Integrais Duplas sobre Retângulos

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Definir integral sobre retângulos para funções de duas variáveis.*
- *Regra do Ponto Médio*

Objetivo

- *Definir integral sobre retângulos para funções de duas variáveis.*
- *Regra do Ponto Médio*

- No Cálculo I, a tentativa de resolvermos o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida.

- No Cálculo I, a tentativa de resolvermos o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida.
- Aplicaremos um procedimento semelhante para determinar o volume de um sólido, e este processo nos levará à definição de integral dupla.

- No Cálculo I, a tentativa de resolvermos o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida.
- Aplicaremos um procedimento semelhante para determinar o volume de um sólido, e este processo nos levará à definição de integral dupla.
- Vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real.

Para relembrar

Seja f uma função de uma variável x definida para todos os valores no intervalo $[a, b]$.

Para relembrar

Seja f uma função de uma variável x definida para todos os valores no intervalo $[a, b]$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Para relembrar

Seja f uma função de uma variável x definida para todos os valores no intervalo $[a, b]$.
Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a
$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
Escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos.

Para relembrar

Seja f uma função de uma variável x definida para todos os valores no intervalo $[a, b]$.
Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
Escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos.
Podemos, então, considerar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Para relembrar

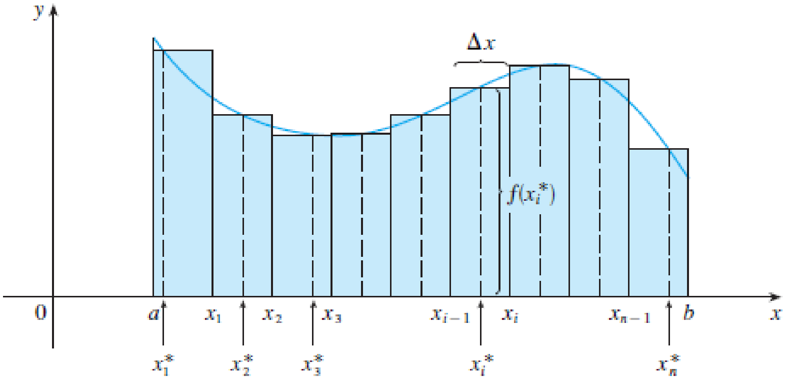
Seja f uma função de uma variável x definida para todos os valores no intervalo $[a,b]$.
Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
Escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos.
Podemos, então, considerar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tomando o limite dessa soma quando $n \to \infty$, temos a integral definida de a até b da função f:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

No caso especial em que $f(x) \geqslant 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximadores da Figura e $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

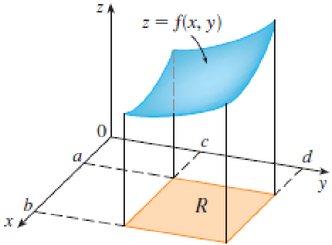


Volumes e Integrais Duplas

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

Vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geq 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$.

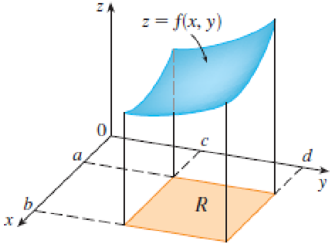


Volumes e Integrais Duplas

Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f, isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y),\ (x, y) \in R\}.$$

Nosso objetivo é determinar o volume de S.



- O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos.

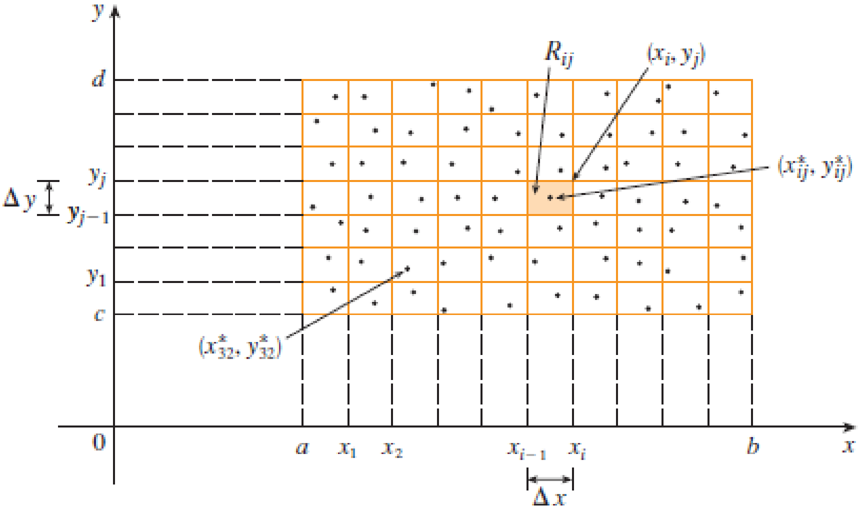
- O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos.
- Para tanto, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$.

