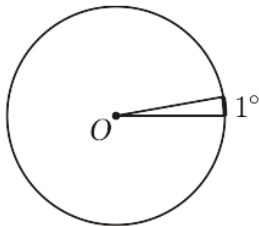


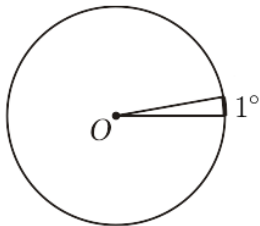
Funções Trigonométricas

Priscila Bemm

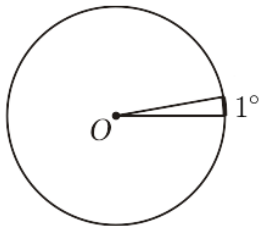
UEM

- Os ângulos podem ser medidos em graus ($^{\circ}$) ou radianos (*rad*).





- Os ângulos podem ser medidos em graus ($^\circ$) ou radianos (*rad*).
- Quando marcamos sobre uma circunferência **360** pontos igualmente espaçados, estaremos dividindo-a em **360** arcos.



- Os ângulos podem ser medidos em graus ($^{\circ}$) ou radianos (*rad*).
- Quando marcamos sobre uma circunferência **360** pontos igualmente espaçados, estaremos dividindo-a em **360** arcos.
- Definimos que cada um desses arcos, bem como cada ângulo central determinado por eles (ou seja, cada ângulo que os arcos “enxergam”) tem medida **1°** .

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida *1rad*.

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.
- Portanto, $360^\circ = 2\pi rad$, ou seja,

$$\pi rad = 180^\circ.$$

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.
- Portanto, $360^\circ = 2\pi rad$, ou seja,

$$\pi rad = 180^\circ.$$

- Assim,

$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$$

- Quando enrolamos o raio de uma circunferência sobre ela, fica determinado um arco (portanto, um ângulo central) que dizemos ter medida $1rad$.
- O raio da circunferência, pode ser enrolado sobre ela 2π vezes, pois o comprimento da circunferência é $2\pi r$.
- Portanto, $360^\circ = 2\pi rad$, ou seja,

$$\pi rad = 180^\circ.$$

- Assim,

$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$$

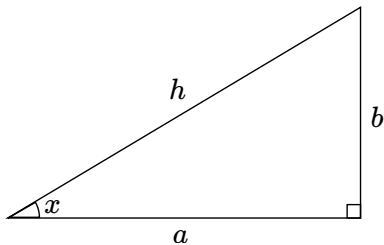
e

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \approx 0,017rad$$

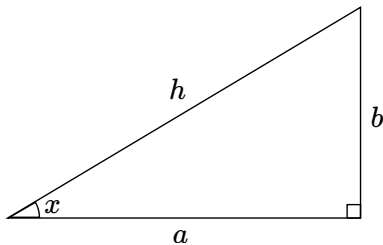
- O símbolo *rad* é utilizado para indicar explicitamente que o ângulo é medido em radianos.

- O símbolo *rad* é utilizado para indicar explicitamente que o ângulo é medido em radianos.
- No entanto, usualmente omite-se esse símbolo nos cursos de cálculo e assim faremos aqui também.

Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos

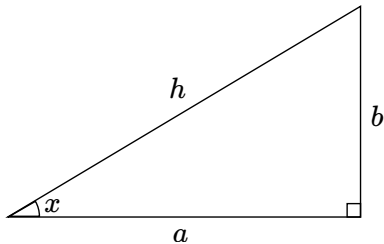


Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos



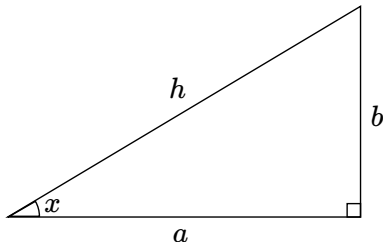
$\text{sen } x$

Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos



$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{h}$$

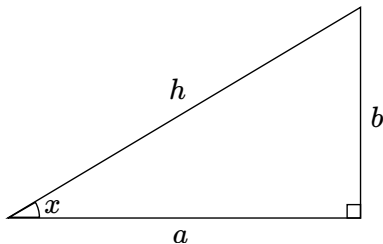
Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos



