TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Priit Lätt

Minkowski aegruumi geomeetriast

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor: ...."....."juuni 2013
Juhendaja: ...."....."juuni 2013

TARTU 2013

Sisukord

1 Sissejuhatus

Bakalaureusetöö on referatiivne ja selle aluseks on [Nab12].
Töös kasutame summade tähistamisel sageli Einstein'i summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid i ja j, mis omavad väärtusi $1, \ldots, n \, (n \in \mathbb{N})$, siis kirjutame

$$\begin{aligned} x^i e_a &= \sum_{a=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n, \\ \lambda^i{}_j x^j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda^i{}_j x^j = \lambda^i{}_1 x^1 + \lambda^i{}_2 x^2 + \cdots + \lambda^i{}_n x^n, \\ \eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \cdots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \cdots + \eta_{nn} u^n v^n, \end{aligned}$$

ja nii edasi.

Vektori u pikkust tähistame edaspidi $|u|$.

2 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis toome välja definitsioonid ja tähtsamad tulemused, mida läheb tarvis töö järgmistes osades. Lihtsamad tulemused, millele on pööratud tähelepanu kursustes Algebra I või Geomeetria II, esitame seejuures tõestusteta.

2.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused

Teoreem 2.1. [Põl12, teoreem II.7.3] *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega g varustatud vektorruumis $\mathbb{V}$ leidub ortonormeeritud baas.*

Tõestus. Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui $\{b\}$ on mingi baas, siis $\left\{\frac{1}{|b|}b\right\}$ on ortonormeeritud baas. Eeldame nüüd, et igas $(n-1)$-mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ning olgu $\mathbb{V}$ n-mõõtmeline vektorruum baasiga $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Eelduse järgi on ruumis $\mathbb{V}$ ortonormeeritud süsteem $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$, kusjuures

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ omadusega

$$a_n \perp \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\},$$

sest siis $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{|a_n|}a_n\}$ on ruumi $\mathbb{V}$ ortonormeeritud baas.
Otsime vektorit a_n kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Paneme tähele, et kui a_n on sellisel kujul, siis $a_n \neq 0$, sest vastasel korral $b_n \in \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$, mis on vastuolus süsteemi $\operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ lineaarse sõltumatusega. Kui a_n on kujul 2.1, siis kõikide $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ korral

$$a_n \perp e_k \iff a_n \cdot e_k = 0 \iff \left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = 0$$

Samas, kuna

$$\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = b_n \cdot e_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j \left(e_j \cdot e_k\right) = b_n \cdot e_k + \alpha_k,$$

siis $a_n \perp e_k \iff \alpha_k = -\left(b_n \cdot e_k\right)$.
Järelikult võime võtta $a_n := b_n - \sum_{j=1}^{n-1} \left(b_n \cdot e_j\right) e_j$. $\square$

Märkus 2.1. Teoreemi 4.1 tõestuses antud algortimi ortonormeetirud baasi leidmiseks nimetatakse *Gram-Schmidti algoritmiks* või *ortogonaliseerimisprotsessiks.*

Teoreem 2.2 (Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus)**.** [Põl12, teoreem II.1.1.] *Olgu* $\mathbb{V}$ *vektroruum skalaarkorrutisega* $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. *Sellisel juhul kehtib võrratus*

$$g^2 (u, v) \leq g (u, u) \, g (v, v) \tag{2.2}$$

kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ *korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid* u *ja* v *on lineaarselt sõltuvad.*

Tõestus. Olgu $\mathbb{V}$ reaalne vektorruum skalaarkorrutisega g ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Siis iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} 0 &\leq g (u + \lambda v, u + \lambda v) = g (u, u) + 2g (u, \lambda v) + g (\lambda v, \lambda v) = \\ &= g (u, u) + 2\lambda g (u, v) + \lambda^2 g (v, v) \leq g (u, u) + 2\lambda |g (u, v)| + \lambda^2 g (v, v) . \end{aligned}$$

Saime λ suhtes võrratuse

$$g (v, v) \lambda^2 + 2|g (u, v)| \lambda + g (u, u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on $\mathbb{R}$. Kui $g (v, v) > 0$, siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminandi jaoks kehtib

$$4|g (u, v)|^2 - 4g (u, u) \, g (v, v) \leq 0,$$

millest järeldub vahetult võrratus 2.2. Juhul $g (v, v) = 0$ peab kõikide $\lambda \in \mathbb{R}$ korral kehtima $2|g (u, v)| \lambda + g (u, u) \geq 0$, mis on võimalik vaid siis, kui $g (u, v) = 0$. Sellisel juhul on tingimuse 2.2 kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et võrratuses 2.2 kehtib võrdus parajasti siis, kui u ja v on lineaarselt sõltuvad.
Oletame esiteks, et vektorid u ja v on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ selliselt, et $u = \alpha v$. Seega

$$\begin{aligned} g^2 (u, v) &= g^2 (\alpha v, v) = \alpha^2 g^2 (v, v) = \alpha^2 g (v, v) \, g (v, v) \\ &= g (\alpha v, \alpha v) \, g (v, v) = g (u, u) \, g (v, v) , \end{aligned}$$

nagu tarvis.
Kehtigu nüüd tingimuses 2.2 võrdus. Veendume, et siis u ja v on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et $u \neq 0$ ja $v \neq 0$. Siis ka $g (u, u) \neq 0$ ja $g (v, v) \neq 0$. Paneme tähele, et

$$g^2 (u, v) = g (u, u) \, g (v, v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{g^2(u,v)\, g(v,v)}{g^2(v,v)} = g(u,u).$$

Tähistades $a := \frac{g(u,v)}{g(v,v)}$, saame, et $a^2 g(v,v) = g(u,u)$ ehk $g(av,av) = g(u,u)$, millest $u = av$. $\square$

2.2 Tulemusi lineaaralgebrast

Lause 2.1. *Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ja $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineaarne teisendus ning g skalaarkorrutis ruumil $\mathbb{V}$. Kui $g(x,y) = g(Lx,Ly)$ kõikide $x,y \in \mathbb{V}$ korral, siis L on isomorfism ruumil $\mathbb{V}$.*

