Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Definir integral de uma função de duas variáveis sobre uma região mais geral que um retângulo.*

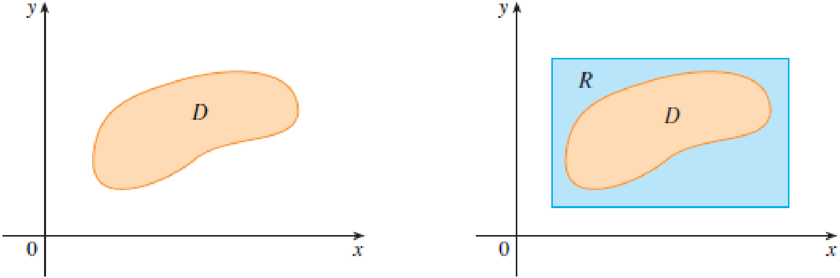
Objetivo

- *Definir integral de uma função de duas variáveis sobre uma região mais geral que um retângulo.*

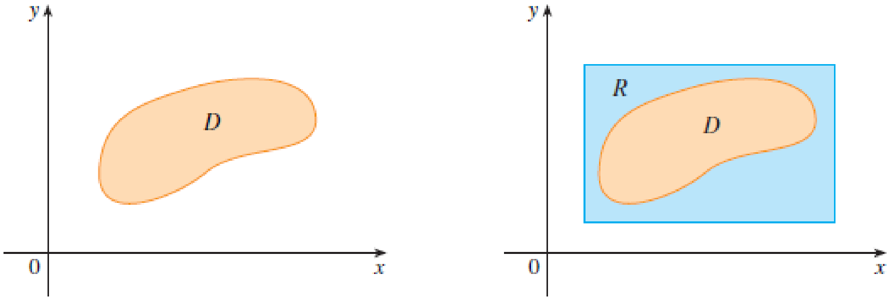
Bibliografia

- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

- Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo.
- Para integrais duplas, queremos integrar uma função f não somente sobre retângulos, como também sobre regiões D mais gerais.



Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode estar contida em uma região retangular R como na figura a seguir.



Com isso, podemos definir uma nova função F, com domínio R, da seguinte forma:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Se F for integrável em R, então definimos a integral dupla de f sobre D como sendo

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Se F for integrável em R, então definimos a integral dupla de f sobre D como sendo

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

Observação

- *Note que isso faz sentido por duas razões:*

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Se F for integrável em R, então definimos a integral dupla de f sobre D como sendo

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

Observação

- *Note que isso faz sentido por duas razões:*
  1. *Já sabemos integrar sobre retângulos;*

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Se F for integrável em R, então definimos a integral dupla de f sobre D como sendo

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

Observação

- *Note que isso faz sentido por duas razões:*
  1. *Já sabemos integrar sobre retângulos;*
  2. $F(x,y) = 0$ *para* (x,y) *fora de* D *e dessa forma não contribuem para o valor da integral na dupla somatória.*

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Se F for integrável em R, então definimos a integral dupla de f sobre D como sendo

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

Observação

- *Note que isso faz sentido por duas razões:*
  1. *Já sabemos integrar sobre retângulos;*
  2. $F(x,y) = 0$ *para* (x,y) *fora de* D *e dessa forma não contribuem para o valor da integral na dupla somatória.*
- *Note que não importa qual é o retângulo* R *tomado, desde que contenha* D.

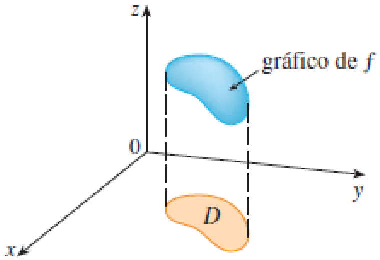
Observação

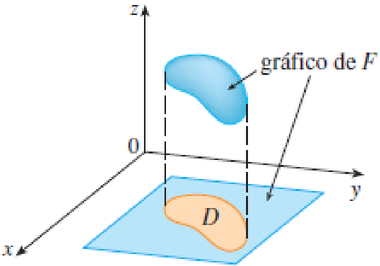
- *No caso em que* $f(x,y) \geq 0$*, podemos ainda interpretar a integral anterior como o volume do sólido que está acima de* D *e abaixo da superfície* $z = f(x,y)$ *(o gráfico de* f*).*

Observação

- *No caso em que* $f(x, y) \geq 0$, *podemos ainda interpretar a integral anterior como o volume do sólido que está acima de* D *e abaixo da superfície* $z = f(x, y)$ *(o gráfico de* f*).*

Isso é razoável comparando os gráficos de f *e* F *nas figuras a seguir e lembrando que* $\displaystyle\iint_R F(x, y)dA$ *é o volume abaixo do gráfico de* F.

