TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Priit Lätt

Minkowski aegruumi geomeetriast

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor: .... "....." juuni 2013
Juhendaja: .... "....." juuni 2013

TARTU 2013

Contents

Sissejuhatus

Neljamõõtmeline reaalne vektorruum, mille kolme koordinaati vaatleme kui ruumikoordinaate ja neljandat kui aega kirjeldavat koordinaati, nimetame Minkowski[1] aegruumiks. Osutub, et selline matemaatiline konstruktsioon loob väga sobivad tööriistad Einsteini erirelatiivsusteooria formuleerimiseks.

Käesoelva bakalaureusetöö esimeseks eesmärgiks on tutvustada Minkowski aegruumi klassikalisi matemaatilisi omadusi, pööramata liigselt tähelepanu nende füüsikalisele tähendusele. Vaadeldavate omadustena peame siinkohal eelkõige silmas ruumi elementide teisenemisi ja neid teisenemisi kirjeldavaid eeskirju. Olulise erinevusena teiste samalaadsete käsitlustega võib välja tuua asjaolu, et siin töös püüame pea kõiki väiteid põhjendada matemaatilise aruteluga. Teemakohane kirjandus on tavaliselt pigem füüsikaalane, siis tõestused üldjuhul kas puuduvad täiesti või on võrdlemisi üldsõnalised. Sageli võib monograafiates kohata selgitusi, mis on puhtfüüsikalised ega põhjenda tegelikult probleemi matemaatilist sisu. Näiteks lause 3.1 tulemus loetakse tavaliselt ilmseks, kuna selle füüsikaline sisu ongi äärmiselt loomulik, kuid range tõestus nõuab mõnegi kavala nipi rakendamist ning tehnilist nokitsemist.

Töö viimane osa võtab eelnevaga võrreldes pisut erineva kursi ja kirjeldab veidi vabamas vormis esiteks diferentsiaalgeomeetria peamisi vahendeid, millega on võimalik ka Minkowski ruumi struktuuri kirjeldada. Teise poolena on püütud populaarses vormis anda ülevaadet klassikalise Minkowski ruumi edasiarendusest, mis leiab palju rakendust teoreetilises füüsikas. Kõnealuseks edasiarenduseks on antikommuteeruvate koordinaatitega Minkowski superruum.

Bakalaureusetöö on referatiivne ja selle esimese poole aluseks on klassikuks kujunenud monograafia [6]. Nimetatud monograafias on enamik matemaatilist sisu omavaid tulemusi sõnastatud ülesannetena või jõutud nendeni väga üldise arutelu tulemusel. Siin oleme andnud nendele tulemustele ka range tõestuse. Töö teise poole kirjutamiseks andis eelkõige inspiratsiooni [2], mis tutvustab supermatemaatika aluseid ning rakendusi teoreetilises füüsikas.

Töö koosneb neljast peatükist.

Esimene peatükk keskendub valdkondadele, mis ei ole otseselt käesoleva töö teemaga seotud, kuid osutuvad vajalikuks mõistmaks töö edasisi osi. Võrdlemisi lakoonilisel viisil tuletame meelde, mida tähendab Gram–Schmidti algoritm ortonormeeritud baasi leidmiseks skalaarkorrutisega ruumis ning tõestame Cauchy–Schwartz–Bunjakowski võrratuse, ühe fundamentaalse tulemuse skalaarkorrutiste teooriast.

[1]Hermann Minkowski (1864–1909) — poola matemaatik.

Lisaks anname tõestustata eeskirjad blokkmaatriksite korrutamiseks ja pööramiseks ning toome sisse maatrikseksponenstiaali kujutuse mõiste märkides fakti tasemel ära tema tähtsamad omadused. Nii blokkmaatriksid kui maatrikseksponentsiaal osutuvad hiljem väga praktilisteks tööriistadeks, näiteks lauses 3.2 või peatükis 4.3 Lie rühm. Arvestades käesoleva töö geomeetrilist sisu, on pisut rohkem ruumi pühendatud muutkonna mõiste tutvustamisele. Toodud on näide lihtsamatest muutkondadest ning on selgitatud, kuidas tekib diferentseeruva muutkonna mõiste.

Teise peatüki eesmärgiks on kirjeldada Minkowski aegruumi elementide ehk *sündmuste* ja nende sündmuste teisenemisega seotud kujutuste olemust. Selleks anname kõigepealt range skalaarkorrutise definitsiooni ja tuletame meelde pseudoeukleidilise ruumi mõiste. Seejärel kirjeldame Minkowski ruumi skalaarkorrutise, millest saame meetrika. Osutub, et meetrika alusel on ruumi $\mathcal{M}$ elemendid võimalik jaotada kolme lõikumatusse klassi, need on *ajasarnased, ruumisarnased* ja *nullpikkusega* vektorid. Peatüki viimane punkt on pühendatud ruumi $\mathcal{M}$ ortogonaalteisendustele ehk *Lorentzi teisendustele.* Näitame kuidas saab selliseid teisendusi maatrikskujul ja koordinaatides kirja panna ning kuidas see esitus on seotud Minkowski aegruumi meetrikaga. Lõpetuseks tõestame, et kõigi ortogonaalteisenduste hulk omab väga lihtsat rühma struktuuri. Seda rühma nimetame *Lorentzi rühmaks.*

Kolmandas peatükis jätkame ruumi $\mathcal{M}$ teisenduste omaduste uurimisega. Esimeses alapunktis vaatleme veidi põhjalikumalt ortogonaalteisenduste omadusi ning keskendume neist vaid olulisimate uurimisele, mille tulemusena sõelume kõigi ortogonaalteisenduste rühmast välja pöörete alamrühma. Punkti lõpetame tulemusega, mis näitab ära millised tingimused peavad olema täidetud, et ruumi $\mathcal{M}$ teisendus oleks pööre. Järgmises punktis paneme tähele, et pseudoortogonaalteisendus Minkowski ruumis säilitab kauguse ja see motiveerib uurima lisaks pseudoortogonaalteisendustele ka kujutusi, mille suhtes kaugus on invariantne suurus. Peale Lorentzi teisenduste osutuvad kaugusi säilitavateks teisendusteks sündmuste nihked. Nihete ja Lorentzi teisenduste koosvaatlemisel tekivad Minkowski ruumi sümmeetriad ehk *Poincaré teisendused*, mis moodustavad *Poincaré rühma.*

Neljandas peatükis tutvustame kaasaegse teoreetilise füüsika keskset mõistet, *supersümmeetriat.* Supersümmeetriliste teooriate matemaatiliseks kirjelduseks oli arendatud geomeetria valdkond, mida võime nimetada supergeomeetriaks, mille tähtsaimaks struktuuriks on Minkowski superruum. Üldjoontes on Minkowski superruum Minkowski aegruumi laiend, kus neljale harilikule koordinadile lisatakse uued koordinaadid, nõndanimetatud antikommuteeruvad koordinaadid. Diferentsiaalgeomeetria valdkonnast toome sisse *Lie algebra* ja tema esituse mõiste ning rikastame mõlemat definitsiooni näidetega, mis on otseselt seotud Minkowski aegruumi geomeetriaga. Edasi jõuame *Lie rühma* mõisteni, mille seome kirjeldaval viisil, ranget matemaatilist formalismi vältides Lie algebraga. Peatüki, ja sellega ka töö lõpetame üldistades klassikalist Minkowski aegruumi, tuues selleks sisse Minkowski superruumi mõiste. Selle tarbeks defineerime superalgebra ja toome viimasest tuntuima näite, *Grassmanni algebra*. Jällegi üldistest formalismist hoidudes ja näidetega varustatuna tutvustame lugejale kuidas on superruumil defineeritud funktsioonid ja nende diferentseerimine ning integreerimine.

Kõikjal selles töös tähistab $\mathbb{K}$ suvalist korpust, mille karakteristika on null. Kui mõeldakse reaalarvude korpust $\mathbb{R}$, siis on see vastavalt tähistatud. Analoogiliselt on sümboliga $\mathbb{V}$ tähistatud suvaline vektorruum. Konkreetsete ruumide korral kasutame neile vastavat sümboolikat, näiteks $\mathcal{M}$ Minkowski ruumi korral.

Ruumi kokkuhoiu ja mugavuse mõttes kasutame töös sageli summade tähistamisel Einsteini summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid i ja j, mis omavad väärtusi $1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, siis jätame vahel summeerimisel summamärgi kirjutamata ning säilitame summeerimise tähistamiseks vaid indeksid. Einsteini summeeruvuskokkulepet arvestades kehtivad näiteks järgmised võrdused:

$$
\begin{aligned}
x^i e_i &= \sum_{a=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n, \\
\lambda^i{}_j x^j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda^i{}_j x^j = \lambda^i{}_1 x^1 + \lambda^i{}_2 x^2 + \cdots + \lambda^i{}_n x^n, \\
\eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \cdots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \cdots + \eta_{nn} u^n v^n,
\end{aligned}
$$

ja nii edasi. Loomulikult tuleb arvestada, et sellise kirjutusviisi juures peab olema indeksite hulk kontekstist selge.

Kui vektorruumil $\mathbb{V}$ on baas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja kontekstist on selge, mis on n, siis selle asemel, kirjutada pikalt $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, tähistame seda baasi ka lühidalt $\{e_a\}$. Vajaduse korral märgime, mis väärtuseid indeks a võib omada.

1 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis tuletame meelde definitsioonid ja tulemused, mida läheb tarvis töö järgmistes osades.

1.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused

Teoreem 1.1. *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega varustatud vektorruumis* $\mathbb{V}$ *leidub ortonormeeritud baas.*

Proof. Tähistame vektorruumi $\mathbb{V}$ skalaarkorrutise tähega g.

Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui $\{b\}$ on mingi baas, kus $b \neq 0$ on ühemõõtmelise vektorruumi mingi element, siis $\left\{\frac{1}{|b|}b\right\}$ on ortonormeeritud baas, kus $|b|$ tähistab vektori b pikkust.

Eeldame nüüd, et igas $(n-1)$-mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ja olgu n-mõõtmelise vektorruumi $\mathbb{V}$ baas $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Olgu $\mathbb{W}$ baasivektorite $\{b_1, b_2, ..., b_{n-1}\}$ lineaarne kate ning tähistame $\mathbb{W} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, ..., b_{n-1}\}$. On ilmne, et $\mathbb{W}$ on $(n-1)$-mõõtmeline alamruum vektorruumis $\mathbb{V}$. Eelduse kohaselt leidub $\mathbb{W}$ ortonormeeritud baas $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$, kusjuures kehtib

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ omadusega

$$a_n \perp \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}, \tag{1.1}$$

sest siis $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{|a_n|}a_n\}$ on ruumi $\mathbb{V}$ ortonormeeritud baas.

Otsime vektorit a_n kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{K}. \tag{1.2}$$

Paneme tähele, et kui a_n on sellisel kujul, siis $a_n \neq 0$, sest vastasel korral

$$b_n \in \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\},$$

mis on vastuolus süsteemi $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ lineaarse sõltumatusega. Kuna otsitav a_n on kujul (1.2) ja peab kehtima tingimus (1.1), siis nõuame, et kõikide

$$k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

korral kehtiks $a_n \perp e_k$. Viiamne on aga samaväärne tingimusega $g(a_n, e_k) = 0$, mille võime kirjutada kujul

$$g\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, e_k\right) = 0.$$

Samas, kuna

$$g\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, e_k\right) = g(b_n, e_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j g(e_j, e_k) = g(b_n, e_k) + \alpha_k,$$

siis $a_n \perp e_k$ parajasti siis, kui $\alpha_k = -g(b_n, e_k)$.

Järelikult võime võtta $a_n = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} g(b_n, e_j)\, e_j$. □

Märkus 1.1. Teoreemi 4.1 tõestuses antud algortimi ortonormeeritud baasi leidmiseks nimetatakse *Gram–Schmidti algoritmiks* või *ortogonaliseerimisprotsessiks.*

Teoreem 1.2 (Cauchy–Schwartz–Bunjakowski võrratus, vt [7])**.** *Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum skalaarkorrutisega $g\colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Sellisel juhul kehtib võrratus*

$$|g(u,v)|^2 \leq g(u,u)\, g(v,v) \tag{1.3}$$

kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Proof. Olgu $\mathbb{V}$ reaalne vektorruum skalaarkorrutisega g ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Siis iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}0 &\leq g(u+\lambda v, u+\lambda v) = g(u,u) + 2g(u,\lambda v) + g(\lambda v, \lambda v) = \\ &= g(u,u) + 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 g(v,v) \leq g(u,u) + 2\lambda |g(u,v)| + \lambda^2 g(v,v).\end{aligned}$$

Saime λ suhtes võrratuse

$$g(v,v)\,\lambda^2 + 2|g(u,v)|\lambda + g(u,u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on $\mathbb{R}$. Kui $g(v,v) > 0$, siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminandi jaoks kehtib

$$4|g(u,v)|^2 - 4g(u,u)\, g(v,v) \leq 0,$$

millest järeldub vahetult võrratus (1.3). Juhul $g(v,v) = 0$ peab kõikide $\lambda \in \mathbb{R}$ korral kehtima $2|g(u,v)|\lambda + g(u,u) \geq 0$, mis on võimalik vaid siis, kui $g(u,v) = 0$. Sellisel juhul on tingimuse (1.3) kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et võrratuses (1.3) kehtib võrdus parajasti siis, kui u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Oletame esiteks, et vektorid u ja v on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ selliselt, et $u = \alpha v$. Seega

$$\begin{aligned} |g(u,v)|^2 &= |g(\alpha v, v)|^2 = (\alpha g(v,v))^2 = \alpha^2 g(v,v)\, g(v,v) \\ &= g(\alpha v, \alpha v)\, g(v,v) = g(u,u)\, g(v,v), \end{aligned}$$

nagu tarvis.

Kehtigu nüüd tingimuses (1.3) võrdus. Veendume, et siis u ja v on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et $u \neq 0$ ja $v \neq 0$. Siis ka $g(u,u) \neq 0$ ja $g(v,v) \neq 0$. Paneme tähele, et

$$|g(u,v)|^2 = g(u,u)\, g(v,v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{|g(u,v)|^2 g(v,v)}{g^2(v,v)} = g(u,u).$$

Tähistades $a := \frac{|g(u,v)|}{g(v,v)}$, saame, et $a^2 g(v,v) = g(u,u)$ ehk $g(av, av) = g(u,u)$, millest $u = av$. □

1.2 Tulemusi lineaaralgebrast

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et vektorruumid $\mathbb{V}_1$ ja $\mathbb{V}_2$ üle korpuse $\mathbb{K}$ on *isomorfsed*, kui leidub lineaarne bijektsioon $f\colon \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$. Kujutust f nimetatakse sellisel juhul vektorruumide $\mathbb{V}_1$ ja $\mathbb{V}_2$ *isomorfismiks*.

