1. Programmi kasutamine

Järgnevalt antakse juhised, kuidas antud rakendust kasutada. Kõik järgnevas peatükis kirjeldatu on kättesaadav ka rakenduse liidesest.

1.1. Ülesande valimine

Esmalt avada veebileht. Selleks sisestage rakenduse veebiaadress veebilehitseja aadressiribale.

Avaekraani moodustavad valik esimesi ülesandeid neljast ülesande liigist:

- determinandi leidmine;
- pöördmaatriksi leidmine;
- lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmine;
- astaku leidmine.

Valige sealt huvipakkuv ülesanne või vajutage „Rohkem ülesandeid”, et sirvida mingi ülesandetüübi kõiki ülesandeid. Seal on samuti ülesanded grupeeritud lehekülgede kaupa, kus „Rohkem ülesandeid” kerib lehekülje edasi ja „Eelmised ülesanded” kerib lehekülje tagasi.

Selleks, et teada saada, millisest allikast ülesanne pärineb, klõpsake kantsulgudes oleva viite peale, mis paikneb ülesande numbri järel. See viib kuva alla viidete loetelu juurde.

Ülesannete nummerdus ei sõltu ülesande tüübist, igal ülesandel on eraldi number. Jättes meelde ülesande numbri, saab kergesti selle ülesande uuesti üles leida, minnes sellisele aadressile:

<*rakenduse veebiaadress*>/lahenda.php?ülesanne=8

Näiteks ülaltoodud link viib kaheksanda ülesande juurde.

1.2. Ülesande lahendamine

Olenevalt valitud ülesande tüübist, näeb lahendamise tööriist välja erinev. Näiteks on vastavalt lineaaralgebra aksiomaatikale, lubatud elementaarteisendused kas ainult ridadega või nii veergude kui ka ridadega. (vt. peatükk „Lineaaralgebra”)

Vaikimisi on programm olekus, kus tehakse elementaarteisendusi 2 ja 3 (vt. peatükk „Lineaaralgebra”) ridadega.

- Selleks, et liita mingile muule reale mingi arvuga korrutatud rida,
    1. klõpsake esmalt reale, mis jääb sellest tehtest muutmatuks.
    1. Seejärel on programm olekus, kus tuleb valida sihtrida. Sellest annab märku oranž rea märgendamine (kui viia kursor rea peale).
    2. Seejärel tuleb viia kursor sihtrea peale ning siis ilmub sihtrea kõrvale tekstilahter, kuhu tuleb sisestada kordaja.

3. Kui kordaja on sisestatud, siis vajutage *enter* või vasak klõps. Tekstilahtri peale eraldi klõpsata pole vaja, kohe pärast tekstikasti ilmumist võib klaviatuuri numbriklahvidest sisestada kordaja.

- Kui soovite teha teisendusi veergudega ja antud ülesande tüübis on see lubatud, siis märkige ära sõna „Veerud". Juhised on analoogsed ridadega.
- Kui soovite lahutada, siis kasutada negatiivset arvu või kui soovite jagada, siis kasutage murdu notatsiooniga „*a/b*", kus *a* on lugeja ja *b* on nimetaja. Lubatud on ka segaarvud kujul „*a b/c*" ning kümnendmurrud kujul „*a.b*".
- Kui soovite korrutada rida mingi nullist erineva arvuga, siis vajutage ka teist korda sama rea peal. Kordaja sisestamine on analoogne ülaltooduga.

Selleks, et sooritada muid operatsioone, näiteks elementaateisendust 1 (veergude/ridade vahetamine), märkige ära sõna „Vahetus".

Eelmise tegevuse tagasivõtmiseks klõpsake sõnal „Tagasi".

Vastavalt ülesande tüübist, on kasutajaliideses erinevused:

Determinandi leidmise ülesandes:

- Selleks, et arendamise teel mitmeks liidetavaks lagunenud osaliidetavaid grupeerida või nulle ära kaotada, vajutage neile peale.
- Arendades mitu korda, ilmuvad viimati arendatud väiksemad determinandid arutelu lõppu.
- Kui korrutada rida mingi arvuga või kui vahetada ridu, siis küsitakse teilt determinandi esist kordajat. Analoog kehtib ka veergude korral.

Pöördmaatriksi leidmise ülesandes:

- Klõpsates „Pöördmaatriks" avaneb rippmenüü, milles saab otsustada, kas maatriks on pööratav või mitte.
- Vastuse esitamine kasutab notatsiooni A^{-1}. Kuigi seda pole märgitud kasutajaliideses, olgu A ülesande sisendmaatriks.

Lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmise ülesandes:

- Klõpsates „Üldlahend" avaneb rippmenüü, milles saab otsustada, kas lahendid puuduvad, kas lahendeid on üks või lahendeid on lõpmata palju.
- Valides „Lahendid puuduvad", annab programm tagasisidet, kas see väide antud ülesanne kohta kehtib või mitte.
- Valides „1 lahend", ilumvad ekraanile tekstikastid, millest igaüks on tähistatud vastava tundmatu nimega. Sisestage nendesse tundmatute arvulised väärtused ja klõpsake „Kontroll". Seejärel saate tagasisidet selle väite õigsuse kohta.