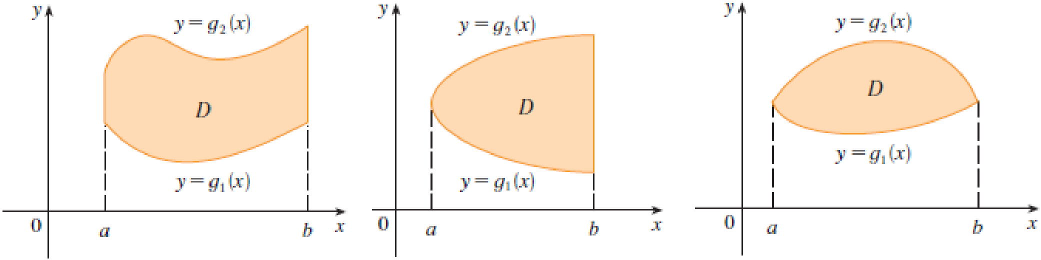




Uma região D é dita do tipo I se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja,

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$.



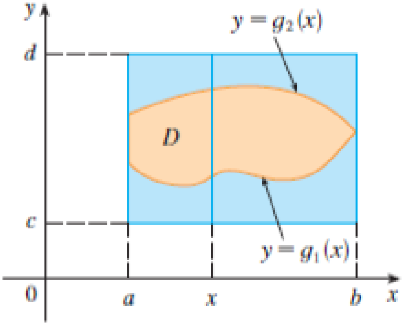
Teorema 1

Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

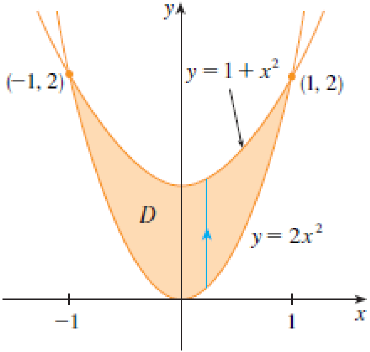
então

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$



Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo, $x = \pm 1$.



Observamos que a região D, é uma região do tipo I, mas não do tipo II, e podemos escrever

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$,

$$\iint_D (x + 2y)\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\,dx$$

$$= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Bigg]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{32}{15}$$

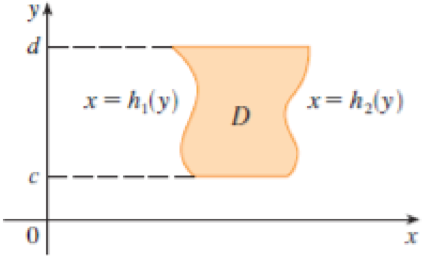
Teorema 2

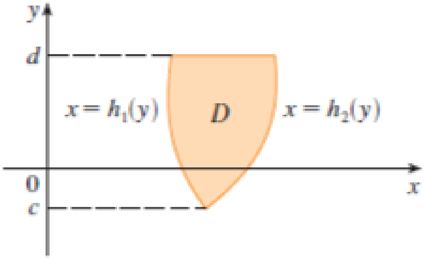
Se f é contínua em uma região D do tipo II tal que

$$D = \{(x,y) | c \leq y \leq d,\ h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$$

então

$$\int_c^f \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dx\, dy$$





Exemplo

Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e $y = x^2$.

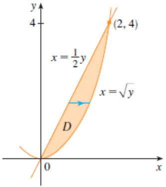
Exemplo

Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e $y = x^2$.
A região D pode ser descrita como uma região do tipo I:

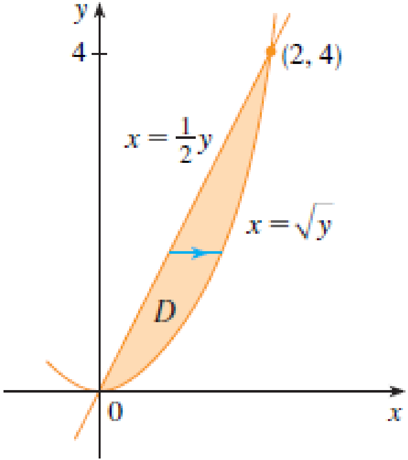
$$D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x\}$$

A região D pode ser descrita como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y)|0 \leq y \leq 4,\ \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$



D como uma região do tipo II



D como uma região do tipo II

Logo, outra expressão para V é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA$$

$$= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15} y^{5/2} + \tfrac{2}{7} y^{7/2} - \tfrac{13}{96} y^4 \Big]_0^4$$

- Quando escrevemos uma integral dupla como no exemplo anterior, é essencial desenharmos um diagrama.

- Quando escrevemos uma integral dupla como no exemplo anterior, é essencial desenharmos um diagrama.
- Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na figura anterior.

