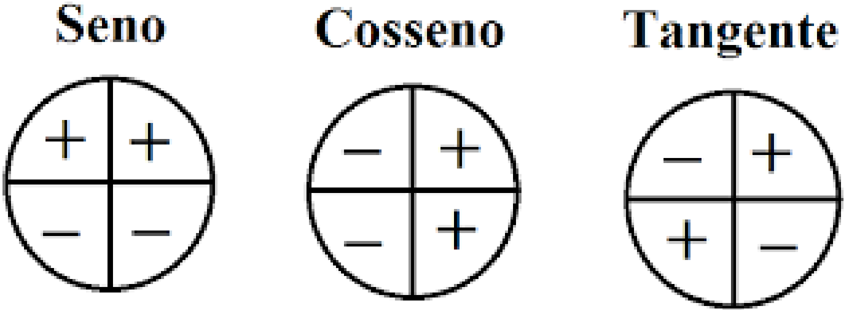
que NÃO está definida quando $cos(\theta) = 0$.

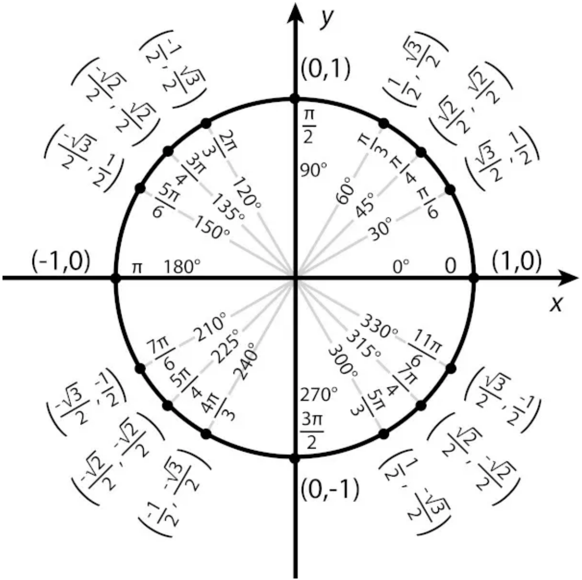
- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.
- É preciso tomar cuidado, com a função tangente, pois
$$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$$
que NÃO está definida quando $cos(\theta) = 0$.
- Pode-se ver que $cos(\theta) = 0$ para todo
$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$$

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $sen(\theta), cos(\theta)$ e $tg(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.
- É preciso tomar cuidado, com a função tangente, pois
$$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$$
que NÃO está definida quando $cos(\theta) = 0$.
- Pode-se ver que $cos(\theta) = 0$ para todo
$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$$
- Portanto, $tg(\theta)$ não está definida para $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$.


90°
$\frac{\pi}{2}$
120°
$2\frac{\pi}{3}$
60°
$\frac{\pi}{3}$
135°
$3\frac{\pi}{4}$
45°
$\frac{\pi}{4}$
150°
$5\frac{\pi}{6}$
30°
$\frac{\pi}{6}$
180° π
0
360°
210°
$7\frac{\pi}{6}$
330°
$11\frac{\pi}{6}$
225°
$5\frac{\pi}{4}$
315°
$7\frac{\pi}{4}$
240°
$4\frac{\pi}{3}$
300°
$5\frac{\pi}{3}$
270°
$3\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pela construção que fizemos, temos os sinais $+$ e $-$ do seno, cosseno e tangente de um ângulo variam de acordo com a localização do ângulo nos quadrantes do plano cartesiano.




y
x
(0,1)
(1,0)
(-1,0)
(0,-1)
$\frac{\pi}{2}$
90°
π
180°
0°
0
270°
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
60°
45°
30°
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
120°
135°
150°
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
210°
225°
240°
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$
300°
315°
330°
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

Sinais de Ângulos

Observação

- *A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo* x *positivo.*

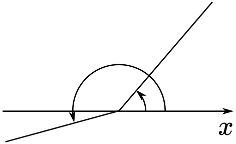
Sinais de Ângulos

Observação

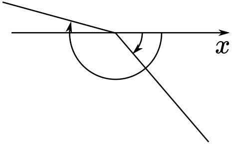
- *A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo* x *positivo.*
- *Um ângulo positivo é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final.*

