

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
Matemaatika instituut  
Matemaatika eriala

Priit Lätt  
**Minkowski aegruumi geomeetriast**  
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor: .....”.....”juuni 2013  
Juhendaja: .....”.....”juuni 2013

Lubada kaitsmisele  
Mingi inimene .....”.....”juuni 2013

TARTU 2013

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Vajalikud eelteadmised</b>	<b>3</b>
2.1	ptk . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Minkowski ruumi geomeetriline struktuur</b>	<b>4</b>
3.1	Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused . . . . .	4
3.2	Minkowski aegruumi mõiste . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Lisa 1</b>	<b>7</b>
4.1	Skalaarkorrutisega seotud lisatulemused . . . . .	7

# 1 Sissejuhatus

Märgime, et töös kasutame summade tähistamisel Einstein'i summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid  $i$  ja  $j$ , mis omavad väärtusi  $1, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), siis kirjutame

$$x^i e_a = \sum_{a=1}^n x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n,$$

$$\lambda^i_j x^j = \sum_{j=1}^n \lambda^i_j x^j = \lambda^i_1 x^1 + \lambda^i_2 x^2 + \dots + \lambda^i_n x^n,$$

$$\eta_{ij} u^i v^j = \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \dots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \dots + \eta_{nn} u^n v^n,$$

ja nii edasi.

Vektori  $u$  pikkust tähistame edaspidi  $|u|$ .

## 2 Vajalikud eelteadmised

Selles patükis toome välja defnitsioonid ja tähtsamad tulemusedd, mida läheb tarvis töö järgmistes osades. Lihtsamad tulemused, millele on pööratud tähelepanu kursustes Algebra I või Geomeetria II, esitame seejuures tõestusteta.

### 2.1 ptk

## 3 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

### 3.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu  $\mathbb{V}$   $n$ -mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  on *bilineaarvorm*, kui  $g$  on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab  $g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \alpha_2 g(u_2, v)$  ja  $g(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 g(u, v_1) + \alpha_2 g(u, v_2)$  kus  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  on suvalised reaalarvud ning  $u, u_1, u_2, v, v_1$  ja  $v_2$  on vektorruumi  $\mathbb{V}$  elemendid.

Olgu  $u, v \in \mathbb{V}$ . Bilineaarvormi  $g$  nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui  $g(u, v) = g(v, u)$  ja *mittekidunuks*, kui  $u = 0$  järeldub tingimusest iga  $v \in \mathbb{V}$  korral  $g(u, v) = 0$ .

**Definitsioon 3.1.** *Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  nimetatakse skalaarkorrutiseks. Vektorite  $u$  ja  $v$  skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul  $u \cdot v$ .*

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$  kõikide  $u, v \in \mathbb{V}$  korral, sest bilineaarsuse ingumusest saame  $0 \cdot v = (0 * 0) \cdot v = 0 * (0 \cdot v) = 0$ ,
- kui  $u_1, u_2, \dots, u_n, u, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ , siis  $(\sum_{i=1}^n u_i) \cdot v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v)$  ja  $u \cdot (\sum_{i=1}^n v_i) = \sum_{i=1}^n (u \cdot v_i)$ ,
- kui  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  on vektorruumi  $\mathbb{V}$  baas ning kui tähistame  $\eta_{ij} = e_i \cdot e_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , siis  $u \cdot v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u^i v^j = \eta_{ij} u^i v^j$ , kus  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$ .

**Näide 3.1.** *Vaatleme ruumi  $\mathbb{R}^n$ . Olgu  $u = (u^1, u^2, \dots, u^n), v = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ . Lihtne on veenduda, et kujutus  $g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^n v^n$  on skalaarkorrutis.*

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga  $v \neq 0$  korral  $g(v, v) > 0$ . Kui  $g(v, v) < 0$  kõikide  $v \neq 0$  korral, siis ütleme, et  $g$  on *negatiivselt määratud* ja kui  $g$  pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et  $g$  on *määramata*.

**Definitsioon 3.2.** *Kui  $g$  on skalaarkorrutis vektorruumil  $\mathbb{V}$ , siis nimetame vektoreid  $u$  ja  $v$   $g$ -ortogonaalseteks (või lihtsalt ortogonaalseteks, kui  $g$  roll on kontekstist selge) kui  $g(u, v) = 0$ . Kui  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  on alamruum, siis ruumi  $\mathbb{W}$  ortogonaalne täiend  $\mathbb{W}^\perp$  on hulk  $\mathbb{W}^\perp = \{u \in \mathbb{V} : \forall v \in \mathbb{W} g(u, v) = 0\}$ .*

**Definitsioon 3.3.** *Skalaarkorrutise  $g$  poolt määratud ruutvormiks nimetame kujutust  $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , kus  $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v$ .*

**Lause 3.1.** Olgu  $g_1$  ja  $g_2$  kaks skalaarkorrutist vektorruumil  $\mathbb{V}$ , mis rahuldavad tingimust  $g_1(u, u) = g_2(u, u)$  iga  $v \in \mathbb{V}$  korral. Siis kehtib  $g_1(u, v) = g_2(u, v)$  kõikide  $u, v \in \mathbb{V}$  korral, ehk teisi sõnu,  $g_1 \equiv g_2$ .