Tõestus. Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ja $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineaarne teisendus ja kehtigu $g(x,y) = g(Lx,Ly)$ kõikide $x,y \in \mathbb{V}$ korral. Veendumaks, et L on isomorfism piisab näidata, et L on injektiivne ja sürjektiivne. Veendume kõigepealt kujutuse L üksühesuses. Olgu $x,y \in \mathbb{V}$, $x \neq y$. Oletame vastuväiteliselt, et $Lx = Ly$, siis $Lx - Ly = 0$ ja seega iga $z \in \mathbb{V}$ korral

$$g(Lx - Ly, Lz) = 0.$$

Teisalt, kuna g on skalaarkorrutis ja et $x \neq y$, siis leidub selline $z' \in \mathbb{V}$, et $g(x-y,z') \neq 0$. Kokkuvõttes saime

$$0 \neq g(x-y,z') = g(Lx - Ly, Lz') = 0,$$

mis on vastuolu.
Veendume nüüd teisenduse L sürjektiivsuses. Olgu $x \in \mathbb{V}$. Meie eesmärk on leida $y \in \mathbb{V}$ selliselt, et $Ly = x$. Tähistame teisenduse L maatriksi tähega Λ. Siis

$$Ly = L(y^a e_a) = y^a {\Lambda^b}_a e_b = x^b e_b, \text{ kus } a,b = 1,2,3,4.$$

Saime võrrandisüsteemi $y^a {\Lambda^b}_a = x^b$, mis on üheselt lahenduv, kuna $\det\Lambda = \pm 1$. Seega võime võtta $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. $\square$

3 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

3.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu $\mathbb{V}$ n-mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ on *bilineaarvorm*, kui g on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab $g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \alpha_2 g(u_2, v)$ ja $g(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 g(u, v_1) + \alpha_2 g(u, v_2)$ kus α_1 ja α_2 on suvalised reaalarvud ning u, u_1, u_2, v, v_1 ja v_2 on vektorruumi $\mathbb{V}$ elemendid.
Olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Bilineaarvormi g nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $g(u, v) = g(v, u)$ ja *mittekidunuks*, kui tingumusest $g(u, v) = 0$ iga $v \in \mathbb{V}$ korral järeldub $u = 0$.

Definitsioon 3.1. Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ nimetatakse *skalaarkorrutiseks.* Vektorite u ja v skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul $u \cdot v$.

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, sest g bilineaarsuse tõttu $0 \cdot v = (0 * 0) \cdot v = 0 * (0 \cdot v) = 0$,
- kui $u_1, u_2, \ldots, u_n, u, v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$, siis $\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \cdot v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v)$ ja $u \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = \sum_{i=1}^n (u \cdot v_i)$,
- kui $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ on vektorruumi $\mathbb{V}$ baas ning kui tähistame $\eta_{ij} = e_i \cdot e_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, siis $u \cdot v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u^i v^j = \eta_{ij} u^i v^j$, kus $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$.

Näide 3.1. Vaatleme ruumi $\mathbb{R}^n$. Olgu $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n), v = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Lihtne on veenduda, et kujutus $g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^n v^n$ on skalaarkorrutis.

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga $v \neq 0$ korral $g(v, v) > 0$. Kui $g(v, v) < 0$ kõikide $v \neq 0$ korral, siis ütleme, et g on *negatiivselt määratud* ja kui g pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et g on *määramata.*

Definitsioon 3.2. Kui g on skalaarkorrutis vektorruumil $\mathbb{V}$, siis nimetame vektoreid u ja v *g-ortogonaalseteks* (või lihtsalt *ortogonaalseteks*, kui g roll on kontekstist selge), kui $g(u, v) = 0$. Kui $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ on alamruum, siis ruumi $\mathbb{W}$ ortogonaalne täiend $\mathbb{W}^\perp$ on hulk $\mathbb{W}^\perp = \{u \in \mathbb{V} : \forall v \in \mathbb{W} \text{ korral } g(u, v) = 0\}$.

Definitsioon 3.3. Skalaarkorrutise g poolt määratud *ruutvormiks* nimetame kujutust $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, kus $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v$, $v \in \mathbb{V}$.

Lause 3.1. *Olgu g_1 ja g_2 kaks skalaarkorrutist vektorruumil $\mathbb{V}$, mis rahuldavad tingimust $g_1(u,u) = g_2(u,u)$ iga $v \in \mathbb{V}$ korral. Siis kehtib $g_1(u,v) = g_2(u,v)$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, ehk teisi sõnu, $g_1 \equiv g_2$.*

Tõestus. Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$ ja kehtigu võrdus $g_1(u,u) = g_2(u,u)$ iga u korral. Defineerime uue kujutuse

$$g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R},\ g(u,v) \mapsto g_1(u,v) - g_2(u,v).$$

Paneme esiteks tähele, et selliselt defineeritud g on sümmeetriline ja bilineaarne. Tõepoolest, olgu $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$. Siis

$$\begin{aligned} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= g_1(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - g_2(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \\ &= \alpha g_1(u_1, v) + \beta g_1(u_2, v) - \alpha g_2(u_1, v)\beta g_2(u_2, v) = \\ &= \alpha(g_1(u_1, v) - g_2(u_1, v)) + \beta(g_1(u_2, v) - g_2(u_2, v)) = \\ &= \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) \text{ ja analoogiliselt} \\ g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2). \end{aligned}$$

Kujutuse g sümmeetrilisus on g_1 ja g_2 sümmeetrilisust arvestades ilmne. Tõestuse lõpetamiseks piisab nüüd näidata, et $g = 0$. Ühelt poolt paneme tähele, et

$$g(u+v, u+v) = g_1(u+v, u+v) - g_2(u+v, u+v) = 0.$$

Teisalt,

$$\begin{aligned} g(u+v, u+v) &= g(u, u+v) + g(v, u+v) = \\ &= g(u,u) + g(u,v) + g(v,u) + g(v,v) = \\ &= g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) = 2g(u,v). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime $2g(u,v) = 0$ ehk $g(u,v) = 0$, mida oligi tarvis. □

Teoreem 3.1. *Olgu $\mathbb{V}$ reaalne n-mõõtmeline vektorruum ning olgu $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ skalaarkorrutis. Vektorruumil $\mathbb{V}$ leidub baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nii, et $g(e_i, e_j) = 0$ kui $i \neq j$ ja $Q(e_i) = \pm 1$ iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral $Q(e_i) = -1$ on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.*

Tõestus. Arvestades *Gram*[1]-*Schmidti*[2] algoritmi ortonormeeritud baasi leidmiseks, muutub teoreemi tõestus ilmseks[3]. □

[1] Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) - taani matemaatik
[2] Erhard Schmidt (1876 – 1959) - Tartus sündinud saksma matemaatik
[3] Vaata 2.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused, Märkus 2.1

Definitsioon 3.4. Vektorruumi $\mathbb{V}$ baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.

