

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
Matemaatika instituut  
Matemaatika eriala

Priit Lätt  
**Minkowski aegruumi geomeetriast**  
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor: .....”.....”juuni 2013  
Juhendaja: .....”.....”juuni 2013

TARTU 2013

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Vajalikud eelteadmised</b>	<b>3</b>
2.1	ptk . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Minkowski ruumi geomeetriline struktuur</b>	<b>4</b>
3.1	Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused . . . . .	4
3.2	Minkowski aegruumi mõiste . . . . .	6
3.3	Ortogonaalteisendus ruumis $\mathcal{M}$ . . . . .	8
3.4	Lorentzi rühm . . . . .	12
	<b>Lisad</b>	<b>17</b>
	<b>Lisa A Skalaarkorrutisega seotud abitulemused</b>	<b>17</b>
	<b>Lisa B Ortogonaalsed teisendused</b>	<b>19</b>

# 1 Sissejuhatus

Bakalaureusetöö on referatiivne ja selle aluseks on [Nab12].

Töös kasutame summade tähistamisel sageli Einstein'i summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid  $i$  ja  $j$ , mis omavad väärtusi  $1, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), siis kirjutame

$$x^i e_a = \sum_{a=1}^n x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n,$$

$$\lambda^i_j x^j = \sum_{j=1}^n \lambda^i_j x^j = \lambda^i_1 x^1 + \lambda^i_2 x^2 + \dots + \lambda^i_n x^n,$$

$$\eta_{ij} u^i v^j = \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \dots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \dots + \eta_{nn} u^n v^n,$$

ja nii edasi.

Vektori  $u$  pikkust tähistame edaspidi  $|u|$ .

## 2 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis toome välja definitsioonid ja tähtsamad tulemused, mida läheb tarvis töö järgmistes osades. Lihtsamad tulemused, millele on pööratud tähelepanu kursustes Algebra I või Geomeetria II, esitame seejuures tõestusteta.

### 2.1 ptk

## 3 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

### 3.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu  $\mathbb{V}$   $n$ -mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  on *bilineaarvorm*, kui  $g$  on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab  $g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \alpha_2 g(u_2, v)$  ja  $g(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 g(u, v_1) + \alpha_2 g(u, v_2)$  kus  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  on suvalised reaalarvud ning  $u, u_1, u_2, v, v_1$  ja  $v_2$  on vektorruumi  $\mathbb{V}$  elemendid.

Olgu  $u, v \in \mathbb{V}$ . Bilineaarvormi  $g$  nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui  $g(u, v) = g(v, u)$  ja *mittekidunuks*, kui tingumusest  $g(u, v) = 0$  iga  $v \in \mathbb{V}$  korral järeljub  $u = 0$ .

**Definitsioon 3.1.** Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  nimetatakse *skalaarkorrutiseks*. Vektorite  $u$  ja  $v$  skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul  $u \cdot v$ .

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$  kõikide  $u, v \in \mathbb{V}$  korral, sest  $g$  bilineaarsuse tõttu  $0 \cdot v = (0 * 0) \cdot v = 0 * (0 \cdot v) = 0$ ,
- kui  $u_1, u_2, \dots, u_n, u, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ , siis  $(\sum_{i=1}^n u_i) \cdot v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v)$  ja  $u \cdot (\sum_{i=1}^n v_i) = \sum_{i=1}^n (u \cdot v_i)$ ,
- kui  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  on vektorruumi  $\mathbb{V}$  baas ning kui tähistame  $\eta_{ij} = e_i \cdot e_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , siis  $u \cdot v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u^i v^j = \eta_{ij} u^i v^j$ , kus  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$ .

**Näide 3.1.** Vaatleme ruumi  $\mathbb{R}^n$ . Olgu  $u = (u^1, u^2, \dots, u^n), v = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ . Lihtne on veenduda, et kujutus  $g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^n v^n$  on skalaarkorrutis.

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga  $v \neq 0$  korral  $g(v, v) > 0$ . Kui  $g(v, v) < 0$  kõikide  $v \neq 0$  korral, siis ütleme, et  $g$  on *negatiivselt määratud* ja kui  $g$  pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et  $g$  on *määramata*.

**Definitsioon 3.2.** Kui  $g$  on skalaarkorrutis vektorruumil  $\mathbb{V}$ , siis nimetame vektoreid  $u$  ja  $v$   *$g$ -ortogonaalseteks* (või lihtsalt *ortogonaalseteks*, kui  $g$  roll on kontekstist selge), kui  $g(u, v) = 0$ . Kui  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  on alamruum, siis ruumi  $\mathbb{W}$  ortogonaalne täiend  $\mathbb{W}^\perp$  on hulk  $\mathbb{W}^\perp = \{u \in \mathbb{V} : \forall v \in \mathbb{W} \text{ korral } g(u, v) = 0\}$ .

**Definitsioon 3.3.** Skalaarkorrutise  $g$  poolt määratud *ruutvormiks* nimetame kujutust  $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , kus  $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v$ ,  $v \in \mathbb{V}$ .

**Lause 3.1.** Olgu  $g_1$  ja  $g_2$  kaks skalaarkorrutist vektorruumil  $\mathbb{V}$ , mis rahuldavad tingimust  $g_1(u, u) = g_2(u, u)$  iga  $u \in \mathbb{V}$  korral. Siis kehtib  $g_1(u, v) = g_2(u, v)$  kõikide  $u, v \in \mathbb{V}$  korral, ehk teisi sõnu,  $g_1 \equiv g_2$ .

