Limites infinitos

Priscila Bemm

UEM

Objetivos

- Limites infinito;
- Limites no infinito;
- Limites infinito no Infinito
- Assíntotas.

Exemplo 1

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ conforme os valores de x são tomados cada vez maiores.

Exemplo 1

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ conforme os valores de x são tomados cada vez maiores.

x	f(x)
1	1
2	0,5
4	0,25
5	0,2
10	0,1
20	0,05
50	0,02
100	0,01
1000	0,001
100000	0,00001
200000	0,000005

Exemplo 1

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ conforme os valores de x são tomados cada vez maiores.

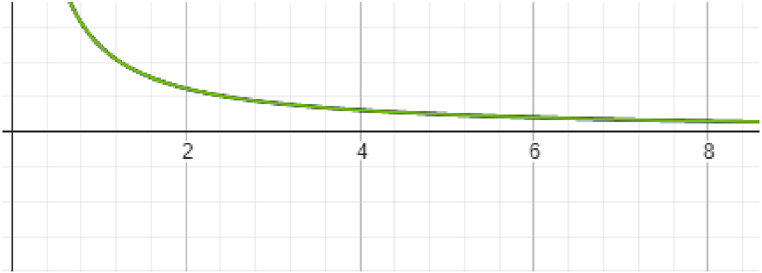
x	f(x)
1	1
2	0,5
4	0,25
5	0,2
10	0,1
20	0,05
50	0,02
100	0,01
1000	0,001
100000	0,00001
200000	0,000005

- Vemos que quanto maior for o valor de x, mais próximo a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ estará de 0.

- O comportamento de uma variável x à medida que ela aumenta indefinidamente, ou seja, se afasta cada vez mais do zero em direção ao infinito positivo é representado matematicamente como $x \to \infty$.

- Dizemos "o limite da função quando x tende a ∞ é igual a 0".
  Notação:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$



Calcule os limites a seguir:

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^5}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{10}{x^5}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4-x}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{10+x^3}{x^5}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x-x^2}{x^3}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x}{x^5}$

Exemplo 1

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ conforme os valores de x são tomados cada vez menores.

Exemplo 1

Observe o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x}$ conforme os valores de x são tomados cada vez menores.

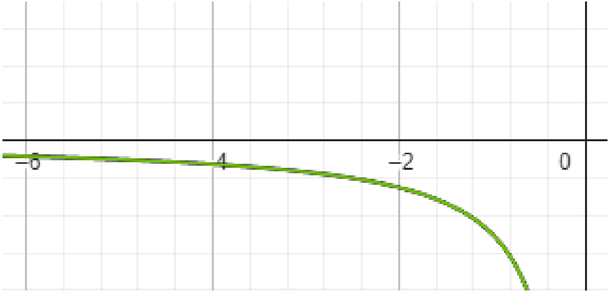
x	f(x)
-1	-1
-2	-0,5
-4	-0,25
-5	-0,2
-10	-0,1
-20	-0,05
-50	-0,02
-100	-0,01
-1000	-0,001
-100000	-0,00001
-200000	-0,000005

- Quanto menor for o valor de x, mais próximo a função $f(x) = \frac{1}{x}$ estará de 0.

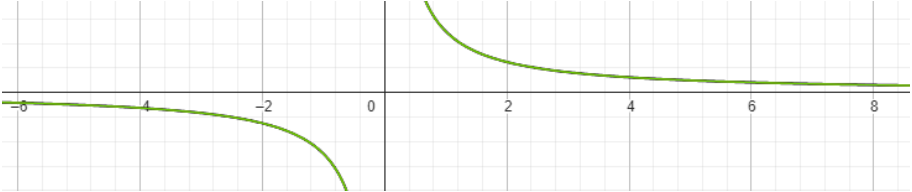
- O comportamento de uma variável x à medida que ela diminui indefinidamente, ou seja, se afasta cada vez mais do zero em direção ao infinito negativo é representado matematicamente como $x \to -\infty$.

