Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôpital

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Calcular limites indeterminados usando a regra de L'Hôpital.*

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln \ x}{x-1}$$

Apesar de F não estar definida em $x = 1$, precisamos saber como F se comporta próximo a 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln \ x}{x-1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a propriedade dos limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites), pois o limite do denominador é 0.
De fato, embora o limite em exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to \infty$ ou $(-\infty)$ e $g(x) \to \infty$ ou $(-\infty)$, quando $x \to a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to \infty$ ou $(-\infty)$ e $g(x) \to \infty$ ou $(-\infty)$, quando $x \to a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções – incluindo aquelas racionais – dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que ocorre no denominador. Esse método não funciona para um limite como , mas a Regra de l'Hôpital aplica-se também a esse tipo de forma indeterminada.

Regra de l'Hôpital

Regra de l'Hôpital

Suponha que f e t sejam deriváveis e em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

$$\text{ou que } \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.) Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Observação

Regra de l'Hôpital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, "$x \to a$" *pode ser substituído por quaisquer símbolos a seguir:*

- $x \to a^+$,
- $x \to a^-$,
- $x \to \infty$ *ou*
- $x \to -\infty$.

EXEMPLO 1

Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

EXEMPLO 1

Encontre $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Uma vez que

$$\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0,$$

podemos aplicar a Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

EXEMPLO 2

Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

EXEMPLO 2

Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Temos $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$; logo, a Regra de l'Hôpital fornece:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, o limite do lado direito também é indeterminado, mas uma segunda aplicação da Regra de l'Hôpital fornece:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

EXEMPLO 3

Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Uma vez que $\ln x \to \infty$ e $\sqrt[3]{x} \to \infty$ quando $x \to \infty$, a Regra de l'Hôpital pode ser aplicada:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^{1-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^{1/3}} = 0.$$

EXEMPLO 4

Encontre $\lim_{x\to\pi^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

EXEMPLO 4

Encontre $\lim_{x\to\pi^-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

Se tentarmos usar cegamente a Regra de l'Hôpital, obteremos:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty.$$

Isso está **errado!** Embora o numerador $\sin x \to 0$ quando $x \to \pi^-$, perceba que o denominador $1-\cos x$ não tende a zero; logo, não podemos aplicar aqui a Regra de l'Hôpital.

O limite pedido é na verdade fácil de ser encontrado, pois a função é contínua em π e o denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin \pi}{1-\cos \pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0.$$

Produto Indeterminado

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro que valor de $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g. Se f ganhar, a resposta é 0; se g vencer, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero.

Esse tipo de limite é chamado **forma indeterminada do tipo** $0 \cdot \infty$. Podemos lidar com ela escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad \text{ou} \quad fg = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que podemos usar a Regra de l'Hôpital.

Exemplo 5

Calcule $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

Exemplo 5

Calcule $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.
O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator $(\ln x)$ tende a $-\infty$.
Escrevendo $x = 1/(1/x)$ temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$; logo, a Regra de l'Hôpital fornece:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Diferença Indeterminada

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$$

é chamado **forma indeterminada do tipo** $\infty - \infty$. De novo, há uma disputa entre f e g. A resposta será ∞ (se f ganhar) ou será $-\infty$ (se g ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio, resultando um número finito.
Para descobrirmos, tentamos converter a diferença em um quociente (usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum, por exemplo), de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 6

Calcule $\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

Exemplo 6

Calcule $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \operatorname{tg} x)$.
Observe primeiro que $\sec x \to \infty$ e $\operatorname{tg} x \to \infty$ quando $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$; logo, o limite é indeterminado. Aqui usamos um denominador comum:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

Observe que o uso da Regra de l'Hôpital é justificado, pois $1-\sin x \to 0$ e $\cos x \to 0$ quando $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, tipo 0^0,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, tipo ∞^0,
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, tipo 1^∞.

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

$$\text{seja} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{então} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Exemplo 7

Calcule $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot x}$.

Exemplo 7

Calcule $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot x}$.
Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1+\sin 4x \to 1$ e $\cot x \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado. Considere

$$y = (1+\sin 4x)^{\cot x}$$

Então

$$\ln y = \ln[(1+\sin 4x)^{\cot x}] = \cot x \cdot \ln(1+\sin 4x)$$

e logo, a Regra de l'Hôpital fornece:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x} = 4.$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4.$$

Dúvidas?