Lause 1.1. *Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ja $L\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineaarne teisendus ning g skalaarkorrutis ruumil $\mathbb{V}$. Kui $g(x,y) = g(Lx, Ly)$ kõikide $x, y \in \mathbb{V}$ korral, see tähendab L on (pseudo)ortogonaalteisendus, siis L on bijektsioon.*

Proof. Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ja $L\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineaarne teisendus ning kehtigu $g(x,y) = g(Lx, Ly)$ kõikide $x, y \in \mathbb{V}$ korral. Veendumaks, et L on bijektsioon, tuleb näidata, et L on injektiivne ja sürjektiivne. Veendume kõigepealt kujutuse L üksühesuses.

Olgu $x, y \in \mathbb{V}$, $x \neq y$. Oletame vastuväiteliselt, et $Lx = Ly$, siis $Lx - Ly = 0$ ja seega iga $z \in \mathbb{V}$ korral

$$g(Lx - Ly, Lz) = 0.$$

Teisalt, kuna g on skalaarkorrutis ja et $x \neq y$, siis leidub selline $z' \in \mathbb{V}$, et $g(x-y,z') \neq 0$. Kokkuvõttes saime

$$0 \neq g(x-y,z') = g(Lx-Ly,Lz') = 0,$$

mis on vastuolu.

Veendume nüüd teisenduse L sürjektiivsuses. Olgu $x \in \mathbb{V}$. Meie eesmärk on leida $y \in \mathbb{V}$ selliselt, et $Ly = x$. Fikseerime vektorruumi $\mathbb{V}$ baasi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ja tähistame teisenduse L maatriksi selle baasi suhtes tähega Λ. Siis

$$Ly = L(y^a e_a) = y^a \Lambda^b{}_a e_b = x^b e_b, \text{ kus } a, b = 1, 2, \ldots, n.$$

Saime võrrandisüsteemi $y^a \Lambda^b{}_a = x^b$, mis on üheselt lahenduv, kuna $\det \Lambda = \pm 1$. Tõepoolest, kuna L on (pseudo)ortogonaalteisendus, siis Λ on (pseudo)ortogonaalmaatriks ja seega $\Lambda \eta \Lambda^T = \eta$, millest saame $\det\left(\Lambda \eta \Lambda^T\right) = \det \eta = 1$ ehk

$$\det\left(\Lambda \eta \Lambda^T\right) = \det \Lambda \cdot \det \eta \cdot \det \Lambda^T = \det \Lambda \cdot \det \Lambda^T = (\det \Lambda)^2 = 1.$$

Seega võime võtta $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. $\square$

Märkus 1.2. Tuletame meelde, et maatriksarvutuses on tähtsaks funktsiooniks maatriksi jälg. Kui $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ on n-järku ruutmaatriks, siis maatriksi A jälg $\operatorname{Tr} A$ on peadiagonaali elementide summa, see tähendab $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Vahetult on kontrollitav, et kui $A, B \in \operatorname{Mat}_n \mathbb{K}$, siis kehtib võrdus $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

Blokkmaatriksid

Teoreem 1.3 (Blokkmaatriksite korrutamine)**.** *Olgu meil $m \times p$ maatriks A ja olgu meil $p \times n$ maatriks B. Jagame maatriksi A blokkideks, kus on q rea blokki ja s veeru blokki ning jagame maatriksi B blokkideks, kus on s rea blokki ja r veeru blokki kujul*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \ldots & A_{qs} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_{sr} \end{pmatrix}.$$

Siis saame arvutada $m \times n$ maatriksi $C = AB$, kus on q rea blokki ja r veeru blokki kujul

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \ldots & C_{qr} \end{pmatrix}$$

ning $C_{ab} = \sum_{i=1}^{s} A_{ai} B_{ib}$.

Teoreem 1.4 (Blokkmaatriksi pöördmaatriks)**.** *Olgu M regulaarne maatriks, mis on esitatud blokkmaatriksina kujul $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, kus A, B, C, D on suvalise suurusega alammaatriksid, kusjuures A ja D on ruutmaatriksid. Siis saame maatriksi M pöördmaatriksi M^{-1} arvutada blokkidena järgmise eeskirja alusel:*

$$
\begin{aligned}
M^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Maatrikseksponentsiaal

Olgu $A \in \operatorname{Mat}_n \mathbb{K}$ mingi ruutmaatriks. Analoogilisest analüüsist tuttavale eksponentfunktsisoonile e^x defineeritakse ka *maatrikseksponent* $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, kus $A^0 = E$ ja A^k tähendab korrutist, kus maatriksit A korrutatakse iseendaga k korda. Osutub, et e^A on selles mõttes korrektselt defineeritud, et rida $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ koondub alati. Sageli kasutatakse e^A asemel ka tähistust $\exp A$.

Järgnevas lauses toome mõned lihtsamad maatrikseksponendi omadused.

Lause 1.2. *Olgu $X, Y \in \operatorname{Mat}_n \mathbb{K}$ ruutmaatriksid ja $k, l \in \mathbb{K}$. Siis*

- $e^0 = E$,
- $e^{aX} e^{bX} = e^{(a+b)X}$,
- $e^X e^{-X} = E$,
- *kui* $XY = YX$, *siis* $e^Y e^X = e^X e^Y = e^{(X+Y)}$,
- *kui* Y *on pööratav, siis* $e^{YXY^{-1}} = Ye^XY^{-1}$,
- *kui* e^X *on pööratav, siis* $\left(e^X\right)^{-1} = e^{-X}$,
- $\det e^X = e^{\operatorname{Tr} X}$.

1.3 Muutkond

Definitsioon 1.2. Topoloogilist ruumi (X, τ) nimetatakse *n-mõõtmeliseks topoloogilseks muutkonnaks*, kui

1) (X, τ) on Hausdorffi topoloogiline ruum,
2) topoloogial τ leidub loenduv baas,
3) iga punkti $x \in X$ korral leidub tema ümbrus, mis on homöomorfne mingi $\mathbb{R}^n$ lahtise alamhulgaga.

Muutkonda tähistame tähega M.

Muutkonda võime vaadelda kui geomeetrilise pinna üldistust. Vahetult muutkonna definitsiooni põhjal on selge, et muutkonna iga punkti mingit ümbrust võime vaadelda kui n-mõõtmelist eukleidilist ruumi. Seega muutkonna punktidel leiduvad lokaalselt koordinaadid.

Definitsioon 1.3. Me ütleme, et muutkond M on *ühelisidus*, kui suvalise kinnise joone võib pideva deformatsiooni abil sellel muutkonnal tõmmata üheks punktiks.

Näide 1.1. Järgmised hulgad on topoloogilised muutkonnad.

(a) Ringjoon on ühemõõtmeline mittetriviaalne topoloogiline muutukond.

   1) Topoloogiaks võime võtta alamruumi topoloogia, mis on Hausdorffi topoloogiline ruum.
   2) Alamruumi topoloogial on samuti loenduv baas.
   3) Homöomorfismideks sobib võtta neli lokaalset kaarti, mille saame, kui projekteerime ülemise ja alumise poolringi x-teljele ning vasak- ja parempoolse poolringi y-teljele.

(b) Sfäär on topoloogiline muutkond. (Põhjendus on analoogline osaga (a).)

Arvestades käesoleva töö peatükis 4.3 antud Lie rühma definitsiooni, tutvustame lühidalt ka diferentseeruva muutkonna mõistet. Teeme seda tuginedes aine Globaalanalüüs loengukonspektile [1].

Definitsioon 1.4. Olgu M muutkond ja $B \subset \mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk. Paari (p, ψ), kus $p \in U \subset M$ ja $\psi \colon U \to B$ on homöomorfism nimetatakse muutkonna M *lokaalseks kaardiks punktis p*. Analoogiliselt ütleme paari (U, ψ) kohta *piirkonna U lokaalne kaart*. Kõikide muutkonna M lokaalsete kaartide kogumit nimetatakse *atlaseks*.

Kui muutkonna M saab katta ühe lokaalse kaardiga, siis öeldakse, et muutkond M on *triviaalne*.

Olgu meil n-mõõtmeline topoloogiline muutkond M ja U, V selle muutkonna piirkonnad, kusjuures $U \cap V \neq \emptyset$. Vaatleme muutkonna M lokaalseid kaarte (U, ϕ) ja (V, ψ). Kui $p \in U \cap V$, siis saame esitada punkti p lokaalsed koordinaadid kahel järgmisel viisil:

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \left(\phi^1(p), \phi^2(p), \ldots, \phi^n(p)\right) \in \mathbb{R}^n, \\
\psi(p) &= \left(\psi^1(p), \psi^2(p), \ldots, \psi^n(p)\right) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Tekib loomulik küsimus kuidas avalduvad punkti p ühed lokaalsed koordinaadid teiste kaudu. Et kujutused ϕ ja ψ on homöomorfismid, siis leiduvad pöördkujutused ϕ^{-1} ja ψ^{-1} ning seega saame koostada kompositsioonid

$$\begin{aligned}
\phi \circ \psi^{-1} &\colon\ \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V), \\
\psi \circ \phi^{-1} &\colon\ \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).
\end{aligned}$$

Selge, et kujutused $\phi \circ \psi^{-1}$ ja $\psi \circ \phi^{-1}$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste hulkade $\psi(U \cap V)$ ning $\phi(U \cap V)$ homöomorfismid, seejuures koguni üksteise pöördkujutused. Komponentides kirjutades saame

$$\begin{aligned}
\phi \circ \psi^{-1} &\colon\ \phi^i = g^i\left(\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n\right), \\
\psi \circ \phi^{-1} &\colon\ \psi^i = h^i\left(\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n\right),
\end{aligned}$$

kus $i = 1, 2, \ldots, n$. Niisiis iga i korral on funktsioonid g^i ja h^i pidevad ja kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
g^i\left(h^1(\phi), h^2(\phi), \ldots, h^n(\phi)\right) &= \phi^i, \\
h^i\left(g^1(\psi), g^2(\psi), \ldots, g^n(\psi)\right) &= \psi^i.
\end{aligned}$$

Seejuures funktsioone g^i ja h^i, kus $i = 1, 2, \ldots, n$, nimetatakse *üleminekufunktsioonideks*.

Nüüd, kui $(U, \phi), (V, \psi)$ on muutkonna M lokaalsed kaardid ja $U \cap V \neq \emptyset$ ning sellest järeldub, et üleminekufunktsioonid $g^i(\psi), h^i(\phi)$ on lõpmata diferentseeruvad ehk siledad, siis ütleme, et kaardid (U, ϕ) ja (V, ψ) on C^∞-*kooskõlalised.*

Olgu $\mathcal{A}$ on mingi indeksite hulk. Kui muutkonnal M on määratud kogum $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) :\ \alpha \in \mathcal{A}\}$, mis rahuldab tingimusi

(i) $\cup_\alpha U_\alpha$ on muutkonna M kate;

(ii) suvaliste $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ korral on lokaalsed kaardid (U_α, ϕ_α) ning (U_β, ϕ_β) C^∞-kooskõlalised;

(iii) kui (V, ψ) on topoloogilise muutkonna M lokaalne kaart, mis on kogumi $\mathfrak{U}$ kõigi kaartidega C^∞-kooskõlaline , siis $(V, \psi) \in \mathfrak{U}$;

siis kogumit $\mathfrak{U}$ nimetatakse topoloogilisel muutkonnal M määratud *diferentseeruvaks struktuuriks.*

Definitsioon 1.5. Kui n-mõõtmelisel topoloogilised muutkonnal M on määratud diferentseeruv struktuur $\mathfrak{U}$, siis nimetatakse muutkonda M *diferentseeruvaks muutkonnaks.*

2 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

2.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu $\mathbb{V}$ n-mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus $g\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ on *bilineaarvorm*, kui g on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab

$$g\left(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2, v\right)=\alpha_1 g\left(u_1, v\right)+\alpha_2 g\left(u_2, v\right),$$
$$g\left(u, \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\right)=\alpha_1 g\left(u, v_1\right)+\alpha_2 g\left(u, v_2\right)$$

kus α_1 ja α_2 on suvalised reaalarvud ning u, u_1, u_2, v, v_1 ja v_2 on vektorruumi $\mathbb{V}$ elemendid.

Olgu $u, v\in\mathbb{V}$. Bilineaarvormi g nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $g\left(u,v\right)=g\left(v,u\right)$, ja *mittekidunuks*, kui tingimusest $g\left(u,v\right)=0$ iga $v\in\mathbb{V}$ korral järeldub $u=0$.

Definitsioon 2.1. Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi $g\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ nimetatakse *skalaarkorrutiseks*. Vektorite u ja v skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul $u\cdot v$.

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u\cdot 0=0\cdot v=0$ kõikide $u,v\in\mathbb{V}$ korral, sest skalaarkorrutise g bilineaarsuse tõttu $g\left(0,v\right)=g\left(0\cdot 0,v\right)=0\cdot g\left(0,v\right)=0$,
- kui $u_1,u_2,\ldots,u_n,u,v_1,v_2,\ldots,v_n\in\mathbb{V}$, siis $\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\cdot v=\sum_{i=1}^n\left(u_i\cdot v\right)$ ja $u\cdot\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)=\sum_{i=1}^n\left(u\cdot v_i\right)$,
- kui $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ on vektorruumi $\mathbb{V}$ baas ning kui tähistame $\eta_{ij}=e_i\cdot e_j$, $i,j=1,2,\ldots,n$, siis $u\cdot v=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\eta_{ij}u^iv^j=\eta_{ij}u^iv^j$, kus $u=u^ie_i$ ja $v=v^ie_i$.

Näide 2.1. Vaatleme ruumi $\mathbb{R}^n$. Olgu

$$u=\left(u^1,u^2,\ldots,u^n\right),\quad v=\left(v^1,v^2,\ldots,v^n\right)\in\mathbb{R}^n.$$

Lihtne on veenduda, et kujutus $g\left(u,v\right)=u^1v^1+u^2v^2+\cdots+u^nv^n$ on skalaarkorrutis.

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga $v\neq 0$ korral $g\left(v,v\right)>0$. Kui $g\left(v,v\right)<0$ kõikide $v\neq 0$ korral, siis ütleme, et g on *negatiivselt määratud* ja kui g pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et g on *määramata*.

