Derivação Implícita

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Derivar funções definidas implicitamente.*

Diremos que uma equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x se existe uma função $y = f(x)$ que satisfaz $F(x, f(x)) = 0$, para todo $x \in Dom(f)$. Neste caso, diremos também que a função $f(x)$ está definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$

Exemplo

a) $y = 3x^2 + 1$ *é uma função explícita.*

b) $y - 3x - 1 = 0$ *é uma função implícita.*

c) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *é uma função implícita.*

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ *é uma função explícita.*

d) $y + y^2 + \cos(x + y) = 0$ *é uma função implícita.*

Exemplo

Quantas funções distintas são definidas implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$*?*

Exemplo

Quantas funções distintas são definidas implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$?

Neste caso é possível expressar y em função da variável x, pois $y^2 = 4 - x^2$ e assim

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}.$$

Portanto, a equação implícita $x^2 + y^2 = 4$ define duas funções

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Os gráficos de f e g são, respectivamente, os semicírculos superior e inferior do círculo de centro na origem e raio 2 dado por $x^2 + y^2 = 4$.

Em geral, dada uma equação implícita nas variáveis x e y, sem um recurso computacional, não é uma tarefa fácil expressar y em função de x, como podemos observar na equação

$$4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0.$$

Todavia não precisamos resolver uma equação para obter y explicitamente em termos de x, para calcularmos a derivada de y. E é isto que vamos abordar nesta aula.

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $x^2 + y^2 = 4$*, utilizando a regra da cadeia.*

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $x^2 + y^2 = 4$, *utilizando a regra da cadeia.*

Derivando em relação a x temos nos dois membros da igualdade obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $x^2 + y^2 = 4$*, utilizando a regra da cadeia.*

Derivando em relação a x temos nos dois membros da igualdade obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $x^2 + y^2 = 4$, *utilizando a regra da cadeia.*

Derivando em relação a x temos nos dois membros da igualdade obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $x^2 + y^2 = 4$, *utilizando a regra da cadeia.*

Derivando em relação a x temos nos dois membros da igualdade obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

O que implica que se $y \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Vimos no exemplo anterior que a função $y = \sqrt{4 - x^2}$ satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 4$. A derivada de y pela fórmula obtida acima é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Uma outra maneira de verificarmos esta relação é calculando a derivada $y = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ pela regra da cadeia. Com efeito,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0$.

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0$.

Derivando a equação com relação a x temos

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0$.

Derivando a equação com relação a x temos

$$\frac{d}{dx}(4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6) = \frac{d}{dx}(0)$$

Exemplo

Determine $\frac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0$.

Derivando a equação com relação a x temos

$$\frac{d}{dx}(4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{d}{dx}(4x)y^3 + 4x\frac{d}{dx}(y^3)\right] + \left[\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx}\right] - \frac{d}{dx}(x^5) +$$
$$+\frac{d}{dx}(4x) - \frac{d}{dx}(6) = 0$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0$.

Derivando a equação com relação a x temos

$$\frac{d}{dx}(4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dx}(4x)y^3 + 4x\frac{d}{dx}(y^3)\right] + \left[\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx}\right] - \frac{d}{dx}(x^5) + $$
$$+ \frac{d}{dx}(4x) - \frac{d}{dx}(6) = 0$$

$$\Rightarrow 4y^3 + 4x \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 5x^4 + 4 = 0$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6 = 0$.

Derivando a equação com relação a x temos

$$\frac{d}{dx}(4xy^3 + x^2y - x^5 + 4x - 6) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{d}{dx}(4x)y^3 + 4x\frac{d}{dx}(y^3)\right] + \left[\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx}\right] - \frac{d}{dx}(x^5) +$$
$$+\frac{d}{dx}(4x) - \frac{d}{dx}(6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y^3 + 4x \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 5x^4 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y^3 + 12xy^2\frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 5x^4 + 4 = 0.$$

$$\Rightarrow 4y^3 + 12xy^2\frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 5x^4 + 4 = 0$$

Assim, se $12xy^2 + x^2 \neq 0$ então

$$\begin{aligned} (12xy^2 + x^2)\frac{dy}{dx} &= 5x^4 - 4y^3 - 2xy - 4 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{5x^4 - 4y^3 - 2xy - 4}{12xy^2 + x^2} \end{aligned}$$

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $y = x^2 sen\ y$.

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $y = x^2 sen\ y$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2 sen\ y\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] sen\ y + x^2 \frac{d}{dx}[sen\ \ y]$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x sen\ y + x^2 cos\ y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Logo, $(1 - x^2 cos\ y)\dfrac{dy}{dx} = 2x\ sen\ y$ e assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\ sen\ y}{1 - x^2 cos\ y},$$

se $1 - x^2 cos\ y \neq 0$.

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $e^{x^2} \cdot cos(y^3) = 1$.

Exemplo

Determine $\frac{dy}{dx}$ *da equação implícita* $e^{x^2} \cdot cos(y^3) = 1$.