$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{h}$$

$$\cos x$$

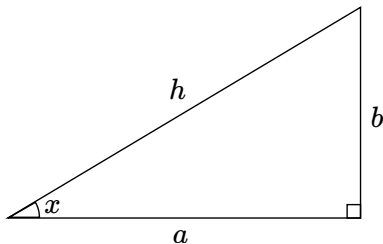
Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos



$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{h}$$

$$\cos x = \frac{a}{h}$$

Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos

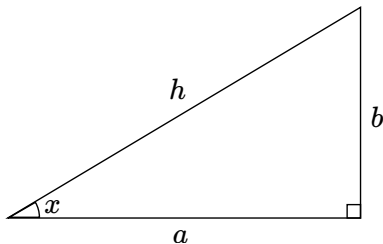


$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{h}$$

$$\cos x = \frac{a}{h}$$

$$\operatorname{tg} x = \tan x$$

Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos

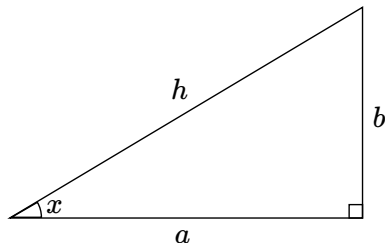


$$\text{sen } x = \frac{b}{h}$$

$$\text{cos } x = \frac{a}{h}$$

$$\text{tg } x = \tan x = \frac{b}{a} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos



$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{h}$$

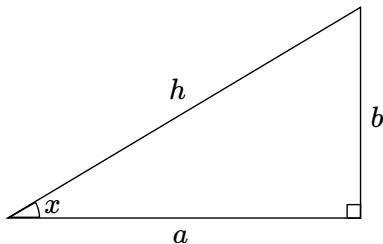
$$\cos x = \frac{a}{h}$$

$$\operatorname{tg} x = \tan x = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Identidade Trigonométrica Fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (0^\circ < x < 90^\circ).$$

Razões Trigonômétricas para Ângulos Agudos



$$\text{sen } x = \frac{b}{h}$$

$$\text{cos } x = \frac{a}{h}$$

$$\text{tg } x = \tan x = \frac{b}{a} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Identidade Trigonométrica Fundamental

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \quad (0^\circ < x < 90^\circ).$$

Mais adiante, definiremos seno, cosseno e tangente para qualquer ângulo.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot 1 \text{ rad}$$

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right)$$

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) = \frac{180^\circ}{3}$$

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ .$$

Exemplo

Calcule $\text{sen}(\pi/3)$.

Temos que

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ .$$

Logo,

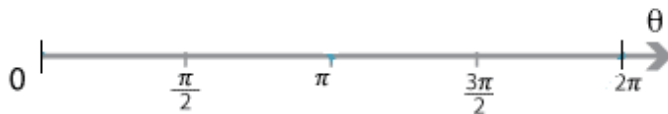
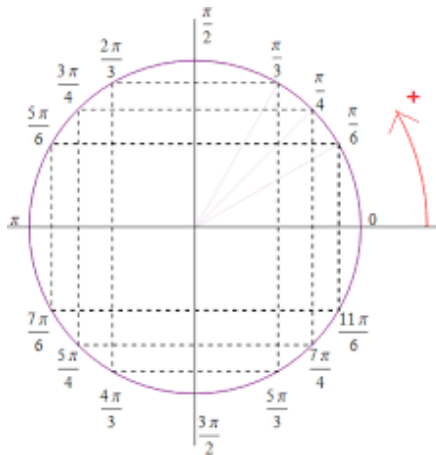
$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

- Considere uma circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano.

- Considere uma circunferência de raio 1 , centrada na origem do sistema cartesiano.
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[0, 2\pi)$.