Skalaarkorrutise g suhtses ortonormaalse baasi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorite arvu r, mille korral $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nimetame skalaarkorrutise g *indeksiks.* Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid e_i, mille korral $Q(e_i) = -1$, paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \ldots, e_n\}$$

korral $Q(e_i) = 1$, kui $i = 1, 2, \ldots, n - r$, ja $Q(e_i) = -1$, kui $i = n - r + 1, \ldots, n$. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$ saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise g arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \cdots - u^n v^n.$$

Märkus 3.1. Vektorruumi $\mathbb{V}$ skalaarkorrutisega g, mille indeks $r > 0$ nimetatakse *pseudoeukleidiliseks ruumiks.*

3.2 Minkowski aegruumi mõiste

Definitsioon 3.5. *Minkowski aegruumiks* nimetatakse 4-mõõtmelist reaalset vektorruumi $\mathcal{M}$, millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm g indeksiga 1.
Ruumi $\mathcal{M}$ elemente nimetatakse *sündmusteks* ja kujutust g nimetatakse *Lorentzi skalaarkorrutiseks* ruumil $\mathcal{M}$.

Märkus 3.2. Edasises ütleme Minkowski ruumi kontekstis Lorentzi skalaarkorrutise g kohta lihtsalt skalaarkorrutis.

Ilmselt on Minkowski ruum pseudoeukleidiline ruum. Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil $\mathcal{M}$ leidub baas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ järgmise omadusega. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ või lühidalt $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas. Kui $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$, siis tähistame sündmuse x koordinaadid baasi $\{e_a\}$ suhtes (x^1, x^2, x^3, x^4) ja seejuures ütleme, et (x^1, x^2, x^3) on *ruumikoordinaadid* ning (x^4) on *ajakoordinaat.*

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis g ei ole ruumil $\mathcal{M}$ positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nii, et $g(u,u) = 0$. Selliseid vektoreid nimetatakse *nullpikkusega vektoriteks*. Kui aga $g(u,u) < 0$, siis ütleme, et u on *ajasarnane* ning kui $g(u,u) > 0$, siis nimetame vektorit u *ruumisarnaseks*. Osutub, et ruumis $\mathcal{M}$ leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullpikkusega vektoritest.

Näide 3.2. Üheks ruumi $\mathcal{M}$ baasiks, mis koosneb vaid nullpikkusega vektoritest on näiteks $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$, kus $e_1^0 = (1,0,0,1)$, $e_2^0 = (0,1,0,1)$, $e_3^0 = (0,0,1,1)$ ja $e_4^0 = (-1,0,0,1)$. Tõepoolest, süsteemi $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja $e_1^0, \ldots, e_4^0$ on nullpikkusega, sest

$$\begin{aligned} Q\left(e_1^0\right) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_2^0\right) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_3^0\right) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_4^0\right) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

Teoreem 3.2. *Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nullpikkusega vektorid. Vektorid u ja v on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$.*

Tõestus. Piisavus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ paralleelsed nullpikkusega vektorid. Siis leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$. Seega

$$g(u,v) = g(tv,v) = tg(v,v) = 0$$

ehk vektorid u ja v on ortogonaalsed, nagu tarvis.
Tarvilikkus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ ortogonaalsed nullpikkusega vektorid, st $g(u,v) = 0$. *Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuse*[4] $g^2(u,v) \leq g(u,u)\, g(v,v)$ põhjal $0 \leq g(u,u)\, g(v,v)$, sest u ja v on ortogonaalsed. Teisalt, et u ja v on nullpikkusega vektorid, siis $g(u,u)\, g(v,v) = 0$ ja järelikult kehtib Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuses võrdus $0 = 0$, mis tähendab, et u ja v on lineaarselt sõltuvad. □

Võtame nüüd vaatluse alla kaks sellist sündmust $x, x_0 \in \mathcal{M}$, $x \neq x_0$, mida ühendab nullpikkusega vektor, see tähendab $Q(x - x_0) = 0$. Seda asjaolu arvesse võttes saame, et kui $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalne baas ja me tähistame $x = x^a e_a$, $x_0 = x_0^a e_a$, siis kehtib võrdus

$$Q(x - x_0) = \left(x^1 - x_0^1\right)^2 + \left(x^2 - x_0^2\right)^2 + \left(x^3 - x_0^3\right)^2 - \left(x^4 - x_0^4\right)^2 = 0. \qquad (3.1)$$

[4]Vaata Lisa 1, Teoreem 4.2

Kõigi selliste $x \in \mathcal{M}$ hulka, mille korral on tingimus 3.1 täidetud nimetatakse *nullkoonuseks*[5] punktis x_0 ja tähistatakse $\mathcal{C}_N(x_0)$. Seega

$$\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}.$$

Piltlikult võime öelda, et hulga $\mathcal{C}_N(x_0)$ elemendid on ühendatavad sündmusega x_0 *valguskiire* $R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ abil.

3.3 Ortogonaalteisendus ruumis $\mathcal{M}$

Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ ruumi $\mathcal{M}$ kaks ortonormaalset baasi. Osutub, et leidub parajasti üks selline lineaarne kujutus $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, et $L(e_a) = \hat{e}_a$, $a = 1, 2, 3, 4$. Tõepoolest, leiduvad arvud $\Lambda^a{}_b$ nii, et baasi $\{\hat{e}_a\}$ vektorid avalduvad baasi $\{e_a\}$ suhtes üheselt kujul $\hat{e}_b = \Lambda^a{}_b e_a$. Arvudest $\Lambda^a{}_b$ tekkiva maatriksiga assotsieeruv Lorentzi teisendus sobibki otsitavaks teisenduseks L. Järgnevaga uurime kujutuse L omadusi veidi lähemalt.

