Integrais Triplas sobre Caixas Retangulares e sobre Regiões Gerais

Priscila Bemm

UEM

Objetivo

- *Definir integral sobre caixas retangulares para funções de três variáveis.*
- *Definir integral sobre regiões gerais para funções de três variáveis.*

Objetivo

- *Definir integral sobre caixas retangulares para funções de três variáveis.*
- *Definir integral sobre regiões gerais para funções de três variáveis.*

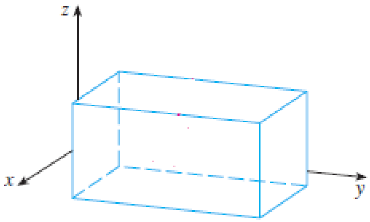
Bibliografia

- *Cálculo - Volume 2,* ***James Stewart****; tradução EZ2 Translate, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.*

- Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e integrais duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis.

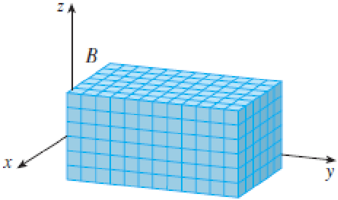
- Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e integrais duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis.
- Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f está definida em uma (paralelepípedo) caixa retangular:

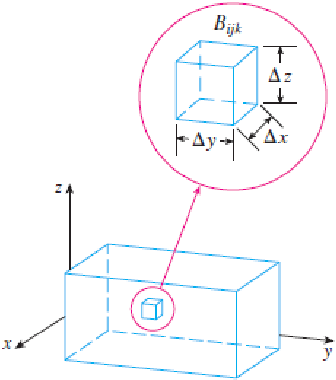
$$B = \{(x, y, z) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$



- Para integrais duplas definidas sob retângulos, dividíamos o retângulo R em sub-retângulos R_{ij}. Para integrais triplas sob uma caixa B, a ideia consiste em dividir a caixa B em sub-caixas.

- Para integrais duplas definidas sob retângulos, dividíamos o retângulo R em sub-retângulos R_{ij}. Para integrais triplas sob uma caixa B, a ideia consiste em dividir a caixa B em sub-caixas.





- Em integrais duplas, escolhíamos um ponto arbitrário (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada R_{ij} e escrevíamos a integral dupla sobre o retângulo R como

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

- Para integrais triplas, vamos escolher um ponto arbitrário $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ em cada B_{ijk}.

- Em integrais duplas, escolhíamos um ponto arbitrário (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada R_{ij} e escrevíamos a integral dupla sobre o retângulo R como

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

- Para integrais triplas, vamos escolher um ponto arbitrário $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ em cada B_{ijk}.
- Assim formamos a soma tripla de Riemann

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

- Em integrais duplas, escolhíamos um ponto arbitrário (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada R_{ij} e escrevíamos a integral dupla sobre o retângulo R como

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

- Para integrais triplas, vamos escolher um ponto arbitrário $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ em cada B_{ijk}.
- Assim formamos a soma tripla de Riemann

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=n}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ijk}^*)\Delta V$$

- Por analogia com a definição da integral dupla, definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann acima.

Definição

*A **integral tripla** de uma função f de três variáveis x, y e z sobre uma caixa retangular B é*

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V. \qquad (2)$$

quando esse limite existir.

Definição

*A **integral tripla** de uma função f de três variáveis x, y e z sobre uma caixa retangular B é*

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V. \qquad (2)$$

quando esse limite existir.

- Uma função f é dita **integrável** se o limite na definição anterior existir.

Definição

*A **integral tripla** de uma função f de três variáveis x, y e z sobre uma caixa retangular B é*

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V. \qquad (2)$$

quando esse limite existir.

- Uma função f é dita **integrável** se o limite na definição anterior existir.
- Todas as funções de três variáveis contínuas são integráveis.

- O ponto de amostragem $(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ijk}^*)$ pode ser tomado como qualquer ponto na sub-caixa B_{ijk}.

- O ponto de amostragem $(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ijk}^*)$ pode ser tomado como qualquer ponto na sub-caixa B_{ijk}.
- Se escolhermos esse ponto amostral $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ a expressão da soma dupla ficará mais simples:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=n}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V.$$

Teorema de Fubini Para Integrais Triplas

Seja f *contínua em uma caixa retangular*

$$B = \{(x, y, z) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Teorema de Fubini Para Integrais Triplas

Seja f *contínua em uma caixa retangular*

$$B = \{(x, y, z) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Então:

$$\iiint_B f(x, y, z)dV$$

Teorema de Fubini Para Integrais Triplas

Seja f *contínua em uma caixa retangular*

$$B = \{(x, y, z) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Então:

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

Teorema de Fubini Para Integrais Triplas

Seja f *contínua em uma caixa retangular*

$$B = \{(x, y, z) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Então:

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

Observação

- *A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a* x *(mantendo* y *e* z *fixados), em seguida integramos em relação a* y *(mantendo* z *fixado) e, finalmente, em relação a* z.