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2})cos(y^3) + e^{x^2}\frac{d}{dx}(cos(y^3)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2xe^{x^2}cos(y^3) + e^{x^2}(-sen(y^3))\frac{d}{dx}(y^3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2xe^{x^2}cos(y^3) - 3y^2e^{x^2}sen(y^3)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Logo, $(-3y^2e^{x^2}sen(y^3))\frac{dy}{dx} = -2xe^{x^2}cos(y^3)$ o que implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}cos(y^3)}{3y^2e^{x^2}sen(y^3)},$$

se $3y^2e^{x^2}sen(y^3) \neq 0$.

Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

Vamos fazer uso do conceito de derivação implícita e da regra da cadeia para obtermos a derivada das funções trigonométricas inversas básicas: $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$ e $tan^{-1}(x)$ que são, respectivamente, as inversas das funções $sen\ x,\ cos\ x$ e $tg\ x$.

As derivadas das funções trigonométricas inversas são:

$$(a)\quad \frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(b)\quad \frac{d}{dx}\left(cos^{-1}x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(c)\quad \frac{d}{dx}\left(tg^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(d)\quad \frac{d}{dx}\left(cosec^{-1}x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$(e)\quad \frac{d}{dx}\left(sec^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$(f)\quad \frac{d}{dx}\left(cotg^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(a) Sabemos que para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ a função seno possui inversa, ou seja,

$$y = sen^{-1}x, \quad \text{se, e somente se,} \quad sen\ y = x.$$

Derivando $sen\ y = x$ implicitamente em relação a x obtemos

$$cos\ y \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\ y}.$$

Observe que para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ temos que $cos\ y \neq 0$, na verdade $cos\ y > 0$.
Assim, da relação $sen^2 y + cos^2 y = 1$ temos que $cos\ y = \sqrt{1 - sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, já que $sen\ y = x$. Deste modo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\ y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Portanto, $\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(c) Por definição de inversa da função tangente, para todo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, temos que

$$y = tg^{-1}x, \quad \text{se, e somente se,} \quad tg\ y = x.$$

Derivando $tg\ y = x$ implicitamente em relação a x obtemos

$$sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

.

Dividindo $sen^2 y + cos^2 y = 1$ por $cos^2 y$ provamos que $tg^2\ y + 1 = sec^2\ y$. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2\ y} = \frac{1}{1 + tg^2\ y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Donde concluímos que

$$\frac{d}{dx}\left(tg^{-1}x\right) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(d) Para $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ a função $cosec\ y$ possui inversa. Deste modo, temos que

$$y = cosec^{-1}x, \quad \text{se, e somente se,} \quad cosec\ y = x.$$

Derivando $cosec\ y = x$ implicitamente em relação a x obtemos

$$-cosec\ y\ cotg\ y \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cosec\ y\ cotg\ y}.$$

Dividindo $sen^2 y + cos^2 y = 1$ por $sen^2 y$ provamos que $cotg^2\ y + 1 = cosec^2\ y$. Como estamos assumindo $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ temos que $cotg\ y = \sqrt{cosec^2 y - 1}$. Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(cosec^{-1}x\right) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cosec\ y\ cotg\ y} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

A demonstração dos demais itens segue de maneira análoga.

Derivação Logarítmica

Seja $y = \log_a \; x$, então

$$a^y = x$$

Derivando os dois membros da igualdade obtemos:

$$\frac{d}{dx}(a^y) = \frac{d}{dx}(x)$$

Aplicando a regra da cadeia do lado esquerdo da igualdade,

$$a^y \cdot \ln \; a \frac{dy}{dx} = 1$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \cdot \ln \; a} = \frac{1}{x \cdot \ln \; a}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\log_a \; x) = \frac{1}{x \cdot \ln \; a}$$

Observações

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(\log_a \ f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln \ a}$$

e

$$\frac{d}{dx}(\ln \ f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Em geral há quatro casos para os expoentes e as bases:

1. $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$, onde a e b são constantes.
2. $\frac{d}{dx}(f(x)^b) = b \cdot f(x)^{b-1} \cdot f'(x)$, onde b é constante.
3. $\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = a^{g(x)} \cdot (ln\ \ a) \cdot g'(x)$, onde a é constante.
4. $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^{g(x)}$, neste caso a derivação logarítmica pode ser usada.

Exemplo

Calcule $\frac{dy}{dx}$ *de* $y = x^{\sin\ x}$.

Aplicando a função exponencial em $y = x^{\sin\ x}$ temos,
$\ln\ y = \ln\ x^{\sin\ x} \Leftrightarrow \ln\ y = \sin\ x \cdot \ln\ x$
Derivando com relação a x:

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[\sin x \cdot \ln x]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln y] &= \frac{d}{dx}[\sin x \cdot \ln x] \\
\frac{y'}{y} &= \frac{d}{dx}[\sin x] \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{d}{dx}[\ln x] \\
\frac{y'}{y} &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \\
y' &= y \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right] \\
&= x^{\sin x} \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]
\end{aligned}
$$

Dúvidas?