Definitsioon 2.2. Kui g on skalaarkorrutis vektorruumil $\mathbb{V}$, siis nimetame vektoreid u ja v *g-ortogonaalseteks* (või lihtsalt *ortogonaalseteks*, kui g roll on kontekstist selge), kui $g(u,v) = 0$. Kui $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ on alamruum, siis ruumi $\mathbb{W}$ ortogonaalne täiend $\mathbb{W}^{\perp}$ on hulk $\mathbb{W}^{\perp} = \{u \in \mathbb{V} \colon \forall v \in \mathbb{W} \text{ korral } g(u,v) = 0\}$.

Definitsioon 2.3. Skalaarkorrutise g poolt määratud *ruutvormiks* nimetame kujutust $Q \colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, kus $Q(v) = g(v,v) = v \cdot v$, $v \in \mathbb{V}$.

Lause 2.1. *Olgu g_1 ja g_2 kaks skalaarkorrutist vektorruumil $\mathbb{V}$, mis rahuldavad tingimust $g_1(u,u) = g_2(u,u)$ iga $v \in \mathbb{V}$ korral. Siis kehtib $g_1(u,v) = g_2(u,v)$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, ehk teisi sõnu, $g_1 \equiv g_2$.*

Proof. Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$ ja kehtigu võrdus $g_1(u,u) = g_2(u,u)$ iga u korral. Defineerime uue kujutuse

$$g \colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R},\ g(u,v) \mapsto g_1(u,v) - g_2(u,v).$$

Paneme esiteks tähele, et selliselt defineeritud g on sümmeetriline ja bilineaarne. Tõepoolest, olgu $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$. Siis

$$\begin{aligned} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= g_1(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - g_2(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \\ &= \alpha g_1(u_1,v) + \beta g_1(u_2,v) - \alpha g_2(u_1,v)\beta g_2(u_2,v) = \\ &= \alpha(g_1(u_1,v) - g_2(u_1,v)) + \beta(g_1(u_2,v) - g_2(u_2,v)) = \\ &= \alpha g(u_1,v) + \beta g(u_2,v) \end{aligned}$$

ja analoogiliselt $g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u,v_1) + \beta g(u,v_2)$.

Kujutuse g sümmeetrilisus on g_1 ja g_2 sümmeetrilisust arvestades ilmne. Nüüd piisab tõestuse lõpetamiseks veel näidata, et $g = 0$. Ühelt poolt paneme tähele, et

$$g(u+v, u+v) = g_1(u+v, u+v) - g_2(u+v, u+v) = 0.$$

Teisalt,

$$\begin{aligned} g(u+v, u+v) &= g(u, u+v) + g(v, u+v) = \\ &= g(u,u) + g(u,v) + g(v,u) + g(v,v) = \\ &= g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) = \\ &= 2g(u,v). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime $2g(u,v) = 0$ ehk $g(u,v) = 0$, mida oligi tarvis. □

Teoreem 2.1. *Olgu $\mathbb{V}$ reaalne n-mõõtmeline vektorruum ning olgu $g \colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ skalaarkorrutis. Vektorruumil $\mathbb{V}$ leidub baas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nii, et $g(e_i, e_j) = 0$ kui $i \neq j$ ja $Q(e_i) = \pm 1$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral $Q(e_i) = -1$ on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.*

Proof. Arvestades *Gram*[2]*–Schmidti*[3] algoritmi ortonormeeritud baasi konstrueerimiseks, muutub teoreemi tõestus ilmseks (vt märkus 1.1). □

Definitsioon 2.4. Vektorruumi $\mathbb{V}$ baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.

Skalaarkorrutise g suhtses ortonormaalse baasi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorite arvu r, mille korral $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nimetame skalaarkorrutise g *indeksiks.* Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid e_i, mille korral $Q(e_i) = -1$, paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \ldots, e_n\}$$

korral $Q(e_i) = 1$, kui $i = 1, 2, \ldots, n-r$, ja $Q(e_i) = -1$, kui $i = n-r+1, \ldots, n$. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$ saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise g arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \ldots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \ldots - u^n v^n.$$

Märkus 2.1. Vektorruumi $\mathbb{V}$ skalaarkorrutisega g, mille indeks $r > 0$ nimetatakse *pseudoeukleidiliseks ruumiks.*

2.2 Minkowski aegruumi mõiste

Definitsioon 2.5. *Minkowski aegruumiks* nimetatakse neljamõõtmelist reaalset vektorruumi $\mathcal{M}$, millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm g indeksiga 1.

Ruumi $\mathcal{M}$ elemente nimetatakse *sündmusteks* ja kujutust g nimetatakse *Lorentzi skalaarkorrutiseks* ruumil $\mathcal{M}$.

Märkus 2.2. Edasises ütleme Minkowski ruumi kontekstis Lorentzi skalaarkorrutise g kohta lihtsalt skalaarkorrutis.

Ilmselt on Minkowski ruum pseudoeukleidiline ruum. Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil $\mathcal{M}$ leidub baas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ järgmise omadusega. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ või lühidalt $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas. Kui $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$, siis tähistame sündmuse x koordinaadid baasi $\{e_a\}$

[2] Jørgen Pedersen Gram (1850–1916) — taani matemaatik.
[3] Erhard Schmidt (1876–1959) — Tartus sündinud saksa matemaatik.

suhtes (x^1, x^2, x^3, x^4) ja seejuures ütleme, et (x^1, x^2, x^3) on *ruumikoordinaadid* ning (x^4) on *ajakoordinaat*.

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis g ei ole ruumil $\mathcal{M}$ positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nii, et $g(u, u) = 0$. Selliseid vektoreid nimetatakse *nullpikkusega vektoriteks*. Kui aga $g(u, u) < 0$, siis ütleme, et u on *ajasarnane*[4] ning kui $g(u, u) > 0$, siis nimetame vektorit u *ruumisarnaseks*[5]. Seejuures märgime, et nullpikkusega vektoried võib füüsikaliselt interpreteerida kui valguse kiiri. Osutub, et ruumis $\mathcal{M}$ leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullpikkusega vektoritest.

Näide 2.2. Üheks ruumi $\mathcal{M}$ baasiks, mis koosneb vaid nullpikkusega vektoritest, on näiteks $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$, kus $e_1^0 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2^0 = (0, 1, 0, 1)$, $e_3^0 = (0, 0, 1, 1)$ ja $e_4^0 = (-1, 0, 0, 1)$. Tõepoolest, süsteemi $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja $e_1^0, \ldots, e_4^0$ on nullpikkusega, sest

$$\begin{aligned} Q\left(e_1^0\right) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_2^0\right) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_3^0\right) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_4^0\right) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

Teoreem 2.2. *Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nullpikkusega vektorid. Vektorid u ja v on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$.*

Proof. Piisavus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ paralleelsed nullpikkusega vektorid. Siis leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$. Seega

$$g(u, v) = g(tv, v) = tg(v, v) = 0$$

ehk vektorid u ja v on ortogonaalsed, nagu tarvis.

Tarvilikkus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ ortogonaalsed nullpikkusega vektorid, st $g(u, v) = 0$. *Cauchy–Schwartz–Bunjakowski võrratuse* (vt teoreem 1.2)

$$g^2(u, v) \leq g(u, u)\, g(v, v)$$

[4]Inglise keeles *timelike*.
[5]Inglise keeles *spacelike*.

põhjal $0 \leq g(u,u)\, g(v,v)$, sest u ja v on ortogonaalsed. Teisalt, et u ja v on nullpikkusega vektorid, siis $g(u,u)\, g(v,v) = 0$ ja järelikult kehtib Cauchy–Schwartz–Bunjakowski võrratuses võrdus $0 = 0$, mis tähendab, et u ja v on lineaarselt sõltuvad. $\square$

Võtame nüüd vaatluse alla kaks sellist sündmust $x, x_0 \in \mathcal{M}$, $x \neq x_0$, mida ühendab nullpikkusega vektor, see tähendab $Q(x - x_0) = 0$. Seda asjaolu arvesse võttes saame, et kui $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalne baas ja me tähistame $x = x^a e_a$, $x_0 = x_0^a e_a$, siis kehtib võrdus

$$Q(x - x_0) = \left(x^1 - x_0^1\right)^2 + \left(x^2 - x_0^2\right)^2 + \left(x^3 - x_0^3\right)^2 - \left(x^4 - x_0^4\right)^2 = 0. \qquad (2.1)$$

Kõigi selliste $x \in \mathcal{M}$ hulka, mille korral on tingimus (2.1) täidetud nimetatakse *nullkoonuseks* [6] punktis x_0 ja tähistatakse $\mathcal{C}_N(x_0)$. Seega

$$\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} \colon\ Q(x - x_0) = 0\}.$$

Piltlikult võime öelda, et hulga $\mathcal{C}_N(x_0)$ elemendid on ühendatavad sündmusega x_0 *valguskiire* $R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) :\ t \in \mathbb{R}\}$ abil.

2.3 Ortogonaalteisendus ruumis $\mathcal{M}$

Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ ruumi $\mathcal{M}$ kaks ortonormaalset baasi. Osutub, et leidub parajasti üks selline lineaarne kujutus $L \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, et $L(e_a) = \hat{e}_a$, $a = 1, 2, 3, 4$. Tõepoolest, leiduvad arvud ${\Lambda^a}_b$ nii, et baasi $\{\hat{e}_a\}$ vektorid avalduvad baasi $\{e_a\}$ suhtes üheselt kujul $\hat{e}_b = {\Lambda^a}_b e_a$. Arvudest ${\Lambda^a}_b$ tekkiva maatriksiga assotsieeruv Lorentzi teisendus sobibki otsitavaks teisenduseks L. Järgnevaga uurime kujutuse L omadusi veidi lähemalt.

Definitsioon 2.6. Ruumi $\mathcal{M}$ lineaarset kujutust $L \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ nimetatakse *pseudoortogonaalteisenduseks*, kui ta säilitab skalaarkorrutise g, see tähendab iga x ja y korral ruumist $\mathcal{M}$ kehtib võrdus $g(Lx, Ly) = g(x, y)$.

Lause 2.2. *Olgu $L \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ lineaarne kujutus. Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(i) *L on pseudoortogonaalteisendus;*

(ii) *L säilitab ruumi $\mathcal{M}$ ruutvormi, see tähendab $Q(Lx) = Q(x)$ iga $x \in \mathcal{M}$ korral;*

[6] Füüsikas öeldakse sageli *nullkoonuse* asemel *valguse koonus.*

(iii) *L kujutab suvalise ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalse baasi ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalseks baasiks.*

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu L pseudoortogonaalne teisendus. Siis definitsiooni põhjal $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ iga $x, y \in \mathcal{M}$ korral. Seega kehtib ka

$$Q(Lx) = g(Lx, Lx) = g(x, x) = Q(x)$$

kõikide $x \in \mathcal{M}$ korral ehk L säilitab ruutvormi.

(ii) $\Rightarrow$ (i) on täpselt lause 2.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Kehtigu (ii) (ja seega ka (i)) ning olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortogonaalne baas ruumis $\mathcal{M}$. Siis ka $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ on ortonormaalne baas ruumis $\mathcal{M}$, sest

$$g(Le_i, Le_j) = g(e_i, e_j) = \begin{cases} -1, & \text{kui } i = j = 4, \\ 1, & \text{kui } i = j,\ i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

ja arvestades kujutuse L lineaarsust, on ka süsteem $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ lineaarselt sõltumatu.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas ja kehtigu tingimus (iii). Veendume, et alati $Q(Lx) = Q(x)$, kus $x \in \mathcal{M}$ on suvaline. Fikseerime $x \in \mathcal{M}$ ning esitugu ta koordinaatides kujul $x = x^i e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} Q(x) = Q\left(x^i e_i\right) = x^i Q(e_i) = x^i Q(Le_i) = \\ = Q\left(x^i Le_i\right) = Q\left(L\left(x^i e_i\right)\right) = Q(Lx). \end{aligned}$$

□

Ruumi kokkuhoiu mõttes toome sisse 4×4 maatriksi η, mille me defineerime kui

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ja mille elemente tähistame vastavalt vajadusele kas η_{ab} või η^{ab}, $a, b = 1, 2, 3, 4$. Loomulik on maatriksit η nimetada *Miknowski ruumi meetrikaks.*

Sellise tähistuse korral $\eta_{ab} = 1$, kui $a = b = 1, 2, 3$ ja $\eta_{ab} = -1$, kui $a = b = 4$ ning $\eta_{ab} = 0$ muudel juhtudel. Vahetult on kontrollitav, et $\eta = \eta^T$ ja

$$\eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = E,$$

kus E on ühikmaatriks.

Arvestades sissetoodud tähistusi saame nüüd kirjutada $g\left(e_a, e_b\right) = \eta_{ab}$, kus $\{e_a\}$ on ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas. Enamgi veel, avaldades ruumi $\mathcal{M}$ vektorid u ja v baasivektorite kaudu $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, saame summeerimiskokkulepet kasutades kirjutada

$$g\left(u, v\right) = \eta_{ab} u^a v^b.$$

Olgu $L\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ruumi $\mathcal{M}$ pseudoortogonaalteisendus ja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ selle ruumi ortonormeeritud baas. Lause 2.2 põhjal on siis ka

$$\hat{e}_1 = Le_1, \quad \hat{e}_2 = Le_2, \quad \hat{e}_3 = Le_3, \quad \hat{e}_4 = Le_4$$

ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas, kusjuures iga e_i, $i = 1, 2, 3, 4$ saab esitada vektorite $\hat{e}_j$ lineaarkombinatsioonina kujul

$$e_i = \Lambda^1{}_i \hat{e}_1 + \Lambda^2{}_i \hat{e}_2 + \Lambda^3{}_i \hat{e}_3 + \Lambda^4{}_i \hat{e}_4 = \Lambda^j{}_i \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.2}$$

kus arvud $\Lambda^j{}_i$ on mingid reaalarvulised konstandid. Arvestades valemit (2.2) võime nüüd ortogonaalsuse tingimuse $g\left(e_c, e_d\right) = \eta_{cd}$, $c, d = 1, 2, 3, 4$, kirjutada kujul

$$\Lambda^1{}_c \Lambda^1{}_d + \Lambda^2{}_c \Lambda^2{}_d + \Lambda^3{}_c \Lambda^3{}_d - \Lambda^4{}_c \Lambda^4{}_d = \eta_{cd}$$

või kasutades summeerimiskokkulepet, siis lühidalt

$$\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \tag{2.3}$$

Seose (2.3) saame maatrikskujul kirjutada kui

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{2.4}$$

Korrutades võrduse (2.4) mõlemaid pooli maatriksiga Λ^{-1} saame $\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1}$. Korrutades nüüd saadud tulemust veel paremalt maatriksiga η^{-1} on tulemuseks $\Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}$. Viimast arvesse võttes võime kirjutada

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^T = \Lambda \eta^{-1} \left(\eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}\right) = \Lambda \Lambda^{-1} \eta^{-1} = \eta^{-1} = \eta$$

ehk

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta. \tag{2.5}$$

Seos (2.5) on koordinaatides kirjutatuna täpselt

$$\Lambda^a{}_c \eta^{cd} \Lambda^b{}_d = \eta^{ab}. \tag{2.6}$$

Definitsioon 2.7. Maatriksit $\Lambda = \left[\Lambda^a{}_b\right]_{a,b=1,2,3,4}$ nimetame *pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga* $\{e_a\}$ assotsieeruvaks maatriksiks. Kui baasi $\{e_a\}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse maatriksit Λ ka lihtsalt teisenduse L maatriksiks.

