

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Priit Lätt
Minkowski aegruumi geomeetriast
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor:”.....”juuni 2013
Juhendaja:”.....”juuni 2013

TARTU 2013

Sisukord

1	Sissejuhatus	2
2	Vajalikud eelteadmised	3
2.1	ptk	3
3	Minkowski ruumi geomeetriline struktuur	4
3.1	Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused	4
3.2	Minkowski aegruumi mõiste	6
3.3	Ortogonaalteisendus ruumis \mathcal{M}	8
4	Lisa 1	10
4.1	Skalaarkorrutisega seotud abitulemused	10

1 Sissejuhatus

Märgime, et töös kasutame summade tähistamisel Einstein'i summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid i ja j , mis omavad väärtusi $1, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}$), siis kirjutame

$$x^i e_a = \sum_{a=1}^n x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n,$$

$$\lambda^i_j x^j = \sum_{j=1}^n \lambda^i_j x^j = \lambda^i_1 x^1 + \lambda^i_2 x^2 + \dots + \lambda^i_n x^n,$$

$$\eta_{ij} u^i v^j = \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \dots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \dots + \eta_{nn} u^n v^n,$$

ja nii edasi.

Vektori u pikkust tähistame edaspidi $|u|$.

2 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis toome välja definitsioonid ja tähtsamad tulemused, mida läheb tarvis töö järgmistes osades. Lihtsamad tulemused, millele on pööratud tähelepanu kursustes Algebra I või Geomeetria II, esitame seejuures tõestusteta.

2.1 ptk

3 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

3.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu \mathbb{V} n -mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ on *bilineaarvorm*, kui g on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab $g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \alpha_2 g(u_2, v)$ ja $g(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 g(u, v_1) + \alpha_2 g(u, v_2)$ kus α_1 ja α_2 on suvalised reaalarvud ning u, u_1, u_2, v, v_1 ja v_2 on vektorruumi \mathbb{V} elemendid.

Olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Bilineaarvormi g nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $g(u, v) = g(v, u)$ ja *mittekidunuks*, kui $u = 0$ järeldub tingimusest iga $v \in \mathbb{V}$ korral $g(u, v) = 0$.

Definitsioon 3.1. *Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse skalaarkorrutiseks. Vektorite u ja v skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul $u \cdot v$.*

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, sest bilineaarsuse ingumusest saame $0 \cdot v = (0 * 0) \cdot v = 0 * (0 \cdot v) = 0$,
- kui $u_1, u_2, \dots, u_n, u, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$, siis $(\sum_{i=1}^n u_i) \cdot v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v)$ ja $u \cdot (\sum_{i=1}^n v_i) = \sum_{i=1}^n (u \cdot v_i)$,
- kui $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on vektorruumi \mathbb{V} baas ning kui tähistame $\eta_{ij} = e_i \cdot e_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, siis $u \cdot v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u^i v^j = \eta_{ij} u^i v^j$, kus $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$.

Näide 3.1. *Vaatleme ruumi \mathbb{R}^n . Olgu $u = (u^1, u^2, \dots, u^n), v = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Lihtne on veenduda, et kujutus $g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^n v^n$ on skalaarkorrutis.*

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga $v \neq 0$ korral $g(v, v) > 0$. Kui $g(v, v) < 0$ kõikide $v \neq 0$ korral, siis ütleme, et g on *negatiivselt määratud* ja kui g pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et g on *määramata*.

Definitsioon 3.2. *Kui g on skalaarkorrutis vektorruumil \mathbb{V} , siis nimetame vektoreid u ja v g -ortogonaalseteks (või lihtsalt ortogonaalseteks, kui g roll on kontekstist selge), kui $g(u, v) = 0$. Kui $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ on alamruum, siis ruumi \mathbb{W} ortogonaalne täiend \mathbb{W}^\perp on hulk $\mathbb{W}^\perp = \{u \in \mathbb{V} : \forall v \in \mathbb{W} g(u, v) = 0\}$.*

Definitsioon 3.3. *Skalaarkorrutise g poolt määratud ruutvormiks nimetame kujutust $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v$, $v \in \mathbb{V}$.*

Lause 3.1. Olgu g_1 ja g_2 kaks skalaarkorrutist vektorruumil \mathbb{V} , mis rahuldavad tingimust $g_1(u, u) = g_2(u, u)$ iga $u \in \mathbb{V}$ korral. Siis kehtib $g_1(u, v) = g_2(u, v)$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, ehk teisi sõnu, $g_1 \equiv g_2$.