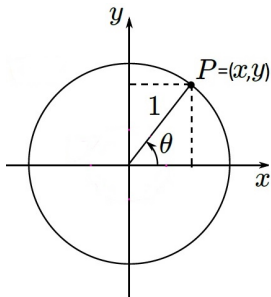
- Considere uma circunferência de raio 1 , centrada na origem do sistema cartesiano.
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[0, 2\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[0, 2\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

- Considere uma circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano.
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[0, 2\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[0, 2\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

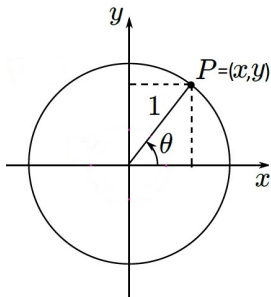


- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.

- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad .

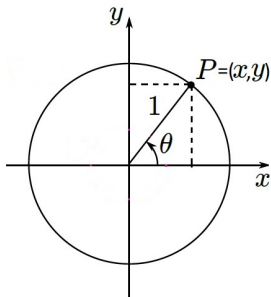


- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad .



DEFINE-SE:

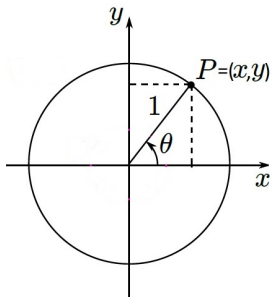
- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad .



DEFINE-SE:

$$\text{sen}(\theta) = y;$$

- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad .

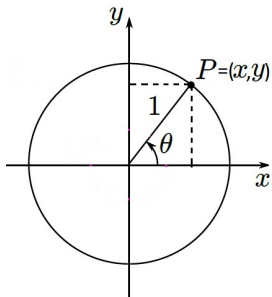


DEFINE-SE:

$$\text{sen}(\theta) = y;$$

$$\text{cos}(\theta) = x;$$

- Logo, a cada $\theta \in [0, 2\pi)$ está associado um único ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência.
- Este ponto $P = (x, y)$ e o ponto de coordenadas $(1, 0)$ definem um arco (portanto, um ângulo) de medida θrad .

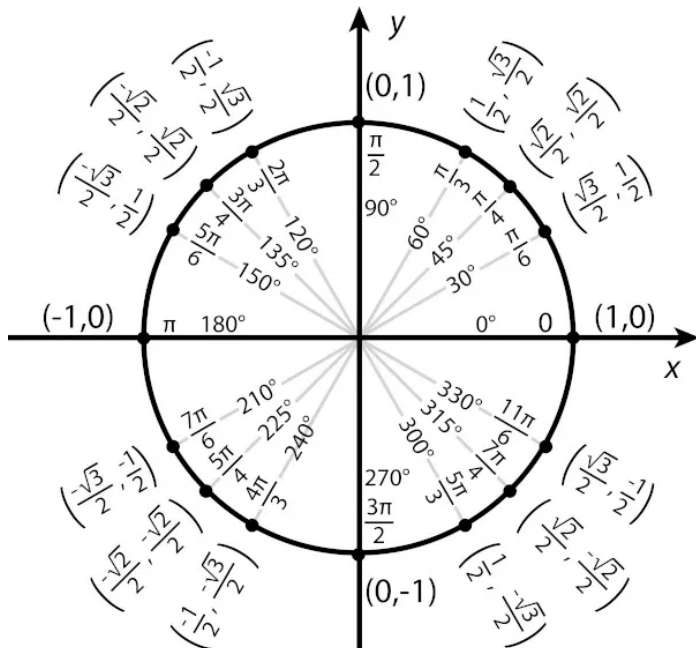


DEFINE-SE:

$$\text{sen}(\theta) = y;$$

$$\text{cos}(\theta) = x;$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0.$$



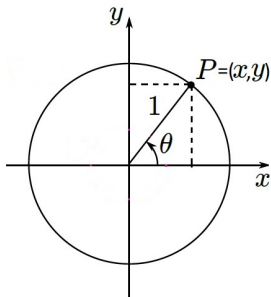
- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

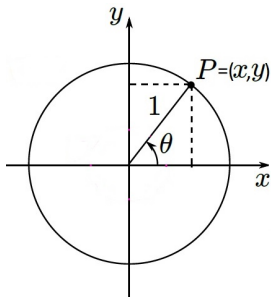
- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .

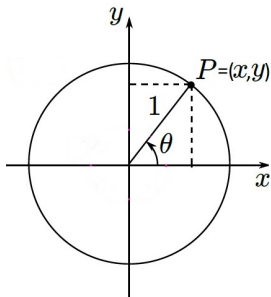


- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .



$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta) = y;$$

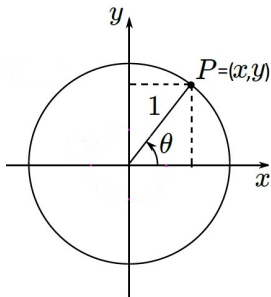
- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .



$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta) = y;$$

$$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\theta + 2\pi) = \text{cos}(\theta) = x;$$

- Agora, sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[2\pi, 4\pi)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[2\pi, 4\pi)$ sobre a circunferência, no sentido anti-horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta + 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [2\pi, 4\pi)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .



$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta) = y;$$

$$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\theta + 2\pi) = \text{cos}(\theta) = x;$$

$$\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\theta + 2\pi) = \text{tg}(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0.$$

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in [0, \infty)$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in [0, \infty)$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.
- Mas e os números negativos?

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in [0, \infty)$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.
- Mas e os números negativos?
- Veremos na sequência.

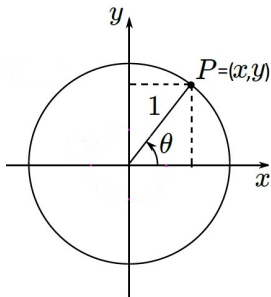
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.

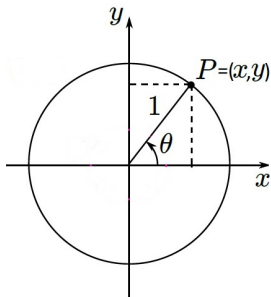
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .

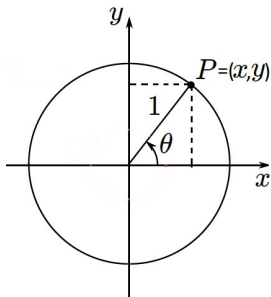


- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .



$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta - 2\pi) = \text{sen}(\theta) = y;$$

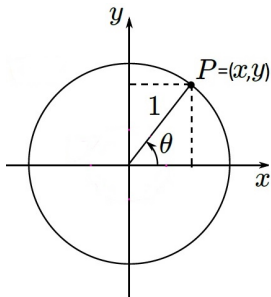
- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .



$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta - 2\pi) = \text{sen}(\theta) = y;$$

$$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\theta - 2\pi) = \text{cos}(\theta) = x;$$

- Sobre o eixo x (reta real), considere no intervalo $[-2\pi, 0)$.
- Nós podemos “enrolar” o intervalo $[-2\pi, 0)$ sobre a circunferência, no sentido horário, a partir do ponto $(1, 0)$.
- Note que para cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$, podemos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \theta - 2\pi$.
- Logo, a cada $\alpha \in [-2\pi, 0)$ está associado um único ponto sobre a circunferência, que coincide com o ponto $P = (x, y)$ associado a θ .



$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\theta - 2\pi) = \text{sen}(\theta) = y;$$

$$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\theta - 2\pi) = \text{cos}(\theta) = x;$$

$$\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\theta - 2\pi) = \text{tg}(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0.$$

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.
- É preciso tomar cuidado, com a função tangente, pois

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$

que NÃO está definida quando $\text{cos}(\theta) = 0$.

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.
- É preciso tomar cuidado, com a função tangente, pois

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$

que NÃO está definida quando $\text{cos}(\theta) = 0$.

