Multiplicadores de Lagrange

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Apresentar o Método dos Multiplicadores de Lagrange para maximizar ou minimizar uma função f sujeita a alguma restrição.*

Bibliografia

- *Cálculo III e IV*, ***Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.*** *Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Anteriormente nós maximizamos o volume de uma caixa retangular sem tampa, restritos a $12m^2$ de material.

Nós maximizamos a função $V = xyz$, sujeita a restrição $2xz + 2yz + xy = 12$.

Em outras palavras, nós determinamos os valores extremos de $V(x, y, z)$ quando o ponto (x, y, z) pertencer à superfície de nível $2xz + 2yz + xy = 12$.

A seguir, apresentaremos o método de Lagrange para maximizar ou minimizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

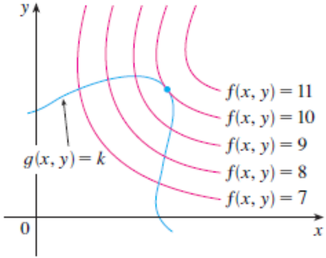
Método dos Multiplicadores de Lagrange

Suponha que queremos determinar os valores máximos e mínimos de uma função $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.
Vamos supor que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq 0$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$.
Faça o seguinte:

1. Determine todos os valores de x, y, z e λ que são soluções do sistema
$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= k. \end{aligned}$$
2. Calcule f em todos os pontos (x, y, z) obtidos no passo (1).
3. O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

O número λ é chamado **multiplicador de Lagrange** em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

- Vamos explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis.
- Para determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y) = k$, devemos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$ de uma função g que, em geral, é diferente de f. A figura mostra a curva de nível $g(x, y) = k$ junto de diversas curvas de nível de f.



- Para maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é preciso determinar o maior valor de c, tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$.
- Parece, da figura anterior, que isso acontece quando essas curvas se tangenciam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum.
- Como o vetor gradiente e o vetor tangente são ortogonais, isso significa que os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ devem ser paralelos.
- Ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ.

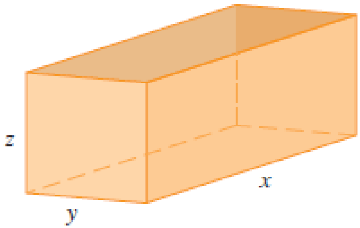
Exemplo

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ *de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.*

Exemplo

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Solução: Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros) como mostrado na figura



Nosso objetivo é maximizar o volume $V = xyz$ da caixa, sujeito a restrição $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z e λ, tais que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 12$. Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x, \qquad V_y = \lambda g_y, \qquad V_z = \lambda g_z, \qquad 2xz + 2yz + xy = 12.$$

ou seja:

$$yz = \lambda(2z + y) \tag{2}$$
$$xz = \lambda(2z + x) \tag{3}$$
$$xy = \lambda(2x + 2y) \tag{4}$$
$$2xz + 2yz + xy = 12 \tag{5}$$

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso, você pode observar que, se multiplicarmos [2] por x, [3] por y, e [4] por z, os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

$$xyz = \lambda\,(2xz + xy) \tag{6}$$
$$xyz = \lambda\,(2yz + xy) \tag{7}$$
$$xyz = \lambda\,(2xz + 2yz) \tag{8}$$

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaria $yz = xz = xy = 0$ de [2], [3] e [4], e isso contradiz [5]. Logo, de [6] e [7], temos

$$2xz + xy = 2yz + xy,$$

que nos fornece $xz = yz$. Mas $z \neq 0$ (uma vez que $z = 0$ daria $V = 0$), portanto $x = y$. De [7] e [8] temos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz,$$

que dá $2xz = xy$ e assim (como $x \neq 0$), $y = 2z$. Se colocarmos $x = y = 2z$ em [5], obtemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12.$$

Logo, $12z^2 = 12 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$.
Como z é uma medida, temos $z = 1 \Rightarrow x = y = 2 \cdot 1 = 2$.

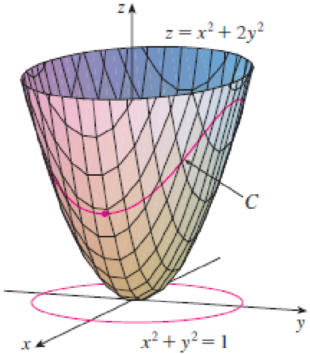
Exemplo

Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ *restrita aos pontos da circunferência* $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo

Determine os valores extremos da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ *restrita aos pontos da circunferência* $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Em termos geométricos, o exemplo pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva C que pertence ao paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ e que são imagens via f dos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.



Foi-nos pedido determinar os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 1$, que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x, \qquad f_y = \lambda g_y, \qquad g(x, y) = 1.$$

ou

$$2x = 2x\,\lambda \tag{9}$$

$$4y = 2y\,\lambda \tag{10}$$

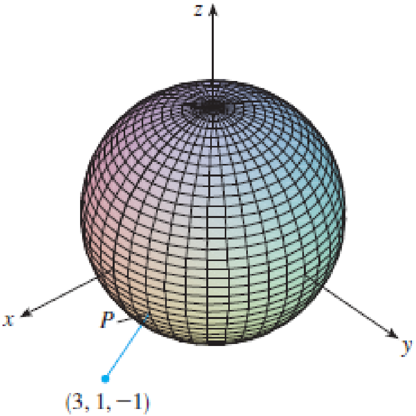
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{11}$$

De (9) temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$, então (11) leva a $y = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ por (10), e assim (11) dá $x = \pm 1$. Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2, \qquad f(0, -1) = 2, \qquad f(1, 0) = 1, \qquad f(-1, 0) = 1.$$

Exemplo

Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *que estão mais próximos e mais distantes do ponto* $(3, 1, -1)$.



A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(3, 1, -1)$ é

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}.$$

Mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o *quadrado* dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2.$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$ com $g = 4$. Isso dá

$$2(x-3) = 2x\lambda$$

2(y-1) = 2yλ
2(z+1) = 2zλ
x$^2 + y^2 + z^2 = 4(12)$
O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y, z em termos de λ a partir de (12), (14) e (14), e substituir esses valores em (14).

De (12) temos

$$x - 3 = x\lambda \quad \Leftrightarrow \quad x(1-\lambda) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{1-\lambda}.$$

(Observe que $1 - \lambda \neq 0$ *porque* $\lambda = 1$ *é impossível a partir de* (12)*.)*

Da mesma forma, (14) e (14) dão

$$y = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}.$$

Portanto, de (15) temos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4,$$

que nos dá $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$; assim, $1-\lambda = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$, logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Esses valores de λ então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

É fácil ver que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ e o mais distante é $\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$.

Observação

O método do exemplo anterior pode ser replicado para maximizar e minimizar a distância de um ponto ao gráfico de qualquer função de duas variáveis.

1. Determine a distância entre o ponto $P = (4, 2, 0)$ e o cone $z^2 = x^2 + y^2$.
2. Determine três números positivos cuja soma é 100 e o produto é máximo.
3. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.