- Neste caso, dizemos "o limite da função quando x tende a $-\infty$ é igual a 0" e denotamos por:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$



Mais limites no infinito

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^5} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{103}} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{100}{x^2} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{103}} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{100}{x^2} = 0$

Observação: De modo geral, para quaisquer números reais k e n, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

Calcule os limites a seguir:

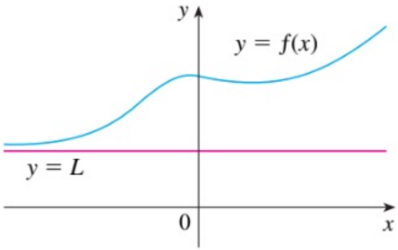
1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{10}{x^7}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2 + \frac{17}{x^4}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3}{5 + x^5}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{78}{x^6 - 2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 9}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 13}{2 + 10x^5}$

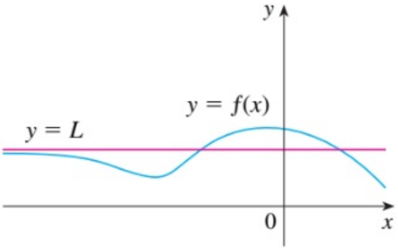
Assíntota Horizontal

Definição (Assíntota horizontal)

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que a reta $y = L$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de f se

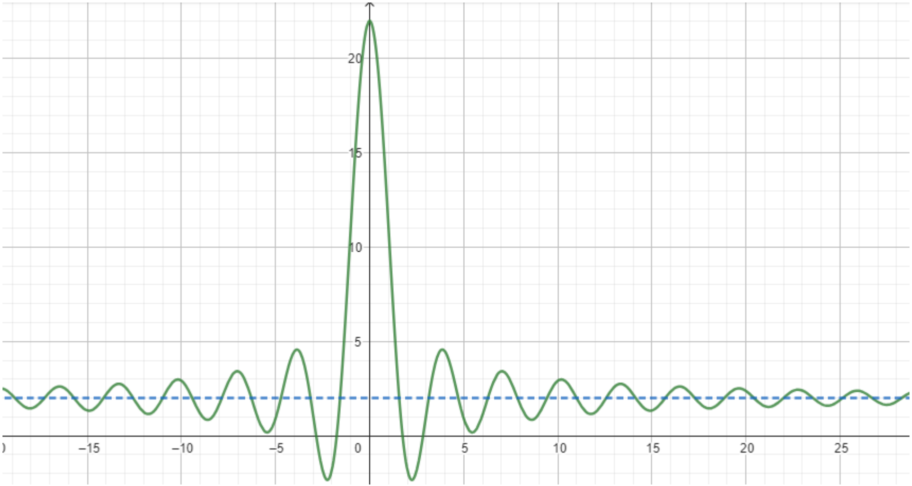
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$



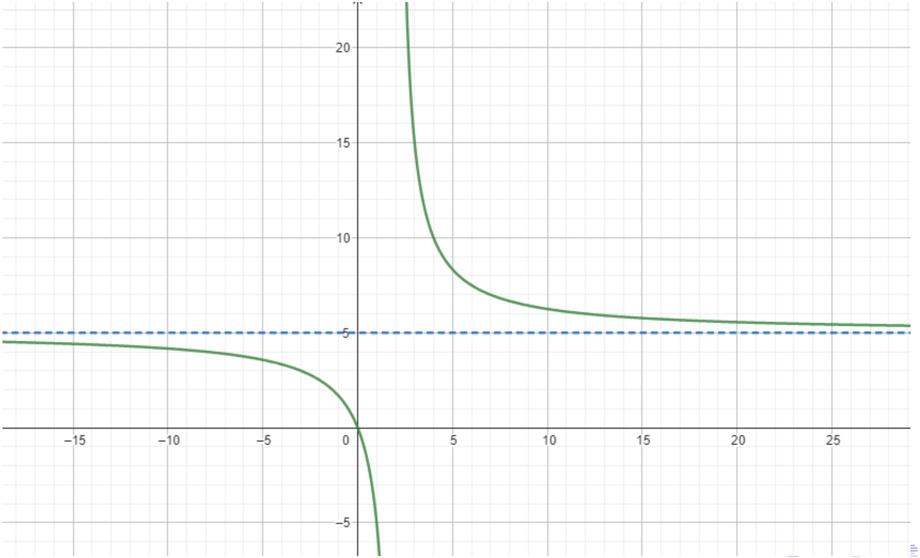


Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ então $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplos de Assíntotas Horizontais



Exemplos de Assíntotas Horizontais



Exemplo

Determine as assíntotas horizontais da curva definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

Exemplo

Determine as assíntotas horizontais da curva definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

Quanto maior o x, mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. Essa situação é representada simbolicamente por

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

.

Portanto, $y = 1$ é assíntota horizontal da curva definida por f.

