Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Estudar integrais duplas em coordenadas polares, que facilitam os cálculos quando a região de integração fica melhor descrita em coordenadas polares.*

Objetivo

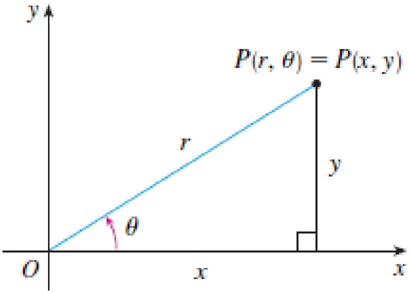
- *Estudar integrais duplas em coordenadas polares, que facilitam os cálculos quando a região de integração fica melhor descrita em coordenadas polares.*

Bibliografia

- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

As coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com suas coordenadas cartesianas (x, y) pelas equações

$$x = rcos(\theta), \;\; y = rsen(\theta) \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$



Em coordenadas cartesianas, definimos retângulo (fechado) como sendo um conjunto do tipo

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \;\; e \;\; c \leq y \leq d\}.$$

Em coordenadas cartesianas, definimos retângulo (fechado) como sendo um conjunto do tipo

$$R = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \;\; e \;\; c \leq y \leq d\}.$$

Ou seja, é um conjunto de pontos (x, y) do plano xy em que x varia entre as constante a e b, e y varia entre as constantes c e d.

Em coordenadas cartesianas, definimos retângulo (fechado) como sendo um conjunto do tipo

$$R = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \;\; e \;\; c \leq y \leq d\}.$$

Ou seja, é um conjunto de pontos (x, y) do plano xy em que x varia entre as constante a e b, e y varia entre as constantes c e d.

Usaremos essa ideia para definir retângulo no plano polar.

Em coordenadas cartesianas, definimos retângulo (fechado) como sendo um conjunto do tipo

$$R = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \;\; e \;\; c \leq y \leq d\}.$$

Ou seja, é um conjunto de pontos (x, y) do plano xy em que x varia entre as constante a e b, e y varia entre as constantes c e d.
Usaremos essa ideia para definir retângulo no plano polar.
Um **retângulo polar** é um conjunto da forma

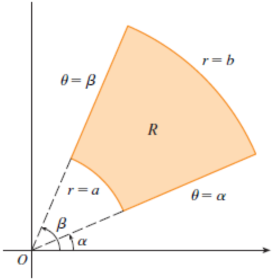
$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b \;\; e \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Em coordenadas cartesianas, definimos retângulo (fechado) como sendo um conjunto do tipo

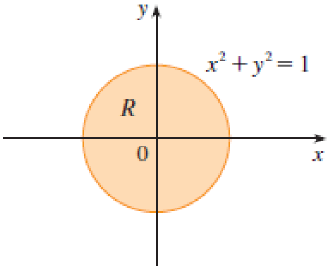
$$R = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \;\; e \;\; c \leq y \leq d\}.$$

Ou seja, é um conjunto de pontos (x, y) do plano xy em que x varia entre as constante a e b, e y varia entre as constantes c e d.
Usaremos essa ideia para definir retângulo no plano polar.
Um **retângulo polar** é um conjunto da forma

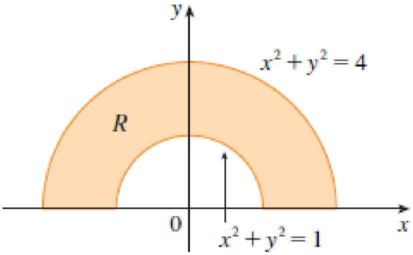
$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b \;\; e \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$



Outros modelos de retângulos polares



(a) $R=\{(r,\ \theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi\}$



(b) $R=\{(r,\ \theta)\mid 1\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant \theta\leqslant \pi\}$

Suponha que queiramos calcular a integral dupla

$$\iint_R f(x,y)dA$$

em que R tem descrição complicada em coordenadas cartesianas xy,

Suponha que queiramos calcular a integral dupla

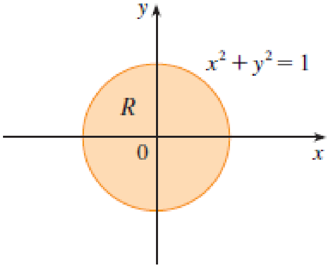
$$\iint_R f(x,y)dA$$

em que R tem descrição complicada em coordenadas cartesianas xy, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

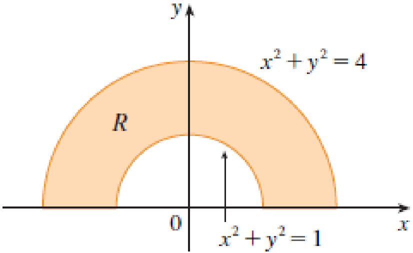
Suponha que queiramos calcular a integral dupla

$$\iint_R f(x, y)dA$$

em que R tem descrição complicada em coordenadas cartesianas xy, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.
Por exemplo:



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$



(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Teorema

Seja f *uma função contínua no retângulo polar*

$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b \ \ e \ \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Então,*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta.$$

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Teorema

Seja f *uma função contínua no retângulo polar*

$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b \;\; e \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Então,*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta.$$

Observação

A fórmula anterior diz que para convertemos uma integral dupla dada em coordenadas cartesianas xy *para uma integral dupla em coordenadas polares, devemos:*

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Teorema

Seja f *uma função contínua no retângulo polar*

$$R = \{(r,\theta)\,|\, a \leq r \leq b \ \ e \ \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Então,*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta.$$

Observação

A fórmula anterior diz que para convertemos uma integral dupla dada em coordenadas cartesianas xy *para uma integral dupla em coordenadas polares, devemos: trocar* x *por* $rcos\,\theta$,

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Teorema

Seja f *uma função contínua no retângulo polar*

$$R = \{(r,\theta) \,|\, a \leq r \leq b \;\; e \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Então,*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta.$$

Observação

A fórmula anterior diz que para convertemos uma integral dupla dada em coordenadas cartesianas xy *para uma integral dupla em coordenadas polares, devemos: trocar* x *por* $rcos\,\theta$, y *por* $rsen\,\theta$,

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Teorema

Seja f *uma função contínua no retângulo polar*

$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b \ \ e \ \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Então,*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta.$$

Observação

A fórmula anterior diz que para convertemos uma integral dupla dada em coordenadas cartesianas xy *para uma integral dupla em coordenadas polares, devemos: trocar* x *por* $rcos\,\theta$, y *por* $rsen\,\theta$, dA *por* $rdrd\theta$

Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla

Teorema

Seja f *uma função contínua no retângulo polar*

$$R = \{(r,\theta)\,|\, a \leq r \leq b \ \ e \ \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

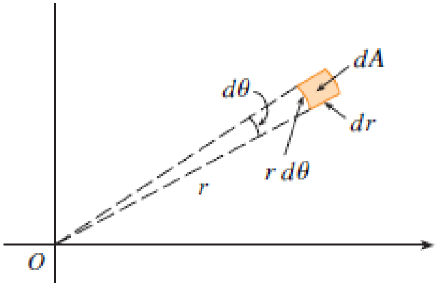
em que $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Então,*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta.$$

Observação

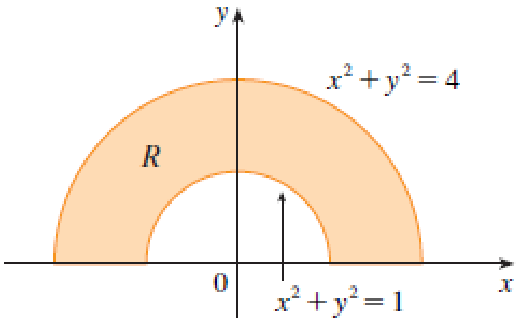
A fórmula anterior diz que para convertemos uma integral dupla dada em coordenadas cartesianas xy *para uma integral dupla em coordenadas polares, devemos: trocar* x *por* $rcos\,\theta$, y *por* $rsen\,\theta$, dA *por* $rdrd\theta$ *e adequamos os limites de integração para* r *e* θ.

Um método clássico para se lembrar de substituir dA por $rdrd\theta$, é podemos pensar nos retângulos polares "infinitesimais" como retângulos convencionais com dimensões $rd\theta$ e dr e, portanto, com "área" $dA = rdrd\theta$.



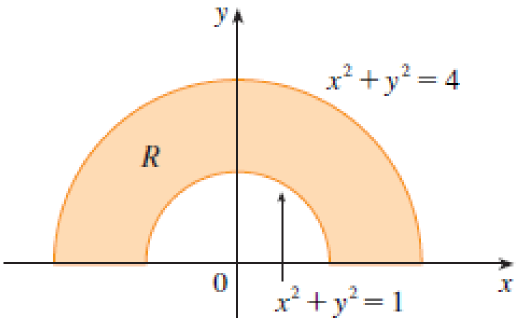
Exemplo

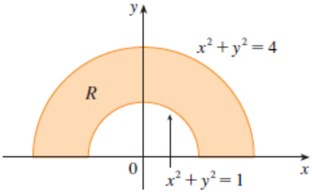
Calcule $\iint_R (3x^{+}4y^2)\, dA$, onde R é a região no semi-plano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

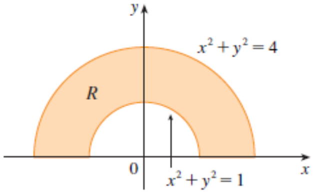


Exemplo

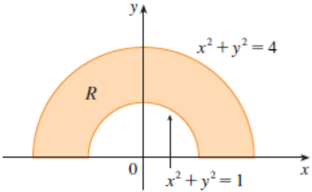
Calcule $\iint_R (3x^+ 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semi-plano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.




y
$x^2 + y^2 = 4$
R
0
$x^2 + y^2 = 1$
x



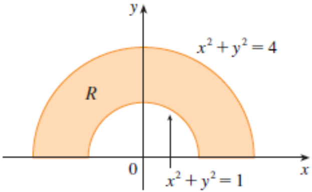
- Em coordenadas cartesianas, R é dado por
$$R = \{(x, y) \,|\, y \geq 0 \;\; e \;\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



- Em coordenadas cartesianas, R é dado por

$$R = \{(x, y) \,|\, y \geq 0 \;\; e \;\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- Neste caso, podemos ver que R não é de tipo I e nem de tipo II, mas sim uma união de 3 regiões de tipo I.