- O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos.
- Para tanto, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$.
- E dividimos o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$, todos de comprimento igual a $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.

- O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos.
- Para tanto, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos de comprimento igual a $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$.
- E dividimos o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$, todos de comprimento igual a $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.
- Traçamos retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos para formar os sub-retângulos

$$\begin{aligned} R_{ij} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ &= \{(x, y) \,|\, x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \end{aligned}$$

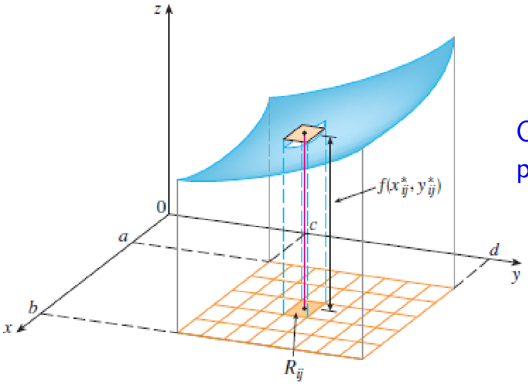
cada um deles com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.



y
d
R_{ij}
(x_i, y_j)
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
y_j
Δy
y_{j-1}
y_1
c
(x_{32}^*, y_{32}^*)
0
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx

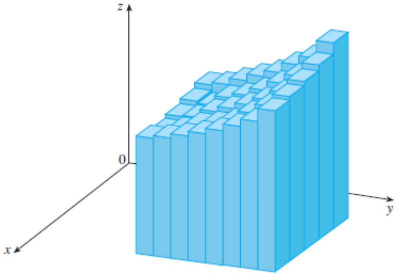
- Vamos escolher um ponto arbitrário (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada R_{ij}, que chamaremos ponto de amostragem.

- Vamos escolher um ponto arbitrário (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada R_{ij}, que chamaremos ponto de amostragem.
- Poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na figura.

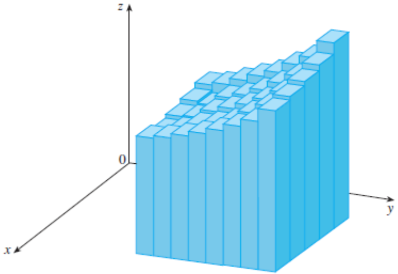


O volume dessa caixa é dado por $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.

Se seguirmos com esse procedimento para todos os sub-retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:



Se seguirmos com esse procedimento para todos os sub-retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:



$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Essa soma dupla significa que para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

Nossa intuição diz que a aproximação do volume tende a melhora quando aumentamos os valores de m e n.

Nossa intuição diz que a aproximação do volume tende a melhora quando aumentamos os valores de m e n.
Portanto, devemos esperar que

$$V = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A. \tag{1}$$

Nossa intuição diz que a aproximação do volume tende a melhora quando aumentamos os valores de m e n.
Portanto, devemos esperar que

$$V = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A. \qquad (1)$$

O significado do limite duplo em (1) é que podemos tornar a somatória dupla tão próxima quanto desejarmos do volume V, bastando tomar m e n suficientemente grandes.

Nossa intuição diz que a aproximação do volume tende a melhora quando aumentamos os valores de m e n.
Portanto, devemos esperar que

$$V = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A. \qquad (1)$$

O significado do limite duplo em (1) é que podemos tornar a somatória dupla tão próxima quanto desejarmos do volume V, bastando tomar m e n suficientemente grandes.
Usamos a expressão da equação (1) para definir o **volume** do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R.

Limites do tipo que aparecem na equação (1) ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações mesmo f não sendo uma função positiva.

Limites do tipo que aparecem na equação (1) ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações mesmo f não sendo uma função positiva.
Assim, faremos a seguinte definição:

Definição

A ***integral dupla*** *de uma função f de duas variáveis x e y sobre o retângulo R é*

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A. \qquad (2)$$

quando esse limite existir.

Limites do tipo que aparecem na equação (1) ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações mesmo f não sendo uma função positiva.
Assim, faremos a seguinte definição:

Definição

*A **integral dupla** de uma função f de duas variáveis x e y sobre o retângulo R é*

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A. \qquad (2)$$

quando esse limite existir.

Uma função f é dita **integrável** se o limite na definição anterior existir.