Observação

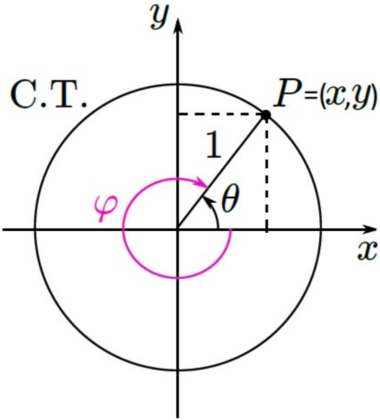
- *A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo.*
- *Um ângulo positivo é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final.*
- *Da mesma forma, ângulos negativos são obtidos girando-se no sentido horário.*



Ângulos positivos

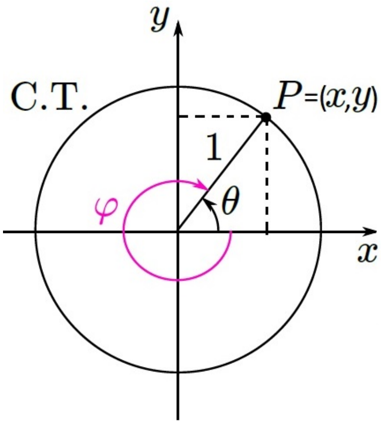


Ângulos negativos



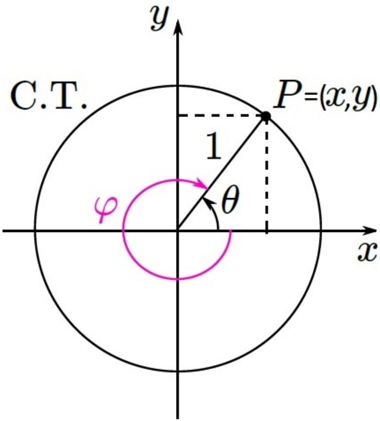
Ângulos equivalentes

Dois ângulos são equivalentes se são associados a um mesmo ponto da Circunferência Trigonométrica.



Ângulos equivalentes

Dois ângulos são equivalentes se são associados a um mesmo ponto da Circunferência Trigonométrica. Por exemplo, na figura, θ e φ são equivalentes.

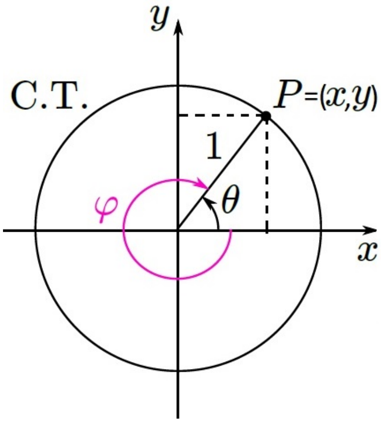


Observação

- Um ângulo α é equivalente a um ângulo θ se, e somente se,

$$\alpha = \theta + 2n\pi$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$.



Observação

- Um ângulo α é equivalente a um ângulo θ se, e somente se,
$$\alpha = \theta + 2n\pi$$
para algum $n \in \mathbb{Z}$.
- Todo ângulo $\alpha \in \mathbb{R}$ é equivalente a um ângulo localizado em um dos quatro quadrantes da C.T. ou a 0, ou a $\pi/2$, ou a π, ou a $3\pi/2$.

Função Seno

Dada a função $sen(x)$, temos:

- $Dom(sen) = \mathbb{R}$

Função Seno

Dada a função $sen(x)$, temos:

- $Dom(sen) = \mathbb{R}$
- $Im(sen) = [-1, 1]$

Função Seno

Dada a função $sen(x)$, temos:

- $Dom(sen) = \mathbb{R}$
- $Im(sen) = [-1, 1]$
- $sen(-x) = -sen(x)$

Função Seno

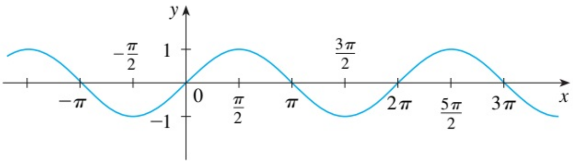
Dada a função $sen(x)$, temos:

- $Dom(sen) = \mathbb{R}$
- $Im(sen) = [-1, 1]$
- $sen(-x) = -sen(x)$
- $sen(x) = sen(x + 2\pi)$

Função Seno

Dada a função $sen(x)$, temos:

- $Dom(sen) = \mathbb{R}$
- $Im(sen) = [-1, 1]$
- $sen(-x) = -sen(x)$
- $sen(x) = sen(x + 2\pi)$
- $sen(x) = 0$ sempre que $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, isto é que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π.



Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$
- $cos(-x) = cos(x)$

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$
- $cos(-x) = cos(x)$
- $cos(x) = cos(x + 2\pi)$

Função Cosseno

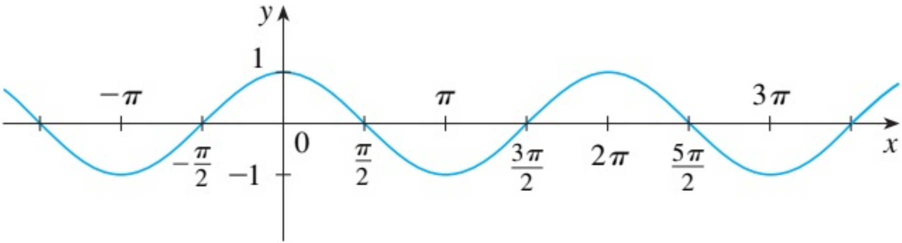
Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$
- $cos(-x) = cos(x)$
- $cos(x) = cos(x + 2\pi)$
- $cos(x) = 0$ sempre que $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$
- $cos(-x) = cos(x)$
- $cos(x) = cos(x + 2\pi)$
- $cos(x) = 0$ sempre que $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.



Função Tangente

Dada a função $\mathrm{tg}(x)$, temos:

- $Dom(\mathrm{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Função Tangente

Dada a função $\mathrm{tg}(x)$, temos:

- $Dom(\mathrm{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $Im(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$

Função Tangente

Dada a função $\operatorname{tg}(x)$, temos:

- $Dom(\operatorname{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $Im(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$

Função Tangente

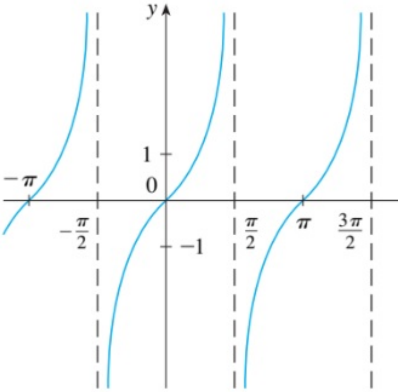
Dada a função $\mathrm{tg}(x)$, temos:

- $Dom(\mathrm{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $Im(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$
- $\mathrm{tg}(x) = \mathrm{tg}(x + \pi)$

Função Tangente

Dada a função $\operatorname{tg}(x)$, temos:

- $Dom(\operatorname{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $Im(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$
- $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$
- $\operatorname{tg}(x) = 0$ sempre que $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



Funções Trigonométricas Recíprocas

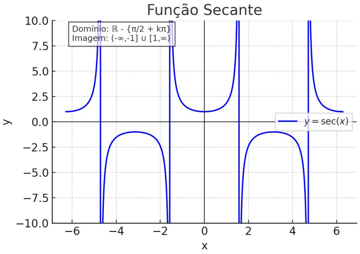
As funções secante, cossecante e cotangente são definidas como o **inverso multiplicativo** de funções trigonométricas fundamentais.
Assim, temos:

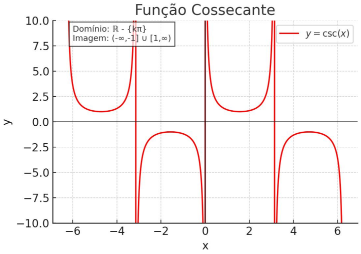
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

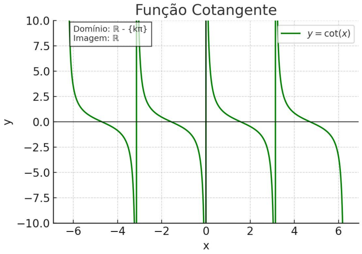
$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

As funções trigonométricas recíprocas não estão definidas em todos os valores reais, já que apresentam restrições no domínio nos pontos onde o denominador se anula. Seus gráficos, marcados pela presença de assíntotas verticais, mostram comportamentos distintos, mas todos relacionados às funções seno, cosseno e tangente.