Definitsioon 3.6. Ruumi $\mathcal{M}$ lineaarset kujutust $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ nimetatakse *pseudoortogonaalteisenduseks*, kui ta säilitab skalaarkorrutise g, see tähendab iga x ja y korral ruumist $\mathcal{M}$ kehtib võrdus $g(Lx, Ly) = g(x, y)$.

Lause 3.2. *Olgu $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ lineaarne kujutus. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

(i) L on pseudoortogonaalteisendus;

(ii) L säilitab ruumi $\mathcal{M}$ ruutvormi, see tähendab $Q(Lx) = Q(x)$ iga $x \in \mathcal{M}$ korral;

(iii) L kujutab suvalise ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalse baasi ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalseks baasiks.

Tõestus. $(i) \implies (ii)$. Olgu L pseudoortogonaalne teisendus. Siis definitsiooni põhjal $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ iga $x, y \in \mathcal{M}$ korral. Seega kehtib ka $Q(Lx) = g(Lx, Lx) = g(x, x) = Q(x)$ kõikide $x \in \mathcal{M}$ korral ehk L säilitab ruutvormi.
$(ii) \implies (i)$ on täpselt lause 3.1.
$(ii) \implies (iii)$. Kehtigu (ii) (ja seega ka (i)) ning olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortogonaalne baas ruumis $\mathcal{M}$. Siis ka $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ on ortonormaalne baas ruumis $\mathcal{M}$, sest

$$g(Le_i, Le_j) = g(e_i, e_j) = \begin{cases} -1, & \text{kui } i = j = 4, \\ 1, & \text{kui } i = j,\ i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

[5]Füüsikas öeldakse sageli *nullkoonuse* asemel *valguse koonus*.

ja arvestades kujutuse L lineaarsust, on ka süsteem $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ lineaarselt sõltumatu.
$(iii) \implies (ii)$. Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas ja kehtigu tingimus (iii). Veendume, et alati $Q(Lx) = Q(x)$, kus $x \in \mathcal{M}$ on suvaline. Fikseerime $x \in \mathcal{M}$ ning esitugu ta koordinaatides kujul $x = x^i e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$Q(x) = Q\left(x^i e_i\right) = x^i Q(e_i) = x^i Q(Le_i) = Q\left(x^i Le_i\right) = Q\left(L\left(x^i e_i\right)\right) = Q(Lx).$$

$\square$

Ruumi kokkuhoiu mõttes toome sisse 4×4 maatriksi η, mille me defineerime kui

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ja mille elemente tähistame vastavalt vajadusele kas η_{ab} või η^{ab}, $a, b = 1, 2, 3, 4$. Sellise tähistuse korral $\eta_{ab} = 1$, kui $a = b = 1, 2, 3$ ja $\eta_{ab} = -1$, kui $a = b = 4$ ning $\eta_{ab} = 0$ muudel juhtudel. Vahetult on kontrollitav, et $\eta = \eta^T$ ja $\eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = E$, kus E on ühiksmaatriks.
Arvestades sissetoodud tähistusi saame nüüd kirjutada $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$, kus $\{e_a\}$ on ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas. Enamgi veel, avaldades vektorid $u, v \in \mathcal{M}$ baasivektorite kaudu $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, saame summeerimiskokkulepet kasutades kirjutada $g(u, v) = \eta_{ab} u^a v^b$.

Olgu $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ruumi $\mathcal{M}$ pseudoortogonaalteisendus ja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ selle ruumi ortonormeeritud baas. Lause 3.2 põhjal on siis ka $\hat{e}_1 = Le_1, \hat{e}_2 = Le_2, \hat{e}_3 = Le_3, \hat{e}_4 = Le_4$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas, kusjuures iga e_i, $i = 1, 2, 3, 4$ saab esitada vektorite $\hat{e}_j$ lineaarkombinatsioonina kujul

$$e_i = \Lambda^1{}_i \hat{e}_1 + \Lambda^2{}_i \hat{e}_2 + \Lambda^3{}_i \hat{e}_3 + \Lambda^4{}_i \hat{e}_4 = \Lambda^j{}_i \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{3.2}$$

kus arvud $\Lambda^j{}_i$ on mingid reaalarvulised konstandid. Arvestades valemit 3.2 võime nüüd ortogonaalsuse tingimuse $g(e_c, e_d) = \eta_{cd}$, $c, d = 1, 2, 3, 4$, kirjutada kujul

$$\Lambda^1{}_c \Lambda^1{}_d + \Lambda^2{}_c \Lambda^2{}_d + \Lambda^3{}_c \Lambda^3{}_d - \Lambda^4{}_c \Lambda^4{}_d = \eta_{cd}$$

või kasutades summeerimiskokkulepet, siis lühidalt

$$\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \tag{3.3}$$

Seose 3.3 saame maatrikskujul kirjutada kui

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{3.4}$$

Korrutades võrduse 3.4 mõlemaid pooli maatriksiga Λ^{-1} saame $\Lambda^T\eta = \eta\Lambda^{-1}$. Korrutades nüüd saadud tulemust veel paremalt maatriksiga η^{-1} on tulemuseks $\Lambda^T = \eta\Lambda^{-1}\eta^{-1}$. Viimast arvesse võttes võime kirjutada $\Lambda\eta\Lambda^T = \Lambda\eta^{-1}\Lambda^T = \Lambda\eta^{-1}\left(\eta\Lambda^{-1}\eta^{-1}\right) = \Lambda\Lambda^{-1}\eta^{-1} = \eta^{-1} = \eta$ ehk

$$\Lambda\eta\Lambda^T = \eta. \tag{3.5}$$

Seos 3.5 on koordinaatides välja kirjutatuna täpselt

$$\Lambda^a{}_c\eta^{cd}\Lambda^b{}_d = \eta^{ab}. \tag{3.6}$$

Definitsioon 3.7. Maatriksit $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$ nimetame *pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$* assotsieeruvaks maatriksiks.

Definitsioonile eelnevas arutelus tõestasime maatriksi Λ kohta järgmise lemma.

Lemma 3.1. *Pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruva maatriksi Λ korral on tingimused 3.3, 3.4, 3.5 ja 3.6 samaväärsed.*

Kuna ortogonaalteisenduse maatriks mistahes ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, ja vastupidi, kui ortogonaalteisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, siis sellest järeldub kergesti järgmine lause.