*Tõestus.* Olgu  $\mathbb{V}$  vektorruum ning olgu  $u, v \in \mathbb{V}$  ja kehtigu võrdus  $g_1(u, u) = g_2(u, u)$  iga  $u$  korral. Defineerime uue kujutuse

$$g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, g(u, v) \mapsto g_1(u, v) - g_2(u, v).$$

Paneme esiteks tähele, et selliselt defineeritud  $g$  on sümmeetriline ja bilineaarne. Tõepoolest, olgu  $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$ . Siis

$$\begin{aligned} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= g_1(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - g_2(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \\ &= \alpha g_1(u_1, v) + \beta g_1(u_2, v) - \alpha g_2(u_1, v) - \beta g_2(u_2, v) = \\ &= \alpha (g_1(u_1, v) - g_2(u_1, v)) + \beta (g_1(u_2, v) - g_2(u_2, v)) = \\ &= \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) \text{ ja analoogiliselt} \\ g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2). \end{aligned}$$

Kujutuse  $g$  sümmeetrilisus on  $g_1$  ja  $g_2$  sümmeetrilisust arvestades ilmne. Tõestuse lõpetamiseks piisab nüüd näidata, et  $g = 0$ . Ühelt poolt paneme tähele, et

$$g(u + v, u + v) = g_1(u + v, u + v) - g_2(u + v, u + v) = 0.$$

Teisalt,

$$\begin{aligned} g(u + v, u + v) &= g(u, u + v) + g(v, u + v) = \\ &= g(u, u) + g(u, v) + g(v, u) + g(v, v) = \\ &= g(u, u) + 2g(u, v) + g(v, v) = 2g(u, v). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime  $2g(u, v) = 0$  ehk  $g(u, v) = 0$ , mida oligi tarvis.  $\square$

**Teoreem 3.1.** Olgu  $\mathbb{V}$  reaalne  $n$ -mõõtmeline vektorruum ning olgu  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  skalaarkorrutis. Vektorruumil  $\mathbb{V}$  leidub baas  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  nii, et  $g(e_i, e_j) = 0$  kui  $i \neq j$  ja  $Q(e_i) = \pm 1$  iga  $i = 1, 2, \dots, n$  korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral  $Q(e_i) = -1$  on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.

*Tõestus.* Arvestades Gram<sup>1</sup>-Schmidt<sup>2</sup> algoritmi ortonormeeritud baasi leidmiseks, muutub teoreemi tõestus ilmseks<sup>3</sup>.  $\square$

<sup>1</sup>Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) - taani matemaatik

<sup>2</sup>Erhard Schmidt (1876 – 1959) - Tartus sündinud saksa matemaatik

<sup>3</sup>Vaata lisa A Skalaarkorrutisega seotud abitulemused, Märkus A.1

**Definitsioon 3.4.** Vektorruumi  $\mathbb{V}$  baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.

Skalaarkorrutise  $g$  suhtses ortonormaalse baasi  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  vektorite arvu  $r$ , mille korral  $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , nimetame skalaarkorrutise  $g$  *indeksiks*. Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid  $e_i$ , mille korral  $Q(e_i) = -1$ , paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

korral  $Q(e_i) = 1$ , kui  $i = 1, 2, \dots, n-r$ , ja  $Q(e_i) = -1$ , kui  $i = n-r+1, \dots, n$ . Tähistades  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$  saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise  $g$  arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \dots - u^n v^n.$$

**Märkus 3.1.** Vektorruumi  $\mathbb{V}$  skalaarkorrutisega  $g$ , mille indeks  $r > 0$  nimetatakse *pseudoeukleidiliseks ruumiks*.

## 3.2 Minkowski aegruumi mõiste

**Definitsioon 3.5.** *Minkowski aegruumiks* nimetatakse 4-mõõtmelist reaalsel vektorruumi  $\mathcal{M}$ , millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm  $g$  indeksiga 1.

Ruumi  $\mathcal{M}$  elemente nimetatakse *sündmusteks* ja kujutust  $g$  nimetatakse *Lorentzi skalaarkorrutiseks* ruumil  $\mathcal{M}$ .

**Märkus 3.2.** Edasises ütleme Minkowski ruumi kontekstis Lorentzi skalaarkorrutise  $g$  kohta lihtsalt skalaarkorrutis.

Ilmselt on Minkowski ruum pseudoeukleidiline ruum. Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil  $\mathcal{M}$  leidub baas  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  järgmise omadusega. Tähistades  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$ , siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  või lühidalt  $\{e_a\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormeeritud baas. Kui  $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$ , siis tähistame sündmuse  $x$  koordinaadid baasi  $\{b_a\}$  suhtes  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  ja seejuures ütleme, et  $(x^1, x^2, x^3)$  on *ruumikoordinaadid* ning  $(x^4)$  on *ajakoordinaat*.

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis  $g$  ei ole ruumil  $\mathcal{M}$  positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid  $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  nii, et  $g(u, u) = 0$ . Selliseid vektoreid nimetatakse *nullvektoriteks*. Osutub, et ruumis  $\mathcal{M}$  leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullvektoritest.

**Näide 3.2.** Üheks ruumi  $\mathcal{M}$  baasiks, mis koosneb vaid nullvektoritest on näiteks  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ , kus  $e_1^0 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $e_2^0 = (0, 1, 0, 1)$ ,  $e_3^0 = (0, 0, 1, 1)$  ja  $e_4^0 = (-1, 0, 0, 1)$ . Tõepoolest, süsteemi  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$  lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja  $e_1^0, \dots, e_4^0$  on nullvektorid, sest

$$\begin{aligned} Q(e_1^0) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_2^0) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_3^0) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q(e_4^0) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

**Teoreem 3.2.** Olgu  $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  nullvektorid. Vektorid  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub  $t \in \mathbb{R}$  nii, et  $u = tv$ .