Definitsioonile eelnevas arutelus tõestasime maatriksi Λ kohta järgmise lemma.

Lemma 2.1. *Pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruva maatriksi Λ korral on tingimused (2.3), (2.4), (2.5) ja (2.6) samaväärsed.*

Kuna ortogonaalteisenduse maatriks mistahes ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, ja vastupidi, kui ortogonaalteisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, siis sellest järeldub kergesti järgmine lause.

Lause 2.3 ([4, lk 271])**.** *Kui Λ on ortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruv maatriks, siis Λ on ka ortogonaalteisenduse L^{-1} ja baasiga $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$ assotsieeruv maatriks.*

Lihtne on veenduda, et lause väide jääb kehtimaka juhul kui asendame lause sõnastuses *ortogonaalteisenduse* ja *ortogonaalmaatriksi* vastavalt *pseudoortogonaalteisenduse* ja *pseudoortogonaalmaatriksiga.*[7]

Me vaatleme ortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ seotud maatriksit Λ kui koordinaatide teisenemise maatriksit tavalisel viisil. Seega, kui $x \in \mathcal{M}$ esitub koordinaatides baasi $\{e_i\}$ suhtes kujul $x = x^i e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, siis tema koordinaadid baasi $\{\hat{e}_i\} = \{Le_i\}$ suhtes avalduvad kujul $x = \hat{x}^i \hat{e}_i$, kus

$$\begin{aligned}
\hat{x}^1 &= \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3 + \Lambda^1{}_4 x^4,\\
\hat{x}^2 &= \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3 + \Lambda^2{}_4 x^4,\\
\hat{x}^3 &= \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3 + \Lambda^3{}_4 x^4,\\
\hat{x}^4 &= \Lambda^4{}_1 x^1 + \Lambda^4{}_2 x^2 + \Lambda^4{}_3 x^3 + \Lambda^4{}_4 x^4,
\end{aligned}$$

mille võime lühidalt kirja panna kui

$$\hat{x}^i = \Lambda^i{}_j x^j, \text{ kus } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Definitsioon 2.8. 4×4 maatriksit Λ, mis rahuldab tingimust (2.4) (ja lemma 2.1 põhjal siis ka tingimusi (2.3), (2.5) ja (2.6)) nimetatakse *(homogeenseks) Lorentzi teisenduseks.*

Kuna ruumi $\mathcal{M}$ ortogonaalteisendus L on bijektsioon (vt lause 1.1). ja seega pööratav, siis temaga assotsieeruv maatriks Λ on samuti pööratav, kusjuures

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta. \tag{2.7}$$

[7][4] antud tõestuses tuleb asendada eukleidiline meetrika δ_{ij} Minkowski meetrikaga η_{ij} ja seega jääb tulemus kehtima ka pseudoortogonaalsel juhul.

Tõepoolest, arvestades tingimust (2.4) ja asjaolu, et $\eta = \eta^{-1}$, siis saame

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \iff \eta \Lambda^{-1} = \Lambda^T \eta \iff \eta^{-1} \eta \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \iff \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta.$$

Teoreem 2.3. *Kõigi (homogeensete) Lorentzi teisenduste hulk on rühm maatriksite korrutamise suhtes. Seda rühma nimetatakse* (homogeenseks) Lorentzi rühmaks *ja tähistatakse* $\mathcal{L}_{GH}$.

Proof. Veendumaks, et kõigi (homogeensete) Lorentzi teisenduste hulk $\mathcal{L}_{GH}$ on rühm, peame näitama, et $\mathcal{L}_{GH}$ on kinnine korrutamise ja pöördelemendi võtmise suhtes.

Olgu $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$. Veendume esiteks, et korrutis $\Lambda_1 \Lambda_2$ kuulub hulka $\mathcal{L}_{GH}$. Selleks piisab näidata, et $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \eta$.

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \left(\Lambda_2^T \Lambda_1^T\right) \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \left(\Lambda_1^T \eta \Lambda_1\right) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta,$$

ja seega $\Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$ nagu tarvis.

Jääb veel näidata, et ka $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$. Seose (2.7) ja võrduste $\eta = \eta^T$, $\eta\eta = E$ põjal saame kirjutada

$$\begin{aligned}
\left(\Lambda^{-1}\right)^T \eta \Lambda^{-1} &= \left(\eta \Lambda^T \eta\right)^T \eta \left(\eta \Lambda^T \eta\right) = \\
&= \left(\eta^T \left(\Lambda^T\right)^T \eta^T\right) \eta\eta \Lambda^T \eta = \\
&= \eta \Lambda \eta \Lambda^T \eta = \\
&= \eta\eta\eta = \eta.
\end{aligned}$$

Viimane aga tähendabki, et $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$. □

Arvestades võrdust (2.7) võime välja arvutada maatriksi Λ^{-1} ja esitada ta maatriksi Λ elementide kaudu:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 & -\Lambda^4{}_1 \\ \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 & -\Lambda^4{}_2 \\ \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 & -\Lambda^4{}_3 \\ -\Lambda^1{}_4 & -\Lambda^2{}_4 & -\Lambda^3{}_4 & \Lambda^4{}_4 \end{pmatrix}.$$

3 Lorentzi ja Poincaré rühmad

3.1 Lorentzi rühm

Eelmise peatüki lõpus näitasime, et hulk $\mathcal{L}_{GH}$ on rühm tavalise maatriksite korrutamise suhtes. Järgnevalt uurime lähemalt selle rühma konkreetsemaid omadusi.

Definitsioon 3.1. Me ütleme, et $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ on *ortokroonne*, kui ${\Lambda^4}_4 \geq 1$, ja *mitteortokroonne*, kui ${\Lambda^4}_4 \leq -1$.

Edasise teooriaarenduse seisukohalt on otstarbekas tõestada järgmine teoreem.

Teoreem 3.1 ([6, teoreem 1.3.1])**.** *Olgu $u, v \in \mathcal{M}$, kusjuures u on ajasarnane ja v ajasarnane või nullpikkusega ning olgu $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalne baas, mille suhtes u ja v avalduvad kujul $u = u^a e_a$ ja $v = v^a e_a$. Siis kehtib parajasti üks järgmistest tingimusest:*

(a) $u^4 v^4 > 0$, *mille korral* $g(u, v) < 0$,

(b) $u^4 v^4 < 0$, *mille korral* $g(u, v) > 0$.

Proof. Oletame, et teoreemi eeldused on täidetud. Siis

$$\begin{aligned} g(u,u) &= \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2 - \left(u^4\right)^2 < 0 \text{ ja} \\ g(v,v) &= \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2 - \left(v^4\right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Niisiis

$$\begin{aligned} \left(u^4 v^4\right)^2 &> \left(\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2\right)\left(\left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2\right) \overset{(*)}{\geq} \\ &\geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3, \end{aligned}$$

kus võrratuse $(*)$ kehtivuse annab meile Cauchy–Scwartz–Bunjakowski võrratus ruumis $\mathbb{R}^3$. Nüüd aga $|u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3|$, millest saame, et $u^4 v^4 \neq 0$ ja $g(u, v) \neq 0$. Oletame konkreetsuse mõttes, et $u^4 v^4 > 0$. Siis

$$u^4 v^4 = |u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3| \geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3,$$

millest

$$u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4 < 0$$

ehk $g(u, v) < 0$. Kui aga $u^4 v^4 > 0$, siis $g(u, -v) < 0$ ja seega $g(u, v) > 0$. □

Järeldus 3.1. *Kui $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ on ortogonaalne ajasarnase vektoriga $v \in \mathcal{M}$, siis u on ruumisarnane.*

Proof. Olgu $v \in \mathcal{M}$ ajasarnane ja olgu $u \in \mathcal{M}$ nullist erinev ning ortogonaalne vektoriga v. Oletame vastuväiteliselt, et u on ajasarnane. Siis eelmise teoreemi põhjal kehtib kas $g(u,v) > 0$ või $g(u,v) < 0$. Et u ja v on ortogonaalsed, siis $g(u,v) = 0$, mis on vastuolus eelnevaga. Järelikult on u ruumisarnane. $\square$

Tähistame ruumi $\mathcal{M}$ kõigi ajasarnaste vektorite hulga tähega τ ja defineerime hulgas τ seose $\sim$ järgnevalt. Kui $u, v \in \tau$, siis $u \sim v$ parajasti siis, kui $g(u,v) < 0$. Sedasi defineeritud seos $\sim$ on ekvivalents:

(a) **refleksiivsus** järeldub vahetult ajasarnase vektori definitsioonist;

(b) seose $\sim$ **sümmeetrilisus** tuleneb skalaarkorrutise sümmeetrilisusest;

(c) **refleksiivsuseks** märgime, et kui $g(u,v) < 0$ ja $g(v,w) < 0$, siis teoreemi 3.1 põhjal $u^4v^4 > 0$ ja $v^4w^4 > 0$ ehk u^4 ja v^4 ning v^4 ja w^4 on sama märgiga ja seega $\operatorname{sign} u^4 = \operatorname{sign} w^4$, millest saame $u^4w^4 > 0$. Rakendades nüüd veel kord teoreemi 3.1, siis saame, et $g(u,w) < 0$.

Paneme tähele, et seos $\sim$ jagab hulga τ täpselt kaheks ekvivalentsiklassiks. Tõepoolest, kui $u, v \in \mathcal{M}$ on ajasarnased, siis on meil teoreemi 3.1 põhjal kaks varianti. Peab kehtima kas

$$g(u,v) < 0 \text{ või} \tag{1}$$

$$g(u,v) > 0. \tag{2}$$

Kui kehtib võrratus (1), siis on $u \sim v$ ja korras. Vastupidi, kui u ja v jaoks kehtib (2), siis $u \nsim v$ ja piisab näidata, et kui $w \in \tau$ korral $g(u,w) > 0$, siis $v \sim w$. Võrratuse (2) kehtivuseks peavad u, v ja w teoreemi 3.1 põhjal rahuldama võrratusi $u^4v^4 < 0$ ja $u^4w^4 < 0$, mis tähendab, et arvud u^4, v^4 ja u^4, w^4 on erinevate märkidega. Seega v^4 ja w^4 on samade märkidega ja järelikult $g(v,w) < 0$ ehk $v \sim w$.

Neid kahte ekvivalentsiklassi tähistatakse τ^+ ja τ^-. Märgime, et elementide ekvivalentsiklassidesse τ^+ ja τ^- jaotamine toimub meie postuleerimise täpsusega ja on meelevaldne.

Teoreem 3.2 (vt [6, teoreem 1.3.3])**.** *Olgu $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$ Lorentzi teisendus, see tähendab $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ ja olgu $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas. Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(i) *Λ on ortokroonne;*

(ii) *Λ säilitab kõikide nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märgi, see tähendab, kui $u = u^a e_a$ on nullpikkusega, siis arvud u^4 ja $\hat{u}^4 = \Lambda^4{}_b u^b$ on sama märgiga;*

(iii) *Λ säilitab kõikide ajasarnaste vektorite ajakoordinaadi märgi.*

Proof. Olgu $u = u^a e_a \in \mathcal{M}$ ajasarnane või nullpikkusega vektor. Cauchy–Schwartz–Bunjakowski võrratusest ruumis $\mathbb{R}^3$ saame

$$\left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^4{}_i\right)^2\right) \left(\sum_{j=1}^{3} \left(u^j\right)^2\right). \tag{3.1}$$

Sooritades nüüd võrduses (2.6) asenduse $a = b = 4$ saame

$$\left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 = -1,$$

milllest järleldub

$$\left(\Lambda^4{}_4\right)^2 > \left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2. \tag{3.2}$$

Et $u \neq 0$, siis tingimustest (3.1) ja (3.2) saame

$$\left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3\right)^2 < \left(\Lambda^4{}_4 u^4\right)^2,$$

mille võime ruutude vahe valemit kasutades kirjutada kujul

$$\left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3 - \Lambda^4{}_4 u^4\right) \left(\Lambda^4{}_1 u^1 + \Lambda^4{}_2 u^2 + \Lambda^4{}_3 u^3 + \Lambda^4{}_4 u^4\right) < 0. \tag{3.3}$$

Defineerides $v \in \mathcal{M}$ võrdusega $v = \Lambda^4{}_1 e^1 + \Lambda^4{}_2 e^2 + \Lambda^4{}_3 e^3 - \Lambda^4{}_4 e^4$ on v ajasarnane vektor, kusjuures seose (3.3) saame esitada kujul

$$g\left(u, v\right) \hat{u}^4 < 0. \tag{3.4}$$

Viimane võrratus ütleb meile, et arvudel $g\left(u, v\right)$ ja $\hat{u}^4$ on erinevad märgid. Näitame viimaks, et $\Lambda^4{}_4 \geq 1$ siis ja ainult siis, kui arvudel u^4 ja $\hat{u}^4$ on samad märgid. Selleks oletame esmalt, et $\Lambda^4{}_4 \geq 1$. Kui $u^4 > 0$, siis teoreemi 3.1 järgi $g\left(u, v\right) < 0$ ja seega (3.4) põhjal $\hat{u}^4 > 0$. Kui $u^4 < 0$, siis $g\left(u, v\right) > 0$, ja seega $\hat{u}^4 < 0$. Kokkuvõttes järeldub võrratusest $\Lambda^4{}_4 \geq 1$, et u^4 ja $\hat{u}^4$ on samamärgilised. Analoogiliselt saab näidata, et kui $\Lambda^4{}_4 \leq -1$, siis u^4 ja $\hat{u}^4$ on erimärgilised. □

Teoreemi tõestusest saame teha järgmise olulise järelduse.

