Regra da Cadeira e Derivação Implícita

Priscila Bemm

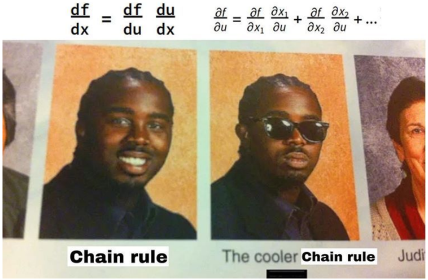
UEM

Regra da Cadeia

Foi visto em Cálculo I que se você tem uma função composta $y = f(x)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então a derivada de y com relação a x é

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Foi visto também que podemos representar também $\frac{dy}{dx}$ como $\frac{\partial y}{\partial x}$.



Exemplo

Se $f(x,y) = sen\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, *calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplo

Se $f(x,y) = sen\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, *calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplo

Se $f(x,y) = sen\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, *calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Usando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}.$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta.

Regra da Cadeia

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta.

A primeira versão é para o caso em que $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, uma função de uma variável t.
Isso significa que z é indiretamente uma função de t, ou seja,

$$z = f(g(t), h(t)).$$

A Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar z como uma função de t.
Presumimos que f seja diferenciável.
OBS: Lembremo-nos de que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas.

Regra da Cadeia (Caso 1)

Suponha que $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável de x e y, em que $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Exemplo

Sejam $z = f(x, y) = x^2y + 3xy^4$, *em que* $x = sen(2t)$ *e* $y = cos(t)$. *Determine* $\dfrac{dz}{dt}$ *quando* $t = 0$.

Exemplo

Sejam $z = f(x, y) = x^2y + 3xy^4$*, em que* $x = sen(2t)$ *e* $y = cos(t)$*. Determine* $\dfrac{dz}{dt}$ *quando* $t = 0$*.*

Solução:

Há duas possibilidades:

A primeira é substituir $x = sen(2t)$ e $y = cos(t)$ em

$$z = f(x, y) = x^2y + 3xy^4$$

e derivar em relação a t.

A derivada pode ser interpretada como a taxa de variação de z em relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C.
Quando $t = 0$, o ponto (x, y) é $(0, 1)$, e $dz/dt = 6$ é a taxa de aumento quando nos movemos ao longo da curva C por $(0, 1)$.
Se, por exemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$, representar a temperatura no ponto (x, y), então a função composta $z = T(sen2t, cost)$ representa a temperatura dos pontos da curva C
A sua derivada dz/dt corresponde à taxa de variação de temperatura ao longo da curva C.

Vamos considerar agora a situação em que $z = f(x, y)$, e x e y são funções de outras duas variáveis s e t. Digamos que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

Vamos considerar agora a situação em que $z = f(x, y)$, e x e y são funções de outras duas variáveis s e t. Digamos que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.
Então $z = f(g(s, t), h(s, t))$ é indiretamente uma função de s e t.

Vamos considerar agora a situação em que $z = f(x, y)$, e x e y são funções de outras duas variáveis s e t. Digamos que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.
Então $z = f(g(s, t), h(s, t))$ é indiretamente uma função de s e t.
Como determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$?

Regra da Cadeia (Caso 2)

Suponha que $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável de x e y, em que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Exemplo

Sejam $z = e^x seny$, *em que* $x = st^2$ e $y = s^2t$. *Determine* $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Exemplo

Sejam $z = e^x seny$, *em que* $x = st^2$ e $y = s^2t$. *Determine* $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Solução: Uma forma de determinar essas derivadas parciais é escrever z em função de s e t e depois calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ diretamente. Outra possibilidade é aplicar a Regra da Cadeira: Caso 2 vista a pouco.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$z = e^x seny \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \;\; e$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$z = e^x seny \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \;\; e \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x cosy$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$z = e^x seny \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \;\; e \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x cosy$$

$$x = st^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \;\; e$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$z = e^x seny \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \;\; e \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x cosy$$

$$x = st^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \;\; e \;\; \frac{\partial y}{\partial s} = 2st$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$z = e^x seny \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \;\; e \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x cosy$$

$$x = st^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \;\; e \;\; \frac{\partial y}{\partial s} = 2st$$

$$y = s^2 t \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 2st \;\; e$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

$$z = e^x seny \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^x seny \;\; e \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = e^x cosy$$

$$x = st^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \;\; e \;\; \frac{\partial y}{\partial s} = 2st$$

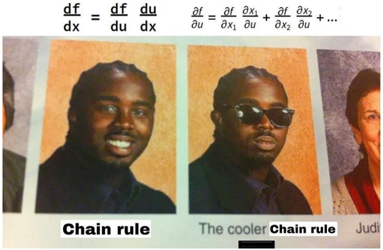
$$y = s^2 t \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 2st \;\; e \;\; \frac{\partial y}{\partial t} = s^2.$$

Regra da Cadeia (Versão Geral)

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, e cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \dots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \dots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.



Exercício

Escreva a Regra da Cadeia para o caso em que $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Exercício

Escreva a Regra da Cadeia para o caso em que $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Diferenciação Implícita

Suponhamos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f.
Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x. Já que x e y são funções de x, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

No entanto, $\frac{dx}{dx} = 1$, então se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, resolvemos para $\frac{dy}{dx}$ e obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Se z é dado implicitamente como $z = f(x, y)$, então, podemos reescrevê-la como $z - f(x, y) = 0$, isto é, a reescremos implicitamente como $F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = 0$, para todo $(x, y) \in Dom\ f$. Se f e F forem diferenciáveis, podemos usar a regra da cadeia e obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(F(x, y, f(x, y))) &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \text{ pois } \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \text{ e } \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}
\end{aligned}
$$

.

Exemplo

Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *se* z *é definido implicitamente como uma função de* x e y *pela equação*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Solução

Para determinarmos $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, diferenciamos implicitamente em relação a x, tratando y como constante:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Resolvendo para $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, obtemos

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}}$$

Da mesma forma, derivando implicitamente em relação a y, obtemos

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}}$$

Exercícios sobre Regra da Cadeia

Para para resolver os seguintes exercícios:

1. Seja $z = x^2 y + \sin(y)$, com $x = u^2 + v$ e $y = e^v$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.
2. Considere $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

Exercícios sobre Derivação Implícita

4. Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
5. Dada $xyz + \sin(xy) = 1$. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ supondo que z é função de x e y.
6. Use derivação implícita para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da função $F(x, y, z)$ é dada implicitamente por $e^x + y^2 + z^3 = 0$.

Gabarito

1. $\frac{\partial z}{\partial u} = 4u(u^2+v)e^v$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = 2(u^2+v)e^v + e^v\left((u^2+v)^2 + \cos(e^v)\right)$.
2. $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2}{r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$
3. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$
4. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz+y\cos(xy)}{xy}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz+x\cos(xy)}{xy}$
5. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^x}{3z^2}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2}$