Limites do tipo que aparecem na equação (1) ocorrem muito frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações mesmo f não sendo uma função positiva.
Assim, faremos a seguinte definição:

Definição

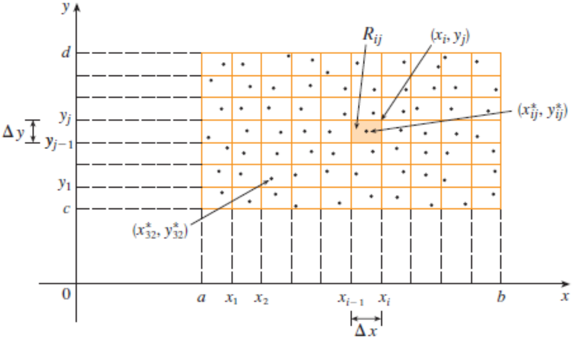
*A **integral dupla** de uma função f de duas variáveis x e y sobre o retângulo R é*

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A. \qquad (2)$$

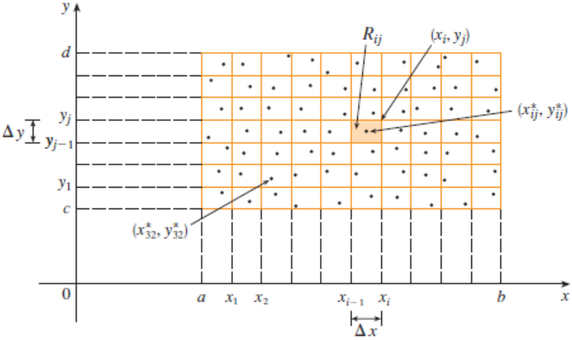
quando esse limite existir.

Uma função f é dita **integrável** se o limite na definição anterior existir.
É mostrado em cursos de cálculo avançado que todas as funções contínuas são integráveis.

- O ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij}.



- O ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij}.



- Se escolhermos esse ponto amostral como o canto superior direito de R_{ij} a expressão da soma dupla ficará mais simples:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A. \qquad (3)$$

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$\iint_V f(x, y)\, dA$$

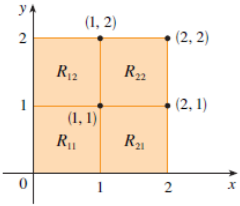
Exemplo

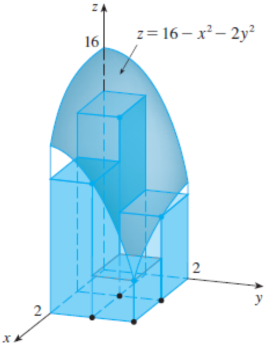
Encontre o volume o sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatros quadrados iguais e escolha o ponto de amostragem como o canto superior direito de cada quadrado R_{ik}.

Exemplo

Encontre o volume o sólido que está acima do quadrado $R = [0,2] \times [0,2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R em quatros quadrados iguais e escolha o ponto de amostragem como o canto superior direito de cada quadrado R_{ik}.

Solução





O paraboloide elíptico é o gráfico de

$$f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$$

e a área de cada quadrado é $\Delta A = 1$.

O paraboloide elíptico é o gráfico de

$$f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$$

e a área de cada quadrado é $\Delta A = 1$.
Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$V \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

O paraboloide elíptico é o gráfico de

$$f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$$

e a área de cada quadrado é $\Delta A = 1$.
Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$V \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$= f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A$$

$$= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34.$$

Se $R = [0,4] \times [-1,2]$, use a soma de Riemman com $m = 2$ e $n = 3$ para estimar o valor de $\iint_R (1 - xy^2)\, dA$. Tome os pontos de amostragem como

a) os cantos inferiores esquerdos

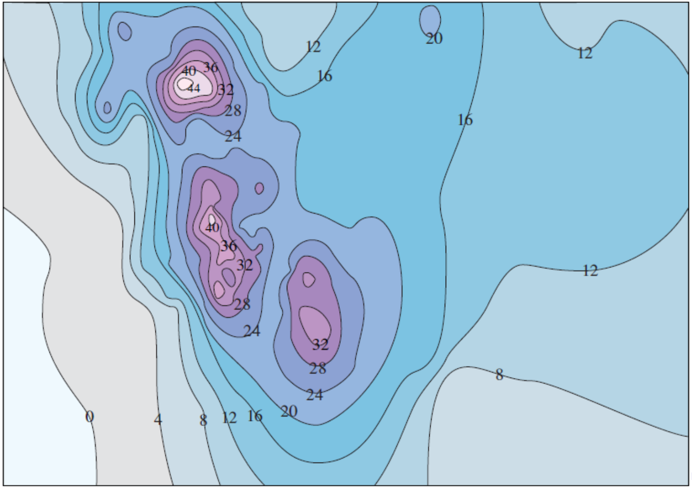
b) os cantos inferiores esquerdos

Regra do Ponto Médio

$$\iint_R f(x,y)dA = \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A$$

onde $\bar{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\bar{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$