Lause 3.3. [Kil05, lk 271] *Kui Λ on pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruv maatriks, siis Λ on ka pseudoortogonaalteisenduse L^{-1} ja baasiga $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$ assotsieeruv maatriks.*

Me vaatleme ortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ seotud maatriksit Λ kui koordinaatide teisenemise maatriksit tavalisel viisil. Seega, kui $x \in \mathcal{M}$ on esitub koordinaatides baasi $\{e_i\}$ suhtes kujul $x = x^ie_i$, $i = 1,2,3,4$, siis tema koordinaadid baasi $\{\hat{e}_i\} = \{Le_i\}$ suhtes avalduvad kujul $x = \hat{x}^i\hat{e}_i$, kus

$$\begin{aligned}
\hat{x}^1 &= \Lambda^1{}_1x^1 + \Lambda^1{}_2x^2 + \Lambda^1{}_3x^3 + \Lambda^1{}_4x^4,\\
\hat{x}^2 &= \Lambda^2{}_1x^1 + \Lambda^2{}_2x^2 + \Lambda^2{}_3x^3 + \Lambda^2{}_4x^4,\\
\hat{x}^3 &= \Lambda^3{}_1x^1 + \Lambda^3{}_2x^2 + \Lambda^3{}_3x^3 + \Lambda^3{}_4x^4,\\
\hat{x}^4 &= \Lambda^4{}_1x^1 + \Lambda^4{}_2x^2 + \Lambda^4{}_3x^3 + \Lambda^4{}_4x^4,
\end{aligned}$$

mille võime lühidalt kirja panna kui

$$\hat{x}^i = \Lambda^i{}_jx^j, \text{ kus } i,j = 1,2,3,4.$$

Definitsioon 3.8. 4×4 maatriksit Λ, mis rahuldab tingimust 3.4 (ja lemma 3.1 põhjal siis ka tingimusi 3.3, 3.5 ja 3.6) nimetatakse *(homogeenseks) Lorentzi teisenduseks.*

Kuna ruumi $\mathcal{M}$ ortogonaalsteisendus L on isomorfism[6] ja seega pööratav, siis temaga assotsieeruv maatriks Λ on samuti pööratav, kusjuures

$$\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^T\eta. \tag{3.7}$$

Tõepoolest, arvestades tingimust 3.4 ja asjaolu, et $\eta = \eta^{-1}$, siis saame

$$\eta = \Lambda^T\eta\Lambda \iff \eta\Lambda^{-1} = \Lambda^T\eta \iff \eta^{-1}\eta\Lambda^{-1} = \eta^{-1}\Lambda^T\eta \iff \Lambda^{-1} = \eta\Lambda^T\eta.$$

Teoreem 3.3. *Kõigi (homogeensete) Lorentzi teisenduste hulk on rühm maatriksite korrutamise suhtes. Seda rühma nimetatakse* (homogeenseks) Lorentzi rühmaks *ja tähistatakse $\mathcal{L}_{GH}$.*

Tõestus. Veendumaks, et kõigi (homogeensete) Lorentzi teisenduste hulk $\mathcal{L}_{GH}$ on rühm peame näitama, et $\mathcal{L}_{GH}$ on kinnine korrutamise ja pöördelemendi võtmise suhtes.
Olgu $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$. Veendume esiteks, et korrutis $\Lambda_1\Lambda_2$ kuulub hulka $\mathcal{L}_{GH}$. Selleks piisab näidata, et $(\Lambda_1\Lambda_2)^T\eta(\Lambda_1\Lambda_2) = \eta$.

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^T\eta(\Lambda_1\Lambda_2) = \left(\Lambda_2^T\Lambda_1^T\right)\eta(\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^T\left(\Lambda_1^T\eta\Lambda_1\right)\Lambda_2 = \Lambda_2^T\eta\Lambda_2 = \eta,$$

ja seega $\Lambda_1\Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$ nagu tarvis.
Jääb veel näidata, et ka $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$. Seose 3.7 ja võrduste $\eta = \eta^T$, $\eta\eta = E$ põjal saame kirjutada

$$\begin{aligned}\left(\Lambda^{-1}\right)^T\eta\Lambda^{-1} &= \left(\eta\Lambda^T\eta\right)^T\eta\left(\eta\Lambda^T\eta\right) = \left(\eta^T\left(\Lambda^T\right)^T\eta^T\right)\eta\eta\Lambda^T\eta = \\ &= \eta\Lambda\eta\Lambda^T\eta = \eta\eta\eta = \eta.\end{aligned}$$

Viimane aga tähendabki, et $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$. □

Arvestades võrdust 3.7 võime välja arvutada maatriksi Λ^{-1} ja esitada ta maatriksi Λ elementide kaudu:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 & -\Lambda^4{}_1 \\ \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 & -\Lambda^4{}_2 \\ \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 & -\Lambda^4{}_3 \\ -\Lambda^1{}_4 & -\Lambda^2{}_4 & -\Lambda^3{}_4 & \Lambda^4{}_4 \end{pmatrix}.$$

[6]Vaata 2.2 Tulemusi lineaaralgebrast, Lause 2.1

3.4 Lorentzi rühm

Definitsioon 3.9. Me ütleme, et $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ on *ortokroonne*, kui ${\Lambda^4}_4 \geq 1$ ja *mitte-ortokroonne*, kui ${\Lambda^4}_4 \leq -1$.

Edasise teooriaarenduse seisukohalt on otstarbekas tõestada järgmine teoreem.

Teoreem 3.4. [Nab12, teoreem 1.3.1] *Olgu $u, v \in \mathcal{M}$, kusjuures u on ajasarnane ja v ajasarnane või nullpikkusega ning olgu $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalne baas, mille suhtes u ja v avalduvad kujul $u = u^a e_a$ ja $v = v^a e_a$. Siis kehtib parajasti üks järgmistest tingimusest:*

(a) $u^4 v^4 > 0$, mille korral $g(u, v) < 0$,

(b) $u^4 v^4 < 0$, mille korral $g(u, v) > 0$.

