Funções de Duas ou Mais Variáveis

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Introduzir o conceito de funções de duas ou mais variáveis.*
- *Definir domínio de imagem de funçoes de duas variáveis*
- *Gráficos de funções de várias variáveis.*

Objetivo

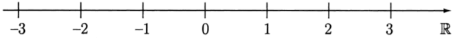
- *Introduzir o conceito de funções de duas ou mais variáveis.*
- *Definir domínio de imagem de funçoes de duas variáveis*
- *Gráficos de funções de várias variáveis.*

Bibliografia

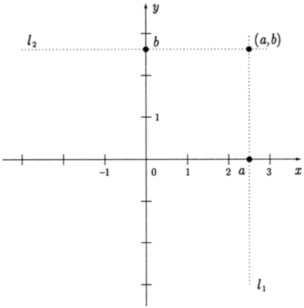
- *Cálculo III e IV*, ***Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.*** *Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Em Cálculo I estuda-se como representar o conjunto dos números reais através da reta numérica.

A origem 0 e a unidade 1 são escolhidas sobre a reta, cada número real é representado por um único ponto da reta numérica e, reciprocamente, cada ponto da reta numérica representa um único número real.

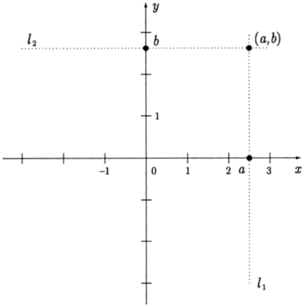


Pares de números possuem a representação geométrica no *plano cartesiano*, denotado por $\mathbb{R}^2$.
O *plano cartesiano*, é formado por dois eixos numéricos perpendiculares: o eixo x (horizontal) e o eixo y (vertical), que se encontram na *origem* $(0,0)$.



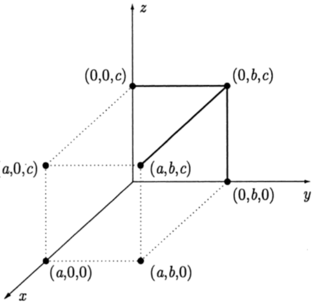
Cada ponto p no plano corresponde a um par ordenado (a, b): a é a primeira coordenada (posição em relação ao eixo x) e b é a segunda coordenada (posição em relação ao eixo y). Para localizar (a, b), traçam-se uma reta vertical passando por a e uma reta horizontal passando por b; sua interseção é o ponto p.

$$p = (a, b), \quad \text{com origem } (0, 0).$$



Três Dimensões

Pode-se visualizar o espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ desenhando três retas perpendiculares entre si. Cada reta numérica é denominada eixo coordenado.
Para representar o ponto $P = (a, b, c)$, pode-se a partir do ponto (a, b) no plano xy, deslocar c unidades na direção paralela ao eixo z



Mais que três dimensões

Não se pode desenhar figuras geométricas em um espaço com dimensão maior que três, mas podemos usar as figuras em uma, duas ou três dimensões para guiar nossa intuição.

Por que estudar Cálculo II?

Matemática é a ferramenta ideal para resolver problemas práticos que podem ser modelados a partir de uma funções matemáticas.
Foi visto em cálculo I ferramentas para resolver problemas de otimização.

Exemplo

Determine as dimensões de uma caixa sem tampa, com o maior volume possível, sabendo que ela deve ser construída a partir de uma folha retângular de papelão, medindo $30\,cm \times 50\,cm$?

Por que estudar Cálculo II?

Matemática é a ferramenta ideal para resolver problemas práticos que podem ser modelados a partir de uma funções matemáticas.
Foi visto em cálculo I ferramentas para resolver problemas de otimização.

Exemplo

Determine as dimensões de uma caixa sem tampa, com o maior volume possível, sabendo que ela deve ser construída a partir de uma folha retângular de papelão, medindo $30\,cm \times 50\,cm$?

Quando é necessário resolver problemas de otimização para casos de funções que dependem de várias variáveis, é necessário usar como ferramenta os conteúdos existentes na disciplina de cálculo II, pois lidamos com funções de várias variáveis.

Exemplo: Função Temperatura

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende de duas variáveis:

Exemplo: Função Temperatura

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende de duas variáveis: longitude x e latitude y do ponto.

Exemplo: Função Temperatura

A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende de duas variáveis: longitude x e latitude y do ponto.

Assim, é possível conceber T como uma função de duas variáveis, x e y, ou como uma função do par ordenado (x, y).

Exemplo: Função Temperatura

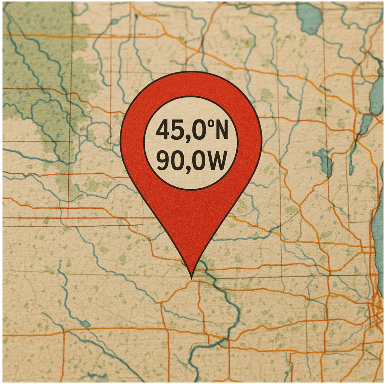
A temperatura T em um ponto da superfície da Terra em dado instante de tempo depende de duas variáveis: longitude x e latitude y do ponto.

