Indeterminações

Priscila Bemm

UEM

Objetivos

- Apresentar as indeterminações no cálculo de limites e mostrar técnicas de resolvê-las.

Objetivos

- Apresentar as indeterminações no cálculo de limites e mostrar técnicas de resolvê-las.

Indeterminações

Em alguns momentos, no cálculo de limites, nos deparamos com o quociente onde tanto o numerador, isto é, uma expressão da forma $\dfrac{0}{0}$. Uma expressão desse tipo é denominada uma "indeterminação".
Observe os limites abaixo:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x}$

Indeterminações

Em alguns momentos, no cálculo de limites, nos deparamos com o quociente onde tanto o numerador, isto é, uma expressão da forma $\dfrac{0}{0}$. Uma expressão desse tipo é denominada uma "indeterminação".

Observe os limites abaixo:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x}$

Indeterminações

Em alguns momentos, no cálculo de limites, nos deparamos com o quociente onde tanto o numerador, isto é, uma expressão da forma $\dfrac{0}{0}$. Uma expressão desse tipo é denominada uma "indeterminação".

Observe os limites abaixo:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x^2}$

Indeterminações

Em alguns momentos, no cálculo de limites, nos deparamos com o quociente onde tanto o numerador, isto é, uma expressão da forma $\dfrac{0}{0}$. Uma expressão desse tipo é denominada uma "indeterminação".
Observe os limites abaixo:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{2x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2x} = \infty$

Indeterminações

Em alguns momentos, no cálculo de limites, nos deparamos com o quociente onde tanto o numerador, isto é, uma expressão da forma $\frac{0}{0}$. Uma expressão desse tipo é denominada uma "indeterminação".

Observe os limites abaixo:

- $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = \infty$

Podemos construir exemplos simples, dando qualquer resultado!

A representação $\frac{0}{0}$ é simbólica, representa uma ideia. Existem também outras indeterminadas:

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}

Como eliminar as indeterminações?

As indeterminações podem ser levantadas por processos algébricos através de:

- Racionalização;
- Fatoração;
- Dividindo o numerador e o denominador por uma mesma potência.
- Funções trigonométricas usando os limites fundamentais;

Para resolver limites em que é preciso racionalizarm, devemos relembrar a seguinte igualdade:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Para resolver limites em que é preciso racionalizarm, devemos relembrar a seguinte igualdade:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Essa igualdade é útil quando precisamos extrair alguma raiz quadrada de um numerador ou de um denominador.
Muitas vezes é necessário manipular algebricamente uma expressão para o cálculo de limites.

Para resolver limites em que é preciso racionalizarm, devemos relembrar a seguinte igualdade:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Essa igualdade é útil quando precisamos extrair alguma raiz quadrada de um numerador ou de um denominador.
Muitas vezes é necessário manipular algebricamente uma expressão para o cálculo de limites.
Ex:

$$\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2}$$

Para resolver limites em que é preciso racionalizarm, devemos relembrar a seguinte igualdade:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Essa igualdade é útil quando precisamos extrair alguma raiz quadrada de um numerador ou de um denominador.

Muitas vezes é necessário manipular algebricamente uma expressão para o cálculo de limites.

Ex:

$$\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2} = \frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+3}{\sqrt{x-2}+3}$$

Para resolver limites em que é preciso racionalizarm, devemos relembrar a seguinte igualdade:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Essa igualdade é útil quando precisamos extrair alguma raiz quadrada de um numerador ou de um denominador.
Muitas vezes é necessário manipular algebricamente uma expressão para o cálculo de limites.
Ex:

$$\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2} = \frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+3}{\sqrt{x-2}+3} = \frac{x-2-9}{x^2\sqrt{x-2}+3}$$

Para resolver limites em que é preciso racionalizarm, devemos relembrar a seguinte igualdade:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Essa igualdade é útil quando precisamos extrair alguma raiz quadrada de um numerador ou de um denominador.
Muitas vezes é necessário manipular algebricamente uma expressão para o cálculo de limites.
Ex:

$$\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2}=\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+3}{\sqrt{x-2}+3}=\frac{x-2-9}{x^2\sqrt{x-2}+3}=\frac{x-11}{x^2\sqrt{x-2}+3}$$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x}+1 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$

b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} == \lim_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$\lim_{x\to 4} \sqrt{x}+2 =$

Exemplos 1 - Racionalização

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} == \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$
$\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 4$

Observação

Observe que a técnica de racionalização, geralmente funciona quando a indeterminação surge em um limite em que x tende a um número e a função é racional e possui um ou mais termos com raiz quadrada.

