Importância do Vetor Gradiente

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Responder as perguntas: em qual direção uma função de duas ou três variáveis varia mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação?*

Objetivo

- *Responder as perguntas: em qual direção uma função de duas ou três variáveis varia mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação?*

Bibliografia

- *Cálculo III e IV,* ***Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.*** *Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Definição

Se f *é uma função de duas variáveis* x e y, *então o gradiente de* f *é a função vetorial* ∇f *definida por*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

Definição

Se f *é uma função de duas variáveis* x *e* y, *então o gradiente de* f *é a função vetorial* ∇f *definida por*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

Observação

- *Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a derivada direcional de uma função diferenciável* f *na direção de um vetor unitário* $\vec{u}$ *como*

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}.$$

Definição

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

Observação

- *Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever a derivada direcional de uma função diferenciável f na direção de um vetor unitário $\vec{u}$ como*

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}.$$

- *Analogamente para funções de três variáveis, temos*

$$D_{\vec{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}.$$

Considere uma função f de duas ou três variáveis e um ponto P no domínio de f.
Considere todas as derivadas direcionais possíveis de f em P.
Isso nos dará as taxas de variações de f em todas as direções possíveis.

Considere uma função f de duas ou três variáveis e um ponto P no domínio de f.
Considere todas as derivadas direcionais possíveis de f em P.
Isso nos dará as taxas de variações de f em todas as direções possíveis.
Podemos então perguntar:

1. em qual dessas direções f varia mais rapidamente?

Considere uma função f de duas ou três variáveis e um ponto P no domínio de f.
Considere todas as derivadas direcionais possíveis de f em P.
Isso nos dará as taxas de variações de f em todas as direções possíveis.
Podemos então perguntar:

1. em qual dessas direções f varia mais rapidamente?
2. qual a taxa máxima de variação?

Considere uma função f de duas ou três variáveis e um ponto P no domínio de f.
Considere todas as derivadas direcionais possíveis de f em P.
Isso nos dará as taxas de variações de f em todas as direções possíveis.
Podemos então perguntar:

1. em qual dessas direções f varia mais rapidamente?
2. qual a taxa máxima de variação?

Vamos analisar.

Pelo que acabamos de ver,

$$D_{\vec{u}}f \quad = \quad \nabla f \cdot \vec{u}$$

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver\ \ G.A.) \end{aligned}$$

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver\ \ G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver \;\; G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver\ \ G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.
Note que o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ ocorre quando $cos\theta = 1$

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver\ \ G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.
Note que o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ ocorre quando $cos\theta = 1$
Mas isso ocorre quando $\theta = 0$,

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver \;\; G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.
Note que o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ ocorre quando $cos\theta = 1$
Mas isso ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando ∇f e $\vec{u}$ tem a mesma direção.

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver\ \ G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.
Note que o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ ocorre quando $cos\theta = 1$
Mas isso ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando ∇f e $\vec{u}$ tem a mesma direção.
Mais ainda, o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ é $|\nabla f| \cdot cos0$

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver\ \ G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.
Note que o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ ocorre quando $cos\theta = 1$
Mas isso ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando ∇f e $\vec{u}$ tem a mesma direção.
Mais ainda, o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ é $|\nabla f| \cdot cos0 = |\nabla f|$.

Pelo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= \nabla f \cdot \vec{u} \\ &= |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\theta \qquad (ver \;\; G.A.) \\ &= |\nabla f| \cdot cos\theta, \end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$.
Note que o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ ocorre quando $cos\theta = 1$
Mas isso ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando ∇f e $\vec{u}$ tem a mesma direção.
Mais ainda, o valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ é $|\nabla f| \cdot cos0 = |\nabla f|$.
Com isso, temos o seguinte resultado.

Teorema

Considere uma função f *de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional* $D_{\vec{u}}f(X)$ *é* $|\nabla f(X)|$ *e isso ocorre quando* $\vec{u}$ *e* $\nabla f(X)$ *tem a mesma direção.*

Teorema

Considere uma função f de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{u}}f(X)$ é $|\nabla f(X)|$ e isso ocorre quando $\vec{u}$ e $\nabla f(X)$ tem a mesma direção.

Observação

Esse teorema mostra a primeira importância do vetor gradiente de uma função.

Exemplo

Se $f(x, y) = xe^y$*, determine:*

1. *a taxa de variação de* f *no ponto* $P = (2, 0)$ *na direção de* P *para* $Q = (\frac{1}{2}, 2)$.
2. *a direção de maior variação em* P.
3. *a taxa máxima de variação em* P.