Assim, é possível conceber T como uma função de duas variáveis, x e y, ou como uma função do par ordenado (x, y).

Indicamos essa dependência funcional escrevendo

$$T = f(x, y)$$

.



Volume de um Cilindro

Reflita

O volume V *de um cilindro circular depende de seu raio* r *e de sua altura* h.

Volume de um Cilindro

Reflita

O volume V *de um cilindro circular depende de seu raio* r *e de sua altura* h. *De fato, sabemos que* $V = 2\pi r^2 h$.

Volume de um Cilindro

Reflita

O volume V *de um cilindro circular depende de seu raio* r *e de sua altura* h*. De fato, sabemos que* $V = 2\pi r^2 h$.
Podemos dizer que V *é uma função de* r *e de* h*, e escrevemos* $V(r, h) = 2\pi r^2 h$.

Exemplo: Sensação Térmica

- Em regiões com inverno ou verão severos, o **índice de sensação térmica** é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio ou do calor.
- Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v.
- Assim, W é uma função de T e de v, e podemos escrever $W = f(T, v)$.

Definição

- *Uma função* f *de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais* (x, y) *de um subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *um único valor real, denotado por* $f(x, y)$.

Definição

- *Uma função* f *de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais* (x, y) *de um subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *um único valor real, denotado por* $f(x, y)$.
- *O conjunto* D *é o* ***domínio*** *de* f.

Definição

- *Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$.*
- *O conjunto D é o **domínio** de f.*
- *A **imagem** de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto de todos valores possíveis de $f(x, y)$,*

Definição

- *Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$.*
- *O conjunto D é o* ***domínio*** *de f.*
- *A* ***imagem*** *de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto de todos valores possíveis de $f(x, y)$, ou seja,*

$$Im(f) = \{f(x, y) \,|\, (x, y) \in D\}.$$

Definição

- *Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$.*
- *O conjunto D é o* ***domínio*** *de f.*
- *A* ***imagem*** *de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto de todos valores possíveis de $f(x, y)$, ou seja,*

$$Im(f) = \{f(x, y) \,|\, (x, y) \in D\}.$$

Observação

- *Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y).*

Definição

- *Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$.*
- *O conjunto D é o* ***domínio*** *de f.*
- *A* ***imagem*** *de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto de todos valores possíveis de $f(x, y)$, ou seja,*

$$Im(f) = \{f(x, y) \,|\, (x, y) \in D\}.$$

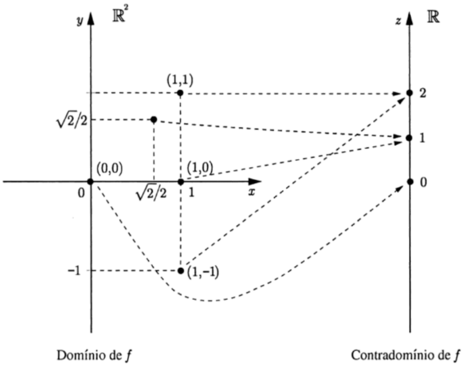
Observação

- *Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícitos os valores tomados por f em um ponto genérico (x, y).*
- *As variáveis x e y são* ***variáveis independentes*** *e z é a* ***variável dependente****.*

Exemplo

Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Como f pode ser calculado para qualquer valor de x e de y, o domínio de f é $\mathbb{R}^2$.

x	y	$z = f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	1	2
1	-1	2
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

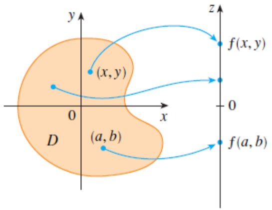


Observações

- Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

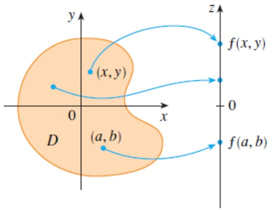
Observações

- Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$.
- Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a figura), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z.



Observações

- Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$.
- Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a figura), no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy e a imagem é um conjunto de números na reta real, mostrado como um eixo z.



- Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal chata com o formato de D, podemos pensar que o eixo z é um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

Observação

Se a função f é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subtendido que o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido.