*Tõestus. Piisavus.* Olgu  $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  paralleelsed nullvektorid. Siis leidub  $t \in \mathbb{R}$  nii, et  $u = tv$ . Seega

$$g(u, v) = g(tv, v) = tg(v, v) = 0$$

ehk vektorid  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed, nagu tarvis.

*Tarvilikkus.* Olgu  $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  ortogonaalsed nullvektorid, st  $g(u, v) = 0$ . Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuse<sup>4</sup>  $g^2(u, v) \leq g(u, u)g(v, v)$  põhjal  $0 \leq g(u, u)g(v, v)$ , sest  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed. Teisalt, et  $u$  ja  $v$  on nullvektorid, siis  $g(u, u)g(v, v) = 0$  ja järelikult kehtib Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuses võrdus  $0 = 0$ , mis tähendab, et  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad.  $\square$

Võtame nüüd vaatluse alla kaks sellist sündmust  $x, x_0 \in \mathcal{M}$ ,  $x \neq x_0$ , mida ühendav vektor on nullvektor, see tähendab  $Q(x - x_0) = 0$ . Seda asjaolu arvesse võttes saame, et kui  $\{e_a\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormaalne baas ja me tähistame  $x = x^a e_a$ ,  $x_0 = x_0^a e_a$ , siis kehtib võrdus

$$Q(x - x_0) = (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0. \quad (3.1)$$

---

<sup>4</sup>Vaata Lisa 1, Teoreem 4.2



Kõigi selliste  $x \in \mathcal{M}$  hulka, mille korral on tingimus 3.1 täidetud nimetatakse *nullkoonuseks*<sup>5</sup> punktis  $x_0$  ja tähistatakse  $\mathcal{C}_N(x_0)$ . Seega

$$\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}.$$

Piltlikult võime öelda, et hulga  $\mathcal{C}_N(x_0)$  elemendid on ühendatavad sündmusega  $x_0$  *valguskiire*  $R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$  abil.

### 3.3 Ortogonaalteisendus ruumis $\mathcal{M}$

Olgu  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ja  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  kaks ortonormaalset baasi. Leidub parajasti üks selline lineaarne kujutus  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , et  $L(e_a) = \hat{e}_a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ . Järgnevaga uurime kujutuse  $L$  omadusi veidi lähemalt.

**Märkus 3.3.** Kas ei peaks näitama, miks leidub parajasti üks?

**Definitsioon 3.6.** Ruumi  $\mathcal{M}$  lineaarset kujutust  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  nimetatakse *pseudoortogonaalteisenduseks*, kui ta säilitab skalaarkorrutise  $g$ , see tähendab iga  $x$  ja  $y$  korral ruumist  $\mathcal{M}$  kehtib võrdus  $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ .

**Lause 3.2.** Olgu  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  lineaarne kujutus. Siis on järgmised väited samaväärsed:

- (i)  $L$  on pseudoortogonaalteisendus;
- (ii)  $L$  säilitab ruumi  $\mathcal{M}$  ruutvormi, see tähendab  $Q(Lx) = Q(x)$  iga  $x \in \mathcal{M}$  korral;
- (iii)  $L$  kujutab suvalise ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormaalse baasi ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormaalseks baasiks.

*Tõestus.* (i)  $\implies$  (ii). Olgu  $L$  pseudoortogonaalne teisendus. Siis definitsiooni põhjal  $g(Lx, Ly) = g(x, y)$  iga  $x, y \in \mathcal{M}$  korral. Seega kehtib ka  $Q(Lx) = g(Lx, Lx) = g(x, x) = Q(x)$  kõikide  $x \in \mathcal{M}$  korral ehk  $L$  säilitab ruutvormi.

(ii)  $\implies$  (i) on täpselt lause 3.1.

(ii)  $\implies$  (iii). Kehtigu (ii) (ja seega ka (i)) ning olgu  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ortogonaalne baas ruumis  $\mathcal{M}$ . Siis ka  $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$  on ortonormaalne baas ruumis  $\mathcal{M}$ , sest

$$g(Le_i, Le_j) = g(e_i, e_j) = \begin{cases} -1, & \text{kui } i = j = 4, \\ 1, & \text{kui } i = j, i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

---

<sup>5</sup>Füüsikas öeldakse sageli *nullkoonuse* asemel *valguse koonus*.

ja arvestades kujutuse  $L$  lineaarsust, on ka süsteem  $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$  lineaarselt sõltumatu.

(iii)  $\implies$  (ii). Olgu  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormeeritud baas ja kehtigu tingimus (iii). Veendume, et alati  $Q(Lx) = Q(x)$ , kus  $x \in \mathcal{M}$  on suvaline. Fikseerime  $x \in \mathcal{M}$  ning esitugu ta koordinaatides kujul  $x = x^i e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$Q(x) = Q(x^i e_i) = x^i Q(e_i) = x^i Q(Le_i) = Q(x^i Le_i) = Q(L(x^i e_i)) = Q(Lx).$$

□

Ruumi kokkuhoiu mõttes toome sisse  $4 \times 4$  maatriksi  $\eta$ , mille me defineerime kui

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ja mille elemente tähistame vastavalt vajadusele kas  $\eta_{ab}$  või  $\eta^{ab}$ ,  $a, b = 1, 2, 3, 4$ . Sellise tähistuse korral  $\eta_{ab} = 1$ , kui  $a = b = 1, 2, 3$  ja  $\eta_{ab} = -1$ , kui  $a = b = 4$  ning  $\eta_{ab} = 0$  muudel juhtudel. Vahetult on kontrollitav, et  $\eta = \eta^T$  ja  $\eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = E$ , kus  $E$  on ühikmaatriks.

Arvestades sissetoodud tähistusi saame nüüd kirjutada  $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$ , kus  $\{e_a\}$  on ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormeeritud baas. Enamgi veel, avaldades vektorid  $u, v \in \mathcal{M}$  baasivektorite kaudu  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$ , saame summeerimiskokkulepet kasutades kirjutada  $g(u, v) = \eta_{ab} u^a v^b$ .