Funções Trigonométricas Inversas

As funções trigonométricas inversas surgem da necessidade de reverter as funções trigonométricas usuais, como seno, cosseno e tangente. Elas permitem determinar ângulos a partir de razões trigonométricas conhecidas, sendo ferramentas essenciais na resolução de triângulos e em diversos problemas geométricos.

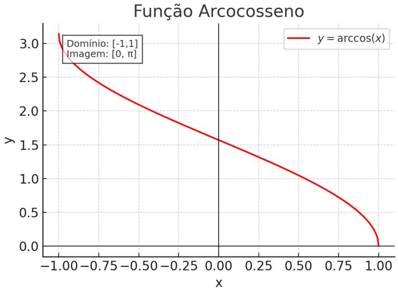
Para garantir que sejam funções bem definidas, seus domínios precisam ser restritos. Assim, temos o arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente como principais exemplos, além das inversas da cotangente, secante e cossecante.

Função Arco-cosseno

Notação: $arccos$ ou $\cos^{-1}$

$$y = \cos^{-1}(x) \iff x = \cos(y),\ y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$Dom\ \sin^{-1} = [-1, 1] \quad \text{e} \quad Im\ \sin^{-1} = \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$



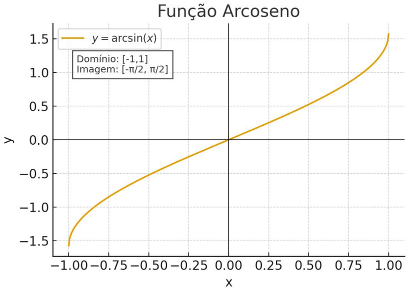
Exemplo: $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$, pois $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o ângulo $\frac{\pi}{3} \in [-1.1]$.

Função Arco-seno

Notação: $arcsen$ ou sen^{-1}

$$y = \arcsin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sin(y),\ y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$Dom\ \sin^{-1} = [-1, 1] \qquad \text{e} \qquad Im\ \sin^{-1} = \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$



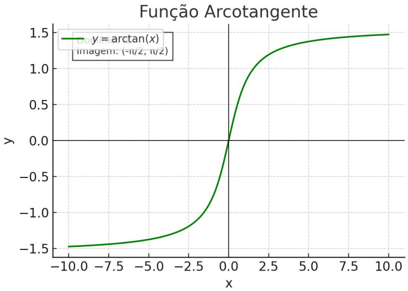
Exemplo: $\cos^{-1}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$, pois $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o ângulo $\frac{\pi}{6} \in [-1.1]$.

Função Arco-tangente

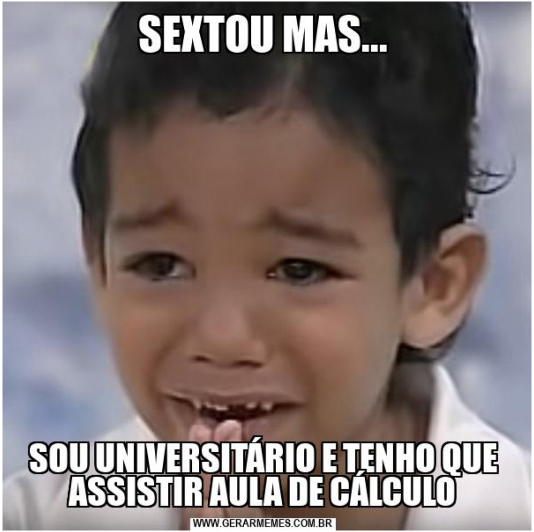
Notação: $arctg$ ou tg^{-1}

$$y = \mathrm{tg}^{-1}(x) \iff x = \mathrm{tg}(y),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Dom\ \ \mathrm{tg}^{-1} = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad Im\ \ \mathrm{tg}^{-1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Exemplo: $\mathrm{tg}^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$, pois $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e o ângulo $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$.



Avalie quais afirmações são verdadeiras:

1. $\mathrm{tg}^{-1}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$
2. $\mathrm{tg}^{-1} x = \dfrac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$
3. $\cos^{-1} = (\cos x)^{-1}$
4. $\sin(a+b) = \sin(a)+\sin(b)$
5. $\dfrac{\mathrm{tg}\, x^3}{x^2} = \mathrm{tg}\, x$, se $x \neq 0$
6. $(\cos x)^{-1} = \sec x$