Mais exemplos

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} = 2$, isto é, $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$ tem uma assíntota horizontal em $y = 2$.

Mais exemplos

- $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} = 2$, isto é, $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$ tem uma assíntota horizontal em $y = 2$.
- $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = 0$, isto é, $f(x) = e^{-x}$ tem uma assíntota horizontal em $y = 0$.

Mais exemplos

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} = 2$, isto é, $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$ tem uma assíntota horizontal em $y = 2$.
- $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$, isto é, $f(x) = e^{-x}$ tem uma assíntota horizontal em $y = 0$.

Exemplo 2

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ conforme os valores de x são tomados cada vez mais próximos de 0.

Exemplo 2

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ conforme os valores de x são tomados cada vez mais próximos de 0.

x	f(x)
1	1
0,5	4
0,25	16
0,1	100
0,001	1000000
0,0001	100000000
0,0000001	100000000000000

x	f(x)
-1	1
-0,5	4
-0,25	16
-0,1	100
-0,001	1000000
-0,0001	100000000
-0,0000001	100000000000000

Exemplo 2

Observe o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ conforme os valores de x são tomados cada vez mais próximos de 0.

x	f(x)
1	1
0,5	4
0,25	16
0,1	100
0,001	1000000
0,0001	100000000
0,0000001	100000000000000

x	f(x)
-1	1
-0,5	4
-0,25	16
-0,1	100
-0,001	1000000
-0,0001	100000000
-0,0000001	100000000000000

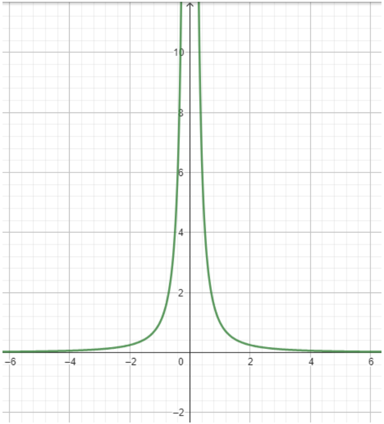
Vemos que quanto mais próximo de 0 está o x, maior será o valor da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- O comportamento de uma função $f(x)$ à medida que ela aumenta indefinidamente é representado matematicamente como $f(x) \to \infty$.

- Neste caso, dizemos "o limite da função quando x tende a 0 é igual a ∞".

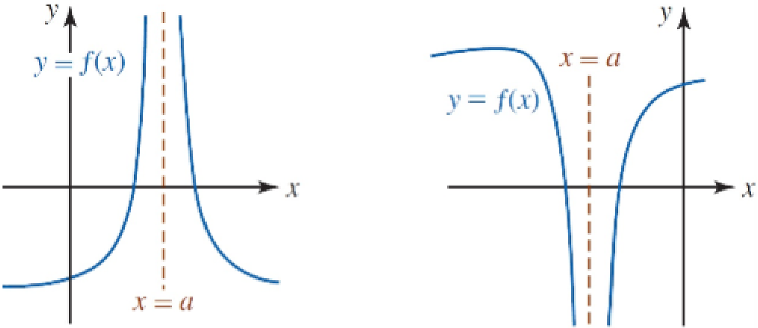
  Notação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Observação

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. E também não significa que o limite existe. Este limite representa que $f(x)$ pode ser tão grande quando quisermos se tomarmos x suficientemente próximo de a.

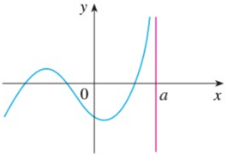


Assíntota Vertical

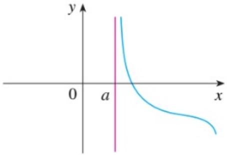
Definição (Assíntota vertical)

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que a reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de f se uma das coisas acontecer:

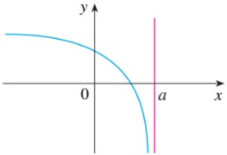
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$



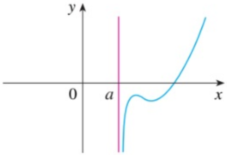
(a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Exemplos

Como $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, segue que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função $\frac{1}{x^2}$

Exemplos

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, segue que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função $\dfrac{1}{x^2}$

Observação

- Para encontrar as assíntotas verticais de uma função, calculamos o limite da função quando x tende aos valores que causam indeterminação no denominador da função.
- Quando x tende a um número a e a função tende a ∞ ou $-\infty$ então $x = a$ é uma assíntota vertical.
- Quando x tende a ∞ ou $-\infty$ e a função $f(x)$ tende a um número a então $y = a$ é uma assíntota horizontal.