Exercício

Calcule $f(3,2)$ e encontre o domínio para cada função a seguir:

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
2. $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

Resolução do item a

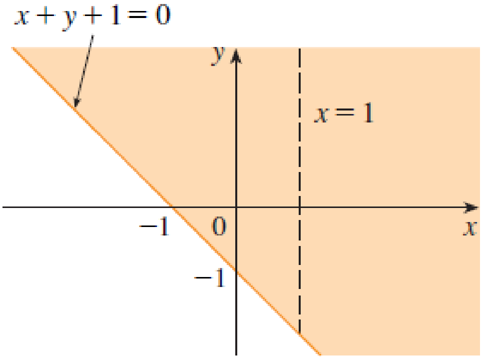
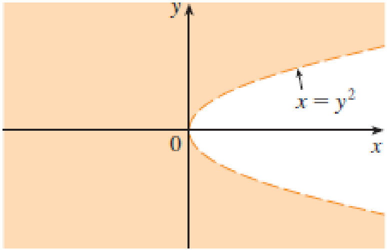


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

(b) $$f(3,2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0$$

Já que $\ln(y^2 - x)$ é definido somente quando $y^2 - x > 0$, isto é, $x < y^2$, o domínio de f é $D = \{(x,y) | x < y^2\}$. Isso representa o conjunto de pontos à esquerda da parábola $x = y^2$.



Domínio de $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

Exemplo

Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Determine o domínio e a imagem de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
Solução: O domínio de g é

$$D = \{(x,y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

que é o disco com centro $(0,0)$ e raio 3 (veja a Figura 4). A imagem de g é

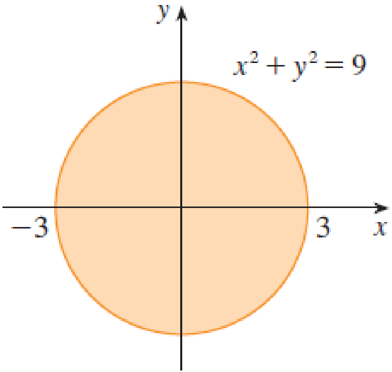
$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in D\}.$$

Como z é a raiz quadrada positiva, $z \geq 0$. Da mesma forma, por causa de $9 - x^2 - y^2 \leq 9$, temos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3.$$

Assim, a imagem é

$$\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0,3].$$



Domínio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Função de Três Variáveis

Uma função com três variáveis, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real, denotado por $f(x, y, z)$. Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x, da longitude y do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever

$$T = f(x, y, t).$$

Exemplo

Encontre o domínio da função f *dada por* $f(x, y, z) = ln(z - y) + xy \cdot \sin(z)$.

Exemplo

Encontre o domínio da função f *dada por* $f(x,y,z) = ln(z-y) + xy \cdot \sin(z)$.

Solução

- *A expressão para* $f(x,y,z)$ *só está definida para* $z - y > 0$.

Exemplo

Encontre o domínio da função f *dada por* $f(x, y, z) = ln(z - y) + xy \cdot \sin(z)$.

Solução

- *A expressão para* $f(x, y, z)$ *só está definida para* $z - y > 0$.
- *Assim, o domínio de* f *é*

$$Dom(f) = \{(x, y, z) \in R^3 \,|\, z > y\}.$$

Exemplo

Encontre o domínio da função f *dada por* $f(x,y,z) = ln(z-y) + xy \cdot \sin(z)$.

Solução

- *A expressão para* $f(x,y,z)$ *só está definida para* $z - y > 0$.
- *Assim, o domínio de* f *é*

$$Dom(f) = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, z > y\}.$$

- *Esse é um semiespaço que consiste em todos pontos que estão acima do plano* $z = y$.

Como o domínio de uma função de duas variáveis precisa de 2 eixos para ser representado e o contradomínio precisa de um eixo, o gráfico de uma função de duas variáveis precisa de 3 eixos.

Definição

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de duas variáveis, o gráfico de f é o subconjunto do espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definido por

$$Graf\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$$

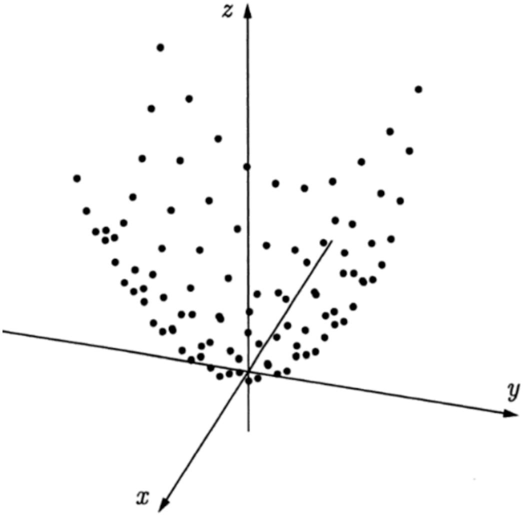


Figura: 100 pontos do gráfico da função $z = x^2 + y^2$

Devido à dificuldade de esboçar manualmente um gráfico tridimensional, recorre-se a uma técnica alternativa para visualizar sua superfície. Este método baseia-se na análise das curvas resultantes da interseção do gráfico com planos paralelos entre si. As figuras formadas por essas interseções, quando projetadas em um plano bidimensional, são denominadas curvas de nível, as quais serão examinadas em detalhes posteriormente.