Teorema de Fubini Para Integrais Triplas

Seja f contínua em uma caixa retangular

$$B = \{(x,y,z) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Então:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Observação

- *A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z fixados), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixado) e, finalmente, em relação a z.*
- *Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado.*

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^3\, dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3\}.$$

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^3\,dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3\}.$$

Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obtemos

$$\begin{aligned}
\iiint_B xyz^3\,dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^3\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\,dz \\
&= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^3}{2}\,dy\,dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^3}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz \\
&= \int_0^3 \frac{3z^3}{4}\,dz = \left[\frac{3z^4}{16}\right|_{z=0}^{3} = \frac{243}{16}.
\end{aligned}$$

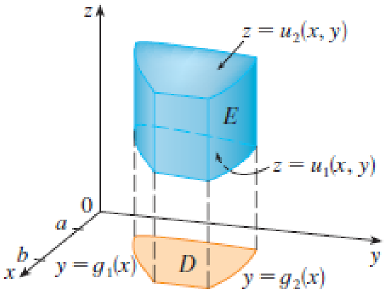
Integrais triplas sobre regiões gerais

Definiremos a integral triplas sobre uma região limitada geral B, no espaço tridimensioal (um sólido) de maneira semelhante a maneira que foi feita para integrais triplas em regiões no plano cartesiano.

Existem as regiões sólidas do tipo I, do tipo II e do tipo III.

Uma região sólida é do tipo I se estiver contida entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$, isto é,

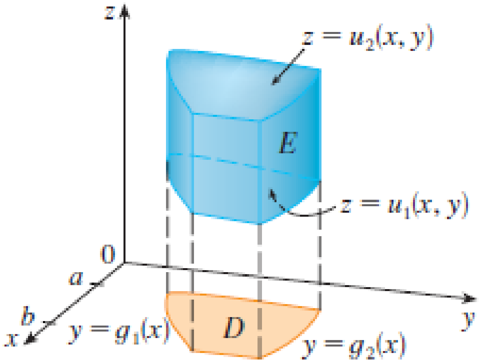
$$E = \{(x, y, z)|(x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



Nesse caso, $\iiint_B f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\right] dV.$

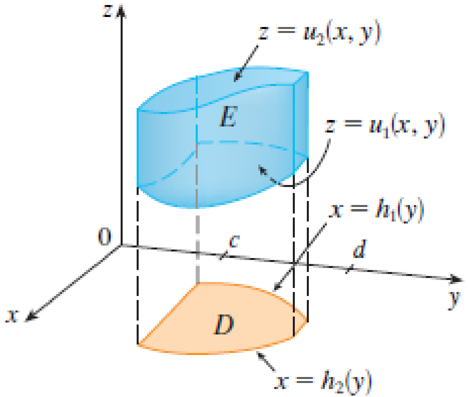
Se a projeção D for uma região do tipo I então

$$E = \{(x,y,z) | a \leq x \leq y, \;\; g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \;\; u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$



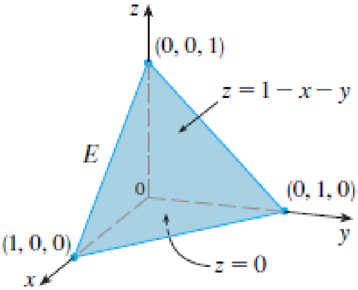
Se a projeção D for uma região do tipo II então

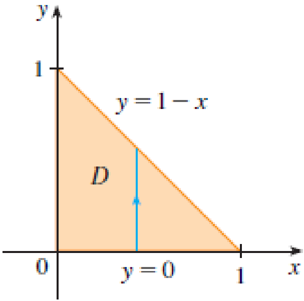
$$E = \{(x, y, z) | c \leq y \leq d, \;\; h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \;\; u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



Exemplos

Calcule $\iiint_B z dV$, onde E é o tetraedro sólido limitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.



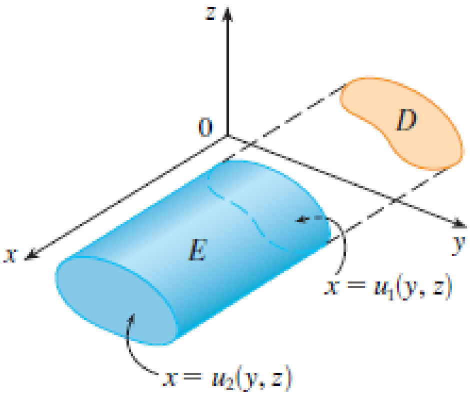


$$\iiint_E z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx$$

$$
\begin{aligned}
\iiint_E z\,dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

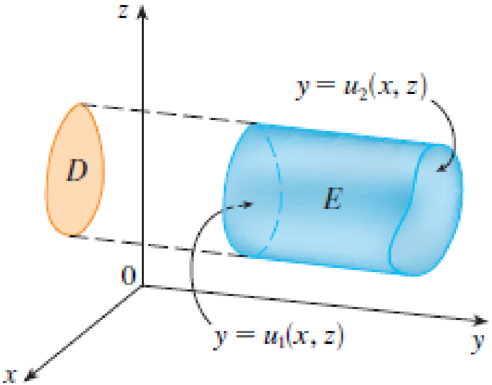
Uma região sólida é do tipo II se estiver contida entre as superfícies $z = u_1(y, z)$ e $z = u_2(y, z)$, isto é,

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq z \leq u_2(y, z)\}$$



Uma região sólida é do tipo III se estiver contida entre as superfícies $z = u_1(x, z)$ e $z = u_2(x, z)$, isto é,

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq z \leq u_2(x, z)\}$$



Exercício

Expresse a integral $\iiint_E f(x,y,z)dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado por $y = 4 - x^2 - 4z^2$ e $y = 0$