Funções Contínuas

Priscila Bemm

UEM

Objetivos

- Definição de função contínua.
- Definição de função contínua em um intervalo.
- Propriedades de funções contínuas.
- Composta de função contínua.
- Teorema do Valor intermediário.
- Definição de função contínua à esquerda e à direita.

Para o cálculo do limite de uma função quando x tende a a podemos, muitas vezes, simplesmente calcular o valor da função em a.
Funções com essa propriedade são chamadas de contínuas em a.

Para o cálculo do limite de uma função quando x tende a a podemos, muitas vezes, simplesmente calcular o valor da função em a.
Funções com essa propriedade são chamadas de contínuas em a.

Definição

Uma função f é contínua em um número $a \in Dom(f)$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

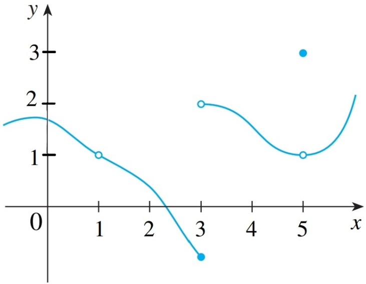
Observação

A definição de função contínua em a, requer 3 coisas:

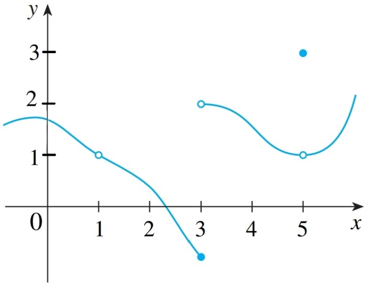
- $a \in Dom(f)$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 1

O gráfico da figura abaixo mostra que a função que a define é:

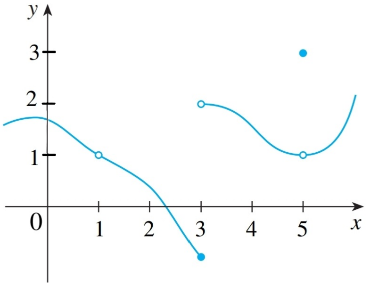


O gráfico da figura abaixo mostra que a função que a define é:



- Descontinúnua em $x = 1$, pois $1 \notin Dom(f)$.

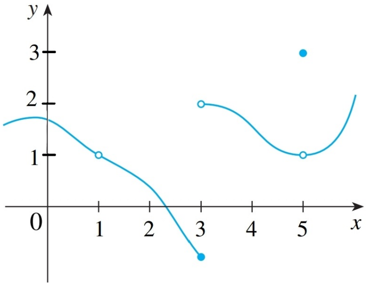
O gráfico da figura abaixo mostra que a função que a define é:



- Descontinúnua em $x = 1$, pois $1 \notin Dom(f)$.
- Descontínua em $x = 3$, pois $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ não existe.

Exemplo 1

O gráfico da figura abaixo mostra que a função que a define é:



- Descontinúnua em $x = 1$, pois $1 \notin Dom(f)$.
- Descontínua em $x = 3$, pois $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ e, portanto, $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ não existe.
- Descontínua em $x = 5$, pois apesar de $\lim_{x \to 5} f(x)$ existir, temos $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$

Exemplo 2

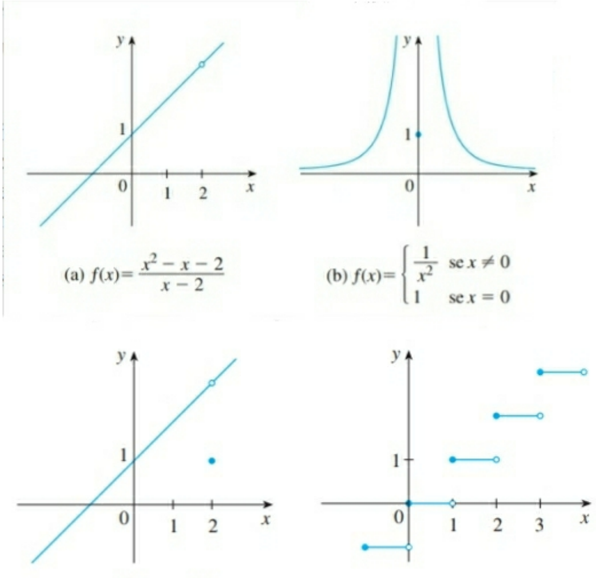
Determine onde cada função é descontínua.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{quando } x \neq 0 \\ 1 & \text{quando} x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{quando } x \neq 2 \\ 1 & \text{quando} x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \| x \|$, que converte um número real x no maior número inteiro maior ou igual a x



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

Definição

Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo I se f for contínua em todo $x \in I$.

