Definição de Derivada

Priscila Bemm

UEM

Pré-requisitos

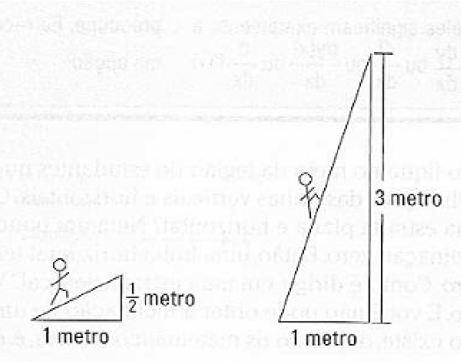
- Limites

Objetivos

- Definir a derivadas de uma função em um ponto.

A partir da derivada de funções, é possível calcular um tipo de limites indeterminados, localizar e identificar valores extremos de uma função contínua a partir de sua derivada.
Através disso, poderemos resolver uma série de problemas de otimização, nos quais encontramos a maneira ótima (a melhor maneira) de fazer algo em dada situação.
Por exemplo,

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros.
- Um viajante quer minimizar o tempo de transporte.



- Dizer que a inclinação é $\dfrac{1}{2}$ significa que a cada 1 unidade para a direita, sobe-se $\dfrac{1}{1}$ na altura.
- Dizer que a inclinação é 3 significa que a cada 1 unidade para a direita, sobe-se 3 em altura.

Revisão

O coeficiente angular da reta é obtido pela **razão entre a variação de** y e a **variação de** x desses dois pontos. Assim, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$ é obtido:

1. **Identificamos os dois pontos da reta:**

$$P_1 = (a, f(a)) \quad \text{e} \quad P_2 = (a+h, f(a+h))$$

2. **A variação em** x é a diferença entre as abscissas dos pontos: $\Delta x = (a+h) - a = h$.
3. **A variação em** y **é a diferença entre as ordenadas**: $\Delta y = f(a+h) - f(a)$
4. **O coeficiente angular** é a razão entre essas variações: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Taxa de variação instantânea

Seja s a distância orientada de uma partícula a partir de O em um tempo t. Suponha que uma partícula move-se por uma reta horizontal de acordo com a equação

$$s = f(t),$$

em que s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t.
No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$.
A velocidade média V_m da partícula nesse intervalo $[a, a + h]$ é

$$V_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Suponha que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores, ou seja, fazendo h tender a zero.

Taxa de variação instantânea

Definição

Se $s = f(t)$ descreve o deslocamento de uma partícula a partir da origem no termo t, definimos a **velocidade instantânea** $v(t)$ da partícula no instante $t = a$ como o limite dessas velocidades médias, ou seja,

$$v(a) = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se este limite existir.

A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa, conforme o movimento da partícula seja no sentido positivo ou negativo da reta. Quando a velocidade instantânea for zero, significa que a partícula está em repouso.

Incremento

Mais geralmente, suponha que y é uma quantidade que depende de outra quantidade x, ou seja, y é uma função de x, digamos dada por $y = f(x)$. Se x variar de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamada incremento de x) é denotada por Δx e a variação correspondente de y por Δy, ou seja,

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{e} \qquad \Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

A **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Considerando a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a zero.

Taxa de variação instantânea

Definição

Seja $y = f(x)$. A **taxa de variação instantânea de** y **em relação a** x em $x = x_1$ é a derivada de f em x_1, ou seja,

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

se este limite existir.

Exemplos

Este limite aparece em inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. Vamos citar algumas delas:

- A velocidade instantânea, que vimos anteriormente, é um exemplo de taxa de variação instantânea do deslocamento s em relação ao tempo t.
- Variação do trabalho em relação ao tempo (potência).
- Em reações químicas: taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo (taxa de reação).
- Taxa de variação do custo de produção por dia em relação à quantidade produzida (custo marginal).
- Taxa de variação populacional de uma colônia de bactérias no tempo.

O problema da reta tangente

A **taxa de variação instantânea** aparece em muitas situações. Este conceito de surge também na resolução do problema geométrico de determinar a reta tangente à uma curva em um determinado ponto.