Tõestus. Olgu \mathbb{V} vektorruum ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$ ja kehtigu võrdus $g_1(u, u) = g_2(u, u)$ iga u korral. Defineerime uue kujutuse

$$g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, g(u, v) \mapsto g_1(u, v) - g_2(u, v).$$

Paneme esiteks tähele, et selliselt defineeritud g on sümmeetriline ja bilineaarne. Tõepoolest, olgu $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$. Siis

$$\begin{aligned} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= g_1(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - g_2(\alpha u_1 + \beta u_2, v) \\ &= \alpha g_1(u_1, v) + \beta g_1(u_2, v) - \alpha g_2(u_1, v) - \beta g_2(u_2, v) \\ &= \alpha (g_1(u_1, v) - g_2(u_1, v)) + \beta (g_1(u_2, v) - g_2(u_2, v)) \\ &= \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) \text{ ja analoogiliselt} \\ g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2). \end{aligned}$$

Kujutuse g sümmeetrilisus on g_1 ja g_2 sümmeetrilisust arvestades ilmne. Tõestuse lõpetamiseks piisab nüüd näidata, et $g = 0$. Ühelt poolt paneme tähele, et

$$g(u + v, u + v) = g_1(u + v, u + v) - g_2(u + v, u + v) = 0.$$

Teisalt

$$\begin{aligned} g(u + v, u + v) &= g(u, u + v) + g(v, u + v) \\ &= g(u, u) + g(u, v) + g(v, u) + g(v, v) \\ &= g(u, u) + 2g(u, v) + g(v, v) = 2g(u, v). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime $2g(u, v) = 0$ ehk $g(u, v) = 0$, mida oligi tarvis. \square

Teoreem 3.1. Olgu \mathbb{V} reaalne n -mõõtmeline vektorruum ning olgu $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ skalaarkorrutis. Vektorruumil \mathbb{V} leidub baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nii, et $g(e_i, e_j) = 0$ kui $i \neq j$ ja $Q(e_i) = \pm 1$ iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral $Q(e_i) = -1$ on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.

Tõestus. Arvestades Gram¹-Schmidt² algoritmi muutub teoreemi tõestus ilmsiks³. \square

¹Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) - taani matemaatik

²Erhard Schmidt (1876 – 1959) - Tartus sündinud saksa matemaatik

³Vaata Lisa 1, Märkus 4.1

Definitsioon 3.4. Vektorruumi \mathbb{V} baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.

Skalaarkorrutise g suhtes ortonormaalse baasi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorite arvu r , mille korral $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nimetame skalaarkorrutise g indeksiks. Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid e_i , mille korral $Q(e_i) = -1$, paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

korral $Q(e_i) = 1$, kui $i = 1, 2, \dots, n-r$, ja $Q(e_i) = -1$, kui $i = n-r+1, \dots, n$. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$ saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise g arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \dots - u^n v^n.$$

Märkus 3.1. Vektorruumi \mathbb{V} skalaarkorrutisega g , mille indeks $r > 0$ nimetatakse pseudoeukleidiliseks ruumiks.

3.2 Minkowski aegruumi mõiste

Definitsioon 3.5. Minkowski aegruumiks nimetatakse 4-mõõtmetelist reaalsel vektorruumi \mathcal{M} , millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm g indeksiga 1.

Ruumi \mathcal{M} elemente nimetatakse sündmusteks ja kujutust g nimetatakse Lorentzi skalaarkorrutiseks ruumil \mathcal{M} .

Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil \mathcal{M} leidub baas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ järgmise omadusega. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ või lühidalt $\{e_a\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas. Kui $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$, siis tähistame sündmuse x koordinaadid baasi $\{b_a\}$ suhtes (x^1, x^2, x^3, x^4) ja seejuures ütleme, et (x^1, x^2, x^3) on ruumikoordinaadid ning (x^4) on ajakoordinaat.

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis g ei ole ruumil \mathcal{M} positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid $u \in \mathcal{M}, u \neq 0$ nii, et $g(u, u) = 0$. Selliseid vektoreid nimetatakse nullvektoriteks. Osutub, et ruumis \mathcal{M} leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullvektoritest.

Näide 3.2. Üheks ruumi \mathcal{M} baasiks, mis koosneb vaid nullvektoritest on näiteks $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$, kus $e_1^0 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2^0 = (0, 1, 0, 1)$, $e_3^0 = (0, 0, 1, 1)$ ja $e_4^0 = (-1, 0, 0, 1)$. Tõepoolest, süsteemi $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja e_1^0, \dots, e_4^0 on nullvektorid, sest

$$\begin{aligned} Q(e_1^0) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_2^0) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_3^0) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q(e_4^0) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

Teoreem 3.2. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nullvektorid. Vektorid u ja v on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$.

Tõestus. Piisavus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ paralleelsed nullvektorid. Siis leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$. Seega

$$g(u, v) = g(tv, v) = tg(v, v) = 0$$

ehk vektorid u ja v on ortogonaalsed, nagu tarvis.

Tarvilikkus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ ortogonaalsed nullvektorid, st $g(u, v) = 0$. Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuse⁴ $g^2(u, v) \leq g(u, u)g(v, v)$ põhjal $0 \leq g(u, u)g(v, v)$, sest u ja v on ortogonaalsed. Teisalt, et u ja v on nullvektorid, siis $g(u, u)g(v, v) = 0$ ja järelikult kehtib Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuses võrdud $0 = 0$, mis tähendab, et u ja v on lineaarselt sõltuvad. \square

Võtame nüüd vaatluse alla kaks sellist sündmust $x, x_0 \in \mathcal{M}$, $x \neq x_0$, mida ühendav vektor on nullvektor, see tähendab $Q(x - x_0) = 0$. Seda asjaolu arvesse võttes saame, et kui $\{e_a\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormaalne baas ja me tähistame $x = x^a e_a$, $x_0 = x_0^a e_a$, siis kehtib võrdus

$$Q(x - x_0) = (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0. \quad (3.1)$$

Kõigi selliste $x \in \mathcal{M}$ hulka, mille korral on tingimus (3.1) täidetud nimetatakse nullkoonuseks (või ka valguse koonuseks) punktis x_0 ja tähistatakse $\mathcal{C}_N(x_0)$. Seega $\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}$. Kirjeldavalt võime öelda, et kõik hulga $\mathcal{C}_N(x_0)$ elemendid on ühendatavad sündmusega x_0 valguskiire $R_{x_0, x}$ abil, mille me defineerime kui $R_{x_0, x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$.

⁴Vaata Lisa 1, Teoreem 4.2

3.3 Ortogonaalteisendus ruumis \mathcal{M}

Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ ruumi \mathcal{M} kaks ortonormaalset baasi. Leidub parajasti üks selline lineaarne kujutus $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, et $L(e_a) = \hat{e}_a$, $a = 1, 2, 3, 4$. Järgnevaga uurime kujutuse L omadusi veidi täpsemalt.

Definitsioon 3.6. Ruumi \mathcal{M} lineaarset kujutust $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ nimetatakse ortogonaalteisenduseks, kui ta säilitab skalaarkorrutise g , see tähendab iga x ja y korral ruumist \mathcal{M} kehtib võrdus $g(Lx, Ly) = g(x, y)$.