Olgu  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ruumi  $\mathcal{M}$  pseudoortogonaalteisendus ja  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  selle ruumi ortonormeeritud baas. Lause 3.2 põhjal on siis ka  $\hat{e}_1 = Le_1, \hat{e}_2 = Le_2, \hat{e}_3 = Le_3, \hat{e}_4 = Le_4$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormeeritud baas, kusjuures iga  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  saab esitada vektorite  $\hat{e}_j$  lineaarkombinatsioonina kujul

$$e_i = \Lambda^1_i \hat{e}_1 + \Lambda^2_i \hat{e}_2 + \Lambda^3_i \hat{e}_3 + \Lambda^4_i \hat{e}_4 = \Lambda^j_i \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.2)$$

kus arvud  $\Lambda^j_i$  on mingid reaalarvulised konstandid. Arvestades valemit 3.2 võime nüüd ortogonaalsuse tingimuse  $g(e_c, e_d) = \eta_{cd}$ ,  $c, d = 1, 2, 3, 4$ , kirjutada kujul

$$\Lambda^1_c \Lambda^1_d + \Lambda^2_c \Lambda^2_d + \Lambda^3_c \Lambda^3_d - \Lambda^4_c \Lambda^4_d = \eta_{cd}$$

või kasutades summeerimiskokkulepet, siis lühidalt

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \quad (3.3)$$

Seose 3.3 saame maatrikskujul kirjutada kui

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (3.4)$$

Korrutades võrduse 3.4 mõlemaid pooli maatriksiga  $\Lambda^{-1}$  saame  $\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1}$ . Korrutades nüüd saadud tulemust veel paremalt maatriksiga  $\eta^{-1}$  on tulemuseks  $\Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}$ . Viimast arvesse võttes võime kirjutada  $\Lambda \eta \Lambda^T = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^T = \Lambda \eta^{-1} (\eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}) = \Lambda \Lambda^{-1} \eta^{-1} = \eta^{-1} = \eta$  ehk

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta. \quad (3.5)$$

Seos 3.5 on koordinaatides välja kirjutatuna täpselt

$$\Lambda^a{}_c \eta^{cd} \Lambda^b{}_d = \eta^{ab}. \quad (3.6)$$

**Definitsioon 3.7.** Maatriksit  $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$  nimetame *pseudoortogonaalteisendusega  $L$  ja baasiga  $\{e_a\}$  assotsieeruvaks* maatriksiks.

Definitsioonile eelnevas arutelus tõestasime maatriksi  $\Lambda$  kohta järgmise lemma.

**Lemma 3.1.** *Pseudoortogonaalteisendusega  $L$  ja baasiga  $\{e_a\}$  assotsieeruva maatriksi  $\Lambda$  korral on tingimused 3.3, 3.4, 3.5 ja 3.6 samaväärsed.*

Kuna ortogonaalteisenduse maatriks mistahes ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, ja vastupidi, kui ortogonaalteisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, siis sellest järeldub kergesti järgmine lause.

**Lause 3.3.** [Kil05, lk 271] *Kui  $\Lambda$  on pseudoortogonaalteisendusega  $L$  ja baasiga  $\{e_a\}$  assotsieeruv maatriks, siis  $\Lambda$  on ka pseudoortogonaalteisenduse  $L^{-1}$  ja baasiga  $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$  assotsieeruv maatriks.*

Me vaatleme ortogonaalteisendusega  $L$  ja baasiga  $\{e_a\}$  seotud maatriksit  $\Lambda$  kui koordinaatide teisenemise maatriksit tavalisel viisil. Seega, kui  $x \in \mathcal{M}$  on esitub koordinaatides baasi  $\{e_i\}$  suhtes kujul  $x = x^i e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , siis tema koordinaadid baasi  $\{\hat{e}_i\} = \{Le_i\}$  suhtes avalduvad kujul  $x = \hat{x}^i \hat{e}_i$ , kus

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3 + \Lambda^1{}_4 x^4, \\ \hat{x}^2 &= \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3 + \Lambda^2{}_4 x^4, \\ \hat{x}^3 &= \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3 + \Lambda^3{}_4 x^4, \\ \hat{x}^4 &= \Lambda^4{}_1 x^1 + \Lambda^4{}_2 x^2 + \Lambda^4{}_3 x^3 + \Lambda^4{}_4 x^4, \end{aligned}$$

mille võime lühidalt kirja panna kui

$$\hat{x}^i = \Lambda^i{}_j x^j, \text{ kus } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

**Definitsioon 3.8.**  $4 \times 4$  maatriksit  $\Lambda$ , mis rahuldab tingimust 3.4 (ja lemma 3.1 põhjal siis ka tingimusi 3.3, 3.5 ja 3.6) nimetatakse *regulaarseks* *homogeenseks Lorentzi teisenduseks*.

Kuna ruumi  $\mathcal{M}$  ortogonaalsteisendus  $L$  on isomorfism<sup>6</sup> ja seega pööratav, siis temaga assotsieeruv maatriks  $\Lambda$  on samuti pööratav, kusjuures

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta. \quad (3.7)$$

Tõepoolest, arvestades tingimust 3.4 ja asjaolu, et  $\eta = \eta^{-1}$ , siis saame

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \iff \eta \Lambda^{-1} = \Lambda^T \eta \iff \eta^{-1} \eta \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \iff \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta.$$

**Teoreem 3.3.** *Kõigi regulaarsete homogeensete Lorentzi teisenduste hulk on rühm maatriksite korrutamise suhtes. Seda rühma nimetatakse regulaarseks homogeenseks Lorentzi rühmaks ja tähistatakse  $\mathcal{L}_{GH}$ .*

*Tõestus.* Veendumaks, et kõigi regulaarsete homogeensete Lorentzi teisenduste hulk  $\mathcal{L}_{GH}$  on rühm peame näitama, et  $\mathcal{L}_{GH}$  on kinnine korrutamise ja pöördlemendi võtmise suhtes.