O problema da reta tangente

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$ com f uma função. Vamos definir reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$ desta curva.

O problema da reta tangente

Considere $Q(x, f(x))$ um ponto da curva C próximo de P, com $x \neq a$. Sabemos que a inclinação m_{PQ} da reta secante à curva C contendo os pontos P e Q é

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

O problema da reta tangente

De acordo com que o ponto x se aproxima do ponto a, o ponto Q também se aproxima do ponto P. Se m_{PQ} tende a um número m quando x tende ao ponto a, então definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P, como a reta que passa por P e que tem inclinação m. Ou ainda,

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

O problema da reta tangente

Dizemos que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P.

Definição de derivada em um ponto

Todos os exemplos visto nesta aula são a motivação para a próxima definição. Vamos denotar, a partir de agora, I um intervalo aberto.

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto I. A **derivada** de f em um ponto $a \in I$, denotada por $f'(a)$, é definida como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se tal limite existe.
Neste caso, dizemos que f é derivável ou diferenciável no ponto a.

Observação

Se escrevermos $x - a = h$, então $x = a + h$. Note que x tende ao ponto a se, e somente se, h tende a zero. Com isso, uma maneira equivalente de definir o conceito de derivada de f no ponto a é

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a \in I$, ou seja, $f'(a)$ existe, então podemos definir:

Definição

A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por $P(a, f(a))$, com inclinação igual à derivada de f em a. Uma equação para esta reta é dada por:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a \in I$, ou seja, $f'(a)$ existe, então podemos definir:

Definição

A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por $P(a, f(a))$, com inclinação igual à derivada de f em a. Uma equação para esta reta é dada por:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemplo 1

Considere $f(x) = mx + n$ com $m, n \in \mathbb{R}$. Vamos calcular a derivada de f em um ponto a qualquer.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{m(a+h) + n - (ma+n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} m = m. \end{aligned}$$

A reta tangente à curva $y = mx + n$ em um ponto qualquer $(a, f(a))$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = ma + n + m \cdot (x-a) = mx + n,$$

ou seja, a reta tangente à curva $y = mx + n$ coincide com a própria curva.

Exemplo

Determine a reta tangente ao gráfico da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$ no ponto $(-1, f(-1))$.

A derivada de f em um ponto a é dada por:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a. \end{aligned}$$

A reta tangente à curva $y = x^2$ em um ponto $(a, f(a)) = (a, a^2)$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a \cdot (x - a) = 2ax - a^2.$$

Exemplo 2

Exemplo

Determine a reta tangente ao gráfico da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$ no ponto $(-1, f(-1))$.

Logo, a reta tangente a curva $y = x^2$ em um ponto $(a, f(a))$ é $y = 2ax - a^2$.
Por exemplo, se $a = 0$, temos que a reta tangente à curva $y = x^2$ em $(0, 0)$ é $y = 0$, ou seja, o eixo Ox é esta reta tangente.
Já a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(-1, 1)$ é

$$y = 2(-1)x - 1 = -2x - 1.$$

Exemplo 2

Exemplo

Determine a reta tangente ao gráfico da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$ no ponto $(-1, f(-1))$.

Vamos calcular novamente $f'(a)$ utilizando agora a outra definição equivalente de derivada, para compararmos se pode ser mais vantajoso um conceito que o outro.

Exemplo 2

Exemplo

Determine a reta tangente ao gráfico da parábola determinada pela função $f(x) = x^2$ no ponto $(-1, f(-1))$.

Por definição,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (x+a) = 2a. \end{aligned}$$

Neste caso, calcular a derivada por qualquer um dos limites foi essencialmente a mesma coisa. Algumas vezes pode ser mais simples uma das escolhas.

Exemplo 3

Exemplo

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ em um ponto qualquer $(a, f(a))$.

Sabemos que a derivada de f no ponto a nos dá exatamente a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a, f(a))$.
Deste modo, calculemos $f'(a)$.

Exemplo 3

Exemplo

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ em um ponto qualquer $(a, f(a))$.