Lause 3.2. Olgu $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ lineaarne kujutus. Siis on järgmised väited samaväärsed:

- (i) L on ortogonaalteisendus;
- (ii) L säilitab ruumi \mathcal{M} ruutvormi, see tähendab $Q(Lx) = Q(x)$ iga $x \in \mathcal{M}$ korral;
- (iii) L kujutab suvalise ruumi \mathcal{M} ortonormaalse baasi ruumi \mathcal{M} ortonormaalseks baasiks.

Tõestus. (i) \implies (ii). Olgu L ortogonaalne teisendus. Siis definitsiooni põhjal $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ iga $x, y \in \mathcal{M}$ korral. Seega kehtib ka $Q(Lx) = g(Lx, Lx) = g(x, x) = Q(x)$ kõikide $x \in \mathcal{M}$ korral ehk L säilitab ruutvormi.

(ii) \implies (i) on täpselt Lause 3.1.

(ii) \implies (iii). Kehtigu (ii) (ja seega ka (i)) ning olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortogonaalne baas ruumis \mathcal{M} . Siis ka $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ on ortonormaalne baas ruumis \mathcal{M} , sest

$$g(Le_i, Le_j) = g(e_i, e_j) = \begin{cases} \pm 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

ja arvestades kujutuse L lineaarsust, on ka süsteem $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ lineaarselt sõltumatu.

(iii) \implies (ii). Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas ja kehtigu tingimus (iii). Veendume, et alati $Q(Lx) = Q(x)$, kus $x \in \mathcal{M}$ on suvaline. Fikseerime $x \in \mathcal{M}$ ning esitugu ta koordinaatides kujul $x = x^i e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$Q(x) = Q(x^i e_i) = x^i Q(e_i) = x^i Q(Le_i) = Q(x^i Le_i) = Q(L(x^i e_i)) = Q(Lx).$$

□

Ruumi kokkuhoiu mõttes toome sisse 4×4 maatriksi η , mille me defineerime kui

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ja mille elemente tähistame vastavalt vajadusele kas η_{ab} või η^{ab} , $a, b = 1, 2, 3, 4$. Sellise tähistuse korral $\eta_{ab} = 1$, kui $a = b = 1, 2, 3$ ja $\eta_{ab} = -1$, kui $a = b = 4$ ning $\eta_{ab} = 0$ muudel juhtudel. Seega saame kirjutada $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$, kus $\{e_a\}$ on mingi \mathcal{M} ortonormeeritud baas. Enamgi veel, avaldades vektorid $u, v \in \mathcal{M}$ baasivektorite kaudu $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, saame summeerimiskokkulepet arvestades kirjutada $g(u, v) = u \cdot v = \eta_{ab} u^a v^b$.

Olgu $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ruumi \mathcal{M} ortogonaalteisendus ja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ selle ruumi ortonormeeritud baas. Lause 3.2. põhjal on siis ka $\hat{e}_1 = Le_1, \hat{e}_2 = Le_2, \hat{e}_3 = Le_3, \hat{e}_4 = Le_4$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas, kusjuures me iga e_i , $i = 1, 2, 3, 4$ saab esitada vektorite \hat{e}_j lineaarkombinatsioonina kujul

$$e_i = \lambda^1_i \hat{e}_1 + \lambda^2_i \hat{e}_2 + \lambda^3_i \hat{e}_3 + \lambda^4_i \hat{e}_4 = \lambda^j_i \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.2)$$

kus arvud λ^j_i on mingid reaalarvulised konstandid. Arvestades valemit (3.2) võime nüüd ortogonaalsuse tingimuse $g(e_c, e_d) = \eta_{cd}$, $c, d = 1, 2, 3, 4$, kirjutada kujul

$$\lambda^1_c \lambda^1_d + \lambda^2_c \lambda^2_d + \lambda^3_c \lambda^3_d - \lambda^4_c \lambda^4_d = \eta_{cd} \quad (3.3)$$

või kasutades summeerimiskokkulepet, siis lühidalt

$$\lambda^a_c \lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \quad (3.4)$$

4 Lisa 1

4.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused

Teoreem 4.1. *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega g varustatud vektorruumis \mathbb{V} leidub ortonormeeritud baas.*