- Quando escrevemos uma integral dupla como no exemplo anterior, é essencial desenharmos um diagrama.
- Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na figura anterior.
- Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma:

- Quando escrevemos uma integral dupla como no exemplo anterior, é essencial desenharmos um diagrama.
- Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na figura anterior.
- Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma: a seta começa na fronteira inferior $g_1(x)$, que fornece o extremo inferior da integral,

- Quando escrevemos uma integral dupla como no exemplo anterior, é essencial desenharmos um diagrama.
- Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na figura anterior.
- Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma: a seta começa na fronteira inferior $g_1(x)$, que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima $g_2(x)$, que dá o extremo superior de integração.

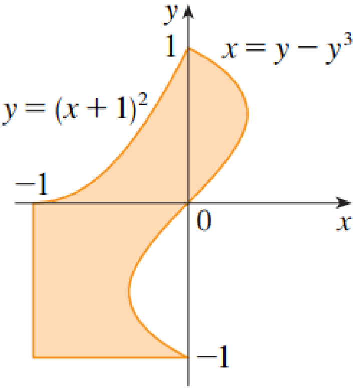
- Quando escrevemos uma integral dupla como no exemplo anterior, é essencial desenharmos um diagrama.
- Frequentemente é útil desenhar uma seta vertical, como na figura anterior.
- Assim, os limites de integração da integral de *dentro* podem ser lidos do diagrama desta forma: a seta começa na fronteira inferior $g_1(x)$, que fornece o extremo inferior da integral, e termina na fronteira de cima $g_2(x)$, que dá o extremo superior de integração.
- Para uma região do **tipo II**, a seta é desenhada horizontalmente da fronteira esquerda para a fronteira direita.

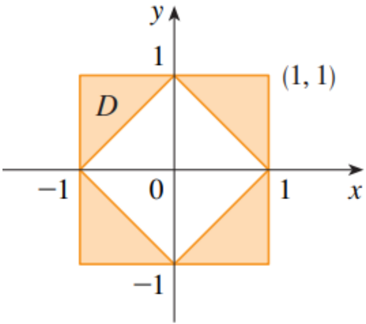
Propriedade de Integrais Duplas

Se $D = D_1 \cup D_2$, então

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

Alguma regiões não são do tipo I e nem do tipo II. Nesses casos, podemos dividir a região de modo que as subregiões sejam do tipo I ou II.





Região do tipo I

Região do tipo II

Exemplo

Região do tipo II

$D = D_1 \cup D_2$, onde

$D_1 = \{(x, y); \sqrt{y} - 1 \leq x \leq y - y^3$ e $0 \leq y \leq 1\}$ e

$D_2 = \{(x, y); -1 \leq x \leq y - y^3$ e $-1 \leq y \leq 0\}$

Exemplo

Região do tipo II:

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, em que

$D_1 = \{(x,y); 1 \leq x \leq 0$ e $x+1 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1$ e $-x+1 \leq y \leq 1\}$,

$D_3 = \{(x,y); \sqrt{y}-1 \leq x \leq 0$ e $-1 \leq y \leq -x-1\}$ e

$D_3 = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq x-1\}$

Propriedade de Integrais Duplas

Se $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$, então

$$m\,A(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq M\,A(D).$$

Exemplo

Estime o valor de $\iint_D e^{\sin(x)\cos(y)}\,dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

Exemplo

Estime o valor de $\iint_D e^{\sin(x)\cos(y)} dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.
Como $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, então

$$-1 \leq \sin(x)\cos(x) \leq 1$$

Daí,

$$e^{-1} \leq e^{\sin(x)\cos(x)} \leq e$$

Como D é o disco com raio 2, então $A(D) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.
Pela propriedade anterior,

$$\frac{4\pi}{e} \leq e^{\sin(x)\cos(x)} \leq = 4\pi e$$

Exercícios

Determine o volume do sólido dado:

1. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

Exercícios

Determine o volume do sólido dado:

1. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$
   R: $D = \{(x, y); y^3 \leq x \leq y^2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ e $V = \frac{19}{210}$
2. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$.

Determine o volume do sólido dado:

1. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$
   R: $D = \{(x, y); y^3 \leq x \leq y^2$ e $0 \leq y \leq 1\}$ e $V = \frac{19}{210}$
2. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$.
   R: $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3\}$
3. Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y = 4$.

Exercícios

Determine o volume do sólido dado:

1. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$
R: $D = \{(x, y); y^3 \leq x \leq y^2$ e $0 \leq y \leq 1\}$ e $V = \frac{19}{210}$
2. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$.
R: $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3\}$
3. Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y = 4$.
R: $D = \{(x, y); -2 \leq x \leq 2$ e $x^2 \leq y \leq 4\}$ e $V = \frac{128}{15}$