Järeldus 3.2. *Kui Λ on mitteortokroonne, siis ta muudab kõikide ajasarnaste ja nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märgi.*

Järelduse tulemust arvestades on mõistlik edasises uurida vaid hulga $\mathcal{L}_{GH}$ elemente, mis on ortokroonsed. Kuna sellised Lorentzi teisendused ei muuda ajasarnaste ega nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märki, siis võime konkreetsuse mõttes piirduda vaid selliste ortonormaalsete baasidega $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$, kus $e_4 \sim \hat{e}_4$. Tuletame meelde, et siinjuures ei ole vahet kumba faktorhulga

$\mathcal{M}/\!\sim$ ekvivalentsiklassi elemendid e_4 ja $\hat{e}_4$ kuuluvad, sest nende ekvivalentsiklasside täpne fikseerimine on meelevaldne.

Meenutades veel seost (2.4), siis saame kirjutada $\det\left(\Lambda^T\eta\Lambda\right) = \det\eta$, millest tuleneb $(\det\Lambda)^2 = 1$. Järelikult kehtib kas

$$\det\Lambda = 1 \quad \text{või} \quad \det\Lambda = -1,$$

ja seejuures ütleme, et Λ on *Lorentzi päristeisendus*, kui $\det\Lambda = 1$.

Lause 3.1. *Hulk $\mathcal{L} := \{\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}\colon\ \det\Lambda = 1,\ {\Lambda^4}_4 \geq 1\}$ on korrutamise suhtes rühma $\mathcal{L}_{GH}$ alamrühm, see tähendab ortokroonsed Lorentzi päristeisendususued moodustavad rühma.*

Proof. Veendumaks, et hulk $\mathcal{L}$ on rühm näitame, et ta on kinnine korrutamise ja pöördelemendi võtmise suhtes. Olgu $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$. Paneme tähele, et

$$\det\left(\Lambda_1\Lambda_2\right) = \det\Lambda_1 \cdot \det\Lambda_2 = 1$$

ja seose (2.7) põhjal

$$\det\Lambda^{-1} = \det\left(\eta\Lambda^T\eta\right) = (-1)^2\det\Lambda^T = \det\Lambda = 1.$$

Seose (2.7) põhjal on ilmne ka ${(\Lambda^{-1})^4}_4 = {\left(\Lambda^T\right)^4}_4 = {\Lambda^4}_4 \geq 1$. Veendumaks, et ${(\Lambda_1\Lambda_2)^4}_4 \geq 1$ tähistame $\vec{a} = \left({(\Lambda_1)^4}_1, {(\Lambda_1)^4}_2, {(\Lambda_1)^4}_2\right)$ ja $\vec{b} = \left({(\Lambda_2)^1}_4, {(\Lambda_2)^2}_4, {(\Lambda_2)^3}_4\right)$ ning skalaarkorrustise $\vec{a}\cdot\vec{b}$ all mõtleme eukleidilist skalaarkorrutist ruumis $\mathbb{R}^3$. Selliseid tähistusi arvestades võime kirjutada

$$\begin{aligned}{(\Lambda_1\Lambda_2)^4}_4 &= {(\Lambda_1)^4}_1\,{(\Lambda_2)^1}_4 + {(\Lambda_1)^4}_2\,{(\Lambda_2)^2}_4 + {(\Lambda_1)^4}_3\,{(\Lambda_2)^3}_4 + {(\Lambda_1)^4}_4\,{(\Lambda_2)^4}_4 = \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b} + {(\Lambda_1)^4}_4\,{(\Lambda_2)^4}_4\,.\end{aligned}$$

Võttes valemis (2.3) $a = b = 4$ saame $\left({(\Lambda_1)^4}_4\right)^2 - \vec{a}\cdot\vec{a} = 1$, millest

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left({(\Lambda_1)^4}_4\right)^2 - 1} \leq {(\Lambda_1)^4}_4\,.$$

Analoogiliselt saame valemist (2.6), et $|\vec{b}| \leq {(\Lambda_2)^4}_4$ ja seega kokkuvõttes $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \leq {(\Lambda_1)^4}_4\,{(\Lambda_2)^4}_4$. Viimane aga tähendab, et $(\Lambda_1\Lambda_2) \geq 0$, millest piisab, et kehtiks $(\Lambda_1\Lambda_2) \geq 1$. Tõepoolest, kui $\hat{\Lambda} \in \mathcal{L}_{GH}$ ja tähistame $\vec{c} = \left(\frac{{\hat{\Lambda}^4}_1}{{\hat{\Lambda}^4}_4}, \frac{{\hat{\Lambda}^4}_2}{{\hat{\Lambda}^4}_4}, \frac{{\hat{\Lambda}^4}_3}{{\hat{\Lambda}^4}_4}\right)$, siis (2.3) põhjal

$$-1 = \left({\hat{\Lambda}^4}_1\right)^2 + \left({\hat{\Lambda}^4}_2\right)^2 + \left({\hat{\Lambda}^4}_3\right)^2 - \left({\hat{\Lambda}^4}_4\right)^2 = -\left({\hat{\Lambda}^4}_4\right)^2\left(1 - \vec{c}\cdot\vec{c}\right).$$

Viimane võrdus saab kehtida vaid juhul, kui $1 - \vec{c} \cdot \vec{c} > 0$. Järelikult

$$\left(\left(\hat{\Lambda}\right)^4_{\ 4}\right)^2 = \frac{1}{1 - \vec{c} \cdot \vec{c}} \geq 1$$

ehk kehtib kas $\left(\hat{\Lambda}\right)^4_{\ 4} \geq 1$ või $\left(\hat{\Lambda}\right)^4_{\ 4} \leq 1$. Sellega oleme näidanud, et $\mathcal{L}$ on rühm. $\square$

Märkus 3.1. Rühma $\mathcal{L}$ lausest 3.1 nimetatakse sageli *Lorentzi rühmaks*, nagu ka rühma $\mathcal{L}_{GH}$.

Järgnevalt vaatleme lähemalt hulga $\mathcal{L}$ alamhulka $\mathcal{R}$, mille elemendid avalduvad kujul

$$R = \begin{pmatrix} R^1_{\ 1} & R^1_{\ 2} & R^1_{\ 3} & 0 \\ R^2_{\ 1} & R^2_{\ 2} & R^2_{\ 3} & 0 \\ R^3_{\ 1} & R^3_{\ 2} & R^3_{\ 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kus $\left(R^i_{\ j}\right)_{i,j=1,2,3}$ on ortogonaalne ja unimodulaarne, see tähendab $\left(R^i_{\ j}\right)^{-1} = \left(R^i_{\ j}\right)^T$ ja *det* $\left(R^i_{\ j}\right) = 1$. Märgime, et tõepoolest $R \in \mathcal{L}$, sest $R^4_{\ 4} = 1$ definitsiooni järgi ning kasutades Laplace'i teoreemi saame $\det R = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det \left(R^i_{\ j}\right) = 1$. Samuti on täidetud ortogonaalsuse tingimus (2.4) kuna

$$\begin{aligned} R^T \eta R &= \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right)^T \left(R^i_{\ j}\right) & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right)^{-1} \left(R^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta. \end{aligned}$$

Paneme veel tähele, et hulk $\mathcal{R}$ on rühm. Tõepoolest, kui $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, siis

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \left((R_1)^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left((R_2)^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left((R_1)^i_{\ j}\right) \left((R_2)^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja seega $(R_1 R_2)^4_{\ 4} = 1$ ning

$$\det \left(\left((R_1)^i_{\ j}\right) \left((R_2)^i_{\ j}\right)\right) = \det \left((R_1)^i_{\ j}\right) \det \left((R_1)^i_{\ j}\right) = 1.$$

Teisalt, kui $R \in \mathcal{R}$, siis valemist (2.7) saame

$$R^{-1} = \eta R^T \eta = \eta \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta = \eta \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right)^T & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R^i_{\ j}\right)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järelikult $\left(R^{-1}\right)^4{}_4 = 1$ ning $\det\left(\left(R^{-1}\right)^i{}_j\right) = \det\left(R^i{}_j\right)^T = \det\left(R^i{}_j\right) = 1$.

Et hulga $\mathcal{R}$ elemendid kirjeldavad koordinaatide teisendusi, mis pööravad ruumikoordinaate, siis ütleme teisenduse $R \in \mathcal{R}$ kohta *pööre* ja rühma $\mathcal{R}$ nimetame rühma $\mathcal{L}$ *pöörete alamrühmaks*.

Lause 3.2. *Olgu $\Lambda \in \mathcal{L}$. Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(i) Λ *on pööre, see tähendab* $\Lambda \in \mathcal{R}$*;*

(ii) $\Lambda^1{}_4 = \Lambda^2{}_4 = \Lambda^3{}_4 = 0$*;*

(iii) $\Lambda^4{}_1 = \Lambda^4{}_2 = \Lambda^4{}_3 = 0$*;*

(iv) $\Lambda^4{}_4 = 1$.

Proof. Implikatsioonid (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii) ja (i) $\Rightarrow$ (ii) on pöörde definitsiooni arvestades ilmsed.

Näitamaks, et (ii), (iii) ja (iv) on samaväärsed märgime, et fikseerides seostes (2.3) ja (2.6) sobivalt indeksid saame

$$\begin{aligned}\left(\Lambda^1{}_4\right)^2 + \left(\Lambda^2{}_4\right)^2 + \left(\Lambda^3{}_4\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 &= -1,\\ \left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 &= -1.\end{aligned}$$

Võttes arvesse, et Λ on ortokroonne, siis $\Lambda^4{}_4 \geq 1$ ja seega saame kirjutada

$$\begin{aligned}\left(\Lambda^1{}_4\right)^2 + \left(\Lambda^2{}_4\right)^2 + \left(\Lambda^3{}_4\right)^2 - 1 &\geq -1,\\ \left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2 - 1 &\geq -1,\end{aligned}$$

mis saab aga võimalik olla vaid juhul, kui $\Lambda^1{}_4 = \Lambda^2{}_4 = \Lambda^3{}_4 = \Lambda^4{}_1 = \Lambda^4{}_2 = \Lambda^4{}_3 = 0$.

Tõestuse lõpetamiseks jääb veel näidata, et kui $\Lambda \in \mathcal{L}$ ja kehtib (ii) (ja seega ka (iii) ning (iv)), siis $\left(\Lambda^i{}_j\right)_{i,j=1,2,3}$ on ortogonaalne ja unimodulaarne. Võrdus $\det\left(\Lambda^i{}_j\right) = 1$ on tõestatud osas, kus näitasime, et $\mathcal{R}$ on rühm ja seega on $\left(\Lambda^i{}_j\right)$ ortogonaalne. Jääb veel näidata, et $\left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} = \left(\Lambda^i{}_j\right)^T$. Selleks arvutame blokkmaatriksi pööramise eeskirja järgi Λ^{-1}:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\Lambda^i{}_j\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} + \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} 0 \left(1 - 0 \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} 0 \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} & -\left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} 0 \left(1 - 0 \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} \\ -\left(1 - 0 \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} 0 \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} & \left(1 - 0 \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} 0\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osas, kus näitasime, et $\mathcal{R}$ on rühm tuli ka välja, et $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\Lambda^i{}_j\right)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, millest $\left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} = \left(\Lambda^i{}_j\right)^T$ ehk $\left(\Lambda^i{}_j\right)$ on ortogonaalne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et Λ on pööre, nagu tarvis. $\square$

3.2 Poincaré rühm

Võttes arvesse Pythagorase teoreemi tähendust kahemõõtmelisel tasandil, üldistame kahe punkti vahelise kauguse mõiste kahe sündmuse vaheliseks kauguseks Minkowski aegruumis.

Definitsioon 3.2. Olgu $x = x^a$ ja $y = y^a$, $a = 1, 2, 3, 4$, kaks sündmust Minkowski ruumis $\mathcal{M}$. Sündmuste x ja y vaheliseks *kauguseks* nimetame reaalarvu s, mis on defineeritud valemiga

$$s = s\left(x, y\right) = \eta_{ab}\left(x^a - y^a\right)\left(x^b - y^b\right), a, b = 1, 2, 3, 4,$$

kus η on Minkowski ruumi meetrika.

Meenutame, et Minkowski ruumi pseudoortogonaalteisendus L on defineeritud kui kujutus, mis säilitab skalaarkorrutise g. Olgu $x, y \in \mathcal{M}$. Osutub, et kujutuse L ortogonaalsusest järeldub lihtsasti, et sündmuste x ja y vaheline kaugus sama, mis sündmustel Lx ja Ly, see tähendab $s\left(x, y\right) = s\left(Lx, Ly\right)$. Tõepoolest, kui Λ on kujutuse L maatriks, siis valemi (2.3) abil saame kirjutada

$$\begin{aligned} s\left(Lx, Ly\right) &= \eta_{ab}\left(\Lambda^a{}_c x^c - \Lambda^a{}_c y^a\right)\left(\Lambda^b{}_d x^d - \Lambda^b{}_d y^d\right) = \\ &= \eta_{ab}\Lambda^a{}_c\left(x^c - y^c\right)\Lambda^b{}_d\left(x^d - y^d\right) = \\ &= \eta\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d\left(x^c - y^c\right)\left(x^d - y^d\right) = \\ &= \eta\left(x^c - y^c\right)\left(x^d - y^d\right) = \\ &= s(x, y). \end{aligned}$$

Olgu $n \in \mathrm{Mat}_{4,1}\mathbb{R}$ komponentidega $n^a, a = 1,2,3,4$ mingi fikseeritud 1×4 reaalne maatriks. On väga loomulik oletada, et sündmuste x ja y jäigal nihutamisel

$$\hat{x}^b = x^b + n^b, \quad \hat{y}^b = y^b + n^b, \quad b = 1,2,3,4, \tag{3.5}$$

ruumis $\mathcal{M}$ nende sündmuste vaheline kaugus ei muutu. Arvestades meie antud kauguse definitsiooni see nii ilmselt ka on. Seejuures teisendusi (3.5) nimetame *nihketeisendusteks.*

Kokkuvõttes oleme leidnud kaks kujutuste klassi, nihked ja (homogeensed) Lorentzi teisendused, mille suhtes ruumi $\mathcal{M}$ sündmuste vaheline kaugus on invariantne. Üldisemalt nimetame teisendust, mille suhtes sündmuste vaheline kaugus on invariantne suurus *sümmeetriateisenduseks.* Pöörame järgnevas pisut tähelepanu sellistele sümmeetriateisendustele, mille me saame, kui vaatleme nihkeid koos Lorentzi teisendustega.