Exemplos

Exemplo

Encontre as assíntotas verticais da curva determinada pela função $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.

Como $3 \notin Dom(f)$, então vamos estudar o comportamento da função conforme x se aproxima de 3.

Exemplo

Encontre as assíntotas verticais da curva determinada pela função $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.

Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então

- o denominador é um número positivo pequeno
- $2x$ está próximo a 6
- Pelos itens anteriores, o quociente é um número positivo grande.

Portanto, intuitivamente, temos que $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3} = \infty$.

Exemplo

Encontre as assíntotas verticais da curva determinada pela função $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.

Se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então

- o denominador é um número negativo pequeno;
- $2x$ está próximo a 6;
- Pelos itens anteriores, o quociente é um número negativo grande.

Portanto, intuitivamente, temos que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$.

Exemplo

Encontre as assíntotas verticais da curva determinada pela função $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.

Como $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$, temos que $x = 3$ é uma assíntota vertical.

Exemplos de assíntotas verticais

Considere

1. $\lim_{x \to 2} \frac{56}{x-2}$
2. $\lim_{x \to -4} -(x+4)^{-}1$

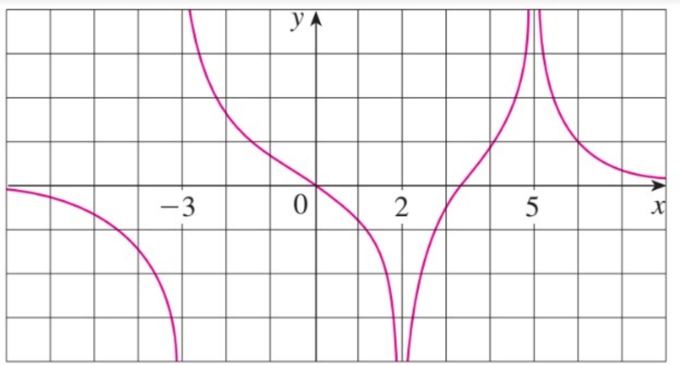
Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x \to 2} R(x)$

(b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$

(d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$



Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Ex: $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Ex: $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$
  Isto é, que quanto maior for o valor de x, maior será o resultado de x^2.

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Ex: $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$
  Isto é, que quanto maior for o valor de x, maior será o resultado de x^2.

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Ex: $\lim\limits_{x \to \infty} -3x = -\infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Ex: $\lim_{x \to \infty} -3x = -\infty$
  Isto é, que quanto maior for o valor de x, menor será o resultado de $-3x$.

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ Ex: $\lim_{x \to \infty} -3x = -\infty$
  Isto é, que quanto maior for o valor de x, menor será o resultado de $-3x$.

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Ex: $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Ex: $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$

  Isto é, que quanto menor for o valor de x, maior será o resultado de x^2.

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ Ex: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \infty$
  Isto é, que quanto menor for o valor de x, maior será o resultado de x^2.

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Ex: $\lim_{x \to -\infty} 4x = -\infty$

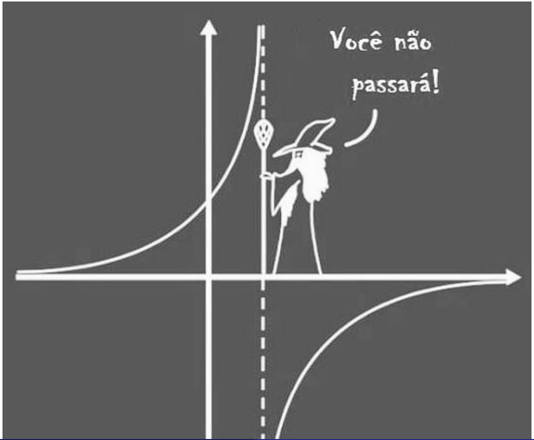
Limite infinito no infinito

Além dos conceitos passados até aqui existem também

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Ex: $\lim_{x \to -\infty} 4x = -\infty$
  Isto é, que quanto menor for o valor de x, menor será o resultado de $4x$.

Exercícios

Determine se as funções a seguir possuem assíntotas. Em caso afirmativo, determine quais são as assíntotas.



1. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$
2. $f(x) = 5x^3 + 2x^2$
3. $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$
6. $f(x) = e^{-x}$