Olgu  $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$ . Veendume esiteks, et korrutis  $\Lambda_1 \Lambda_2$  kuulub hulka  $\mathcal{L}_{GH}$ . Selleks piisab näidata, et  $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \eta$ .

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = (\Lambda_2^T \Lambda_1^T) \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T \eta \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta,$$

ja seega  $\Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$  nagu tarvis.

Jääb veel näidata, et ka  $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$ . Seose 3.7 ja võrduste  $\eta = \eta^T$ ,  $\eta \eta = E$  põhjal saame kirjutada

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} &= (\eta \Lambda^T \eta)^T \eta (\eta \Lambda^T \eta) = \left( \eta^T (\Lambda^T)^T \eta^T \right) \eta \eta \Lambda^T \eta = \\ &= \eta \Lambda \eta \Lambda^T \eta = \eta \eta \eta = \eta. \end{aligned}$$

Viimane aga tähendabki, et  $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$ . □

Arvestades võrdust 3.7 võime välja arvutada maatriksi  $\Lambda^{-1}$  ja esitada ta maatriksi  $\Lambda$  elementide kaudu:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 & -\Lambda^4_1 \\ \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 & -\Lambda^4_2 \\ \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 & -\Lambda^4_3 \\ -\Lambda^1_4 & -\Lambda^2_4 & -\Lambda^3_4 & \Lambda^4_4 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>6</sup>Vaata lisa ?? ??, Lause ??

### 3.4 Lorentzi rühm

**Definitsioon 3.9.** Me ütleme, et  $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$  on *ortokrooniline*, kui  $\Lambda^4_4 \geq 1$  ja *mitteortokrooniliseks*, kui  $\Lambda^4_4 \leq -1$ .

Edasise teooriaarenduse seisukohalt on otstarbekas tõestada järgmine teoreem.

**Teoreem 3.4.** [Nab12, teoreem 1.3.1] *Olgu  $u, v \in \mathcal{M}$ , kusjuures  $u$  on ajalaadne ja  $v$  ajalaadne või nullvektor ning olgu  $\{e_a\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormaalne baas, mille suhtes  $u$  ja  $v$  avalduvad kujul  $u = u^a e_a$  ja  $v = v^a e_a$ . Siis kehtib parajasti üks järgmistest tingimusest:*

- (a)  $u^4 v^4 > 0$ , mis tähendab, et  $g(u, v) < 0$ ,
- (b)  $u^4 v^4 < 0$ , mis tähendab, et  $g(u, v) > 0$ .

*Tõestus.* Oletame, et teoreemi eeldused on täidetud. Siis

$$\begin{aligned} g(u, u) &= (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^4)^2 < 0 \text{ ja} \\ g(v, v) &= (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Niisiis

$$\begin{aligned} (u^4 v^4)^2 &> \left( (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 \right) \left( (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \right) \stackrel{(*)}{\geq} \\ &\geq \left( (u^1)^2 (v^1)^2 + (u^2)^2 (v^2)^2 + (u^3)^2 (v^3)^2 \right), \end{aligned}$$

kus võrratus  $(*)$  tuleneb Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratusest ruumi  $\mathbb{R}^3$  jaoks. Nüüd aga  $|u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3|$ , millest saame, et  $u^4 v^4 \neq 0$  ja  $g(u, v) \neq 0$ . Oletame konkreetseuse mõttes, et  $u^4 v^4 > 0$ . Siis

$$u^4 v^4 = |u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3| \geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3,$$

millest

$$u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4 < 0$$

ehk  $g(u, v) < 0$ . Kui aga  $u^4 v^4 > 0$ , siis  $g(u, -v) < 0$  ja seega  $g(u, v) > 0$ .  $\square$

**Järeldus 3.1.** *Kui  $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  on ortogonaalne ajalaadse vektoriga  $v \in \mathcal{M}$ , siis  $u$  on ruumilaadne.*

*Tõestus.* Olgu  $v \in \mathcal{M}$  ajalaadne ja olgu  $u \in \mathcal{M}$  nullist erinev ning ortogonaalne vektoriga  $v$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $u$  on ajalaadne. Siis eelmise teoreemi põhjal kehtib kas  $g(u, v) > 0$  või  $g(u, v) < 0$ . Et  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed, siis  $g(u, v) = 0$ , mis on vastuolus eelnevaga. Järelikult on  $u$  ruumilaadne.  $\square$

Tähistame ruumi  $\mathcal{M}$  kõigi ajalaadsete vektorite hulga tähega  $\tau$  ja defineerime hulgas  $\tau$  seose  $\sim$  järgnevalt. Kui  $u, v \in \tau$ , siis  $u \sim v$  parajasti siis, kui  $g(u, v) < 0$ . Sedasi defineeritud seos  $\sim$  on ekvivalents:

- (a) **refleksiivsus** järeldub vahetult ajalaadse vektori definitsioonist;
- (b) seose  $\sim$  **sümmeetrilisus** tuleneb skalaarkorrutise sümmeetrilisusest;
- (c) **refleksiivsuseks** märgime, et kui  $g(u, v) < 0$  ja  $g(v, w) < 0$ , siis teoreemi 3.4 põhjal  $u^4 v^4 > 0$  ja  $v^4 w^4 > 0$  ehk  $u^4$  ja  $v^4$  ning  $v^4$  ja  $w^4$  on sama märgiga ja seega  $\text{sign } u^4 = \text{sign } w^4$ , millest saame  $u^4 w^4 > 0$ . Rakendades nüüd veelkord teoreemi 3.4, siis saame, et  $g(u, w) < 0$ .