Definitsioon 3.3. Olgu $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ Lorentzi teisendus ja $n \in \mathrm{Mat}_{4,1}\mathbb{R}$ mingi nihketeisenduse maatriks. *Poincaré teisenduseks*[8] nimetame kujutust kujul

$$\mathcal{M} \ni x \mapsto \Lambda^a{}_b x^b + n^b \in \mathcal{M}$$

ja tähistame paarina $\{n, \Lambda\}$.[9]

Definitsioon 3.4 ([3])**.** Kõikide Poincaré teisenduste hulka

$$P = \{\{n, \Lambda\} \colon\ n \in \mathrm{Mat}_{4,1}\mathbb{R}, \Lambda \in \mathcal{L}_{GH}\}$$

koos tehtega $\circ\colon\ P \times P \to P$, $\{n_1, \Lambda_1\} \circ \{n_2, \Lambda_2\} \mapsto \{n_1 + \Lambda_1 n_2, \Lambda_1\Lambda_2\}$, nimetame *Poincaré rühmaks.* Seda rühma tähistatakse sümboliga $\mathcal{P}$.

Veendumaks Poincaré rühma defintsiooni korrektsuses piisab näidata, et hulk P varustatuna tehtega $\circ\colon\ P \times P \to P$ moodustab tõepoolest rühma. Olgu meil selleks fikseeritud kolm Poicaré teisendust $\{n_1, \Lambda_1\}, \{n_2, \Lambda_2\}$ ja $\{n_3, \Lambda_3\}$. Esiteks märgime, et $\Lambda_1 n_2 \in \mathrm{Mat}_{4,1}\mathbb{R}$ ja seega ka $n_1 + \Lambda_1 n_2 \in \mathrm{Mat}_{4,1}\mathbb{R}$ ja $\Lambda_1\Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$, sest $\mathcal{L}_{GH}$ on rühm maatriksite korrutamise suhtes ja seega $\{n_1, \Lambda_1\} \circ \{n_2, \Lambda_2\} \in P$. Assotsiatiivsus on vahetult kontrollitav:

$$\begin{aligned}
&(\{n_1, \Lambda_1\} \circ \{n_2, \Lambda_2\}) \circ \{n_3, \Lambda_3\} = \\
&= \{n_1 + \Lambda_1 n_2, \Lambda_1\Lambda_2\} \circ \{n_3, \Lambda_3\} = \\
&= \{n_1 + \Lambda_1 n_2 + \Lambda_1\Lambda_2 n_3, \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\} = \\
&= \{n_1 + \Lambda_1 (n_2 + \Lambda_2 n_3), \Lambda_1 (\Lambda_2\Lambda_3)\} = \\
&= \{n_1, \Lambda_1\} \circ \{n_2 + \Lambda_2 n_3, \Lambda_2\Lambda_3\} = \\
&= \{n_1, \Lambda_1\} \circ (\{n_2, \Lambda_2\} \circ \{n_3, \Lambda_3\})
\end{aligned}$$

[8] Jules Henri Poincaré (1854–1912) — prantsuse matemaatik.

[9] Vahel kasutatakse *Poicaré teisenduse* asemel terminit *mittehomogeenne Lorentzi teisendus.*

Lihtne on näha, et ühikuks sobib võtta $\{0, E\}$ ja seega on Poincaré teisenduse $\{n_1, \Lambda_1\}$ pöördelemendiks teisendus $\{-\left(\Lambda_1\right)^{-1} n_1, \left(\Lambda_1\right)^{-1}\}$, sest

$$n_1 + \Lambda_1 \left(-\left(\Lambda_1\right)^{-1}\right) n_1 = n_1 - En_1 = 0 \text{ ja } \Lambda_1 \left(\Lambda_1\right)^{-1} = E.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et Poincaré rühm $\mathcal{P}$ on oma algebralistelt omadustelt tõepoolest rühm.

Kuna teisendusi, mis säilitavad punktide vahelisi kaugusi nimetatakse isomeetriateisendusteks ja Poincaré teisendused säilitavad ruumi $\mathcal{M}$ sündmuste vahel kaugused, siis öeldakse Poincaré rühma kohta *Minkowski ruumi isomeetriarühm.*

Märkus 3.2. Paneme tähele, et kui vaatleme selliseid Poincaré teisndusi $\{n_1, \Lambda_1\}$ ja $\{n_2, \Lambda_2\}$, mille korral $n_1 = n_2 = 0$, siis on meil tegelikult tegu Lorentzi teisendustega ja seejuures nende teisenduste korrutised on samad Lorentzi ja Poincaré rühma kontekstis.

4 Minkowski ruum teoreetilises füüsikas ja diferentsiaalgeomeetrias

4.1 Lie algebra

Definitsioon 4.1. Vektorruumi L nimetatakse *Lie algebraks*[10], kui on määratud bilineaarvorm $[\ ,\ ] : L \times L \to L$, mis on antikommuteeruv, see tähendab suvaliste $u, v \in L$ korral $[u, v] = -[v, u]$, ja kehtib Jacobi samasus

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0,$$

kus $u, v, w \in L$.

Bilineaarvormi $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ Lie algebra definitsioonist nimetatakse *kommutaatoriks*.

Piltlikult võib öelda, et kommutaator mõõdab, kui palju on Lia algebra elemendid mittekommuteeruvad.

Definitsioon 4.2. Olgu L lõplikumõõtmeline Lie algebra ja $\{t_i\}_{i=1}^r$ selle Lie algebra vektorruumi bass. Kui tähistame $[t_i, t_j] = c_{ij}^k t_k$, kus $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, siis arve c_{ij}^k nimetame Lie algebra *struktuurikonstantideks*.

Märkus 4.1. Lie algebrate kontekstis nimetatakse baasivektoreid sageli ka Lie algebra *generaatoriteks*.

Lie algebra struktuurikonstantide definitsiooni põhjal on selge, et struktuurikonstantide väärtus sõltub Lie algebra baasi valikust. Lisaks saame vahetult kommutaatori antikommuteeruvusest

$$c_{ij}^k t_k = [t_i, t_j] = -[t_j, t_i] = -c_{ji}^k t_k$$

ehk

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \tag{4.1}$$

kus t_i, t_j, t_k on Lie algebra generaatorid.

Kasutades Jacobi samasust baasivektoritele tuletame nüüd seosed struktuurikonstantide jaoks:

[10] Marius Sophus Lie (1842–1899) — norra matemaatik.

$$
\begin{aligned}
[t_i,[t_j,t_k]]+[t_j,[t_k,t_i]]+[t_k,[t_i,t_j]]&=0,\\
\left[t_i,c^l_{jk}t_l\right]+\left[t_j,c^l_{ki}t_l\right]+\left[t_k,c^l_{ij}t_l\right]&=0,\\
c^l_{jk}\left[t_i,t_l\right]+c^l_{ki}\left[t_j,t_l\right]+c^l_{ij}\left[t_k,t_l\right]&=0,\\
c^l_{jk}c^m_{il}t_m+c^l_{ki}c^m_{jl}t_m+c^l_{ij}c^m_{kl}t_m&=0,\\
c^l_{jk}c^m_{il}+c^l_{ki}c^m_{jl}+c^l_{ij}c^m_{kl}&=0.
\end{aligned}
$$

Kokkuvõttes saame Lie algebra generaatorite kohta sõnastada järgmise tähtsa tulemuse.

Lause 4.1. *Lie algebra on täielikult määratud tema generaatorite kommutatsiooni-eeskirjadega ehk struktuurikonstantidega.*

Näide 4.1. Vaatleme teist järku ruutmaatriksite hulka $\mathfrak{su}\,(2)\subset \mathrm{Mat}_2\,\mathbb{C}$, mille element $u\in\mathfrak{su}\,(2)$ rahuldab tingimusi

$$\mathrm{Tr}\,u=0, \tag{4.2}$$

$$u^\dagger+u=0. \tag{4.3}$$

Siin $u^\dagger=\bar{u}^T$ ja maatirksit u, mille korral tingimus (4.3) kehtib, nimetatakse *anti-Hermite'i maatriksiks.*

Veendume, et $\mathfrak{su}\,(2)$ koos tavalise maatrikskommutaatoriga $[u,v]=uv-vu$, $u,v\in\mathfrak{su}\,(2)$, on Lie algebra.

Olgu $u,v,w\in\mathfrak{su}\,(2)$. Kõigepealt märgime, et

$$
\begin{aligned}
(u+v)+(u+v)^\dagger&=u+v+u^\dagger+v^\dagger=0,\\
\mathrm{Tr}\,(u+v)&=0
\end{aligned}
$$

ehk $u+v\in\mathfrak{su}\,(2)$. Veendumaks, et $\mathfrak{su}\,(2)$ on Lie algebra, piisab nüüd veel näidata, et kommutaator $[\ ,\ ]$ rahuldab definitsioonis 4.1 antud tingimusi ning kehtivad $[u,v]\in\mathfrak{su}\,(2)$ ja $\mathrm{Tr}\,[u,v]=0$.

Paneme tähele, et definitsiooni järgi $[u,v]=uv-vu=-\left(vu-uv\right)=-\left[v,u\right]$ ning kehtib Jacobi samasus, sest

$$
\begin{aligned}
&[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=\\
&=[u,vw-wv]+[v,wu-uw]+[w,uv-vu]=\\
&=[u,vw]-[u,wv]+[v,wu]-[u,uw]+[w,uv]-[w,vu]=\\
&=uvw-vwu-uwv+wvu+vwu-wuv-\\
&-vuw+uwv+wuv-uvw-wvu+vuw=0.
\end{aligned}
$$

Seega on definitsiooni 4.1 eeldused täidetud. Märkuse 1.2 põhjal $\mathrm{Tr}\,(uv) = \mathrm{Tr}\,(vu)$, millest saame $\mathrm{Tr}\,[u,v] = 0$. Lõpuks paneme veel tähele, et $[u,v] + [u,v]^\dagger = 0$. Tõepoolest, kuna $u^\dagger = -u$ ja $v^\dagger = -v$, siis

$$\begin{aligned}[u,v] + [u,v]^\dagger &= uv - vu + (uv - vu)^\dagger = uv - vu + (uv)^\dagger - (vu)^\dagger = \\ &= uv - vu + v^\dagger u^\dagger - u^\dagger v^\dagger = uv - vu + vu - uv = 0.\end{aligned}$$

Näites 4.1 toodud Lie algebrat $\mathfrak{su}\,(2)$ nimetatakse *teist järku spetsiaalsete unitaarsete maatriksite* Lie algebraks. Osutub, et Yang-Millsi väljateoorias[11] on Lie algebral $\mathfrak{su}\,(2)$ väga tähtis roll seoses lagranžiaani sümmeetriatega[12]. Teiselt poolt, käesoleva töö seisukohast on vahest isegi olulisem märkida, et Lie algebrat $\mathfrak{su}\,(2)$ kasutatakse Lorentzi rühma spiinoresituse konstrueerimiseks.

Uurime edasises veel pisut Lie algebra $\mathfrak{su}\,(2)$ omadusi. Tingimusest (4.2) saame, et $u \in \mathfrak{su}\,(2)$ peab omama kuju $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Arvestades ka tingimust (4.3), peab seega kehtima

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{-a} \end{pmatrix} = 0,$$

millest saame järgmised tingimused:

$$\begin{cases} a + \overline{a} = 0, \\ b + \overline{c} = 0. \end{cases}$$

Võttes $a = v + i\varphi$, siis peab kehtima $v + i\varphi + v - i\varphi = 0$ ehk $v = 0$, millest $a = i\varphi$. Võttes veel arvesse, et $c = -\overline{b}$, siis saab maatriks u kuju $u = \begin{pmatrix} i\varphi & b \\ -\overline{b} & -i\varphi \end{pmatrix}$, kus $b = x + iy \in \mathbb{C}$ ja $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$. Viimane aga tähendab, et maatriksis u on lineaarselt sõltumatuid reaalseid komponente kolm ehk $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}\,(2) = 3$. Arvestades tähistust $b = x + iy$ saame kirjutada

$$u = \varphi \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sellega oleme leidnud Lie algebra $\mathfrak{su}\,(2)$ baasi ehk generaatorid:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

[11] Yang-Millsi väljateooria on kalibratsiooniväljateooria, mille eesmärk on kirjeldada mittekommutatiivse rühmateooria, kvantkromodünaamika ja nõrga ning elektromagneetilise vastasmõju ühendamisel elementaarosakesi.

[12] Lagranžiaan ehk Lagrange'i funktsioon on funktsioon, mis kirjeldab süsteemi dünaamikat. Lagrangian on oma nime saanud itaalia matemaatiku Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) järgi.

Paneme tähele, et korrutades $\mathfrak{su}(2)$ generaatoreid ρ_1, ρ_2, ρ_3 arvuga $-i$ ning tähistame saadud maatriksid vastavalt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, siis saame maatriksid

$$\sigma_1 = -i \cdot \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = -i \cdot \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = -i \cdot \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mis on täpselt *Pauli maatriksite*[13] baas. Pauli maatriksitel on teoreetilises füüsikas väga tähtis roll.

4.2 Lie algebra esitus

Definitsioon 4.3. Olgu V vektorruum ja L Lie algebra. Me ütleme, et lineaarkujutus $\psi\colon L \to \operatorname{Lin} V$ on Lie algebra L esitus, kui ta säilitab kommutaatori, see tähendab iga $u, v \in L$ korral $[\psi(u), \psi(v)] = \psi([u, v])$.

Definitsioon 4.4. Lie algebra L esitust $\psi\colon L \to \operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ nimetatakse *maatriksesituseks.*

Lause 4.2. *Olgu L Lie algebra. Kujutus* $\operatorname{ad}\colon L \to \operatorname{Lin} L$, $\operatorname{ad} u(v) := [u, v]$, *kus* $u, v \in L$, *on Lie algebra L esitus.*

Proof. Arvestades kommutaatori lineaarsust ja seda, kuidas me kujutuse ad defineerisime, on lineaarsus ilmne.

