Tema nr. 7

Fie P un polinom de grad n cu coeficienţi reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_0 \neq 0\,, \ a_i \in \mathbb{R}$$

şi ϵ precizia calculelor.

Să se calculeze intervalul $[-R, R]$ în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului P. Să se implementeze metoda lui Laguerre de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom. Pentru calculul valorii unui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului P cu metoda Laguerre, pornind de la puncte de start, x_0, diferite. Rezultatele se vor afişa pe ecran şi se vor memora într-un fişier. În fişierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale v_1 şi v_2 sunt considerate diferite dacă $|v_1 - v_2| > \epsilon$).

Bonus 20 pt.: Adaptaţi metoda lui Laguerre pentru calculul tuturor rădăcinilor (reale şi complexe) ale polinomului P.

Metoda Laguerre de aproximare a rădăcinilor unui polinom

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ , \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

Se numeşte rădăcină a unui polinom, un număr real sau complex, $r \in \mathbb{R}$ sau $r \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Orice polinom cu coeficienţi reali are n rădăcini, reale sau complexe. Dacă $r = c + id$ este rădăcină complexă a polinomului P atunci şi $\bar{r} = c - id$ este rădăcină a polinomului P. Dacă $r \in \mathbb{R}$ este rădăcină reală a polinomului P atunci:

$$P(x) = (x - r)Q(x) \ , \ Q \text{ este polinom de grad } n - 1.$$

Dacă numerele complexe $a \pm ib$ sunt rădăcini ale polinomului P atunci:

$$P(x) = (x^2 - 2c\,x + c^2 + d^2)Q(x) \ , \ Q \text{ este polinom de grad } n - 2.$$

(polinomul de gradul al 2-lea $x^2 - 2c\,x + c^2 + d^2$ are rădăcinile $c \pm id$)

Toate rădăcinile reale ale polinomului P se află în intervalul $[-R,\, R]$ unde R este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|} \quad , \quad A = \max\{|a_i| \; ; \; i = \overline{1,n}\} \tag{2}$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală x^* (din intervalul [-R, R]) a polinomului P definit de (1), se construieşte un şir de numere reale, $\{x_k\}$, care converge la rădăcina $x^* \in [-R,\ R]$ căutată ($x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$) .

Pornind cu x_0 o valoare reală dată, şirul $\{x_k\}$ se construieşte astfel (x_{k+1} se calculează din x_k):

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{n\,P(x_k)}{P'(x_k) + \text{semn}(\,P'(x_k)\,)\,\sqrt{H(x_k)}}\ ,\ k = 0, 1, \ldots \\
x_{k+1} &= x_k - \Delta\ x_k\ \Big(\Delta\ x_k = \frac{n\,P(x_k)}{P'(x_k) + \text{semn}(\,P'(x_k)\,)\,\sqrt{H(x_k)}}\Big) \qquad (3) \\
H(x_k) &= (n-1)^2\,[P'(x_k)]^2 - n(n-1)P(x_k)P''(x_k)
\end{aligned}$$

Prin P' şi P'' am notat prima şi respectiv a doua derivată a polinomului P. Pentru $x \in \mathbb{R}$ funcţia semn(x) se defineşte astfel:

$$\text{semn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \geq 0 \\ -1 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Dacă $H(x_k) < 0$ atunci metoda Laguerre nu poate aproxima o rădăcină reală a polinomului P. Dacă se scrie programul considerând că elementele şirului sunt numere complexe, $x_k \in \mathbb{C}$, atunci metoda Laguerre poate să aproximeze şi rădăcini complexe. Se pot considera rădăcinile reale ca fiind un caz particular de rădăcină complexă.