Tõestus. Oletame, et teoreemi eeldused on täidetud. Siis

$$
\begin{aligned}
g(u,u) &= \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2 - \left(u^4\right)^2 < 0 \text{ ja} \\
g(v,v) &= \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2 - \left(v^4\right)^2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Niisiis

$$
\begin{aligned}
\left(u^4 v^4\right)^2 &> \left(\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2\right)\left(\left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2\right) \overset{(*)}{\geq} \\
&\geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3,
\end{aligned}
$$

kus võrratus $(*)$ tuleneb Cauchy-Scwartz-Bunjakowski võrratusest ruumi $\mathbb{R}^3$ jaoks. Nüüd aga $|u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3|$, millest saame, et $u^4 v^4 \neq 0$ ja $g(u, v) \neq 0$. Oletame konkreetsuse mõttes, et $u^4 v^4 > 0$. Siis

$$
u^4 v^4 = |u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3| \geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3,
$$

millest

$$
u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4 < 0
$$

ehk $g(u, v) < 0$. Kui aga $u^4 v^4 > 0$, siis $g(u, -v) < 0$ ja seega $g(u, v) > 0$. $\square$

Järeldus 3.1. *Kui $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ on ortogonaalne ajasarnase vektoriga $v \in \mathcal{M}$, siis u on ruumisarnane.*

Tõestus. Olgu $v \in \mathcal{M}$ ajasarnane ja olgu $u \in \mathcal{M}$ nullist erinev ning ortogonaalne vektoriga v. Oletame vastuväiteliselt, et u on ajasarnane. Siis eelmise teoreemi põhjal kehtib kas $g(u, v) > 0$ või $g(u, v) < 0$. Et u ja v on ortogonaalsed, siis $g(u, v) = 0$, mis on vastuolus eelnevaga. Järelikult on u ruumisarnane. $\square$

Tähistame ruumi $\mathcal{M}$ kõigi ajasarnaste vektorite hulga tähega τ ja defineerime hulgas τ seose $\sim$ järgnevalt. Kui $u, v \in \tau$, siis $u \sim v$ parajasti siis, kui $g(u, v) < 0$. Sedasi defineeritud seos $\sim$ on ekvivalents:

(a) **refleksiivsus** järeldub vahetult ajasarnase vektori definitsioonist;

(b) seose $\sim$ **sümmeetrilisus** tuleneb skalaarkorrutise sümmeetrilisusest;

(c) **refleksiivsuseks** märgime, et kui $g(u, v) < 0$ ja $g(v, w) < 0$, siis teoreemi 3.4 põhjal $u^4 v^4 > 0$ ja $v^4 w^4 > 0$ ehk u^4 ja v^4 ning v^4 ja w^4 on sama märgiga ja seega $\operatorname{sign} u^4 = \operatorname{sign} w^4$, millest saame $u^4 w^4 > 0$. Rakendades nüüd veelkord teoreemi 3.4, siis saame, et $g(u, w) < 0$.

Paneme tähele, et seos $\sim$ jagab hulga τ täpselt kaheks ekvivalentsiklassiks. Tõepoolest, kui $u, v \in \mathcal{M}$ on ajasarnased, siis on meil teoreemi 3.4 põhjal kaks varianti. Peab kehtima kas

$$g(u, v) < 0 \text{ või} \tag{1}$$

$$g(u, v) > 0. \tag{2}$$

Kui kehtib võrratus (1), siis on $u \sim v$ ja korras. Vastupidi, kui u ja v jaoks kehtib (2), siis $u \nsim v$ ja piisab näidata, et kui $w \in \tau$ korral $g(u, w) > 0$, siis $v \sim w$. Võrratuse (2) kehtivuseks peavad u, v ja w teoreemi 3.4 põhjal rahuldama võrratusi $u^4 v^4 < 0$ ja $u^4 w^4 < 0$, mis tähendab, et arvud u^4, v^4 ja u^4, w^4 on erinevate märkidega. Seega v^4 ja w^4 on samade märkidega ja järelikult $g(v, w) < 0$ ehk $v \sim w$.
Neid kahte ekvivalentsiklassi tähistame edasises τ^+ ja τ^-.

Teoreem 3.5. [Nab12, teoreem 1.3.3] *Olgu* $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$ *Lorentzi teisendus, see tähendab* $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ *ja olgu* $\{e_a\}$ *ruumi* $\mathcal{M}$ *ortonormeeritud baas. Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(i) Λ *on ortokroonne;*

(ii) Λ *säilitab kõikide nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märgi, see tähendab, kui* $u = u^a e_a$ *on nullpikkusega, siis arvud* u^4 *ja* $\hat{u}^4 = \Lambda^4{}_b u^b$ *on sama märgiga;*

(iii) Λ *säilitab kõikide ajasarnaste vektorite ajakoordinaadi märgi.*

Tõestus. Olgu $u = u^a e_a \in \mathcal{M}$ ajasarnane või nullpikkusega vektor. Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratusest ruumis $\mathbb{R}^3$ saame

$$\left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^4{}_1\right)^2\right) \left(\sum_{i=1}^{3} \left(u^i\right)^2\right). \tag{3.8}$$

Sooritades nüüd võrduses 3.6 asenduse $a = b = 4$ saame

$$\left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 = -1, \text{ milllest järleldub}$$
$$\left(\Lambda^4{}_4\right)^2 > \left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2. \tag{3.9}$$

Et $u \neq 0$, siis tingimustest 3.8 ja 3.9 saame $(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3)^2 < (\Lambda^4{}_4 u^4)^2$, mille võime ruutude vahe valemit kasutades kirjutada kujul

$$\left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3 - \Lambda^4{}_4 u^4\right)\left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3 + \Lambda^4{}_4 u^4\right) < 0. \tag{3.10}$$

Defineerides $v \in \mathcal{M}$ võrdusega $v = \Lambda^4{}_1 e^1 + \Lambda^4{}_2 e^2 + \Lambda^4{}_3 e^3 - \Lambda^4{}_4 e^4$ on v ajasarnane vektor, kusjuures seose 3.10 saame esitada kujul

$$g\,(u, v)\,\hat{u}^4 < 0. \tag{3.11}$$

Viimane võrratus ütleb meile, et arvudel $g\,(u, v)$ ja $\hat{u}^4$ on erinevad märgid. Näitame viimaks, et $\Lambda^4{}_4 \geq 1$ siis ja ainult siis, kui arvudel u^4 ja $\hat{u}^4$ on samad märgid. Selleks oletame esmalt, et $\Lambda^4{}_4 \geq 1$. Kui $u^4 > 0$, siis teoreemi 3.4 järgi $g\,(u, v) < 0$ ja seega 3.11 põhjal $\hat{u}^4 > 0$. Kui $u^4 < 0$, siis $g\,(u, v) > 0$, ja seega $\hat{u}^4 < 0$. Kokkuvõttes järeldub võrratusest $\Lambda^4{}_4 \geq 1$, et u^4 ja $\hat{u}^4$ on samamärgilised. Analoogiliselt saab näidata, et kui $\Lambda^4{}_4 \leq -1$, siis u^4 ja $\hat{u}^4$ on erimärgilised. □

Teoreemi tõestusest saame teha järgmise olulise järelduse.

