Tema nr. 1

1. Să se găsească cel mai mic număr pozitiv $u > 0$, de forma $u = 10^{-m}$ care satisface proprietatea:

$$1 +_c u \neq 1$$

unde prin $+_c$ am notat operația de adunare efectuată de calculator. Numărul u se numește ***precizia mașină***.

2. Operația $+_c$ este ***neasociativă***: fie numerele $x=1.0$, $y = u$, $z = u$, unde u este precizia mașină calculată anterior. Să se verifice că operația de adunare efectuată de calculator este neasociativă:

$$(x +_c y) +_c z \neq x +_c (y +_c z).$$

Să se găsească un exemplu pentru care operația de înmulțire $\times_c$ este neasociativă.

3. **Algoritmul lui Strassen de înmulțire a matricelor**[1][2]

Fie $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ două matrice reale pătratice de dimensiune n. Elementele matricei produs $C = A * B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se calculează folosind formula clasică:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Dacă se folosește relația de mai sus, calculul matricei produs C, necesită n^3 înmulțiri și $n^2(n-1)$ adunări de numere reale. Vom prezenta în continuare algoritmul lui Strassen de înmulțire a două matrice, care va face un număr de înmulțiri de ordinul $\mathcal{O}(n^{2.807})$ dar mai multe adunări decât în algoritmul clasic de înmulțire a matricelor. Vom considera doar cazul când dimensiunea matricei este o putere a lui 2, $n=2^q$.
Considerăm următoarea înmulțire a unor matrice bloc 2×2 ($n=2m$):

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Folosind algoritmul clasic avem $C_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j}$, $i, j = 1, 2$. Calculul matricei C se face folosind 8 înmulțiri și 4 adunări (pentru $m=1$ sunt operațiile obișnuite cu numere reale iar pentru $m > 1$, este vorba de operațiile de adunare și înmulțire matriciale). În 1969, Strassen a arătat că produsul matricial de mai sus se poate face cu doar 7 înmulțiri și 18 adunări în felul următor: se calculează 7 matrice auxiliare P_i, $i=1,\ldots,7$

[1] https://profs.info.uaic.ro/~ancai/CN/lab/1/strassen_1.pdf
[2] https://profs.info.uaic.ro/~ancai/CN/lab/1/strassen_2.pdf

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
P_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
P_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\
P_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
P_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
P_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
P_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})
\end{aligned}
$$

Folosind matricele de mai sus, se poate arăta că:

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= P_1 + P_4 - P_5 + P_7 \\
C_{12} &= P_3 + P_5 \\
C_{21} &= P_2 + P_4 \\
C_{22} &= P_1 + P_3 - P_2 + P_6
\end{aligned}
$$

Numărul total de operații care se fac dacă se folosește algoritmul clasic de înmulțire a matricelor este de $n^3=(2m)^3=8m^3$ înmulțiri și $n^3-n^2=(2m)^3-(2m)^2=8m^3-4m^2$ adunări. Dacă se aplică algoritmul lui Strassen, folosind la calculul matricelor P_i înmulțirea clasică, numărul de operații este: $7m^3$ înmulțiri și $7m^3+11m^2$ adunări. Dacă $m \gg 1$ metoda lui Strassen face aproximativ cu 1/8 mai puține operații decât algoritmul clasic.

Ideea algoritmului lui Strassen poate fi aplicată și la calculul matricelor P_i. Dacă dimensiunea matricelor A și B este $n=2^q$, algoritmul poate fi aplicat recursiv până se ajunge la blocuri de dimensiune 1. În practică, este indicat să se aplice recursiv algoritmul lui Strassen până când dimensiunea blocurilor A_{ij} , B_{ij} devine suficient de mică ($n \le n_{min}=2^d$).

Să se implementeze algoritmul lui Strassen de înmulțire a două matrice pătratice A și B de dimensiune $n=2^q$ până când $n \le n_{min}=2^d$:

C = multiply_Strassen (A, B, n, n_min)

sau

C = multiply_Strassen (A, B, q, d).

Bonus (10pt): Implementați algoritmul lui Strassen pentru matrice pătratice de dimensiune n oarecare.