Funções e Modelos Matemáticos

Priscila Bemm

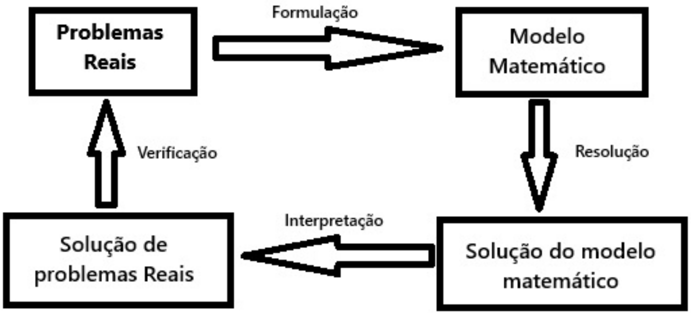
UEM

Objetivo

Mostrar como a matemática, e o cálculo particular, pode ser utilizada para resolução de problemas reais.

O que é modelagem matemática?

Modelagem matemática é um processo que transforma problemas reais em problemas matemáticos, por meio de equações, funções ou problemas matemáticos que podem ser analisados e resolvidos.



Formulação

Dado um problema real, nosso primeiro passo reformulá-lo usando a linguagem matemática.
No cálculo, nossa preocupação principal é como uma variável depende de uma ou mais variáveis.
A maioria de nossos modelos envolverá o uso de funções de uma ou mais variáveis ou de equações definindo essas funções.

Resolução

Após a construção de um modelo matemático, podemos usar técnicas matemáticas apropriadas, que serão apresentadas no decorrer da disciplina, para resolver o problema.

Interpretação

A solução obtido no passo anterior, é apenas uma solução do modelo matemático, é preciso interpretar os resultados no contexto do problema real original.

Verificação

Alguns modelos matemáticos de aplicações reais descrevem situações com precisão. Por exemplo, o modelo que descreve o valor total de uma conta de uma sorveteria dados o total de sorvetes que o cliente comprou.

$$P = 4x + 2y,$$

onde x é o total de bolas de sorvete e y é o total de picolés.
Alguns modelos nos dão descrições aproximadas de problemas reais. Nesse caso precisamos verificar a precisão do modelo comparando os valores reais e os valores previstos. Caso o resultado não seja satisfatório. deve-se retornar ao primeiro passo e reformular o problema.

Exemplo 1: Mercado de Drogas Redutoras de Colesterol

Em um estudo realizado no início dos anos 2000, profissionais projetaram um aumento no gasto com drogas redutoras de colesterol. O mercado dos Estados Unidos (em bilhões de dólares) para essas drogas, de 1999 a 2004, é descrito na seguinte tabela:

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Mercado	12,07	14,07	16,21	18,28	20	21,72

Um modelos matemático para aproximar o mercado dos Estados Unidos nesse período é dado por:

$$M(t) = 1,95t + 12,19$$

onde t é medido em anos, com $t = 0$ correspondendo a 1999.

1. Esboce o gráfico da função M e os dados da tabela na mesma figura.
2. Se a projeções se realizem e a tendência se mantenha, qual foi o mercado para essas drogas em 2005?
3. Qual era a taxa de crescimento do mercado dessas drogas nesse período em questão?

Função afim

Uma função afim é uma função f definida por uma expressão

$$f(x) = ax + b\,,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes.

Função afim

Uma função afim é uma função f definida por uma expressão

$$f(x) = ax + b\,,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Como essa expressão está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Funções afins

Função afim

Uma função afim é uma função f definida por uma expressão

$$f(x) = ax + b\,,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Como essa expressão está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Observação

Se $a = 0$, a função afim f definida pela expressão $f(x) = b$ é chamada de uma função constante.

Funções afins

Função afim

Uma função afim é uma função f definida por uma expressão

$$f(x) = ax + b\,,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Como essa expressão está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Observação

Se $a = 0$, a função afim f definida pela expressão $f(x) = b$ é chamada de uma função constante.

Observação

Se $b = 0$, a função afim f definida pela expressão $f(x) = ax$ também é chamada de uma função linear.

Exemplos de funções afins

- $f(x) = 3x + 6$
- $g(t) = -47t$
- $h(u) = 10 - \frac{2}{3}u$
- $c(x) = -5$
- $p(x) = 3 + 10x - 4 + 2x$
- $q(y) = \frac{5y - 2}{10}$

Exemplos de funções afins

- $f(x) = 3x + 6$
- $g(t) = -47t$
- $h(u) = 10 - \frac{2}{3}u$
- $c(x) = -5$
- $p(x) = 3 + 10x - 4 + 2x = 12x - 1$
- $q(y) = \frac{5y - 2}{10} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{5}$

Exemplo 2: Adesão a plano de saúde

O número de pessoas (em milhões) conveniadas a planos e saúde de 1994 a 2002 é dado na tabela a seguir?