*Tõestus.* Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

□

**Teoreem 3.1.** Olgu  $\mathbb{V}$  reaalse  $n$ -mõõtmeline vektorruum ning olgu  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  skalaarkorrutis. Vektorruumil  $\mathbb{V}$  leidub baas  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  nii, et  $g(e_i, e_j) = 0$  kui  $i \neq j$  ja  $Q(e_i) = \pm 1$  iga  $i = 1, 2, \dots, n$  korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral  $Q(e_i) = -1$  on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.

*Tõestus.* Arvestades Gram<sup>1</sup>-Schmidt<sup>2</sup> algoritmi muutub teoreemi tõestus ilmsiks<sup>3</sup>.

□

**Definitsioon 3.4.** Vektorruumi  $\mathbb{V}$  baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.

Skalaarkorrutise  $g$  suhtses ortonormaalse baasi  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  vektorite arvu  $r$ , mille korral  $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , nimetame skalaarkorrutise  $g$  indeksiks. Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid  $e_i$ , mille korral  $Q(e_i) = -1$ , paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

korral  $Q(e_i) = 1$ , kui  $i = 1, 2, \dots, n-r$ , ja  $Q(e_i) = -1$ , kui  $i = n-r+1, \dots, n$ . Tähistades  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$  saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise  $g$  arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \dots - u^n v^n.$$

---

<sup>1</sup>Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) - taani matemaatik

<sup>2</sup>Erhard Schmidt (1876 – 1959) - Tartus sündinud saksa matemaatik

<sup>3</sup>Vaata Lisa 1, Algoritm 4.1

## 3.2 Minkowski aegruumi mõiste

**Definitsioon 3.5.** Minkowski aegruumiks nimetatakse 4-mõõtmetelist reaalsel vektorruumi  $\mathcal{M}$ , millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm  $g$  indeksiga 1.

Ruumi  $\mathcal{M}$  elemente nimetatakse sündmusteks ja kujutust  $g$  nimetatakse Lorentzi skalaarkorrutiseks ruumil  $\mathcal{M}$ .

Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil  $\mathcal{M}$  leidub baas  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  järgmise omadusega. Tähistades  $u = u^i e_i$  ja  $v = v^i e_i$ , siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  või lühidalt  $\{e_a\}$  ruumi  $\mathcal{M}$  ortonormeeritud baas. Kui  $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$ , siis tähistame sündmuse  $x$  koordinaadid baasi  $\{b_a\}$  suhtes  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  ja seejuures ütleme, et  $(x^1, x^2, x^3)$  on ruumikoordinaadid ning  $(x^4)$  on ajakoordinaat.

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis  $g$  ei ole ruumil  $\mathcal{M}$  positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid  $u \in \mathcal{M}, u \neq 0$  nii, et  $g(u, u) = 0$ . Selliseid vektoreid nimetatakse nullvektoriteks. Osutub, et ruumis  $\mathcal{M}$  leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullvektoritest.

**Näide 3.2.** Üheks ruumi  $\mathcal{M}$  baasiks, mis koosneb vaid nullvektoritest on näiteks  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ , kus  $e_1^0 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $e_2^0 = (0, 1, 0, 1)$ ,  $e_3^0 = (0, 0, 1, 1)$  ja  $e_4^0 = (-1, 0, 0, 1)$ . Tõepoolest, süsteemi  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$  lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja  $e_1^0, \dots, e_4^0$  on nullvektorid, sest

$$\begin{aligned} Q(e_1^0) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_2^0) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_3^0) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q(e_4^0) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

**Teoreem 3.2.** Olgu  $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  nullvektorid. Vektorid  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub  $t \in \mathbb{R}$  nii, et  $u = tv$ .

*Tõestus. Piisavus.* Olgu  $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  paralleelsed nullvektorid. Siis leidub  $t \in \mathbb{R}$  nii, et  $u = tv$ . Seega

$$g(u, v) = g(tv, v) = tg(v, v) = 0$$

ehk vektorid  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed, nagu tarvis.