Järeldus 3.2. *Kui Λ on mitteortokroonne, siis ta muudab kõikide ajasarnaste ja nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märgi.*

Järelduse tulemust arvestades on mõistlik edasises uurida vaid hulga $\mathcal{L}_{GH}$ elemente, mis on ortokroonsed. Kuna sellised Lorentzi teisendused ei muuda ajasarnaste ega nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märki, siis võime konkreetsuse mõttes piirduda vaid selliste ortonormaalsete baasidega $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$, kus $e_4 \sim \hat{e}_4$. Märgime, et siinjuures ei ole vahet kumba faktorhulga $\mathcal{M}/\!\sim$ ekvivalentsiklassi elemendid e_4 ja $\hat{e}_4$ kuuluvad, sest nende ekvivalentsiklasside täpne fikseerimine on meelevaldne.

Meenutades veel seost 3.4, siis saame kirjutada $\det\left(\Lambda^T \eta \Lambda\right) = \det \eta$, millest tuleneb $(\det \Lambda)^2 = 1$. Järelikult kehtib kas

$$\det \Lambda = 1 \text{ või } \det \Lambda = -1,$$

ja seejuures ütleme, et Λ on *Lorentzi päristeisendus*, kui $\det \Lambda = 1$.

Lause 3.4. *Hulk $\mathcal{L} := \{\Lambda \in \mathcal{L}_{GH} : \det \Lambda = 1,\ \Lambda^4{}_4 \geq 1\}$ on korrutamise suhtes rühma $\mathcal{L}_{GH}$ alamrühm, see tähendab ortokroonsed Lorentzi päristeisendusused moodustavad rühma.*

Tõestus. Veendumaks, et hulk $\mathcal{L}$ on rühm näitame, et ta on kinnine korrutamise ja pöördelemendi võtmise suhtes. Olgu $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$. Paneme tähele, et $\det(\Lambda_1\Lambda_2) = \det\Lambda_1 \cdot \det\Lambda_2 = 1$ ja seose 3.7 põhjal $\det\Lambda^{-1} = \det\left(\eta\Lambda^T\eta\right) = (-1)^2 \det\Lambda^T = \det\Lambda = 1$.
Seose 3.7 põhjal on ilmne ka $\left(\Lambda^{-1}\right)^4{}_4 = \left(\Lambda^T\right)^4{}_4 = \Lambda^4{}_4 \geq 1$. Veendumaks, et $\left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^4{}_4 \geq 1$ tähistame $\vec{a} = \left(\left(\Lambda_1\right)^4{}_1, \left(\Lambda_1\right)^4{}_2, \left(\Lambda_1\right)^4{}_2\right)$ ja $\vec{b} = \left(\left(\Lambda_2\right)^1{}_4, \left(\Lambda_2\right)^2{}_4, \left(\Lambda_2\right)^3{}_4\right)$ ning skalaarkorrustise $\vec{a}\cdot\vec{b}$ all mõtleme eukleidilist skalaarkorrutist ruumis $\mathbb{R}^3$. Selliseid tähistusi arvestades võime kirjutada

$$\begin{aligned}\left(\Lambda_1\Lambda_2\right)^4{}_4 &= \left(\Lambda_1\right)^4{}_1\left(\Lambda_2\right)^1{}_4 + \left(\Lambda_1\right)^4{}_2\left(\Lambda_2\right)^2{}_4 + \left(\Lambda_1\right)^4{}_3\left(\Lambda_2\right)^3{}_4 + \left(\Lambda_1\right)^4{}_4\left(\Lambda_2\right)^4{}_4 = \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b} + \left(\Lambda_1\right)^4{}_4\left(\Lambda_2\right)^4{}_4 .\end{aligned}$$

Võttes valemis 3.3 $a = b = 4$ saame $\left(\left(\Lambda_1\right)^4{}_4\right)^2 - \vec{a}\cdot\vec{a} = 1$, millest

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\left(\Lambda_1\right)^4{}_4\right)^2 - 1} \leq \left(\Lambda_1\right)^4{}_4 .$$

Analoogiliselt saame valemist 3.6, et $|\vec{b}| \leq \left(\Lambda_2\right)^4{}_4$ ja seega kokkuvõttes $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \leq \left(\Lambda_1\right)^4{}_4\left(\Lambda_2\right)^4{}_4$. Viimane aga tähendab, et $(\Lambda_1\Lambda_2) \geq 0$, millest piisab, et kehtiks $(\Lambda_1\Lambda_2) \geq 1$. Tõepoolest, kui $\hat{\Lambda} \in \mathcal{L}_{GH}$ ja tähistame $\vec{c} = \left(\frac{\hat{\Lambda}^4{}_1}{\hat{\Lambda}^4{}_4}, \frac{\hat{\Lambda}^4{}_2}{\hat{\Lambda}^4{}_4}, \frac{\hat{\Lambda}^4{}_3}{\hat{\Lambda}^4{}_4}\right)$, siis 3.3 põhjal

$$-1 = \left(\hat{\Lambda}^4{}_1\right)^2 + \left(\hat{\Lambda}^4{}_2\right)^2 + \left(\hat{\Lambda}^4{}_3\right)^2 - \left(\hat{\Lambda}^4{}_4\right)^2 = -\left(\hat{\Lambda}^4{}_4\right)^2\left(1 - \vec{c}\cdot\vec{c}\right).$$

Viimane võrdus saab kehtida vaid juhul, kui $1 - \vec{c}\cdot\vec{c} > 0$. Järelikult

$$\left(\left(\hat{\Lambda}\right)^4{}_4\right)^2 = \frac{1}{1 - \vec{c}\cdot\vec{c}} \geq 1$$

ehk kehtib kas $\left(\hat{\Lambda}\right)^4{}_4 \geq 1$ või $\left(\hat{\Lambda}\right)^4{}_4 \leq 1$. Sellega oleme näidanud, et $\mathcal{L}$ on rühm. □

Märkus 3.3. Rühma $\mathcal{L}$ lausest 3.4 nimetatakse sageli *Lorentzi rühmaks*, nagu ka rühma $\mathcal{L}_{GH}$.