Ano	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Nº de pessoas	45,4	50,6	58,7	67	76,4	81,3	80,9	80

Um modelo de matemática que fornece uma aproximação do número de pessoas, $N(t)$ (em milhões), conveniadas a planos de saúde durante esse período é

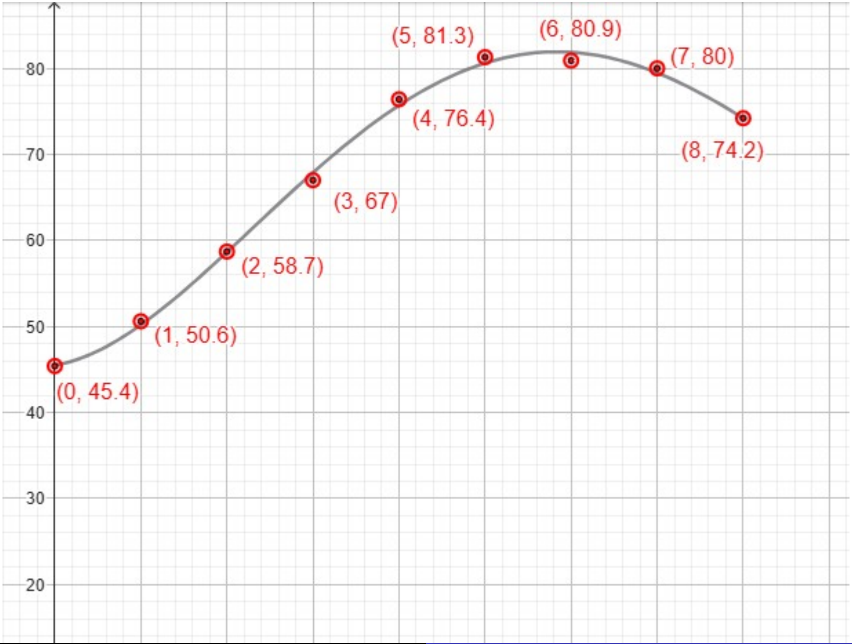
$$N(t) = 0,030915t^4 - 0,67974t^3 + 3,704t^2 + 1,63t + 45,5$$

para $0 \leq t \leq 8$.

1. Use esse modelo para estimar o número de pessoas conveniadas no plano de saúde em 2000. Como esse número de compara aos dados reais?
2. Considere o modelo para prever quantas pessoas estarão conveniadas a planos de saúde em 2003.

1. Use esse modelo para estimar o número de pessoas conveniadas no plano de saúde em 2000. Como esse número de compara aos dados reais?
2. Considere o modelo para prever quantas pessoas estarão conveniadas a planos de saúde em 2003.

Respostas:
Item 1: $81,87$ milhões de pessoas.
Item 2: $67,5$ milhões de pessoas.



(5, 81.3)
(6, 80.9)
(7, 80)
(4, 76.4)
(8, 74.2)
(3, 67)
(2, 58.7)
(1, 50.6)
(0, 45.4)
80
70
60
50
40
30
20

Funções Polinomiais

Uma **função polinomial** de grau n é uma expressão da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são os **coeficientes** ($a_n \neq 0$)
- $n \in \mathbb{N}$ é o **grau** do polinômio
- x é a **variável** independente

Grau	Forma Geral	Exemplo
0 (Constante)	$P(x) = a_0$	$P(x) = 5$
1 (Linear)	$P(x) = a_1 x + a_0$	$P(x) = 2x + 3$
2 (Quadrático)	$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$P(x) = x^2 - 4x + 4$
3 (Cúbico)	$P(x) = a_3 x^3 + \cdots + a_0$	$P(x) = 2x^3 - x + 1$
n (Geral)	$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Propriedades: Raízes (Zeros)

As raízes de $P(x)$ são as soluções de:

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

Exemplo: Para $P(x) = x^2 - 5x + 6$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \\ \Rightarrow & x_1 = 3, \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Propriedades: Fatoração

Todo polinômio $P(X) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ pode ser expresso como:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) \tag{2}$$

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$,
pois $x = 3$ e $x = 2$ são raízes do polinômio $x^2 - 5x + 6 = 0$

$3x^2 + 36x + 60 = 3(x+10)(x+2)$,
pois $x = -10$ e $x = -2$ são raízes do polinômio $x^2 - 5x + 6 = 0$

Exemplo 3: Custos de Condução

Um estudo de despesas com automóveis baseados no Ford Taurus SEL 2002 encontrou os seguintes custos médios, medidos em centavos por milha:

Milhas/ano, x	5000	10000	15000	20000
Custo/milha, y	80	60	49,8	44,9

Um modelo matemático para o custo médio em centavos por milha é

$$C(x) = \frac{157,6}{x^{0,421}}$$

onde x (em milhares) denota o número de milhas rodadas em 1 ano.