*Tarvilikkus.* Olgu  $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$  ortogonaalsed nullvektorid, st  $g(u, v) = 0$ . *Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuse*  $g^2(u, v) \leq g(u, u)g(v, v)$  põhjal  $0 \leq g(u, u)g(v, v)$ , sest  $u$  ja  $v$  on ortogonaalsed. Teisalt, et  $u$  ja  $v$  on nullvektorid, siis  $\leq g(u, u)g(v, v) = 0$  ja järelikult kehtib Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuses võrdud  $0 = 0$ , mis tähendab, et  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad.  $\square$



## 4 Lisa 1

### 4.1 Skalaarkorrutisega seotud lisatulemused

**Algoritm 4.1** (Gram-Schmidti algoritm). *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega  $g$  varustatud vektorruumis  $\mathbb{V}$  leidub ortonormeeritud baas.*

Järgnevaga anname eeskirja sellise baasi konstrueermiseks. Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui  $\{b\}$  on mingi baas, siis  $\left\{\frac{b}{\sqrt{b \cdot b}}\right\}$  on ortonormeeritud baas. Eeldame nüüd, et igas  $(n-1)$ -mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ning olgu  $\mathbb{V}$   $n$ -mõõtmeline vektorruum baasiga  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Eelduse järgi on ruumis  $\mathbb{V}$  ortonormeeritud süsteem  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ , kusjuures

$$\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} = \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel  $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$  omadusega

$$a_n \perp \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\},$$

sest siis  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \frac{a_n}{|a_n|}\}$  on ruumi  $\mathbb{V}$  ortonormeeritud baas. Otsime vektorit  $a_n$  kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Paneme tähele, et kui  $a_n$  on sellisel kujul, siis  $a_n \neq 0$ , sest vastasel korral  $b_n \in \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ , mis on vastuolus süsteemi  $\text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$  lineaarse sõltumatusega. Kui  $a_n$  on kujul 4.1, siis kõikide  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  korral

$$a_n \perp e_k \iff a_n \cdot e_k = 0 \iff \left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = 0$$

Samas, kuna

$$\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = b_n \cdot e_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j (e_j \cdot e_k) = b_n \cdot e_k + \alpha_k,$$

siis  $a_n \perp e_k \iff \alpha_k = -(b_n \cdot e_k)$ . Järelikult võime võtta  $a_n := b_n - \sum_{j=1}^{n-1} (b_n \cdot e_j) e_j$ . Kirjeldatud protsessi teel ortonormeeritud baasi leidmist nimetatakse *Gram-Schmidti algoritmiks*.

**Teoreem 4.1** (Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus). Olgu  $\mathbb{V}$  vektorruum skalaarkorrutisega  $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sellisel juhul kehtib võrratus

$$g^2(u, v) \leq g(u, u) g(v, v) \quad (4.2)$$

kõikide  $u, v \in \mathbb{V}$  korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltumatud.

*Tõestus.* Olgu  $\mathbb{V}$  reaalne vektorruum skalaarkorrutisega  $g$  ning olgu  $u, v \in \mathbb{V}$ . Siis iga  $\lambda \in \mathbb{R}$  korral

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(u + \lambda v, u + \lambda v) = g(u, u) + 2g(u, \lambda v) + g(\lambda v, \lambda v) \\ &= g(u, u) + 2\lambda g(u, v) + \lambda^2 g(v, v) \leq g(u, u) + 2\lambda |g(u, v)| + \lambda^2 g(v, v). \end{aligned}$$

Saime  $\lambda$  suhtes võrratuse

$$g(v, v) \lambda^2 + 2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on  $\mathbb{R}$ . Kui  $g(v, v) > 0$ , siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminant  $4|g(u, v)|^2 - 4g(u, u)g(v, v) \leq 0$ , millest järeldub vahetult võrratus (4.1). Juhul  $g(v, v) = 0$  peab kõikide  $\lambda \in \mathbb{R}$  korral kehtima  $2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0$ , mis on võimalik vaid siis, kui  $g(u, v) = 0$ . Sellisel juhul on tingimuse (4.1) kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et tingimuses (4.1) kehtib võrdus parajasti siis, kui  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad.

Oletame esiteks, et vektorid  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub  $\alpha \in \mathbb{R}$  selliselt, et  $u = \alpha v$ . Seega

$$\begin{aligned} g^2(u, v) &= g^2(\alpha v, v) = \alpha^2 g^2(v, v) = \alpha^2 g(v, v) g(v, v) \\ &= g(\alpha v, \alpha v) g(v, v) = g(u, u) g(v, v), \end{aligned}$$

nagu tarvis.

Kehtigu nüüd tingimuses (4.1) võrdus. Veendume, et siis  $u$  ja  $v$  on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et  $u \neq 0$  ja  $v \neq 0$ . Siis ka  $g(u, u) \neq 0$  ja  $g(v, v) \neq 0$ . Paneme tähele, et

$$g^2(u, v) = g(u, u) g(v, v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{g^2(u, v) g(v, v)}{g^2(v, v)} = g(u, u).$$

Tähistades  $a := \frac{g(u, v)}{g(v, v)}$ , saame, et  $a^2 g(v, v) = g(u, u)$  ehk  $g(av, av) = g(u, u)$ , millest saame  $u = av$ .

□