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3 - 3x + 4 - (a^3 - 3a + 4)}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3 - 3x + 3a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3 - 3(x - a)}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2) - 3(x - a)}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} (x^2 + ax + a^2 - 3) = 3a^2 - 3.
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Exemplo

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ em um ponto qualquer $(a, f(a))$.

Calculando pela outra definição de limite temos:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - 3(a+h) + 4 - (a^3 - 3a + 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a - 3h + 4 - a^3 + 3a - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3a^2 + 3ah + h^2 - 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3a^2 + 3ah + h^2 - 3) = 3(a^2 - 1).
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Exemplo

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ em um ponto qualquer $(a, f(a))$.

De qualquer modo, temos que a inclinação da reta tangente de $f(x) = x^3 - 3x + 4$ em um ponto $(a, f(a))$ é $f'(a) = 3a^2 - 3$.

Definimos o conceito de derivada de uma função f em um ponto a fixado de seu domínio. No entanto, se para qualquer ponto x do domínio de f existir o número $f'(x)$, então a derivada de f pode ser vista como uma função.

Definição

Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é **diferenciável** em I, se existir

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

para cada $x \in I$.

Notações

Outras notações utilizadas na literatura para a derivada de $y = f(x)$ são:

- $\dfrac{df}{dx}$
- $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$
- $\dfrac{dy}{dx}$

Observação

O símbolo $\dfrac{dy}{dx}$ não deve neste momento ser visto como um quociente, entretanto é uma notação muito útil principalmente quando usada em conjunto com a notação de incremento. Podemos reescrever a definição de derivada como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Para o próximo exemplo vamos calcular a derivada de uma função f em um ponto a, analisando quando x tende ao ponto a pela direita e pela esquerda. Assim vamos denotar por

$$f'_+(x) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{e} \qquad f'_-(x) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

chamada de **derivada à direita e à esquerda**, respectivamente.

Exemplo

$f(x) = |x|$ é diferenciável?

Como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

temos que analisar a diferenciabilidade em alguns casos:

Exemplo

$f(x) = |x|$ é diferenciável?

1º Caso: $x > 0$

Aqui podemos escolher h suficientemente pequeno tal que $x + h > 0$, e assim, $|x + h| = x + h$. Logo, para $x > 0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, f é diferenciável para todo $x > 0$.

Exemplo

$f(x) = |x|$ é diferenciável?

2º. Caso: $x < 0$

Novamente podemos escolher h suficientemente pequeno tal que $x + h < 0$, e assim, $|x+h| = -(x+h)$. Logo, para $x < 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x - h + x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1. \end{aligned}$$

Analogamente, f é diferenciável para todo $x < 0$.

Exemplo

$f(x) = |x|$ é diferenciável?

3o. Caso: $x = 0$

Neste caso, temos que calcular os limites laterais e verificar que se $f'(0)$ existe. Veja que

$$f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

e

$$f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1.$$

Como os limites laterais são diferentes, concluímos que $f'(0)$ não existe. Portanto, f é diferenciável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$, exceto em $x = 0$.

Teorema

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in I$, então f é contínua em a.

Queremos provar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Observe que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Temos que

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right).$$

Como f é diferenciável em a, temos que $f'(a)$ existe, logo podemos utilizar a regra do limite do produto para concluir que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot \lim_{x \to a} (x - a) \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em $x = a$.

Provamos no teorema acima que toda função diferenciável é contínua, mas não vale a recíproca. Um exemplo para tal fato é a função $f(x) = |x|$ que não é diferenciável em $x = 0$, mas é contínua em 0 já que

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^x} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$.

Exemplo

Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } \ x < -1 \\ 1 - x^2, & \text{se } \ -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & \text{se } \ x > 1. \end{cases}$$

Exemplo

Podemos verificar facilmente que f é contínua em $x = 1$, já que

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$.

Exemplo

Vamos verificar se f é diferenciável em $x = 1$. Para tanto precisamos calcular as derivadas à direita e à esquerda.

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(1+x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -(1+x) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2. \end{aligned}$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, segue que $f'(1)$ não existe e assim f não é derivável em $x = 1$.

DÚVIDAS?