Exemplo

Se $f(x,y) = xe^y$, *determine:*

1. *a taxa de variação de* f *no ponto* $P = (2,0)$ *na direção de* P *para* $Q = (\frac{1}{2}, 2)$.
2. *a direção de maior variação em* P.
3. *a taxa máxima de variação em* P.

Solução:

Exemplo

Se $f(x, y) = xe^y$*, em que direção* f *tem a máxima taxa de variação no ponto* $P = (2, 0)$*? Qual é a máxima taxa de variação?*

Exemplo

Se $f(x,y) = xe^y$, em que direção f tem a máxima taxa de variação no ponto $P = (2,0)$? Qual é a máxima taxa de variação?

Solução: Pelo teorema anterior, f aumenta mais depressa na direção do gradiente

$$\nabla f(2,0) = (1,2).$$

A taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2,0)| = |(1,2)| = \sqrt{5}.$$

Outra Importância do Vetor Gradiente

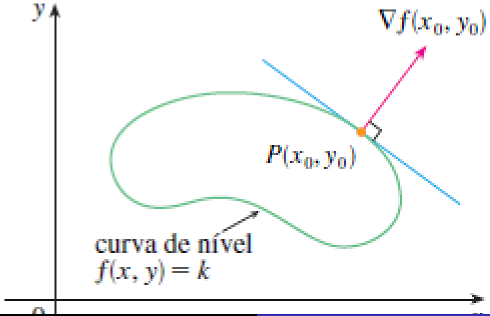
- Sejam f uma função de dua variáveis x e y e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de seu domínio.

Outra Importância do Vetor Gradiente

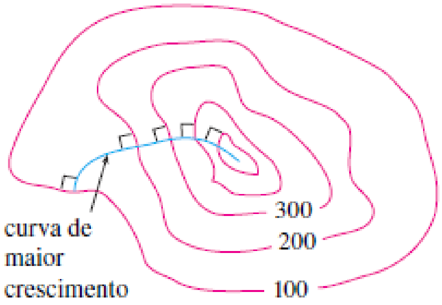
- Sejam f uma função de dua variáveis x e y e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de seu domínio.
- Pelo teorema anterior, o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção do aumento mais rápido de f.

Outra Importância do Vetor Gradiente

- Sejam f uma função de dua variáveis x e y e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de seu domínio.
- Pelo teorema anterior, o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção do aumento mais rápido de f.
- Além disso, pode se mostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à reta tangente da curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P.



Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno.

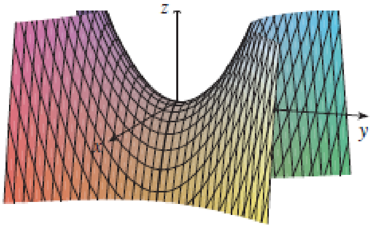


- Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes.

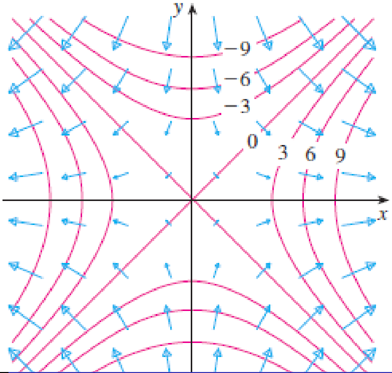
- Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes.
- Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b).

- Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes.
- Cada vetor gradiente $\nabla f(a,b)$ é traçado partindo-se do ponto (a,b).
- A figura mostra gráfico da função $f(x,y) = y^2 - x^2$, bem como o chamado **campo de vetores gradientes** sobreposto a um mapa de contornos de f.

- Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes.
- Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b).
- A figura mostra gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$, bem como o chamado **campo de vetores gradientes** sobreposto a um mapa de contornos de f.
- Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção "ladeira acima" e são perpendiculares às curvas de nível.



$z = y^2 - x^2$



Exercícios

Considere as funções abaixo e determine:

(a) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

(b) Determine a direção de maior variação de f no ponto P.

(c) Determine a taxa máxima de variação de f no ponto P.

1. $f(x,y) = (2x+3y), \quad P(-6,4), \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$
2. $f(x,y) = y^2kx, \quad P(1,2), \quad \mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j})$
3. $f(x,y,z) = xe^{2yz}, \quad P(3,0,2), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
4. $f(x,y,z) = \sqrt{x+yz}, \quad P(1,3,1), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$