- Pode-se ver que $\text{cos}(\theta) = 0$ para todo

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \dots$$

- Nós podemos continuar esse processo e desta forma teremos associado a cada $\theta \in \mathbb{R}$ os valores $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$.
- Como cada um destes valores é único, podemos definir as funções seno, cosseno e tangente.
- É preciso tomar cuidado, com a função tangente, pois

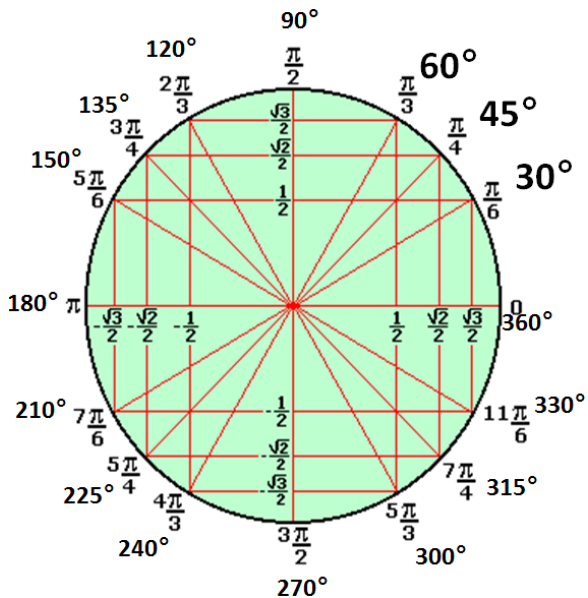
$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$

que NÃO está definida quando $\text{cos}(\theta) = 0$.

- Pode-se ver que $\text{cos}(\theta) = 0$ para todo

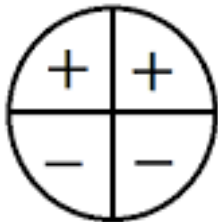
$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \dots$$

- Portanto, $\text{tg}(\theta)$ não está definida para $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

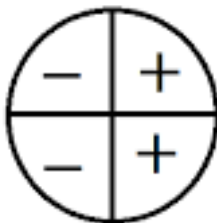


Pela construção que fizemos, temos os sinais $+$ e $-$ do seno, cosseno e tangente de um ângulo variam de acordo com a localização do ângulo nos quadrantes do plano cartesiano.

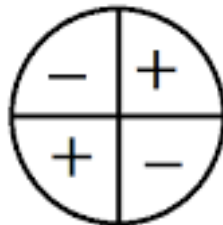
Seno

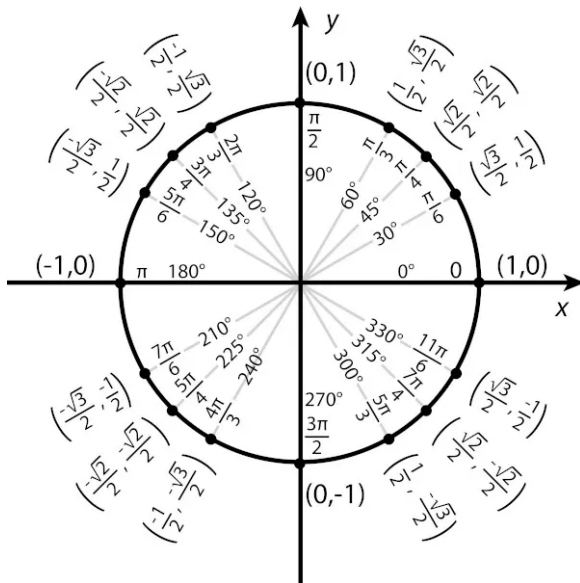


Cosseno



Tangente





Observação

- *A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo.*

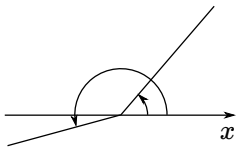
Observação

- *A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo.*
- *Um ângulo positivo é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final.*

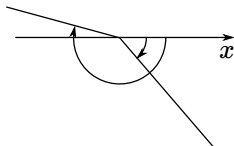
Sinais de Ângulos

Observação

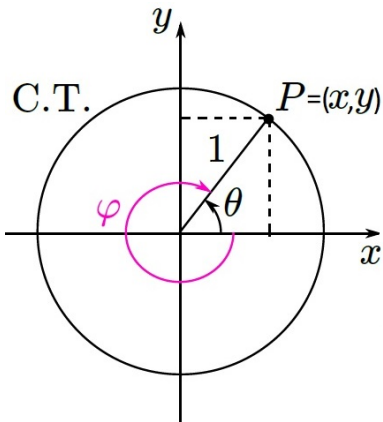
- A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo.
- Um ângulo positivo é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final.
- Da mesma forma, ângulos negativos são obtidos girando-se no sentido horário.