Vaatleme järgnevalt lähemalt hulga $\mathcal{L}$ alamhulka $\mathcal{R}$, mille elemendid avalduvad kujul

$$R = \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 & 0 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 & 0 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kus $\left(R^i{}_j\right)_{i,j=1,2,3}$ on ortogonaalne ja unimodulaarne, see tähendab $\left(R^i{}_j\right)^{-1} = \left(R^i{}_j\right)^T$ ja $det\left(R^i{}_j\right) = 1$. Märgime, et tõepoolest $R \in \mathcal{L}$, sest $R^4{}_4 = 1$ definitsiooni järgi ning kasutades Laplace'i teoreemi saame $\det R = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det\left(R^i{}_j\right) = 1$. Samuti on täidetud ortogonaalsuse tingimus 3.4 kuna

$$R^T \eta R = \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right)^T \left(R^i{}_j\right) & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right)^{-1} \left(R^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta.$$

Paneme veel tähele, et hulk $\mathcal{R}$ on rühm. Tõepoolest, kui $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, siis

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \left((R_1)^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left((R_2)^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left((R_1)^i{}_j\right)\left((R_2)^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja seega $(R_1R_2)^4{}_4 = 1$ ning $\det\left(\left((R_1)^i{}_j\right)\left((R_2)^i{}_j\right)\right) = \det\left((R_1)^i{}_j\right) \det\left((R_1)^i{}_j\right) = 1$. Teisalt, kui $R \in \mathcal{R}$, siis valemist 3.7 saame

$$R^{-1} = \eta R^T \eta = \eta \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta = \eta \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right)^T & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R^i{}_j\right)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järelikult $\left(R^{-1}\right)^4{}_4 = 1$ ning $\det\left(\left(R^{-1}\right)^i{}_j\right) = \det\left(R^i{}_j\right)^T = \det\left(R^i{}_j\right) = 1$.
Et hulga $\mathcal{R}$ elemendid kirjeldavad koordinaatide teisendusi, mis pööravad ruumikoordinaate, siis ütleme teisenduse $R \in \mathcal{R}$ kohta *pööre* ja rühma $\mathcal{R}$ nimetame rühma $\mathcal{L}$ *pöörete alamrühmaks.*

Lause 3.5. *Olgu $\Lambda \in \mathcal{L}$. Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(i) Λ *on pööre, see tähendab* $\Lambda \in \mathcal{R}$*;*

(ii) $\Lambda^1{}_4 = \Lambda^2{}_4 = \Lambda^3{}_4 = 0$*;*

(iii) $\Lambda^4{}_1 = \Lambda^4{}_2 = \Lambda^4{}_3 = 0$*;*

(iv) $\Lambda^4{}_4 = 1$.

Tõestus. Implikatsioonid $(i) \Longrightarrow (ii), (i) \Longrightarrow (iii)$ ja $(i) \Longrightarrow (ii)$ on pöörde definitsiooni arvestades ilmsed.
Näitamaks, et $(ii), (iii)$ ja (iv) on samaväärsed märgime, et fikseerides seostes 3.3 ja 3.6 sobivalt indeksid saame

$$\left(\Lambda^1{}_4\right)^2 + \left(\Lambda^2{}_4\right)^2 + \left(\Lambda^3{}_4\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 = -1,$$
$$\left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 = -1.$$

Arvestades, et Λ on ortokroonne, siis ${\Lambda^4}_4 = 1$ ja seega

$$\left({\Lambda^1}_4\right)^2 + \left({\Lambda^2}_4\right)^2 + \left({\Lambda^3}_4\right)^2 - 1 = -1,$$
$$\left({\Lambda^4}_1\right)^2 + \left({\Lambda^4}_2\right)^2 + \left({\Lambda^4}_3\right)^2 - 1 = -1,$$

mis saab võimalik olla vaid siis, kui ${\Lambda^1}_4 = {\Lambda^2}_4 = {\Lambda^3}_4 = {\Lambda^4}_1 = {\Lambda^4}_2 = {\Lambda^4}_3 = 0$. Tõestuse lõpetamiseks jääb veel näidata, et kui $\Lambda \in \mathcal{L}$ ja kehtib (ii) (ja seega ka (ii) ning (iv)), siis $\left({\Lambda^i}_j\right)_{i,j=1,2,3}$ on ortogonaalne ja unimodulaarne. Võrdus $\det\left({\Lambda^i}_j\right) = 1$ on tõestatud osas kus näitasime, et $\mathcal{R}$ on rühm ja seega on $\left({\Lambda^i}_j\right)$ ortogonaalne. Jääb veel näidata, et $\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} = \left({\Lambda^i}_j\right)^T$. Selleks märgmine, et blokkmaatriksi pööramise eeskirja kohaselt

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \left({\Lambda^i}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} \left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} + \left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} 0 \left(1 - 0\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} 0 \left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} & -\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} 0 \left(1 - 0\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} \\ -\left(1 - 0\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} 0 \left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} & \left(1 - 0\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osas kus näitasime, et $\mathcal{R}$ on rühm tuli ka välja, et $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \left({\Lambda^i}_j\right)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, millest $\left({\Lambda^i}_j\right)^{-1} = \left({\Lambda^i}_j\right)^T$ ehk $\left({\Lambda^i}_j\right)$ on ortogonaalne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et Λ on pööre, nagu tarvis. $\square$

Summary

Siia tuleb ingliskeelne kokkuvõte...

Viited

[Kil05] M. Kilp. *Algebra I.* Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[Nab12] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity.* Applied mathematical sciences. Springer, New York, NY, 2nd edition, 2012.

[Põl12] M. Põldvere. Funktsionaalanalüüs 2 loengukonspekt, 2012.