Curvas e Superfícies de Nível

Priscila Bemm

UEM

20 de agosto de 2025

Objetivo

- *Conceito de curvas de nível.*
- *Conceito de superfícies de nível.*

Objetivo

- *Conceito de curvas de nível.*
- *Conceito de superfícies de nível.*

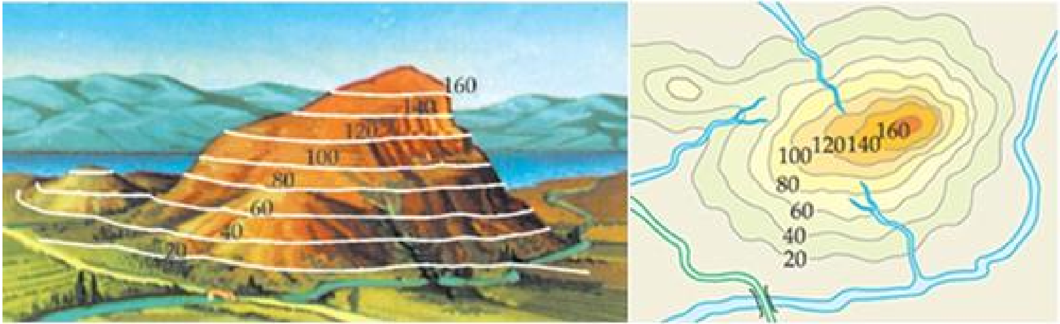
Bibliografia

- *Cálculo III e IV,* ***Marcos Henrique Santos Martins, Rosimary Pereira.*** *Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.*
- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: diagramas de flechas e gráficos.

Um terceiro método, emprestado dos cartógrafos, é um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar **curvas de contorno** ou **curvas de nível**.

Curvas de nível ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa a seguir:



Observação

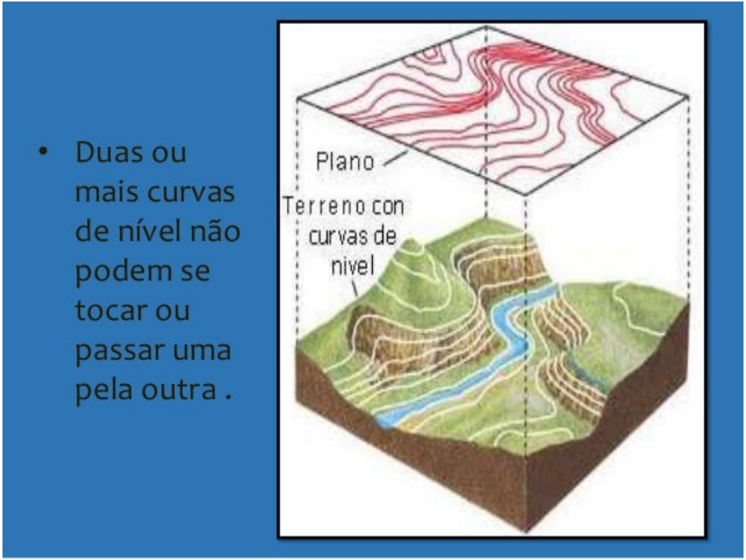
- *As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante.*

Observação

- *As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante.*
- *Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá.*

Observação

- *As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante.*
- *Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá.*
- *Traçadas na carta, essas curvas permitem a visualização em* $2D$ *da declividade (inclinação) do relevo.*



Fonte: https://www.slideshare.net/PIBIDGeografiaCAMPUSI/curvas-de-nvel-71048317

Definição

*As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis x e y, são aquelas com equação $f(x,y)=k$, onde k é uma constante na imagem de f.*

Definição

*As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis x e y, são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante na imagem de f.*

Observação

- *Uma curva de nível de uma função f de duas variáveis x e y nada mais é do que curva obtida pela interseção do gráfico da função f com um plano de equação $z = k$ (paralelo ao plano xy), em que k é um constante pertencente a imagem de f.*

Definição

*As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis x e y, são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante na imagem de f.*