Ângulos positivos

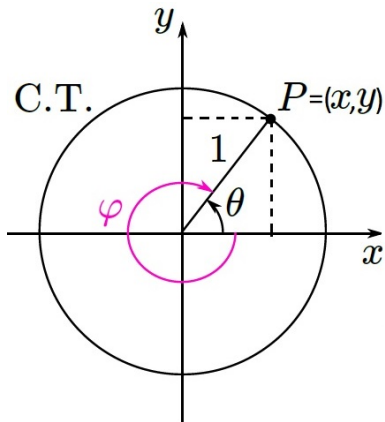


Ângulos negativos



Ângulos equivalentes

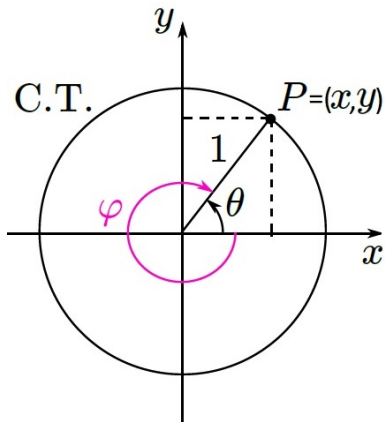
Dois ângulos são equivalentes se são associados a um mesmo ponto da Circunferência Trigonométrica.



Ângulos equivalentes

Dois ângulos são equivalentes se são associados a um mesmo ponto da Circunferência Trigonométrica. Por exemplo, na figura, θ e φ são equivalentes.

Circunferência Trigonométrica



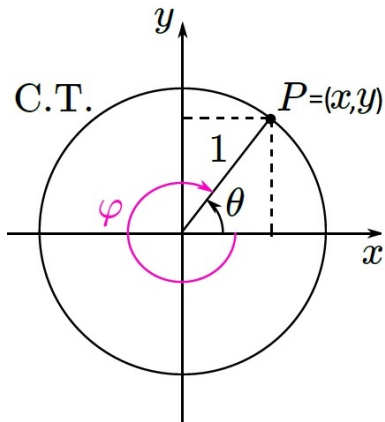
Observação

- Um ângulo α é equivalente a um ângulo θ se, e somente se,

$$\alpha = \theta + 2n\pi$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Circunferência Trigonométrica



Observação

- Um ângulo α é equivalente a um ângulo θ se, e somente se,

$$\alpha = \theta + 2n\pi$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$.

- Todo ângulo $\alpha \in \mathbb{R}$ é equivalente a um ângulo localizado em um dos quatro quadrantes da C.T. ou a 0 , ou a $\pi/2$, ou a π , ou a $3\pi/2$.

Função Seno

Dada a função $\text{sen}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$

Função Seno

Dada a função $\text{sen}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(\text{sen}) = [-1, 1]$

Função Seno

Dada a função $\text{sen}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(\text{sen}) = [-1, 1]$
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$

Função Seno

Dada a função $\text{sen}(x)$, temos:

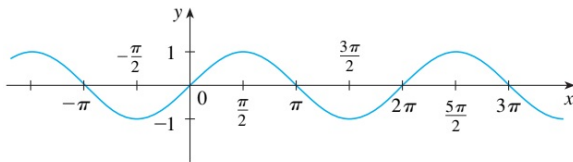
- $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(\text{sen}) = [-1, 1]$
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$
- $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$

Gráficos da Funções Trigonométricas

Função Seno

Dada a função $\text{sen}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(\text{sen}) = [-1, 1]$
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$
- $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$
- $\text{sen}(x) = 0$ sempre que $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, isto é que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π .



Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(\cos) = \mathbb{R}$
- $Im(\cos) = [-1, 1]$
- $\cos(-x) = \cos(x)$

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(cos) = \mathbb{R}$
- $Im(cos) = [-1, 1]$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

Função Cosseno

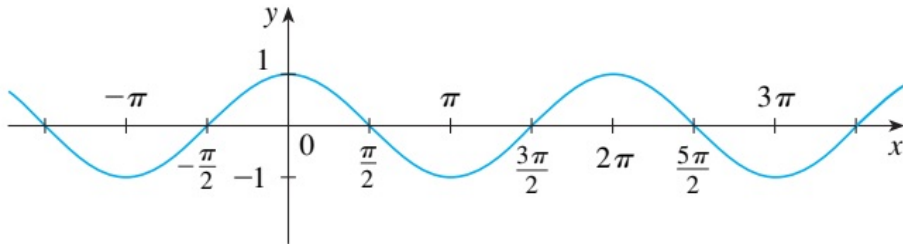
Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $Dom(\cos) = \mathbb{R}$
- $Im(\cos) = [-1, 1]$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
- $\cos(x) = 0$ sempre que $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Função Cosseno

Dada a função $\cos(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
- $\cos(x) = 0$ sempre que $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.



Função Tangente

Dada a função $\text{tg}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Função Tangente

Dada a função $\text{tg}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\text{Im}(\text{tg}) = \mathbb{R}$

Função Tangente

Dada a função $\text{tg}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\text{Im}(\text{tg}) = \mathbb{R}$
- $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$

Função Tangente

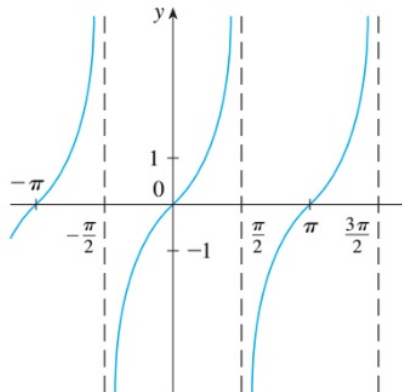
Dada a função $\text{tg}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\text{Im}(\text{tg}) = \mathbb{R}$
- $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$
- $\text{tg}(x) = \text{tg}(x + \pi)$

Função Tangente

Dada a função $\text{tg}(x)$, temos:

- $\text{Dom}(\text{tg}) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\text{Im}(\text{tg}) = \mathbb{R}$
- $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$
- $\text{tg}(x) = \text{tg}(x + \pi)$
- $\text{tg}(x) = 0$ sempre que $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



Funções Trigonômétricas Recíprocas

As funções secante, cossecante e cotangente são definidas como o **inverso multiplicativo** de funções trigonométricas fundamentais.

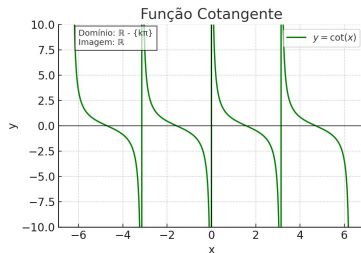
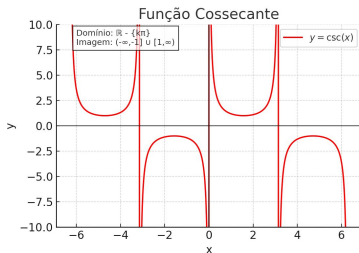
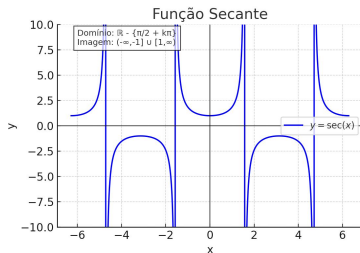
Assim, temos:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

As funções trigonométricas recíprocas não estão definidas em todos os valores reais, já que apresentam restrições no domínio nos pontos onde o denominador se anula. Seus gráficos, marcados pela presença de assíntotas verticais, mostram comportamentos distintos, mas todos relacionados às funções seno, cosseno e tangente.



