Plano tangente, Aproximação Linear, Incremento e Diferenciais

Priscila Bemm

UEM

Ideia geométrica

Suponha que uma superfície S tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S.
Sejam C_1 e C_2 as curvas obtidas pela interseção dos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$ com a superfície S. Então o ponto P fica em C_1 e C_2.
Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes à curva C_1 e C_2 no ponto P. Então o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as retas da tangente T_1 e T_2 .

O plano tangente a S em P é o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P.
O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P.
Qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Se $y = y_0$ obtermos $z - z_0 = a(x - x_0)$ que representa a equaçao da reta tangente ao ponto (x_0, y_0), contida no plano $y = y_0$, portanto, a é o coeficiente angular da reta e $a = f_x(x_0, y_0)$.
- Se $x = x_0$ obtermos $z - z_0 = b(y - y_0)$ que representa a equaçao da reta tangente ao ponto (x_0, y_0), contida no plano $x = x_0$, portanto, b é o coeficiente angular da reta e $b = f_y(x_0, y_0)$.

Contudo temos a seguinte definição:

Plano tangente

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *com derivadas parciais em* (a, b)*. O* ***plano tangente*** *ao gráfico de* f *em* $(a, b, f(a, b))$ *é dado por*

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b).$$

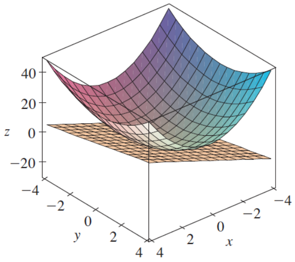
Exemplos

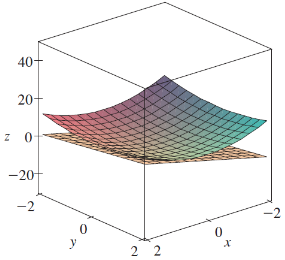
Determine a equação dos planos tangentes, as expessões a seguir, nos pontos dados.

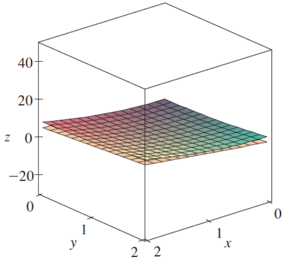
1. $z = 2x^2 + y^2$, em $(1, 1, 3)$.
2. $z = xe^{xy}$ em $(2, 0, 2)$.

Observe que quanto mais próximo a um ponto $(a, b, f(a, b))$, mais próximo o plano tangente ao mesmo ponto está do gráfico de uma função $z = f(x, y)$.

Portanto, baseado em evidência visual, a equação do plano tangente
$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)$
é uma boa aproximação de $z = f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (a, b).







Definição

A ***linearização*** *de* f *em* (a, b) *é a função linear*

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Dizemos que $f(x, y) \approx L(x, y)$ *perto de* (a, b).

Exemplo

Para $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ e $(a,b) = (1,1)$, estime $f(1.1, 0.95)$ com L.

$$L(1.1, 0.95) = 3 + 4(0.1) + 2(-0.05) = 3.3.$$
$$f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225 \text{ (erro} \approx 0.0225\text{)}.$$

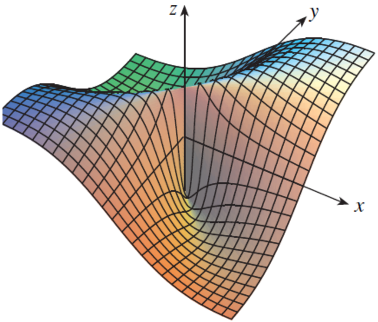
Exemplos

Determine a linearização, e o valor aproximado que se pede nos itens a seguir:

1. A linearização de $z = xe^x$ no ponto $(1, 1)$ e estime o valor para $0,9e^{0,9\cdot 1,1}$ e $y = 1,1$.
2. A linearização de $z = \sqrt{y + \cos^2(x)}$ em $(0, 0, 1)$ e estime o valor de $\sqrt{-0,99 + \cos^2(0,1)}$

Definimos o plano tangente para as superfícies $z = f(x,y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se f_x e f_y não são contínuas?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



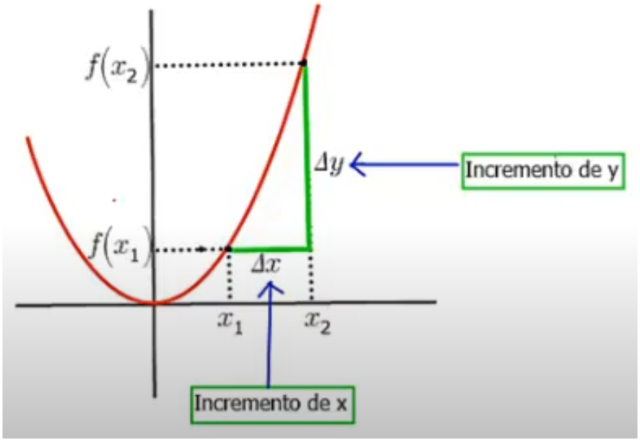
Podemos verificar que suas derivadas parciais existem na origem e são $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$, mas f_x e f_y não são contínuas.