- Kui otsustasite, et lahendeid on lõpmata palju, siis valige õige arv vabasid tundmatuid ning avaldage tundmatud nende kaudu. Tekstikastide ja kontrolli kohta kehtib eelmises punktis kirjeldatuga analoogne kord. Lisandub ainult:
  - Lubatud on väikese c-ga tähistatud vabad tundmatud, millele järgneb vahetult ühest algav loendur, näiteks „c1”. Kui neid on ainult 1 märkige ikkagi „c1”.
  - Lubatud on kõik *math.js* funktsiooni *eval* grammatika, näiteks „c1+5+e+sin(30)”.

Astaku leidmise ülesandes valides „Astaku esitamine” näidatakse värviga hetke astmete arvu, kui liikuda hiirega maatriksi peale.

Vastuse kontrollimine toimub esmalt teie veebilehitseja poolt ning seejärel serveri poolt. Esimeses etapis püüab brauser arvutada iseseisvalt ülesande algmaatriksi vastust, erinevalt serverist, mis võrdleb teie saadud vastust andmebaasi väljaga.

Lineaarvõrrandisüsteemi ülesanne on erinev, kus teie brauser kontrollib teie poolt sisestatud lahendeid ning server neid ei kontrolli, sest lahendit ei saa üheselt määrata.

2. Lineaaralgebra

Käesolevas peatükis käsitletakse rakendusega seonduvaid matemaatilisi mõisteid ja nende formaalseid definitsioone. Seda matemaatika valdkonda kutsutakse lineaaralgebraks. Üheks lineaaralgebra alamharuks on ka maatriksite teooria. Alustuseks siis esimese kursuse algebra loengukonspektis antud maatriksi[1] definitsioon, mis on järgnev:

Olgu m ja n naturaalarvud. ($m \times n$)-maatriks on m reast ja n veerust koosnev tabel, mille iga rea ja iga veeru lõikekohal on mingi reaalarv ja mis on ümbritsetud ümarsulgudega. Neid reaalarve nimetatakse maatriksi elementideks. Kõigi ($m \times n$)-maatriksite hulka tähistatakse $\mathrm{Mat}_{m,n}$ või $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Töös vaadeldavad ülesandetüübid on seotud nelja mõistega: determinant, pöördmaatriks, lineaarvõrrandisüsteem, astak. Kõigil neljal juhul saab ülesande lahendamise taandada rea elementaarteisenduste rakendamisele. Loengukonspekt[1] annab elementaarteisendustele järgneva definitsiooni:

Elementaarteisendused maatriksi ridadega on järgmised teisendused:

1. maatriksi kahe rea äravahetamine;
2. maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga;
3. maatriksi mingile reale mingi arvuga korrutatud teise rea liitmine.

Analoogiliselt defineeritakse elementaarteisendused maatriksi veergudega.

2.1. Determinant

Loengukonspektis[1] antud determinandi definitsioon: Ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

determinandiks nimetatakse reaalarvu, mida tähistatakse

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ja mis defineeritakse kui summa

$$\boxed{|A| := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot}$$

n-ndat järku ruutmaatriksi determinanti nimetatakse n-ndat järku determinandiks. Korrutisi $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ nimetatakse determinandi $|A|$ liikmeteks.

Determinandi hõlpsamaks leidmiseks saab maatriksitel rakendada järgnevaid arvutusreegleid:

- Kui maatriksis vahetada ära kaks rida, siis determinant muudab märki. (elementaarteisendus 1)
- Kui maatriksi mingi rea kõik elemendid korrutada arvuga c, siis tema determinant korrutub ka arvuga c. (elementaarteisendus 2)
- Kui ruutmaatriksi mingile reale liita suvalise arvuga korrutatud teine rida, siis selle maatriksi determinant ei muutu (elementaarteisendus 3)
- Kui ruutmaatriks sisaldab nullidest koosnevat rida, siis tema determinant on 0.
- Kui ruutmaatriksis on kaks võrdset rida, siis tema determinant on 0.
- Determinandi saab avaldada ka summana väiksemate ruutmaatriksite determinantidest. Näiteks ruutmaatriksi

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  determinandi saab kirjutada n liikmest koosneva summana, millest igaüks sisaldab ruutmaatriksit kujul

  $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & \dots & b_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

  kus igas liidetavas on välja jäetud üks kindel rida, kuid erinev veerg. Iga liidetav on korrutatud ka väljajäänud rea ja väljajäänud veeru ristekohal oleva liikmega ja täisarvuga *-1*, mis on viidud väljajäänud rea ja veeru indeksi summast moodustatud astmele. Kirjeldatud protsessi nimetatakse determinandi arendamiseks rea järgi ja see põhineb *Laplace*'i teoreemil.