Observação

- *Uma curva de nível de uma função f de duas variáveis x e y nada mais é do que curva obtida pela interseção do gráfico da função f com um plano de equação $z = k$ (paralelo ao plano xy), em que k é um constante pertencente a imagem de f.*
- *Para diferentes valores de k obteremos diferentes planos e, consequentemente, diferentes curvas de nível.*

Definição

*As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis x e y, são aquelas com equação $f(x,y)=k$, onde k é uma constante na imagem de f.*

Observação

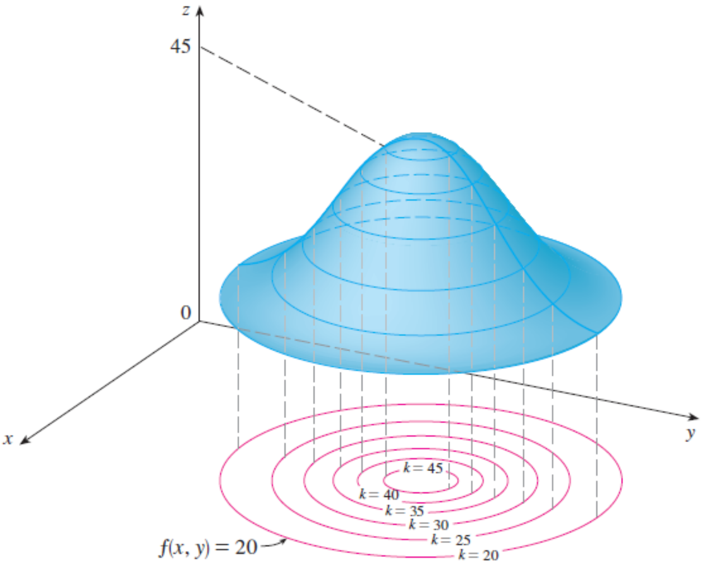
- *Uma curva de nível de uma função f de duas variáveis x e y nada mais é do que curva obtida pela interseção do gráfico da função f com um plano de equação $z=k$ (paralelo ao plano xy), em que k é um constante pertencente a imagem de f.*
- *Para diferentes valores de k obteremos diferentes planos e, consequentemente, diferentes curvas de nível.*
- *Uma curva de nível $f(x,y)=k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k.*

Definição

*As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis x e y, são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante na imagem de f.*

Observação

- *Uma curva de nível de uma função f de duas variáveis x e y nada mais é do que curva obtida pela interseção do gráfico da função f com um plano de equação $z = k$ (paralelo ao plano xy), em que k é um constante pertencente a imagem de f.*
- *Para diferentes valores de k obteremos diferentes planos e, consequentemente, diferentes curvas de nível.*
- *Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k.*
- *Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.*


z
45
0
x
y
k = 45
k = 40
k = 35
k = 30
k = 25
k = 20
f(x, y) = 20

- As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy.

- As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy.
- Traçando as curvas de nível da função é possível imaginar o gráfico da função.

- As curvas de nível $f(x, y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy.
- Traçando as curvas de nível da função é possível imaginar o gráfico da função.
- A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras.

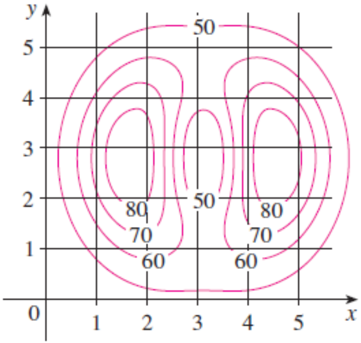
- As curvas de nível $f(x,y)=k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z=k$ projetados sobre o plano xy.
- Traçando as curvas de nível da função é possível imaginar o gráfico da função.
- A superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras.
- A superfície será mais achatada onde as curvas de nível estão distantes umas das outras. Veja figura anterior.