A aproximação linear seria $f(x, y) \approx 0$, mas $f(x, y) = \frac{1}{2}$ em todos os pontos na reta $y = x$. Portanto a função de duas variáveis pode comportar-se mal mesmo se ambas as derivadas parciais existirem.

Para evitar esse comportamento, introduzimos a ideia de função diferenciável de duas variáveis.

Lembremo-nos de que para uma função de uma variável, $y = f(x)$, se x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$



Foi visto no cálculo de função de uma variável que se f é diferenciável em a, então

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x \qquad \text{onde } \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0.$$

Considere agora uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, e suponha que x varia de a para $a + \Delta x$ e y varia de b para $b + \Delta y$. Então, o incremento correspondente de z é

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

Definição de incremento

Definição

*Dado $z = f(x, y)$, quando x varia de a para $a + \Delta x$ e y de b para $b + \Delta y$, o **incremento** de z é*

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

Observação

O incremento Δz representa a variação do valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Por analogia a definição de diferenciabilidade visto em cálculo de uma variável, definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como segue.

Definição

Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Observação

A definição diz que uma função diferenciável quando o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Algumas vezes é difícil usar a definição diretamente para verificar a diferenciabilidade da função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficientemente conveniente para a diferenciabilidade.

Teorema

Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Exemplo

Exemplo

Mostre que $f(x,y) = xe^{xy}$ *é diferenciável em* $(1,0)$.

Solução. As derivadas parciais são

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}, \qquad f_y(x,y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1,0) = 1, \qquad f_y(1,0) = 1$$

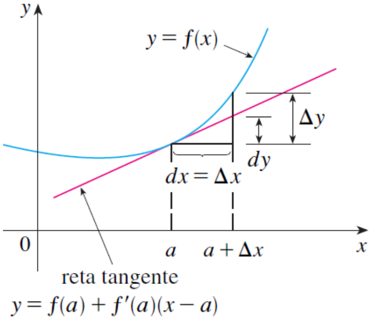
Tanto f_x quanto f_y são funções contínuas; portanto, f é diferenciável

Diferenciais

Para uma função de uma única variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer qualquer número real. A diferencial de y é definida como

$$dy = f'(x)\, dx$$

- Δy representa a variação de altura da curva $y = f(x)$
- dy representa a variação de altura da reta tangente quando x varia da quantidade $dx = \Delta x$.



Diferenciais

Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a diferencial dz, também chamada de **diferenciação total**, é definida por

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy \;=\; \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

Algumas vezes a notação df é usada no lugar de dz.
Se tomamos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$, então a diferencial de z é

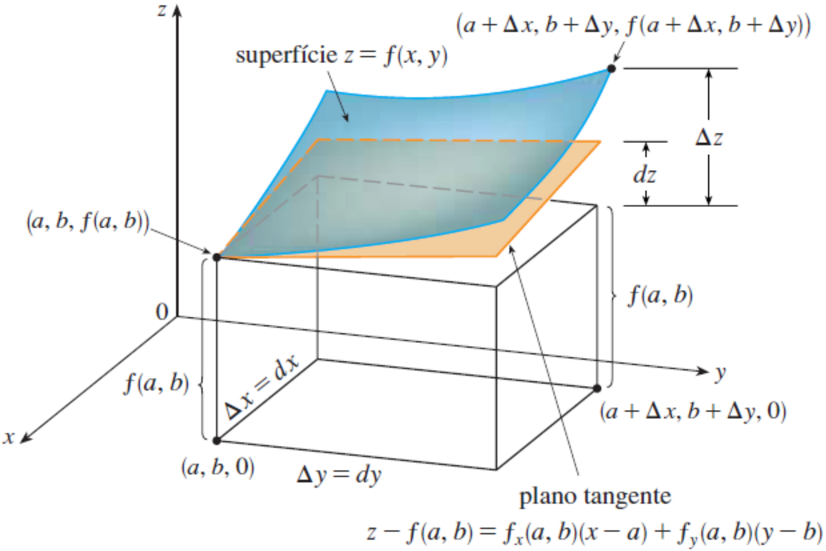
$$\begin{aligned} dz &= f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ dz &= f_x(a,b)\ dx + f_y(a,b)\ dy \end{aligned}$$

. Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx L(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ L(x,y) &= f(a,b) + dz \end{aligned}$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear pode ser escrita como

$$f(x,y) \approx f(a,b) + dz.$$


z
$(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a + \Delta x, b + \Delta y))$
superfície $z = f(x, y)$
Δz
dz
$(a, b, f(a, b))$
$f(a, b)$
0
y
$\Delta x = dx$
$f(a, b)$
x
$(a + \Delta x, b + \Delta y, 0)$
$(a, b, 0)$
$\Delta y = dy$
plano tangente
$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

Exercícios

Exercícios

1. Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine o diferencial dz.
2. Se x varia de 2 para $2,05$ e y varia de 3 a $2,96$, compare os valores de Δz e dz.