Fatoração

Para resolver alguns limites, é preciso fatorar.
Vamos relembrar como isso pode ser feito.
Se k_1, k_n, ..., k_n são raízes reais de um polinômio de grau n, isto é, $(p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$, então podemos reescrever polinômio como

$$p(x) = a_n(x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot (x - k_3) \cdots (x - k_n)$$

Exemplo

O polinômio $p(x) = x^2 - 4x - 5$, possui como raízes $x = -1$ e $x = 5$, então podemos escrever p como

$$p(x) = (x - (-1))(x - 5)$$

Exemplo

O polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 2$, possui como raízes $x = 3$ e $x = 2$, então podemos escrever p como

$$p(x) = (x - 3)(x - 2)$$

Exemplo

O polinômio $p(x) = x^2 - 11x + 10$, possui como raízes $x = 1$ e $x = 10$, então podemos escrever p como

$$p(x) = (x - 1)(x - 10)$$

Exemplo 2 - Fatoração

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$$

Exemplo 2 - Fatoração

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{x-2}$$

Exemplo 2 - Fatoração

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 4 = 6$$

Exemplo 2 - Fatoração

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+4 = 6$$

Observação

Observe que a técnica de fatoração, geralmente funciona quando a indeterminação surge em um limite em que x tende a um número e a função é racional e possui um ou mais polinômios.

Exemplo 3 - Fatoração

Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$

Exemplo 3 - Fatoração

Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$
O numerador e o denominador se anulam para $x = 1$, sendo portanto divisíveis por $x - 1$:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2), \qquad x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

Consequentemente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x-4} = \frac{1-2}{1-4} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 4- Fatoração

Considere o limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3(x^2-1)-2(x^3-1)}{(x^2-1)(x^3-1)} = \frac{3(1^2-1)-2(1^3-1)}{(1^2-1)(1^3-1)} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \text{indeterminado}$$

Os binômios se anulam para $x = 1$, sendo divisíveis por $x - 1$:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1), \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Consequentemente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x+1)-2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(-2x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

Cancelando $(x-1)$:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{-2(1)^2+1+1}{(1+1)(1^2+1+1)} = \frac{-2+2}{2\cdot 3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Exercício

Calcule

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}.$$

Exemplo 5 - Racionalização e Fatoração

Calcule $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{3x - 6} - \sqrt{x}}$

Exemplo 5 - Racionalização e Fatoração

Calcule $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{3x-6} - \sqrt{x}}$ Para levantar a indeterminação multiplicamos o numerador e o denominador por:

$$\sqrt{3x-6} + \sqrt{x}$$

Então:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{3x-6} - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{3x-6} + \sqrt{x})}{(\sqrt{3x-6} - \sqrt{x})(\sqrt{3x-6} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{3x-6} + \sqrt{x})}{3x - 6 - x} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{3x-6} + \sqrt{x})}{2(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-1)(\sqrt{3x-6} + \sqrt{x})}{2} = \frac{(3-1)(\sqrt{9-6} + \sqrt{3})}{2} = 2\sqrt{3}$$

Exemplo 6 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ é x^2. Dividindo todos os termos por x^2 obtemos:

Exemplo 6 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ é x^2. Dividindo todos os termos por x^2 obtemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Exemplo 6 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ é x^2. Dividindo todos os termos por x^2 obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Exemplo 7 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$ é x^5.

Dividindo todos os termos por x^5 obtemos:

Exemplo 7 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$ é x^5.

Dividindo todos os termos por x^5 obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3}{x^3}+\frac{7}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$$

Exemplo 7 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$ é x^5.

Dividindo todos os termos por x^5 obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3}{x^3}+\frac{7}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{2}$$

Exemplo 7 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x}$ é x^5.

Dividindo todos os termos por x^5 obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7x-1}{2x^5+x^3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3}{x^3}+\frac{7}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0$$

Exemplo 7 - Dividindo pela variável de maior grau

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 7x - 1}{2x^5 + x^3 - x}$$

O termo de maior grau da função $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 7x - 1}{2x^5 + x^3 - x}$ é x^5.

Dividindo todos os termos por x^5 obtemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 7x - 1}{2x^5 + x^3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-3}{x^3} + \frac{7}{x^4} - \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0$$

Observação

Observe que a técnica de dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior grau da função, geralmente funciona quando a indeterminação surge em um limite em que x tende a infinito.

Exercício

Determine

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^3 + 6x + 5}{4x^5 - 3x + 1}$$

Limites Fundamentais

1. Limite exponencial com e

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2. Limite trigonométrico

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Exemplo 1: Uso do limite trigonométrico

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

Exemplo 1: Uso do limite trigonométrico

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

Para usar o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, o denominador e a variável que está no seno devem ser iguais.

Exemplo 1: Uso do limite trigonométrico

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

Para usar o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, o denominador e a variável que está no seno devem ser iguais.

Para que isso ocorra, multiplicamos o numerador e o denominador por 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

Exemplo 2: Uso do limite com e

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Exemplo 2: Uso do limite com e

Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2x} = 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

DÚVIDAS?