Observação

Dizemos que f é contínua, se esta função é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Propriedades

Sejam f e g funções definidas em um intervalo I e $a \in I$. Se f e g são contínuas em a, então

1. $f + g$ é contínua em a;
2. $f - g$ é contínua em a;
3. $f \cdot g$ é contínua em a;
4. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a.

As seguintes funções são contínuas em todos os números de seus domínios:

- Polinômios
- Funções Trigonométricas
- Funções Trigonométricas Inversas
- Funções Racionais
- Funções Raízes
- Funções Exponenciais
- Funções Logarítmicas

Exemplos

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}^*$, pois $Dom\, f = R^*$. Assim, para todo $a \in R^*$ tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} x} = \frac{1}{a} = f(a).$$

Exemplos

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}^*$, pois $Dom\, f = R^*$. Assim, para todo $a \in R^*$ tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} x} = \frac{1}{a} = f(a).$$

2. Se $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1}$ então $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$, pois $-1 \in Dom\, f$.
   Assim,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1} = \frac{(-1)^4 - 2(-1) + 1}{(-1)^3 + 3(-1)^2 + 1} = \frac{4}{3}.$$

Exemplos

Pela propriedade do limite da soma de funções, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi} (sen\ x + 3cos\ x) &= \lim_{x \to \pi} sen\ x + \left(\lim_{x \to \pi} 3\right) \cdot \left(\lim_{x \to \pi} cos\ x\right) \\ &= sen\ \pi + 3 \cdot cos\ \pi = 0 + 3(-1) = -3. \end{aligned}$$

A função $f(x) = \dfrac{ln\ x - cos\ x}{x^2 - 1}$ é contínua?

A função $f(x) = \dfrac{ln\ x - cos\ x}{x^2 - 1}$ é contínua?

$f_1(x) = ln\ x$ é contínua para todo $x \in (0, +\infty)$
$f_2(x) = cos\ x$ é contínua em $\mathbb{R}$
$f_3(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \pm 1$.
Fazendo a interseção dos domínios de cada uma destas funções, temos que f é contínua em $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

E para quais pontos $g(x) = \dfrac{sen\ x}{2 + cos\ x}$ é contínua?

E para quais pontos $g(x) = \dfrac{sen\ x}{2 + cos\ x}$ é contínua?

Neste caso, sabemos que as funções $sen\ x$ e $2 + cos\ x$ são contínuas em todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, observe que o denominador $2 + cos\ x$ nunca se anula, já que $-1 \leq cos\ x \leq 1$ e portanto $1 \leq 2 + cos\ x \leq 3$. Logo, g é contínua em $\mathbb{R}$.

Propriedade

Sejam f e g funções de modo que $\lim_{x \to a} g(x) = b$ e f é contínua em b. Então, $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Se g é uma função contínua em a e f uma função contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua em a.

Exemplo

Determine o maior conjunto em que $F(x) = ln(1 + cos\ x)$ é contínua.

Sabe-se que:

- $Dom(f) = \{x; x > 0\}$, onde $f(x) = ln\ x$
- $Dom(cos)$=$\mathbb{R}$
- $Dom(g)$=$\mathbb{R}$, onde $g(x) = 1 + cos\ x$

Pelo teorema anterior $F(x) = f(g(x))$ é contínua e seu domínio, e

$$\begin{aligned} Dom(F) &= \{x \in \mathbb{R} | 1 + cos\ x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | cos\ x > -1\} = \{x \in \mathbb{R} | cos\ x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} - \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \cdots\}. \end{aligned}$$

Teorema do Valor Intermediário

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e N um número qualquer satisfazendo $f(a) \leq N \leq f(b)$, com $f(a) \neq f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

Exemplo

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.
Observe que

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$, isto é, 0 é um número entre $f(1)$ e $f(2)$.
Como f é contínua, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$.
Em outras palavras, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo $(1, 2)$.

Definição

Uma função f é contínua à direita em um número a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Definição

Uma função f é contínua à esquerda em um número a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$


O SLIDE PASSOU
E EU SOFRI CALADO