Continuidade de Funções Contínuas

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Estudar continuidade de funções de duas variáveis.*

Objetivo

- *Estudar continuidade de funções de duas variáveis.*

Bibliografia

- *Cálculo III e IV,* ***Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.*** *Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Função Contínua no Cálculo I

Lembramos que, no Cálculo I, dizemos que uma função f é contínua em um ponto a de seu domínio se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funções contínuas de duas variáveis são definidas de modo similar.

Definição

*Uma função de duas variáveis f é dita ser **contínua num ponto** (a, b) do seu domínio se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

*Dizemos que uma função de duas variáveis f é **contínua** se ela for contínua em todos os pontos de seu domínio.*

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia por uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará por uma pequena quantidade. Isso quer dizer que

a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas. Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto

e quociente de funções contínuas são contínuas em seus domínios. Vamos usar esse

fato para dar exemplos de funções contínuas.

Definição

*Uma **função polinomial** de duas variáveis (ou simplesmente polinômio) é uma soma finita de termos da forma cx^my^n, em que c é uma constante e m e n são números inteiros ≥ 0.*

Um polinômio da forma cx^my^n é chamado de monômio.

Exemplo

$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y - 6$ *é um polinômio.*

Observações

- Em suma, um polinômio é uma soma de uma quantidade finita de monômios.
- Note que o domínio de uma função polinomial é $\mathbb{R}^2$.

Definição

*Uma **função racional** é uma razão de polinômios, ou seja, é uma função do tipo*

$$g(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

em que $p(x,y)$ e $q(x,y)$ são polinômios.
*Neste caso, $p(x,y)$ é chamado **numerador** e $q(x,y)$ de **denominador**.*

Observação

Note que $Dom(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x,y) \neq 0\}$.

Exemplo

$g(x,y) = \dfrac{2xy+1}{x^2+y^2}$ *é uma função racional cujo domínio é*

$$Dom(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Lembramos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$$

Os limites anteriores mostram que as funções

$$f(x, y) = x, \quad g(x, y) = y \quad \text{e} \quad h(x, y) = c$$

são contínuas.

Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f, g e h por multiplicação e adição, segue que todos os polinômios são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

Exemplo

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y\right).$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y\right) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

Exemplo

Estude a continuidade da função

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Solução

Como g *é uma função racional cujo domínio é*

$$Dom(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\},$$

temos que g *é contínua em todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$*, exceto a origem* $(0,0)$*.*
Não é possível estudar a continuidade de g *na origem* $(0,0)$*, pois* $g(0,0)$ *não está definida.*

Exemplo

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

onde

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exemplo

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

onde

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resolução:

Sabemos que f é contínua para $(x,y) \neq (0,0)$, uma vez que é uma função racional definida nessa região. Sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Portanto, f é contínua em $(0,0)$ e, consequentemente, contínua em $\mathbb{R}^2$.

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua.

De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem de f, então a função composta $h = g \circ f$, definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$, também é contínua.

Exemplo

Determine o maior conjunto em que $h(x,y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ *é contínua.*

Exemplo

Determine o maior conjunto em que $h(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ *é contínua.*

A função $f(x,y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$. A função $g(t) = \operatorname{arctg}(t)$ é contínua em toda parte. Logo, a função composta

$$g(f(x,y)) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = h(x,y)$$

é contínua onde $x \neq 0$; isto é, em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

1. $F(x,y) = \dfrac{xy}{1+e^{x-y}}$.
2. $F(x,y) = \cos\sqrt{1+x-y}$.
3. $F(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$.
4. $H(x,y) = \dfrac{e^x+e^y}{e^{xy}-1}$.
5. $G(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-4\right)$.