Funções Trigonômicas Inversas

As funções trigonométricas inversas surgem da necessidade de reverter as funções trigonométricas usuais, como seno, cosseno e tangente. Elas permitem determinar ângulos a partir de razões trigonométricas conhecidas, sendo ferramentas essenciais na resolução de triângulos e em diversos problemas geométricos.

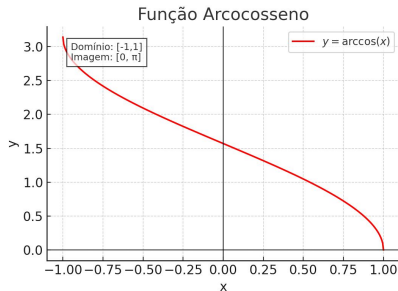
Para garantir que sejam funções bem definidas, seus domínios precisam ser restritos. Assim, temos o arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente como principais exemplos, além das inversas da cotangente, secante e cossecante.

Função Arco-cosseno

Notação: *arccos* ou \cos^{-1}

$$y = \cos^{-1}(x) \iff x = \cos(y), y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Dom } \sin^{-1} = [-1, 1] \quad \text{e} \quad \text{Im } \sin^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



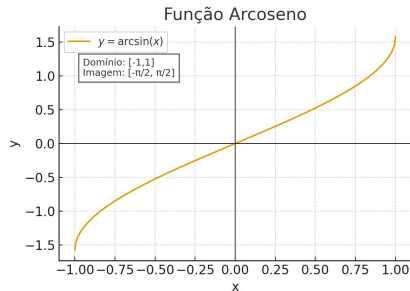
Exemplo: $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, pois $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o ângulo $\frac{\pi}{3} \in [-1, 1]$.

Função Arco-seno

Notação: *arcsen* ou \sin^{-1}

$$y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y), y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Dom } \sin^{-1} = [-1, 1] \quad \text{e} \quad \text{Im } \sin^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Exemplo: $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, pois $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o ângulo $\frac{\pi}{6} \in [-1,1]$.

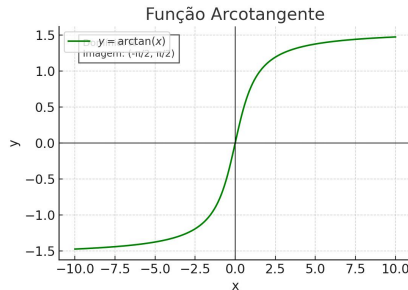
Função Arco-tangente

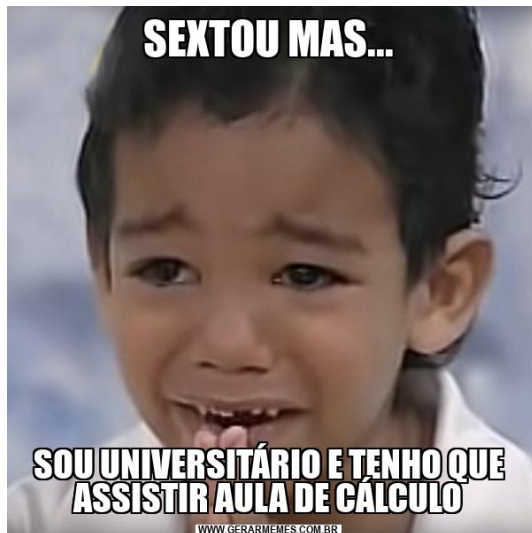
Notação: \arctg ou tg^{-1}

$$y = \text{tg}^{-1}(x) \iff x = \text{tg}(y), y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Dom } \text{tg}^{-1} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Im } \text{tg}^{-1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Exemplo: $\text{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, pois $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e o ângulo $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$.





Avalie quais afirmações são verdadeiras:

- ❶ $\operatorname{tg}^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$
- ❷ $\operatorname{tg}^{-1} x = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$
- ❸ $\cos^{-1} = (\cos x)^{-1}$
- ❹ $\sin(a+b) = \sin(a) + \sin(b)$
- ❺ $\frac{\operatorname{tg} x^3}{x^2} = \operatorname{tg} x$, se $x \neq 0$
- ❻ $(\cos x)^{-1} = \sec x$