Veendumaks, et kujutus $\operatorname{ad}\colon L \to \operatorname{Lin} L$ on tõepoolest Lie algebra esitus, tuleb veel kontrollida, et kehtib võrdus $[\operatorname{ad} u_1, \operatorname{ad} u_2](v) = \operatorname{ad}[u_1, u_2](v)$. Selle võrduse annab meile Jacobi samasus, kuna

$$\begin{aligned} 0 &= [u_1, [u_2, v]] + [u_2, [v, u_1]] + [v, [u_1, u_2]] = \\ &= [u_1, [u_2, v]] + [u_2, -[u_1, v]] - [[u_1, u_2], v] = \\ &= [u_1, [u_2, v]] - [u_2, [u_1, v]] - [[u_1, u_2], v], \end{aligned}$$

ehk $[u_1, [u_2, v]] - [u_2, [u_1, v]] = [[u_1, u_2], v]$ ja seega

$$[\operatorname{ad} u_1, \operatorname{ad} u_2](v) = [u_1, [u_2, v]] - [u_2, [u_1, v]] = [[u_1, u_2], v] = \operatorname{ad}[u_1, u_2](v),$$

ehk $\operatorname{ad}\colon L \to \operatorname{Lin} L$ on tõepoolest Lie algebra L esitus. □

Definitsioon 4.5. Esitust lausest 4.2 nimetame Lie algebra L *adjungeeritud esituseks.*

[13] Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958) — austria füüsik, üks kvantmehaanika rajaid.

Näide 4.2. Leiame Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ baasi $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ adjungeeritud esituse

$$\{\mathrm{ad}\,\rho_1, \mathrm{ad}\,\rho_2, \mathrm{ad}\,\rho_3\}$$

maatrikskuju. Arvestades adjungeeritud esituse definitsiooni, tuleb meil selleks arvutada vektorid $\mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_1), \mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_2), \ldots, \mathrm{ad}\,\rho_3(\rho_2)$ ja $\mathrm{ad}\,\rho_3(\rho_3)$. Teemegi seda:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_1) &= [\rho_1, \rho_1] = \rho_1\rho_1 - \rho_1\rho_1 = 0,\\
\mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_2) &= [\rho_1, \rho_2] = \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1 = -2\rho_3,\\
\mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_3) &= [\rho_1, \rho_3] = \rho_1\rho_2 - \rho_3\rho_1 = 2\rho_2,\\
\mathrm{ad}\,\rho_2(\rho_1) &= [\rho_2, \rho_1] = -[\rho_1, \rho_2] = -\,\mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_2) = 2\rho_3,\\
\mathrm{ad}\,\rho_2(\rho_2) &= [\rho_2, \rho_2] = \rho_2\rho_2 - \rho_2\rho_2 = 0,\\
\mathrm{ad}\,\rho_2(\rho_3) &= [\rho_2, \rho_3] = \rho_2\rho_2 - \rho_3\rho_2 = -2\rho_1,\\
\mathrm{ad}\,\rho_3(\rho_1) &= [\rho_3, \rho_1] = -[\rho_1, \rho_3] = -\,\mathrm{ad}\,\rho_1(\rho_3) = -2\rho_2,\\
\mathrm{ad}\,\rho_3(\rho_2) &= [\rho_3, \rho_2] = -[\rho_2, \rho_3] = -\,\mathrm{ad}\,\rho_2(\rho_3) = 2\rho_1,\\
\mathrm{ad}\,\rho_3(\rho_3) &= [\rho_3, \rho_3] = \rho_3\rho_3 - \rho_3\rho_3 = 0.
\end{aligned}$$

Saadud võrduste põhjal võime nüüd kirjutada

$$\mathrm{ad}\,\rho_1 = 2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{ad}\,\rho_2 = 2\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{ad}\,\rho_3 = 2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

mis tähendab, Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ adjungeeritud esituse baasiks sobib kolmandat järku antisümmeetriliste maatriksite süsteem

$$\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Osutub, et saadud maatriksid moodustavad kolmemõõtmelise ruumi pöörete rühma Lie algebra baasi. Sellega oleme sisuliselt näidanud, et tegelikult on Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ ja pöörete rühma vahel väga tähtis seos.

4.3 Lie rühm

Definitsioon 4.6. Rühma G nimetatakse *Lie rühmaks*, kui ta on diferentseeruv muutkond ja tema (rühma) tehe on diferentseeruv.

Definitsioon 4.7. Olgu G Lie rühm ja e selle rühma ühikelement. Rühma G puutujaruumi T_eG punktis e nimetatakse Lie rühma G (poolt määratud) *Lie algebraks.*

Osutub, et eespool vaatluse all olnud Lorentzi rühm $\mathcal{L}_{GH}$ ja Poincaré rühm $\mathcal{P}$ on oma matemaatilistelt omadustelt koguni Lie rühmad [2, peatükk Poincaré algebra]. Et selle väite formaalne tõestamine nõuab palju tehnilist tööd ja tulemusi diferentsiaalgeomeetriast ning Lie algebrate teooriast, siis jätame siinkohal range tõestuse andmata ja piirdume vaid faktilise teadmisega.

Et edasist teooriaarendust oluliselt lihtsustada, on järgnevas otstarbekas piirduda vaid Lie maatriksrühmade vaatlemisega. Samas märgime, et kuna maatriksrühmad moodustavad väga suure ja olulise rühmade klassi, siis kõik tähtsamad rühmad, muuhulgas ka selles töös käsitletavad juhud, jäävad kaetuks ka pärast sellise kitsenduse lisamist. Niisiis, kõikjal selles paragrahvis eeldame, et kui tegemist on Lie rühmaga, siis see rühm on maatriksrühm.

Lie rühmade teoorias nöidatakse, et igale Lie rühmale vastab tema Lie algebra. Meie uurime järgnevalt, kuidas tekib Lie rühma poolt määratud Lie algebra kommutaator. Olgu G Lie maatriksrühm ning E selle rühma ühikelement. Kuna G on Lie rühm, siis definitsiooni järgi on G ka muutkond. Muutkonnal G võime vaadelda parameetrilist joont $g(t) \in G$, $t \in (-\delta, \delta)$, kus $\delta \in \mathbb{R}$ on mingi fikseeritud arv ja nõuame, et $g(0) = E$. Sel viisil saame muutkonna G puutujavektori $v = g'(0) \in T_EG$ punktis E.

Fikseerime elemendi $h \in G$. Nüüd määrab meie fikseeritud h loomulikul viisil automorfismi $g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}$. Nii võime vaadelda joone $h \cdot g(t)\, h^{-1}$ puutujavektorit v_h. Meie eesmärk on välja selgitada millises vahekorras on puutujavektorid v ja v_h.

Oletame järgnevalt, et meil on muutkonnal G antud kaks parameetrilist joont $g(t)$ ja $h(t)$, $t \in (-\delta, \delta)$, selliselt, et $g(0) = h(0) = E$. Sellisel juhul võime vaadelda kommutanti $g(t)\, h(t)\, g^{-1}(t)\, h^{-1}(t)$, kusjuures on selge, et kommutatiivse rühma korral annab vaatluse all olev kommutant tulemuseks alati ühikelemendi E. Lie rühmade teooriast on hästi teada[14] fakt, et kui G on Lie maatriksrühm, siis eksisteerib sürjektsioon $\exp\colon T_EG \to G$, kus T_EG on rühma G ühikelemendi puutujaruumi Lie algebra. Seega saame leida $A, B \in T_EG$ selliselt, et $g(t) = e^{tA}$ ja $h(t) = e^{tB}$.

Nõnda saame kommutandi $g(t)\, h(t)\, g^{-1}(t)\, h^{-1}(t)$ arvutamise taandada juba Lie algebrale T_EG, sest arvestades eelnevat ja maatrikseksponendi omadusi, kehtib võrdus $g(t)\, h(t)\, g^{-1}(t)\, h^{-1}(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB}$. Viimast oskame aga juba välja

[14]Vaata näiteks [5, Exponential map].

arvutada:

$$
\begin{aligned}
&g(t)\,h(t)\,g^{-1}(t)\,h^{-1}(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB} = \\
&= \left(E + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots\right)\left(E + Bt + \frac{1}{2}B^2t^2 + \ldots\right) \\
&\quad \left(E - At + \frac{1}{2}A^2t^2 - \ldots\right)\left(E - Bt + \frac{1}{2}B^2t^2 - \ldots\right) = \\
&= E + (A + B - A - B)\,t + \\
&\quad + \left(AB - A^2 - AB - BA - B^2 + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2\right)t^2 + \ldots \\
&= E + 0t + (AB - BA)\,t^2 + \ldots = \\
&= E + [A, B]\,t^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Meie arvutused näitavad, et esimeses lähenduses on Lie maatriksrühm kommutatiivne (see tuleneb asjaolust, et lineaarliikme t kordaja on null). Kui aga arvestame saadud valemis ka ruutliikmeid, siis tekib avaldis $[A, B] = AB - BA$, millega saab mõõta rühma mittekommutatiivsust. See ongi vastava Lie algebra kommutaator. Kokkuvõttes oleme andnud skeemi kuidas konstrueerida Lie maatriksrühmale vastav Lie algebra.

4.4 Minkowski superruum

Teoreetilise füüsika vajadustest lähtudes on sageli otstarbekas vaadelda sündmusi ja füüsikalisi protsesse mitte ainult neljamõõtmelises aegruumis, vaid hoopis üldisemas d-mõõtmelises *Minkowski superruumis*. Selles alapeatükis uurime pisut vabamas vormis, mida Minkowski superruum endast kujutab ja kuidas ta on seotud tavalise Minkowski aegruumiga. Alustuseks defineerime superruumi ja superalgebra.

Definitsioon 4.8. Vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse *supervektorruumiks* ehk *superruumiks*, kui ta esitub otsesummana $\mathbb{V} = \mathbb{V}_{\bar{0}} \oplus \mathbb{V}_{\bar{1}}$, kus $\mathbb{V}_{\bar{0}}$ ja $\mathbb{V}_{\bar{1}}$ on vektorruumi $\mathbb{V}$ alamruumid ja $\mathbb{V}_{\bar{0}}$ elemente nimetame *paarisvektoriteks* ning $\mathbb{V}_{\bar{1}}$ elemente *paarituteks* vektoriteks.

Kui vektor $x \in \mathbb{V}$ kuulub kas alamruumi $\mathbb{V}_{\bar{0}}$ või alamruumi $\mathbb{V}_{\bar{1}}$, siis ütleme, et see vektor on *homogeenne*. Homogeense vektori x korral võime vaadata kujutust

$p\colon \mathbb{V} \to \mathbb{Z}_2$, mida nimetame paarsuseks ja mille defineerime järmiste võrdustega:

$$p\,(x) = \begin{cases} \overline{0}, & \text{kui } x \in \mathbb{V}_{\overline{0}}, \\ \overline{1}, & \text{kui } x \in \mathbb{V}_{\overline{1}}. \end{cases}$$

Viimast arvesse võttes on väga loomulik superruumi kohta öelda ka $\mathbb{Z}_2$-*gradueeritud vektorruum.* Tegelikult ongi supermatemaatika põhilisteks uurimisobjektideks $\mathbb{Z}_2$-gradueeritud struktuurid. Teoreetilise füüsika seisukohalt on superruumil eriti tähtis roll, kuna see annab võimaluse ühes avaldises siduda oma iseloomult täiesti erinevad fermionid ja bosonid, see on aine- ja väljaosakesed. Analoogiliselt nagu me defineerisime supervektroruumi, üldistame ka tavalise algebra[15] mõistet, ja defineerime tema superanaloogi.

Definitsioon 4.9. Olgu supervektorruumil $\mathcal{A}$ antud binaarne lineaarne algebraline tehe $\circ$ (see tähendab supervektorruum $\mathcal{A}$ on algebra). Me ütleme, et supervektorruum $\mathcal{A}$ on *superalgebra*, kui tehe $\circ$ rahuldab tingimust

$$p\,(x \circ y) = p\,(x) + p\,(y)\,,$$

kus x ja y on supervektorruumi $\mathcal{A}$ suvalised homogeensed elemendid.

Sageli kasutatakse kirjanduses superalgebra asemel ka terminit $\mathbb{Z}_2$-*gradueeritud algebra.* On ilmne, et superalgebra assotsiatiivsus ja ühikelement defineeritakse nagu tavaliselt. Veidi teistsugune sitatsioon on kommutatiivsusega, siin seab elementide paarsus kommutatiivsusele ühe lisatingimuse. Defineerime superalgebra $\mathcal{A}$ homogeensete elementide kommutaatori seosega

$$[x, y] = x \circ y - (-1)^{p(x)p(y)}\, y \circ x,$$

kus $x, y \in \mathcal{A}$. Kui iga kahe suvalise elementie $a, b \in \mathcal{A}$ korral $[a, b] = 0$, siis nimetame superalgebrat $\mathcal{A}$ kommutatiivseks.

Tuntuim ja praktikas ilmselt enim kasutust leidev superalgebra näide on Grassmanni algebra. Osutub, et Grassmanni[16] algebral on oluline roll ka Minkowski superruumi kontekstis. Seetõttu teeme siinkohal Grassmanni algebraga ka pisut lähemalt tutvust.

Definitsioon 4.10. Me ütleme, et ühikelemendiga assotsiatiivne algebra on *Grassmanni algebra*, kui temas leidub lõplik moodustajate süsteem $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m\}$, $m \in \mathbb{N}$, mille elemendid rahuldavad tingimusti

[15] Tuletame meelde, et algebraks nimetatakse vektorruumi $\mathbb{V}$ temal defineeritud binaarse tehtega $\circ\colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, kui tehe $\circ$ on mõlema argumendi suhtes lineaarne.

[16] Hermann Günther Grassmann (1809–1877) — saksa matemaatik.

(i) suvaliste $i, j \in \{1, 2 \ldots, m\}$ korral $\theta^i\theta^j = -\theta^j\theta^i$,

(ii) $\theta^1\theta^2 \ldots \theta^m \neq 0$.

Grassmanni algebrat, mille moodustajate süsteem koosneb m elemendist tähistame sümboliga $\mathcal{G}^m$.

Vahetult definitsioonist saame Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ kohta teha ühe olulise järelduse. Kui võtame definitsiooni 4.10 tingimuses (i) indeksid $i = j$, siis saame $\theta^i\theta^i = -\theta^i\theta^i$, millest $(\theta^i)^2 = 0$. See tingimus ütleb väga palju Grassmanni algebra elementide kuju kohta. Nimelt, kuna $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m\}$ on moodustajate süsteem, siis saame suvalise $\xi \in \mathcal{G}^m$ panna kirja polünoomi kujul, ja et $(\theta^i)^2 = 0$ kõikide $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ korral, siis moodustaja θ^i kas kuulub selle polünoomi liidetavate hulka parajasti üks kord, või üldse mitte. Niisiis elemendi ξ üldkuju on

$$\xi = \alpha_0 e + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \theta^i + \ldots + \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_m} \theta^i_1 \theta^i_2 \ldots \theta^i_m,$$

kus e on $\mathcal{G}^m$ ühikelement.