Atenção

Mesmo identificando as curvas de nível a partir das interseções de planos com a curva, o desenho das curvas de nível devem ser feitas no domínio da função, isto é, no plano xy

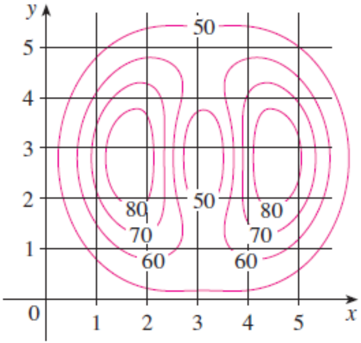
Exemplo

Um mapa de contorno para uma função f *é mostrado na figura a seguir. Use-o para estimar os valores de* $f(1,3)$ *e* $f(4,5)$.

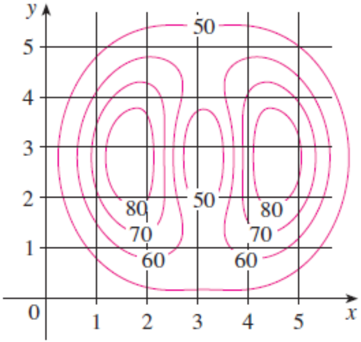


Exemplo

Um mapa de contorno para uma função f *é mostrado na figura a seguir. Use-o para estimar os valores de* $f(1,3)$ e $f(4,5)$.

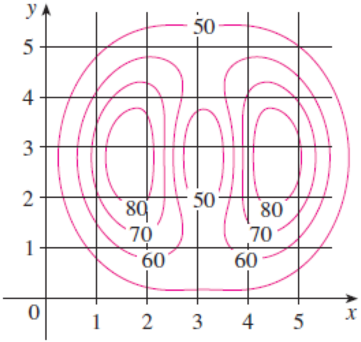


Solução:



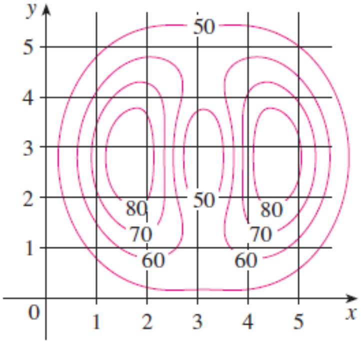
- O ponto $(1,3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80.

Solução:



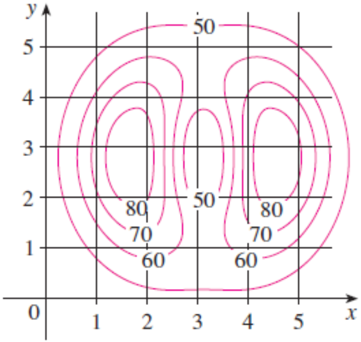
- O ponto $(1,3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Logo, $70 \leq f(1,3) \leq 80$.

Solução:

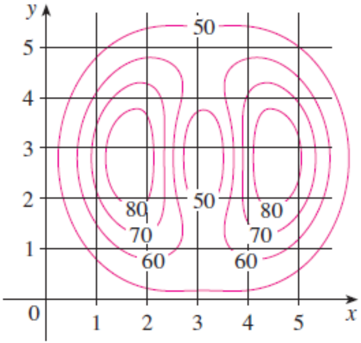


- O ponto $(1,3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Logo, $70 \leq f(1,3) \leq 80$.
- Como $f(1,3)$ está mais próximo de 70 que de 80, podemos estimar que $f(1,3) \approx 73$.

Solução:

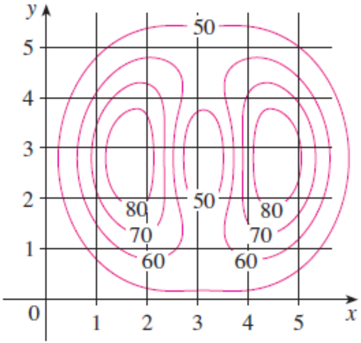


- O ponto $(1,3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80. Logo, $70 \leq f(1,3) \leq 80$.
- Como $f(1,3)$ está mais próximo de 70 que de 80, podemos estimar que $f(1,3) \approx 73$.