O mapa de contorno na Figura a seguir mostra a precipitação de neve, em polegadas, no estado do Colorado em 20 e 21 de dezembro de 2006. (O Estado tem a forma de um retângulo que mede 388 milhas de Oeste a Leste e 276 milhas do Sul ao Norte.) Use o mapa de contorno para estimar a queda de neve média em todo o Estado do Colorado naqueles dias.



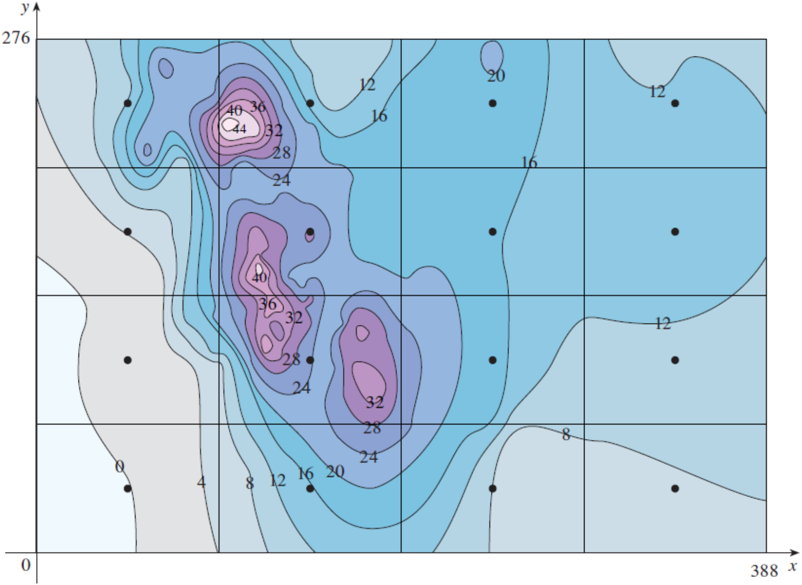
A precipitação média de neve é

$$f_{media} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\, dA$$

$A(R) = 388 \cdot 276$

Dividindo o intervalo $[0, 388]$ em 4 subintervalos e $[0, 276]$ em 4 sub-intervalos, estamos dividindo o mapa R em 16 sub-retângulos.

Cada sub-retângulo terá área $\Delta A = \dfrac{388 \cdot 276}{16} = 6693\, mi^2$


y
276
0
388
x
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44

Para estimar o valor de f no ponto central de cada sub-retângulo, usaremos o mapa de contorno e obteremos:

- $f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0$
- $f(\bar{x}_1, \bar{y}_2) = 15$
- $f(\bar{x}_1, \bar{y}_3) = 8$
- $f(\bar{x}_1, \bar{y}_4) = 7$
- $f(\bar{x}_2, \bar{y}_1) = 2$
- $f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 25$
- $f(\bar{x}_2, \bar{y}_3) = 18,5$
- $f(\bar{x}_2, \bar{y}_4) = 11$
- $f(\bar{x}_3, \bar{y}_1) = 4,5$
- $f(\bar{x}_3, \bar{y}_2) = 28$
- $f(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = 17$
- $f(\bar{x}_3,\ f(\bar{x}_4, \bar{y}_1) = 12$
- $f(\bar{x}_4, \bar{y}_2) = 15$
- $f(\bar{x}_4, \bar{y}_3) = 17,5$
- $f(\bar{x}_4, \bar{y}_4) = 13$

Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$V = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$= (0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18,5 + 11 + 4,5 + 28 + 17 + 13,5 + 12 + 15 + 17,5 + 13)\Delta A$$

$$= 6693 \cdot 207$$

Assim, a precipitação média será:

$$f_{media} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\, dA = \frac{6693 \cdot 207}{388 \cdot 276}$$

Exercício

Uma piscina de 8 por 12 metros está cheia de água. A profundidade é medida em intervalos de 2 metros, começando em um canto da piscina, e os valores foram registrados na tabela. Estime o volume de água na piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1,5	2	2,4	2,8	3	3
2	1	1,5	2	2,8	3	3,6	3
4	1	1,8	2,7	3	3,6	4	3,2
6	1	1,5	2	2,3	2,7	3	2,5
8	1	1	1	1	1,5	2	2