- Transponeerimisel (ridade ja veergude äravahetamisel) determinant ei muutu, seetõttu kehtib kõik, ülaltoodu, mis kehtib ridade kohta analoogselt ka veergude kohta.
- Ülemise kolmnurkmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

determinant on

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

2.2. Pöördmaatriks

Loengukonspektis[1] antud pöördmaatriksi definitsioon on järgmine:

Maatriksi $A \in Mat_n$ pöördmaatriksiks nimetatakse sellist maatriksit $B \in Mat_n$, mille korral

$$AB = BA = E.$$

Ühtlasi avaldub loengukonspekti[1] järgi ühest tõestusest, et maatriksi *A* pöördmaatriksi saamiseks tuleb ühikmaatriksi *E* ridadega teha täpselt samad teisendused (ja täpselt samas järjekorras), mis maatriksi *A* ridadegagi, et saada *A*-st ühikmaatriks. See annab meile järgmise praktilise meetodi *A* pöördmaatriksi leidmiseks. Koostame ($n \times 2n$)-indat järku maatriksi nii, et kirjutame *A* kõrvale paremale *n*-indat järku ühikmaatriksi:

$$(A|E).$$

Teeme selle maatriksi ridadega elementaarteisendusi eesmärgiga saada vasakule poole ühikmaatriks. Eelpoolöeldut arvestades jõuame lõpuks maatriksini

$$(E|A^{-1}),$$

mille põhjal saame välja kirjutada *A* pöördmaatriksi.

2.3. Lineaarvõrrandisüsteem

Loengukonspektis[1] antud lineaarvõrrandisüsteemi definitsioon on järgmine:

Lineaarvõrrandisüsteem üle korpuse K on võrrandisüsteem kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

kus $x_1, \ldots, x_n$ on tundmatud ja $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in K$. Elemente $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in K$ nimetatakse selle võrrandisusteemi kordajateks ja elemente $b_1, \ldots, b_m \in K$ nimetatakse vabaliikmeteks. Märgime, et nii võrrandite arv m, kui tundmatute arv n võivad olla suvalised naturaalarvud.

Maatriksite teooriaga seostuvad lineaarvõrrandisüsteemid selliselt, et defineeritakse lineaarvõrrandisüsteemi laiendatud maatriks, mis oleks järgmine:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Defineeritakse ka lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriks, mis on analoogne ülaltoodud maatriksiga, kus on ära jäetud vabaliikmete veerg $b_1, \ldots, b_m$.

Kui lineaarvõrrandisusteemi laiendatud maatriksi reavektorite süsteemiga teha elementaarteisendusi või jätta sellest välja nullvektorid, siis tulemuseks saadavale maatriksile vastav lineaarvõrrandisüsteem on ekvivalentne esialgsega.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksi astak ei ole võrdne laiendatud maatriksi astakuga, siis öeldakse, et lineaarvõrrandisüsteem on mittelahenduv.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksi astak on võrdne tundmatute arvuga (ülaltoodud näidetes n), siis on lineaarvõrrandisüsteemil täpselt üks lahend. See näeb välja järgmine:

$x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n$, kus $k_1, \ldots, k_n \in K$ on kindlad väärtused korpusest K.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksi astak on väiksem tundmatute arvust (ülaltoodud näidetes n), siis on lineaarvõrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid. Üldlahendis on välja kirjutatud iga tundmatu, näiteks ülaltoodud lineaarvõrrandisüsteemis oleks need $x_1, \ldots, x_n$ ja igaühele neist on antud väärtus, kusjuures r tükki nendest fikseeritakse vabadeks tundmatuteks $c_1, \ldots, c_r$, kus r on võrdne astmete arvuga (astakuga) lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksis. Ülejäänud tundmatud avaldatakse vabade kaudu, kasutades korpuse definitsioonis kirjeldatud tehteid (liitmine ja korrutamine) ja kindlaid korpuse elemente.

2.4. Astak

Loengukonspekti[1] definitsiooni põhjal on maatriksi astak on võrdne astmete arvuga selle maatriksi astmelises kujus.

Maatriksi astmeline kuju defineeritakse järgnevalt:

1. nullidest koosnevad read on nullist erinevaid elemente sisaldavatest ridadest allpool;
2. iga $i \geq 2$ korral i-nda rea esimene nullist erinev element (kui see leidub) on kaugemal (s.t. tema veeruindeks on suurem), kui $(i-1)$-se rea esimene nullist erinev element.

Niisiis maatriks on astmelisel kujul, kui tal on kuju

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1,j_2-1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1,j_3-1} & a_{1j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & a_{2,j_3-1} & a_{2j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rj_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

kus $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r \leq n$ ja elemendid a_{1j1} , a_{2j2} , . . . , a_{rjr} on nullist erinevad. Sellise kuju puhul ütleme, et astmelises kujus on r astet ja et astmekohad on $(1, j_1),(2, j_2), \dots ,(r, j_r)$.

Iga maatriksi saab ridade elementaarteisenduste abil viia astmelisele kujule.

3. Viited

1. Valdis Laan, Tartu Ülikool, kursuse Algebra I loengukonspekt, 2015 a. kevadsemester http://math.ut.ee/pmi/kursused/algebraI/kon2015.pdf, viimati vaadatud (22.04.2016)