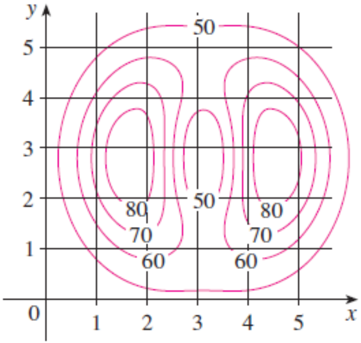
Solução:

- O ponto $(4,5)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 50 e 60.



Solução:

- O ponto $(4, 5)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 50 e 60.
- Logo, $50 \leq f(4, 5) \leq 60$.



Solução:

- O ponto $(4,5)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 50 e 60.
- Logo, $50 \leq f(4,5) \leq 60$.
- Como $f(4,5)$ está mais próximo de 60 que de 50, podemos estimar que $f(4,5) \approx 56$.

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

- As curvas de nível são dadas por equações do tipo

$$6 - 3x - 2y = k$$

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

- As curvas de nível são dadas por equações do tipo

$$6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 2y = -3x + (6 - k)$$

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

- As curvas de nível são dadas por equações do tipo

$$6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 2y = -3x + (6 - k) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{6 - k}{2}.$$

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

- As curvas de nível são dadas por equações do tipo

$$6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 2y = -3x + (6 - k) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-k}{2}.$$

- Essa é uma família de retas no plano com inclinação $\dfrac{-3}{2}$.

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

- As curvas de nível são dadas por equações do tipo

$$6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 2y = -3x + (6-k) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-k}{2}.$$

- Essa é uma família de retas no plano com inclinação $\dfrac{-3}{2}$.
- As quatro curvas de nível particulares pedidas com $k = -6, 0, 6, 12$ são, respectivamente:

Exemplo

Esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$ *para os valores* $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

- As curvas de nível são dadas por equações do tipo
$$6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 2y = -3x + (6-k) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-k}{2}.$$
- Essa é uma família de retas no plano com inclinação $\dfrac{-3}{2}$.
- As quatro curvas de nível particulares pedidas com $k = -6, 0, 6, 12$ são, respectivamente:

$$k = -6,$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2}$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0,$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2}$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6 - (-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6 - (0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6,$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(6)}{2}$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x$$

$$k = 12,$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x$$

$$k = 12, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(12)}{2}$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x$$

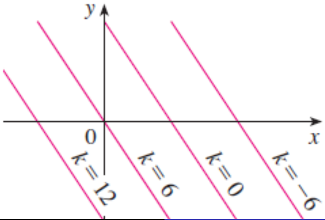
$$k = 12, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(12)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x - 3.$$

$$k = -6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(-6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$

$$k = 0, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(0)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$k = 6, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(6)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x$$

$$k = 12, y = \frac{-3}{2}x + \frac{6-(12)}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x - 3.$$



Exemplo

Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

Exemplo

Esboce algumas curvas de nível da função $h(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

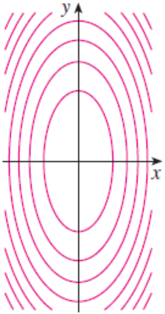
As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \text{ ou } \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

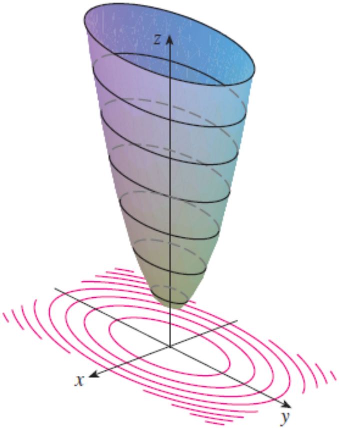
que, para $k > 1$, descrevem uma família de elipses com semieixos $\frac{1}{1}\sqrt{k-1}$ e $\sqrt{k-1}$

Exemplo de curvas de nível geradas usando software matemático

O gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ é formado levantando-se as curvas de nível.