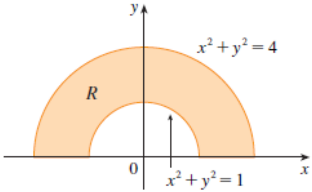


- Em coordenadas cartesianas, R é dado por

$$R = \{(x, y) \,|\, y \geq 0 \;\; e \;\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- Neste caso, podemos ver que R não é de tipo I e nem de tipo II, mas sim uma união de 3 regiões de tipo I.

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$



- Em coordenadas cartesianas, R é dado por

$$R = \{(x, y) \,|\, y \geq 0 \;\; e \;\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- Neste caso, podemos ver que R não é de tipo I e nem de tipo II, mas sim uma união de 3 regiões de tipo I.

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

- A integral ficaria uma soma de três integrais, uma delas sendo

$$\iint_R (3x + 4y^2) dA = \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (3x + 4y^2) dy dx.$$

Por outro lado, em coordenadas polares, R é o retângulo

$$R = \{(r,\theta)\,|\,1 \leq r \leq 2 \;\; e \;\; 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Por outro lado, em coordenadas polares, R é o retângulo

$$R = \{(r, \theta) \,|\, 1 \leq r \leq 2 \;\; e \;\; 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \left(3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta\right) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \int_1^2 \left(3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(7\cos\theta + 15\sin^2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[7\cos\theta + \frac{15}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)\right] d\theta \\
&= \left[7\sin\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Determine o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$ e pelo parabolóide

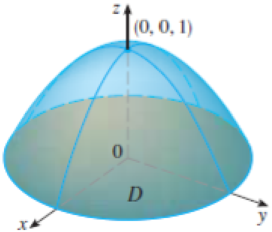
$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Exemplo

Determine o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$ e pelo parabolóide

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Se tomarmos $z = 0$ na equação do parabolóide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o parabolóide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do parabolóide e acima do disco circular D dados por $x^2 + y^2 \leq 1$



Em coordenadas polares, D é dado por

$$0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

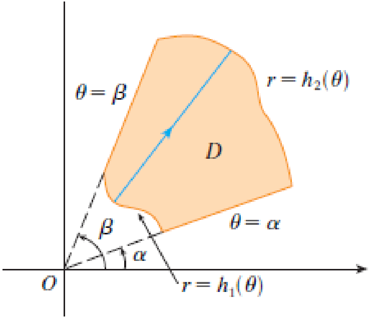
$$
\begin{aligned}
V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Observe que se trabalhássemos com coordenadas retângulares em de de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_1^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\; dx$$

que não é fácil de calcular, pois envolve determinar $\int (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como na figura



$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

Teorema

Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\},$$

então

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

.

Exemplo

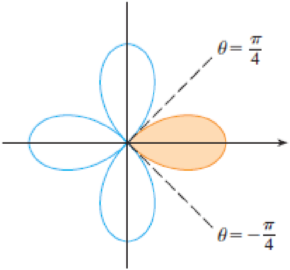
Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

Exemplo

Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

Do esboço da curva, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde a região

$$D = \{(r, \theta) | \frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$



$$
\begin{aligned}
A(D) \;=\; \iint_D dA &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(1 + \cos 4\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \left[\theta + \tfrac{1}{4} \sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

O sólido que está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar quadrados,

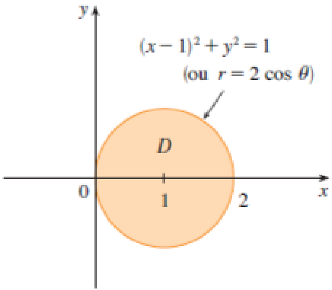
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

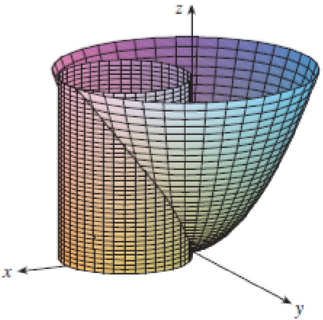
Exemplo

Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

O sólido que está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar quadrados,

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$





Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$; assim, o limite circular fica $r^2 = 2r\cos\theta$, ou seja, $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r,\theta) \mid -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\theta\}.$$

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta \\
&= 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\Big[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\Big]d\theta \\
&= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + 2\theta + \tfrac{1}{8}4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício

Calcule o volume do sólido que está abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 4$.