Usando o modelo, estime o custo médio ao dirigir o Ford Taurus 2002 por 8000 milhas ao ano e por 18000 milhas ao ano.

Uma função racional é o quociente de dois polinômios, isto é, são funções do tipo:

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções polinomiais, e $g(x) \neq 0$
Exemplos:

- $f(x) = \frac{x^2-7}{4x^3+1}$
- $f(x) = \frac{3x^2-7x+4}{34x^7+2x}$
- $f(x) = \frac{7}{34x^7+2x}$

Exemplo

Uma fábrica produz x *unidades de um item. O custo total (em reais) é*

$$C(x) = 4x^2 + 7x + 10.$$

Qual é a expressão que representa o custo médio por unidade?

Exemplo

Uma fábrica produz x unidades de um item. O custo total (em reais) é

$$C(x) = 4x^2 + 7x + 10.$$

Qual é a expressão que representa o custo médio por unidade?

Solução

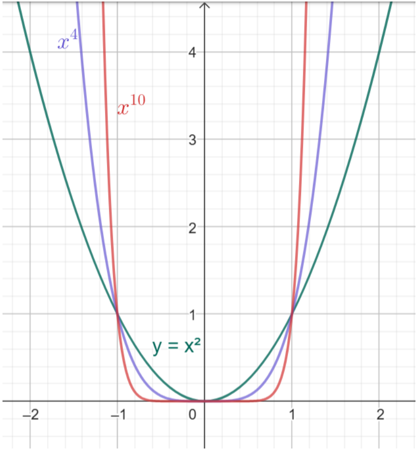
O custo médio por unidade é obtido dividindo o custo total pela quantidade de unidades, isto é,

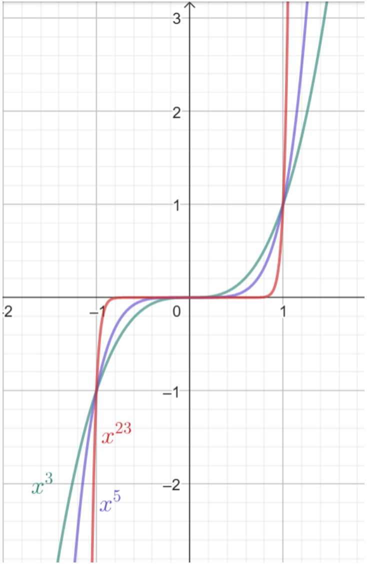
$$\frac{C(x)}{x} = \frac{4x^2 + 7x + 10}{x} \text{ , com } x > 0$$

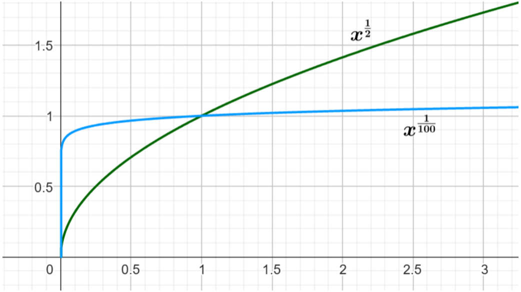
Funções Potência

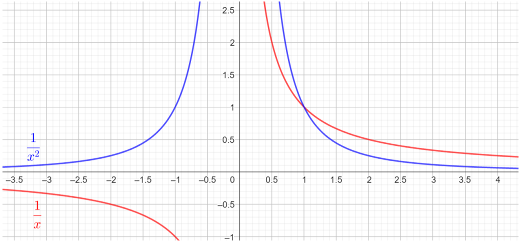
Funções da forma $f(x) = x^r$, onde r é um número real, são chamadas funções potência.
Por exemplo,

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = x^{-2}$


x^4
x^{10}
$y = x^2$
4
3
2
1
−2
−1
0
1
2


3
2
1
0
−1
−2
1
x^{23}
x^3
x^5


$x^{\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{1}{100}}$
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


$\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x}$
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Exercícios

1. Um retângulo tem um perímetro de $20\,\mathrm{m}$. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.
2. Um retângulo tem uma área de $16\,\mathrm{m}^2$. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.
3. Expresse a área da superfície de um cubo como uma função de seu volume.
4. Uma caixa retangular aberta com volume de $2\,\mathrm{m}^3$ tem uma base quadrada. Expresse a área da superfície da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.