Grassmanni algebra supervektorruumi struktuur tekib väga loomulikul viisil. Kahte tüüpi homogeenseteks elementideks sobib võtta esiteks paarituarvuliste muutujate arvuga elementaarmonoomide lineaarkombinatsioonid kujul

$$\sum_{i_1, \ldots, i_{2r+1}} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2r+1}} \theta^1 \theta^2 \ldots \theta^{2r+1}, \tag{4.4}$$

ja teiseks paarisarvulise muutujate arvuga elementaarmonoomide lineaarkombinatsioonid kujul

$$\sum_{i_1, \ldots, i_{2r}} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2r}} \theta^1 \theta^2 \ldots \theta^{2r}, \tag{4.5}$$

kusjuures mõlemas avaldises $r \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$. Seejuures elemente, mis on kujul (4.4) nimetame algebra $\mathcal{G}^m$ paarituteks elementideks ja elemente kujul (4.5) paariselementideks. On kerge veenduda, et sel viisil paariselemendid kommuteeruvad ja paaritud elemendid antikommuteeruvad. Lisaks on selge, et kui ξ ja η on algebra $\mathcal{G}^m$ mingid homogeensed elemendid, siis

$$p(\xi \cdot \eta) = p(\xi) + p(\eta), \tag{4.6}$$

kus p tähistab paarsust. Elementide ξ ja η kommutatsioonieeskirjade kohta saame nüüd märkida $\xi \cdot \eta = (-1)^{p(\xi)p(\eta)} \eta \cdot \xi$, kus $(-1)^{\overline{0}} = 1$ ja $(-1)^{\overline{1}} = -1$.

Paaris- ja paaritud elemendid moodustavad ruumis $\mathcal{G}^m$ alamruumid. Tähistame neid vastavalt $\mathcal{G}^m_{\bar{0}}$ ja $\mathcal{G}^m_{\bar{1}}$. Paneme tähele, et valemi (4.6) põhjal on alamruum $\mathcal{G}^m_{\bar{0}}$ koguni algebra $\mathcal{G}^m$ alamalgebra. Nüüd, kuna $\mathcal{G}^m_{\bar{0}} \cup \mathcal{G}^m_{\bar{1}} = \{0\}$, siis saame mistahes $\xi \in \mathcal{G}^m$ lahutada paaris- ja paaritute elementide summaks ehk teisi sõnu Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ on lahutatav alamruumide $\mathcal{G}^m_{\bar{0}}$ ja $\mathcal{G}^m_{\bar{1}}$ otsesummaks. Niisiis

$$\mathcal{G}^m = \mathcal{G}^m_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}^m_{\bar{1}}$$

ja Grassmanni algebra on tõepoolest superalgebra.

Sellega oleme kirjeldanud piisava aparatuuri, et defineerida klassikalise Minkowski ruumi superanaloog, Minkowski superruum.

Definitsioon 4.11. Olgu $d \in \mathbb{N}$ ja $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m\}$ Grassmanni algebra $\mathcal{G}^m$ moodustajate süsteem. Hulka $\{x^\mu, \theta^\alpha\}$, kus $\alpha = 1, \ldots, m$ ning x^μ, $\mu = 1, \ldots, d$, on klassikalised kommuteeruvad koordinaadid, nimetatakse *d-mõõtmeliseks Minkowski superruumiks*, mida tähistame $\mathcal{SM}$.

Vahel eristatakse Minkowski superruumi definitsioonis selguse mõttes Grassmani algebra moodustajate paarsust ning tähistuse $\{x^\mu, \theta^\alpha\}$ asemel kirjutatakse $\left\{x^\mu, \theta^\alpha_{\bar{0}}, \theta^\alpha_{\bar{1}}\right\}$, kus $\theta^\alpha_{\bar{0}}$ ja $\theta^\alpha_{\bar{1}}$ on vastavalt paaris- ja paaritud moodustajad.

Osutub, et Minkowski superruumis saab defineerida funktsioonid, tuletised ja ka integraalid. Tutvustame järgnevas näidete varal ja rangeid definitsioone andmata, mida nende terminite all superruumis mõeldakse. Ruumi $\mathcal{SM}$ funktsiooniks F nimetame Grassmanni algebra väärtustega funktsiooni, mille võime kirja panna kujul

$$\begin{aligned} F\left(x^\mu, \theta^\alpha\right) = \phi\left(x^\mu\right) + \psi^1_\alpha\left(x^\mu\right)\theta^\alpha + \psi^2_{\alpha_1\alpha_2}\left(x^\mu\right)\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2} + \\ + \psi^3_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\left(x^\mu\right)\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\theta^{\alpha_3} + \ldots + \\ + \psi^m_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\left(x^\mu\right)\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\ldots\theta^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

kus $\phi, \psi^1_\alpha, \psi^2_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \psi^m_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ on mingid (analüütilised) funktsioonid, mille muutumispiirkonnaks on korpus, üle mille me vaatleme algebrat $\mathcal{G}^m$. Märkimist väärib asjaolu, et nii saab kõik Minkowski superruumi funktsioonid esitada lõplike summadena, mille liidetavateks on monoomi ja korpuse elemendi korrutis. Ehk kokkuvõttes on funktsioonidel võrdlemisi lihtne struktuur.

Üldistame nüüd meile analüüsist tuttavat funktsiooni diferentseeruvuse mõistet ka superruumile. On loomulik eeldada, et ka Minkowski superruumis on funktsioonide summa tuletis nende funktsioonide tuletiste summa ja arvuga korrutatud funktsiooni tuletiseks on see sama arv korda funktsiooni tuletis, just nagu tavaliselt, see tähendab

$$(F + G)' = F' + G', \text{ ja } (aF)' = aF',$$

kus $a \in \mathbb{K}$ ja F ning G on mingid Minkowski superruumi funktsioonid. Samas võttes nüüd arvesse, et kõik funktsioonid saab kirja panna summadena, mille liikmeteks arv korda mingi monoom, siis piisab meil nüüd defineerida vaid monoomi diferentseerimine. Viimane on aga väga lihtne. Nimelt monoomi

$$\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_{k-1}}\theta^{i_k}\theta^{i_{k+1}}\ldots\theta^{i_n}$$

tuletiseks Grassmanni algebra moodustaja θ^{i_k} järgi nimetame monoomi, mille saame kui liigutame esialgses monoomis kommutatsioonieeskirju arvestades elemendi θ^{i_k} selles monoomis esimesele kohale ja seejärel eemaldame ta sealt säilitades märgi. See tähendab

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{i_k}}\left(\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_{k-1}}\theta^{i_k}\theta^{i_{k+1}}\ldots\theta^{i_n}\right) = (-1)^{k-1}\,\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_{k-1}}\theta^{i_{k+1}}\ldots\theta^{i_n}.$$

Kui monoomis ei leidu moodustajat, mille järgi diferentseerimine toimub, siis on tuletis loomulikult null.

Näide 4.3. Leiame monoomide $\theta^1\theta^3\theta^2$ ja $\theta^1\theta^2\theta^4\theta^5$ tuletised elemendi θ^2 järgi.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(\theta^1\theta^3\theta^2\right) &= \frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(-\theta^1\theta^2\theta^3\right) = \frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(\theta^2\theta^1\theta^3\right) = \theta^1\theta^3,\\
\frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(\theta^1\theta^2\theta^4\theta^5\right) &= \frac{\partial}{\partial\theta^2}\left(-\theta^2\theta^1\theta^4\theta^5\right) = -\theta^1\theta^4\theta^5.
\end{aligned}$$

Nagu varem juba mainitud, on Minkowski superruumis lisaks diferentseerimisele defineeritud ka integreesimise operatsioon. Integraaliks superruumis on nõndanimetatud *Berezini integraal*[17], mis on lineaarkujutus $\int_{\mathcal{SM}}\cdot\,\mathrm{d}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_k}$ omadusega

$$\int_{\mathcal{SM}}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_k}\ \mathrm{d}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\ldots\theta^{i_k} = 1$$

ning null muudel juhtudel.

Näide 4.4. Leida funktsiooni $F\left(x^\mu,\theta^\alpha\right)$ Berezini integraal $\int_{\mathcal{SM}}F\left(x^\mu,\theta^\alpha\right)\ \mathrm{d}\theta^1\theta^2\theta^3$, kui $F\left(x^\mu,\theta^\alpha\right) = \theta^5+\theta^1\theta^2+\psi\left(x^\mu\right)\theta^1\theta^2\theta^3$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{SM}}F\left(x^\mu,\theta^\alpha\right)\ \mathrm{d}\psi\left(x^\mu\right)\theta^1\theta^2\theta^3 = \int_{\mathcal{SM}}\left(\theta^5+\theta^1\theta^2+\theta^1\theta^2\theta^3\right)\ \mathrm{d}\theta^1\theta^2\theta^3 =\\
&= \int_{\mathcal{SM}}\theta^5\ \mathrm{d}\theta^1\theta^2\theta^3 + \int_{\mathcal{SM}}\theta^1\theta^2\ \mathrm{d}\theta^1\theta^2\theta^3 + \int_{\mathcal{SM}}\psi\left(x^\mu\right)\theta^1\theta^2\theta^3\ \mathrm{d}\theta^1\theta^2\theta^3 =\\
&= 0+0+\psi\left(x^\mu\right)\int_{\mathcal{SM}}\theta^1\theta^2\theta^3\ \mathrm{d}\theta^1\theta^2\theta^3 = \psi\left(x^\mu\right)\cdot 1 = \psi\left(x^\mu\right)
\end{aligned}$$

[17]Felix Berezin (1931–1980) — vene matemaatik.

On the geometry of Minkowski spacetime

Bachelor's Thesis

Priit Lätt

Summary

We consider a four-dimentional real vector space in which three coordinates describe the space, and the fourth coordinate describes time. Such a vector space, equipped with Minkowski metric, is said to be a Minkowski spacetime, denoted $\mathcal{M}$ and sometimes referred just as Minkowski space. In the beginning of 20th century it emerged from the works of Hermann Minkowski and Henry Poincaré that this mathematical tool can be really useful in areas like the theory of special relativity.

The first objective of this thesis is to introduce the classical properties of Minkowski spacetime in a way that doesn't get into the details about the physical meaning of the topic. The main focus is on the elements of the spacetime and the orthogonal maps that describe the transformations of these elements. As this topic, the Minkowski spacetime, has many applications in physics, most of the literature on it originates from physics, rather than mathematics. In the books that are written by physicists, strict proofs are not given properly or they are avoided entirely. Sometimes physical discussion is considered as a proof, but as shown in proposition 3.1 for example, things are not so obvious after all in a mathematical point of view. In contrary, the aim of this thesis is to fill this gap by giving rigorous proof to all the statements that are made.

The last part of the thesis takes a new course and tries to introduce tools from branch of mathematics called differential geometry. Apparatus described there can be useful not just describing the structure of Minkowski spacetime, but also wide areas of theoretical physics. At last, we generalize classical spacetime and present the Minkowski superspace - a space with anticommuting coordinates that has become a useful tool in the field theory. This is all done in a bit less formal way.

This thesis consists of four sections.

In the first section we recall such topics that are not strictly connected to the thesis but have great impact on further understanding of the paper. For example Gram–Schmidt orthogonalization process is reminded and we prove one of the fundamental results related to dot product, the Cauchy–Schwartz–Bunjakowski inequality. We also describe the rules of the multipication of block matrices as

well as finding the inverse of block matrix. Map called matrix exponential is introduced as it plays a key role in the final part of the thesis. Considered the geometrical meaning of the paper we find ourselves stopping for a bit longer to study the idea of topological manifold.

Second section sets an objective to describe the elements or *events* of the Minkowski spacetime. For that we give a strict definition of dot product and move on to the concept of pseudoeucleidic space. After that we describe the dot product in Minkowski spacetime, which gives us the metric. It appears that by the metric we can factorize the elements of spacetime into three distinct classes, these are *spacelike, timelike* and *nullvectors*. The last subsection is there to describe the orthogonal transformations of Minkowski space, referred as *Lorentz transformations*. We show how these transformations can be represented in both coordinates and matrix form and what is the connection between the transformations and the metric of $\mathcal{M}$. Finally we prove that the set of all Lorentz transformatioins has a very natural group structure, the *Lorentz group*.

In the third section we continue with the observation of Lorentz transformations. In the firts subsection we take a closer look at the properties of such transformations and concentrate on the most important of them. As a result we find a rotation subgroup of Lorentz group. We proceed with noting that Lorentz transformations remain the distances invariant. That encourages us to look for other such transformations that share the same property. As it happens translations are of this kind and by observing translations with Lorentz transformations together, we get the symmetry group of Minkowski spacetime, the *Poincaré group*.

The fourth section takes another course. In this section the objective is to introduce, via more popular approach, the connections between Minkowski spacetime and differential geometry, and to uncover the term superspace with the surrounding mathematics. In the part of differential geometry we define *Lie algebra* with its representation and give examples to clear the topic. As expected we then find ourselves defining *Lie group* which we later connect with Lie algebra by giving an informal description. The section, as well as the paper is then finished with the introduction of Minkowski superspace. For that we define terms such as superalgebra and give a well known example, the *Grassmann algebra*. By avoiding strict mathematical formalism, we show what are functions on superspace and how to find integral or derivative of such functions.

References

[1] V. Abramov. Globaalalanalüüs, loengukonspekt. URL: `http://math.ut.ee/~abramov/konspekt_globaalan%20(1).pdf`.

[2] V. Abramov and P. Kuusk. *Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas.* Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu, 1994.

[3] A. A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of group representations and applications.* World Scientific Publishing Company, Incorporated, 1986.

[4] M. Kilp. *Algebra I.* Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[5] A. Kirillov. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.* Cambridge University Press, New York, 2008. URL: `http://www.math.sunysb.edu/~kirillov/liegroups/liegroups.pdf`.

[6] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity.* Applied mathematical sciences. Springer, New York, NY, 2nd edition, 2012.

[7] E. Oja and P. Oja. *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.

Mina, Priit Lätt (sünnikuupäev: 14.08.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Minkowski aegruumi geomeetriast,

   mille juhendaja on Viktor Abramov,

   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 02.06.2013