Tõestus. Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui $\{b\}$ on mingi baas, siis $\left\{\frac{1}{|b|}b\right\}$ on ortonormeeritud baas. Eeldame nüüd, et igas $(n-1)$ -mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ning olgu \mathbb{V} n -mõõtmeline vektorruum baasiga $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Eelduse järgi on ruumis \mathbb{V} ortonormeeritud süsteem $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$, kusjuures

$$\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} = \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ omadusega

$$a_n \perp \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\},$$

sest siis $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \frac{1}{|a_n|}a_n\}$ on ruumi \mathbb{V} ortonormeeritud baas. Otsime vektorit a_n kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Paneme tähele, et kui a_n on sellisel kujul, siis $a_n \neq 0$, sest vastasel korral $b_n \in \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$, mis on vastuolus süsteemi $\text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ lineaarse sõltumatusega. Kui a_n on kujul (4.1), siis kõikide $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ korral

$$a_n \perp e_k \iff a_n \cdot e_k = 0 \iff \left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = 0$$

Samas, kuna

$$\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = b_n \cdot e_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j (e_j \cdot e_k) = b_n \cdot e_k + \alpha_k,$$

siis $a_n \perp e_k \iff \alpha_k = -(b_n \cdot e_k)$. Järelikult võime võtta $a_n := b_n - \sum_{j=1}^{n-1} (b_n \cdot e_j) e_j$. \square

Märkus 4.1. *Teoreemi 4.1 tõestuses antud algortimi ortonormeeritud baasi leidmiseks nimetatakse Gram-Schmidt'i algoritmiks või ortogonaliseerimisprotsessiks.*

Teoreem 4.2 (Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus). Olgu \mathbb{V} vektorruum skalaarkorrutisega $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Sellisel juhul kehtib võrratus

$$g^2(u, v) \leq g(u, u) g(v, v) \quad (4.2)$$

kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Tõestus. Olgu \mathbb{V} reaalne vektorruum skalaarkorrutisega g ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Siis iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(u + \lambda v, u + \lambda v) = g(u, u) + 2g(u, \lambda v) + g(\lambda v, \lambda v) \\ &= g(u, u) + 2\lambda g(u, v) + \lambda^2 g(v, v) \leq g(u, u) + 2\lambda |g(u, v)| + \lambda^2 g(v, v). \end{aligned}$$

Saime λ suhtes võrratuse

$$g(v, v) \lambda^2 + 2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on \mathbb{R} . Kui $g(v, v) > 0$, siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminant $4|g(u, v)|^2 - 4g(u, u)g(v, v) \leq 0$, millest järeldub vahetult võrratus (4.1). Juhul $g(v, v) = 0$ peab kõikide $\lambda \in \mathbb{R}$ korral kehtima $2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0$, mis on võimalik vaid siis, kui $g(u, v) = 0$. Sellisel juhul on tingimuse (4.1) kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et tingimuses (4.1) kehtib võrdus parajasti siis, kui u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Oletame esiteks, et vektorid u ja v on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ selliselt, et $u = \alpha v$. Seega

$$\begin{aligned} g^2(u, v) &= g^2(\alpha v, v) = \alpha^2 g^2(v, v) = \alpha^2 g(v, v) g(v, v) \\ &= g(\alpha v, \alpha v) g(v, v) = g(u, u) g(v, v), \end{aligned}$$

nagu tarvis.

Kehtigu nüüd tingimuses (4.1) võrdus. Veendume, et siis u ja v on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et $u \neq 0$ ja $v \neq 0$. Siis ka $g(u, u) \neq 0$ ja $g(v, v) \neq 0$. Paneme tähele, et

$$g^2(u, v) = g(u, u) g(v, v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{g^2(u, v) g(v, v)}{g^2(v, v)} = g(u, u).$$

Tähistades $a := \frac{g(u, v)}{g(v, v)}$, saame, et $a^2 g(v, v) = g(u, u)$ ehk $g(av, av) = g(u, u)$, millest $u = av$.

□