Paneme tähele, et seos  $\sim$  jagab hulga  $\tau$  täpselt kaheks ekvivalentsiklassiks. Tõepoolest, kui  $u, v \in \mathcal{M}$  on ajalaadsed, siis on meil teoreemi 3.4 põhjal kaks varianti. Peab kehtima kas

$$g(u, v) < 0 \text{ või} \quad (1)$$

$$g(u, v) > 0. \quad (2)$$

Kui kehtib võrratus (1), siis on  $u \sim v$  ja korras. Vastupidi, kui  $u$  ja  $v$  jaoks kehtib (2), siis  $u \not\sim v$  ja piisab näidata, et kui  $w \in \tau$  korral  $g(u, w) > 0$ , siis  $v \sim w$ . Võrratuse (2) kehtivuseks peavad  $u, v$  ja  $w$  teoreemi 3.4 põhjal rahuldama võrratusi  $u^4 v^4 < 0$  ja  $u^4 w^4 < 0$ , mis tähendab, et arvud  $u^4, v^4$  ja  $u^4, w^4$  on erinevate märkidega. Seega  $v^4$  ja  $w^4$  on samade märkidega ja järelikult  $g(v, w) < 0$  ehk  $v \sim w$ .

Neid kahte ekvivalentsiklassi tähistame edasises  $\tau^+$  ja  $\tau^-$ .

**Teoreem 3.5.** [Nab12, teoreem 1.3.3] *Olgu  $\Lambda = [\Lambda^a_b]_{a,b=1,2,3,4}$  regulaarne homogeenne Lorentzi teisendus, see tähendab  $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$  ja olgu  $\{e_a\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortogonaalne baas. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

- (i)  $\Lambda$  on ortokrooniline;
- (ii)  $\Lambda$  säilitab kõikide nullvektorite ajakoordinaadi märgi, see tähendab, kui  $u = u^a e_a$  on nullvektor, siis arvud  $u^4$  ja  $\hat{u}^4 = \Lambda^4_b u^b$  on sama märgiga;
- (iii)  $\Lambda$  säilitab kõikide ajalaadsete vektorite ajakoordinaadi märgi.

SEE TÕESTUS TULEKS ÜLE VAADATA!

*Tõestus.* Olgu  $u = u^a e_a \in \mathcal{M}$  ajalaadne vektor või nullvektor. Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratusest ruumis  $\mathbb{R}^3$  saame

$$(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^3 (\Lambda^4_i)^2 \right) \left( \sum_{i=1}^3 (v^i)^2 \right). \quad (3.8)$$

Sooritades nüüd võrduses 3.6 asenduse  $a = b = 4$  saame

$$\begin{aligned} (\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2 - (\Lambda^4_4)^2 &= -1, \text{ millest järeldub} \\ (\Lambda^4_4)^2 &> (\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Et  $v \neq 0$ , siis tingimustest 3.8 ja 3.9 saame  $(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3)^2 < (\Lambda^4_4 v^4)^2$ , mille võime ruutude vahe valemit kasutades kirjutada kujul

$$(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3 - \Lambda^4_4 v^4) (\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3 + \Lambda^4_4 v^4) < 0. \quad (3.10)$$

Defineerides  $v \in \mathcal{M}$  võrdusega  $v = \Lambda^4_1 e^1 + \Lambda^4_2 e^2 + \Lambda^4_3 e^3 - \Lambda^4_4 e^4$  on  $v$  ajalaadne vektor, kusjuures seose 3.10 saame esitada kujul

$$g(u, v) \hat{u}^4 < 0. \quad (3.11)$$

Viimane võrratus ütleb meile, et arvudel  $g(u, v)$  ja  $\hat{u}^4$  on erinevad märgid. Näitame viimaks, et  $\Lambda^4_4 \geq 1$  siis ja ainult siis, kui arvudel  $u^4$  ja  $\hat{u}^4$  on samad märgid. Selleks oletame esmalt, et  $\Lambda^4_4 \geq 1$ . Kui  $u^4 > 0$ , siis teoreemi 3.4 järgi  $g(u, v) < 0$  ja seega 3.11 põhjal  $\hat{u}^4 > 0$ . Kui  $u^4 < 0$ , siis  $g(u, v) > 0$ , ja seega  $\hat{u}^4 < 0$ . Kokkuvõttes järeldub võrratusest  $\Lambda^4_4 \geq 1$ , et  $u^4$  ja  $\hat{u}^4$  on samamärgilised. Analoogiliselt saab näidata, et kui  $\Lambda^4_4 \leq -1$ , siis  $u^4$  ja  $\hat{u}^4$  on erimärgilised.  $\square$

Teoreemi tõestusest saame teha järgmise olulise järelduse.

**Järeldus 3.2.** *Kui  $\Lambda$  on mitteortokrooniline, siis ta muudab kõikide ajalaadsete vektorite ja nullvektorite ajakoordinaadi märgi.*

Järelduse tulemust arvestades on mõistlik edasises uurida vaid hulga  $\mathcal{L}_{GH}$  elemente, mis on ortokroonsed. Kuna sellised Lorentzi teisendused ei muuda nullvektorite ega ajalaadsete vektorite ajakoordinaadi märki, siis võime konkreetse mõttes piirduda vaid selliste ortonormaalsete baasidega  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ning  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ , kus  $e_4 \sim \hat{e}_4$ . Märgime, et siinjuures ei ole vahet kumba faktorhulga  $\mathcal{M}/\sim$  ekvivalentsiklassi elemendid  $e_4$  ja  $\hat{e}_4$  kuuluvad, sest nende ekvivalentsiklasside täpne fikseerimine on meelevaldne.