Observaţie importantă: Alegerea iteraţiei iniţiale, x_0, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a iteraţiei iniţiale x_0 în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este nevoie de memorat întreg şirul $\{x_k\}$ ci doar 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare $x_{k_0} \approx x^*$ (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* cu metoda lui Laguerre este următoarea:

Metoda lui Laguerre

$x = (x_0) =$ ales aleator ; k=0 ;
(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este de preferat de ales iteraţia iniţială x_0 în vecinătatea soluţiei căutate)
do
{
calculează $\Delta\, x$ folosind formula (3) ;
if ($H(x) < 0$) EXIT;
(se poate încerca schimbarea iteraţiei iniţiale x_0)
if (numitorul din $\Delta\, x$ este în [-ϵ, ϵ]) EXIT;
(se poate încerca schimbarea iteraţiei iniţiale x_0)
$x = x - \Delta\, x$;
k=k+1;
}
while ($|\Delta\, x| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta\, x| \leq 10^8$)
if ($|\Delta\, x| < \epsilon$) $x_k \approx x^*$;
else *divergenţă* ; (de încercat schimbarea lui x_0)

Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \ , \ \ a_0 \neq 0 \quad (4)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \cdots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor, obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $v \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0 \ , \\ b_i & = & a_i + b_{i-1}v \ , \quad i = \overline{1,n} \end{array} \qquad (5)$$

Folosind şirul de mai sus, valoarea polinomului P în punctul v este:

$$P(v) = b_n$$

iar ceilalţi termeni b_i calculaţi, sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x - v)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \ , \\ r & = & b_n = P(v). \end{array} \qquad (6)$$

Pentru a calcula $P(v)$ (b_n) cu formulele (5) se poate folosi o singură valoare reală $b \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $b \in \mathbb{R}^n$.

Exemple

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \ , \\
& \quad a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 11.0\,, \quad a_3 = -6. \\
P(x) &= (x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{7})(x+1)(x-\frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6) \\
& \quad a_0 = 42.0\,, \quad a_1 = -55.0\,, \quad a_2 = -42.0\,, \quad a_3 = 49.0\,, \quad a_4 = -6.0. \\
P(x) &= (x-1)(x-\frac{1}{2})(x-3)(x-\frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3) \\
& \quad a_0 = 8.0\,, \quad a_1 = -38.0\,, \quad a_2 = 49.0\,, \quad a_3 = -22.0\,, \quad a_4 = 3.0. \\
P(x) &= (x-1)^2(x-2)^2 \\
&= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\
& \quad a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 13.0\,, \quad a_3 = -12.0\,, \quad a_4 = 4.0.
\end{aligned}$$

Calcul valorii polinomului P cu argumente complexe

Fie numărul compex $z = c + id$. Vrem să calculăm numărul complex:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = C + iD$$

Polinomul real de gradul 2 care are ca rădăcini numerele z şi $\bar{z} = c - id$ este:

$$T(x) = x^2 + px + q = (x - z)(x - \bar{z}) \quad \text{cu} \quad p = -2c \ , \ q = c^2 + d^2$$

Facem împărţirea cu rest a polinomului P la polinomul T:

$$\begin{aligned} P(x) &= T(x)Q(x) + R(x) \\ Q(x) &= b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-3} x + b_{n-2} \ , \\ R(x) &= r_0 x + r_1 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Coeficienţii reali $\{b_i\}$ şi $\{r_i\}$ ai polinoamelor Q şi R se pot calcula identificând coefiecienţii puterilor lui x din membrul stâng ai relaţiei (7) cu cei ai membrului drept. Se deduce următoarea formulă de recurenţă:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \quad , \quad b_1 = a_1 - p\, b_0 \\ b_i &= a_i - p\, b_{i-1} - q\, b_{i-2} \quad , \quad i = 2, \ldots n \\ r_0 &= b_{n-1} \quad , \quad r_1 = b_n + p\, b_{n-1}. \end{aligned}$$

Dacă folosim relaţia (7) pentru $x = z$, avem:

$$P(z) = T(z)\, Q(z) + R(z) = R(z) = r_0\, z + r_1 = (r_0\, c + r_1) + i\, r_0\, d.$$

Prin urmare, obţinem:

$$\begin{aligned} C &= r_0\, c + r_1 = b_{n-1}\, c + b_n + p\, b_{n-1} \\ D &= r_0\, d = b_{n-1}\, d. \end{aligned}$$