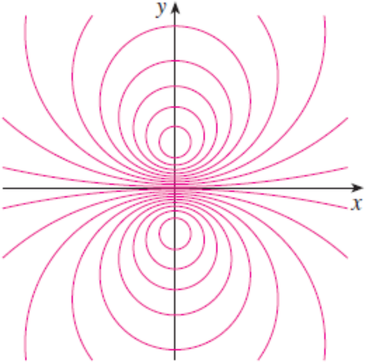
(a) Mapa de contorno



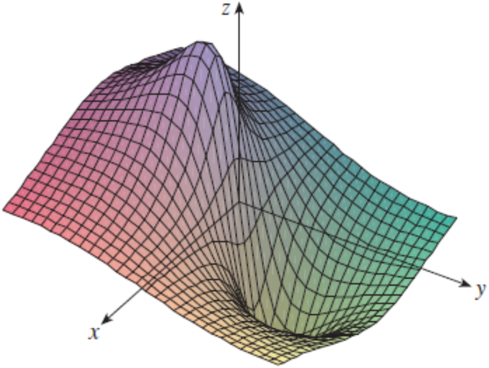
(b) Cortes horizontais são curvas de nível elevadas

Exemplo de curvas de nível geradas usando software matemático

$$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$$



$-3y$



$-3y$

Funções de três ou mais variáveis

Considere $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$.
Não podemos calcular a função para qualquer escolha de x, y e z.
Os pontos do domínio satisfazem a desigualdade

$$9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \quad \text{isto é, } x^2 + y^2 + z^2 \leq 9.$$

Assim,

$$Dom\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Geometricamente, o domínio de f é a bola, isto é, a fronteira e o interior da esfera de centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio 3.

E o gráfico da função f?

Como o domínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$, o gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, não sendo possível desenhá-lo em um espaço tridimensional.
No entanto, é possível representar o conjuntos de pontos que satisfazem
$f(x, y, z) = k, \ k \in \mathbb{R}$
Desta forma, se faz necessário definir superfícies de nível

Superfícies de Nível

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de três variáveis com domínio D. Dado um número (nível) $k \in \mathbb{R}$, definimos a *superfície de nível* associada a k como o conjunto

$$\{(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = k\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do *domínio* de f para os quais o valor da função é k.

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x,y,z) = 0$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$
- $f(x, y, z) = 1$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0,0,0)$
- $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0,0,0)$
- $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ esfera, com raio 1, centrada na origem.
- $f(x,y,z) = 4$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0,0,0)$
- $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ esfera, com raio 1, centrada na origem.
- $f(x,y,z) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$
- $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ esfera, com raio 1, centrada na origem.
- $f(x, y, z) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ esfera, com raio 2, centrada na origem.
- $f(x, y, z) = 9$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

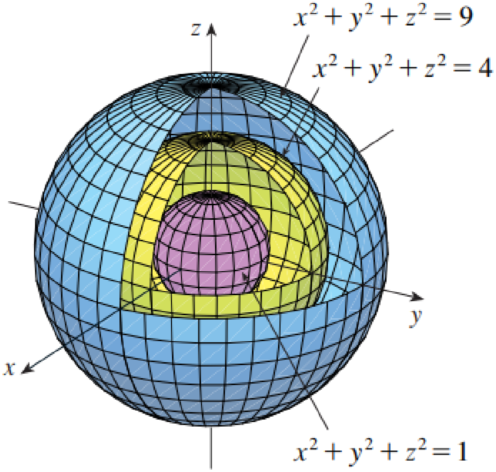
- $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0,0,0)$
- $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ esfera, com raio 1, centrada na origem.
- $f(x,y,z) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ esfera, com raio 2, centrada na origem.
- $f(x,y,z) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Exemplo

Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$
- $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ esfera, com raio 1, centrada na origem.
- $f(x, y, z) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ esfera, com raio 2, centrada na origem.
- $f(x, y, z) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow$ esfera, com raio 3, centrada na origem.


z
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
y
x
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Exercícios: Esboce as curvas de nível das funções

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = x + 2y$

Determine quais são as superfícies de nível das funções a seguir:

1. $f(x,y,z) = z - (x^2 + y^2)$
2. $f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$