Meenutades veel seost 3.4, siis saame kirjutada  $\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta$ , millest tuleneb  $(\det \Lambda)^2 = 1$ . Järelikult kehtib kas

$$\det \Lambda = 1 \text{ või } \det \Lambda = -1,$$

ja seejuures ütleme, et  $\Lambda$  on *tegelik Lorentzi teisendus*, kui  $\det \Lambda = 1$ .

**Lause 3.4.** *Hulk  $\mathcal{L} := \{\Lambda \in \mathcal{L}_{GH} : \det \Lambda = 1, \Lambda^4_4 \geq 1\}$  on korrutamise suhtes rühma  $\mathcal{L}_{GH}$  alamrühm, see tähendab tegelikud ortokroonilised Lorentzi teisendused moodustavad rühma.*

*Tõestus.* Veendumaks, et hulk  $\mathcal{L}$  on rühm näitame, et ta on kinnine korrutamise ja pöördlemendi võtmise suhtes. Olgu  $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$ . Paneme tähele, et  $\det(\Lambda_1 \Lambda_2) = \det \Lambda_1 \cdot \det \Lambda_2 = 1$  ja seose 3.7 põhjal  $\det \Lambda^{-1} = \det(\eta \Lambda^T \eta) = (-1)^2 \det \Lambda^T = \det \Lambda = 1$ .

**KAHJUKS ORTOKROONILISUST EI OSKA NÄIDATA!** □

**Märkus 3.4.** Rühma  $\mathcal{L}$  lausest 3.4 nimetatakse sageli *Lorentzi rühmaks*, nagu ka rühma  $\mathcal{L}_{GH}$ .

Vaatleme järgnevalt lähemalt hulga  $\mathcal{L}$  alamhulka  $\mathcal{R}$ , mille elemendid avalduvad kujul

$$R = \begin{pmatrix} R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 & 0 \\ R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 & 0 \\ R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kus  $(R^i_j)_{i,j=1,2,3}$  on ortogonaalne ja  $\det(R^i_j) = 1$ , see tähendab  $R$  on unimodulaarne. Märgime, et tõepoolest  $R \in \mathcal{L}$ , sest  $R^4_4 = 1$  definitsiooni järgi ning kasutades Laplace'i teoreemi saame  $\det R = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det(R^i_j) = 1$ . Samuti on täidetud ortogonaalsuse tingimus 3.4 kuna

$$\begin{aligned} R^T \eta R &= \begin{pmatrix} (R^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta \begin{pmatrix} (R^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R^i_j)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R^i_j) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (R^i_j)^T (R^i_j) & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R^i_j)^{-1} (R^i_j) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta. \end{aligned}$$

Paneme veel tähele, et hulk  $\mathcal{R}$  on rühm. Tõepoolest, kui  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ , siis

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja seega  $(R_1 R_2)^4_4 = 1$  ning  $\det \left( \begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \left( \begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \det \left( \begin{pmatrix} ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1$ . Teisalt, kui  $R \in \mathcal{R}$ , siis valemist 3.7 saame

$$R^{-1} = \eta R^T \eta = \eta \begin{pmatrix} (R^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta = \eta \begin{pmatrix} (R^i_j)^T & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R^i_j)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järelikult  $(R^{-1})^4_4 = 1$  ning  $\det \left( \begin{pmatrix} (R^{-1})^i_j \end{pmatrix} \right) = \det (R^i_j)^T = \det (R^i_j) = 1$ .

Et hulga  $\mathcal{R}$  elemendid kirjeldavad koordinaatide teisendusi, mis pööravad ruumikoordinaate, siis ütleme teisenduse  $R \in \mathcal{R}$  kohta *pööre* ja rühma  $\mathcal{R}$  nimetame rühma  $\mathcal{L}$  *pöörete alamrühmaks*.



**Lause 3.5.** *Olgu  $\Lambda \in \mathcal{L}$ . Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(i)  $\Lambda$  on pööre, see tähendab  $\Lambda \in \mathcal{R}$ ;

(ii)  $\Lambda^1_4 = \Lambda^2_4 = \Lambda^3_4 = 0$ ;

(iii)  $\Lambda^4_1 = \Lambda^4_2 = \Lambda^4_3 = 0$ ;

(iv)  $\Lambda^4_4 = 1$ .

# Lisad

## A Skalaarkorrutisega seotud abitulemused

**Teoreem A.1.** [Pöl12, teoreem II.7.3] *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega  $g$  varustatud vektorruumis  $\mathbb{V}$  leidub ortonormeeritud baas.*

*Tõestus.* Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui  $\{b\}$  on mingi baas, siis  $\left\{\frac{1}{|b|}b\right\}$  on ortonormeeritud baas. Eeldame nüüd, et igas  $(n-1)$ -mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ning olgu  $\mathbb{V}$   $n$ -mõõtmeline vektorruum baasiga  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Eelduse järgi on ruumis  $\mathbb{V}$  ortonormeeritud süsteem  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ , kusjuures

$$\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} = \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel  $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$  omadusega

$$a_n \perp \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\},$$

sest siis  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \frac{1}{|a_n|}a_n\}$  on ruumi  $\mathbb{V}$  ortonormeeritud baas. Otsime vektorit  $a_n$  kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Paneme tähele, et kui  $a_n$  on sellisel kujul, siis  $a_n \neq 0$ , sest vastasel korral  $b_n \in \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ , mis on vastuolus süsteemi  $\text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$  lineaarse sõltumatusega. Kui  $a_n$  on kujul A.1, siis kõikide  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  korral

$$a_n \perp e_k \iff a_n \cdot e_k = 0 \iff \left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = 0$$

Samas, kuna

$$\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = b_n \cdot e_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j (e_j \cdot e_k) = b_n \cdot e_k + \alpha_k,$$

siis  $a_n \perp e_k \iff \alpha_k = -(b_n \cdot e_k)$ .

Järelikult võime võtta  $a_n := b_n - \sum_{j=1}^{n-1} (b_n \cdot e_j) e_j$ . □

**Märkus A.1.** Teoreemi 4.1 tõestuses antud algortimi ortonormeeritud baasi leidmiseks nimetatakse *Gram-Schmidt'i algoritmiks* või *ortogonaliseerimisprotsessiks*.

**Teoreem A.2** (Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus). [Põl12, teoreem II.1.1.]  
Olgu  $\mathbb{V}$  vektorruum skalaarkorrutisega  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sellisel juhul kehtib võrratus

$$g^2(u, v) \leq g(u, u) g(v, v) \quad (\text{A.2})$$

kõikide  $u, v \in \mathbb{V}$  korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad.

*Tõestus.* Olgu  $\mathbb{V}$  reaalne vektorruum skalaarkorrutisega  $g$  ning olgu  $u, v \in \mathbb{V}$ . Siis iga  $\lambda \in \mathbb{R}$  korral

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(u + \lambda v, u + \lambda v) = g(u, u) + 2g(u, \lambda v) + g(\lambda v, \lambda v) = \\ &= g(u, u) + 2\lambda g(u, v) + \lambda^2 g(v, v) \leq g(u, u) + 2\lambda |g(u, v)| + \lambda^2 g(v, v). \end{aligned}$$

Saame  $\lambda$  suhtes võrratuse

$$g(v, v) \lambda^2 + 2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on  $\mathbb{R}$ . Kui  $g(v, v) > 0$ , siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminandi jaoks kehtib

$$4|g(u, v)|^2 - 4g(u, u)g(v, v) \leq 0,$$

millest järeldub vahetult võrratus A.2. Juhul  $g(v, v) = 0$  peab kõikide  $\lambda \in \mathbb{R}$  korral kehtima  $2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0$ , mis on võimalik vaid siis, kui  $g(u, v) = 0$ . Sellisel juhul on tingimuse A.2 kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et võrratuses A.2 kehtib võrdus parajasti siis, kui  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad.

Oletame esiteks, et vektorid  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub  $\alpha \in \mathbb{R}$  selliselt, et  $u = \alpha v$ . Seega

$$\begin{aligned} g^2(u, v) &= g^2(\alpha v, v) = \alpha^2 g^2(v, v) = \alpha^2 g(v, v) g(v, v) \\ &= g(\alpha v, \alpha v) g(v, v) = g(u, u) g(v, v), \end{aligned}$$

nagu tarvis.

Kehtigu nüüd tingimuses A.2 võrdus. Veendume, et siis  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et  $u \neq 0$  ja  $v \neq 0$ . Siis ka  $g(u, u) \neq 0$  ja  $g(v, v) \neq 0$ . Paneme tähele, et

$$g^2(u, v) = g(u, u) g(v, v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{g^2(u, v) g(v, v)}{g^2(v, v)} = g(u, u).$$

Tähistades  $a := \frac{g(u, v)}{g(v, v)}$ , saame, et  $a^2 g(v, v) = g(u, u)$  ehk  $g(av, av) = g(u, u)$ , millest  $u = av$ .  $\square$

## B Ortogonaalsed teisendused

**Lemma B.1.** *Olgu  $\mathbb{V}$  vektorruum ja  $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  lineaarne teisendus ning  $g$  skalaarkorrutis ruumil  $\mathbb{V}$ . Kui  $g(x, y) = g(Lx, Ly)$  kõikide  $x, y \in \mathbb{V}$  korral, siis  $L$  on isomorfism ruumil  $\mathbb{V}$ .*

*Tõestus.* Olgu  $\mathbb{V}$  vektorruum ja  $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  lineaarne teisendus ja kehtigu  $g(x, y) = g(Lx, Ly)$  kõikide  $x, y \in \mathbb{V}$  korral. Veendumaks, et  $L$  on isomorfism piisab näidata, et  $L$  on injektiivne ja surjektiivne. Veendume kõigepealt kujutuse  $L$  üksühesuses. Olgu  $x, y \in \mathbb{V}$ ,  $x \neq y$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $Lx = Ly$ , siis  $Lx - Ly = 0$  ja seega iga  $z \in \mathbb{V}$  korral

$$g(Lx - Ly, Lz) = 0.$$

Teisalt, kuna  $g$  on skalaarkorrutis ja et  $x \neq y$ , siis leidub selline  $z' \in \mathbb{V}$ , et  $g(x - y, z') \neq 0$ . Kokkuvõttes saime

$$0 \neq g(x - y, z') = g(Lx - Ly, Lz') = 0,$$

mis on vastuolu.

Veendume nüüd teisenduse  $L$  surjektiivsuses. Olgu  $x \in \mathbb{V}$ . Meie eesmärk on leida  $y \in \mathbb{V}$  selliselt, et  $Ly = x$ . Tähistame teisenduse  $L$  maatriksi tähega  $\Lambda$ . Siis

$$Ly = L(y^a e_a) = y^a \Lambda_a^b e_b = x^b e_b, \text{ kus } a, b = 1, 2, 3, 4.$$

Saime võrrandisüsteemi  $y^a \Lambda_a^b = x^b$ , mis on üheselt lahenduv, kuna  $\det \Lambda = \pm 1$ . Seega võime võtta  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ .  $\square$

## Viited

- [Kil05] M. Kilp. *Algebra I*. Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.
- [Nab12] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, NY, 2nd edition, 2012.
- [Põl12] M. Põldvere. Funktsionaalanalüüs 2 loengukonspekt, 2012.