

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Priit Lätt
Minkowski aegruumi geomeetriast
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor:”.....”juuni 2013
Juhendaja:”.....”juuni 2013

TARTU 2013

Sisukord

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Sissejuhatus | 2 |
| 2 | Vajalikud eelteadmised | 3 |
| 2.1 | Skalaarkorrutisega seotud abitulemused | 3 |
| 2.2 | Tulemusi lineaaralgebrast | 5 |
| 2.3 | Topoloogiline muutkond | 6 |
| 3 | Minkowski ruumi geomeetriline struktuur | 8 |
| 3.1 | Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused | 8 |
| 3.2 | Minkowski aegruumi mõiste | 10 |
| 3.3 | Ortogonaalteisendus ruumis \mathcal{M} | 12 |
| 3.4 | Lorentzi rühm | 16 |
| 3.5 | Poincaré rühm | 21 |
| 4 | Teine peatükk | 24 |
| 4.1 | Lie rühm | 24 |
| 4.2 | Lie algebra | 24 |
| | Summary | 28 |
| | Viited | 29 |

1 Sissejuhatus

Bakalaureusetöö on referatiivne ja selle aluseks on [Nab12].

Töös kasutame summade tähistamisel sageli Einstein'i summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid i ja j , mis omavad väärtusi $1, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}$), siis kirjutame

$$\begin{aligned}x^i e_a &= \sum_{a=1}^n x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n, \\ \lambda^i_j x^j &= \sum_{j=1}^n \lambda^i_j x^j = \lambda^i_1 x^1 + \lambda^i_2 x^2 + \dots + \lambda^i_n x^n, \\ \eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \dots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \dots + \eta_{nn} u^n v^n,\end{aligned}$$

ja nii edasi.

Vektori u pikkust tähistame edaspidi $|u|$.

Seda teksti pole tegelikult vaja.¹

¹Hermann Minkowski (1864 - 1909) - poola matemaatik

2 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis toome välja definitsioonid ja tulemused, mida läheb tarvis töö järgmistes osades. Lihtsamad tulemused, millele on pööratud tähelepanu kursustes Algebra I või Geomeetria II, esitame seejuures tõestusteta.

2.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused

Teoreem 2.1. [Põl12, teoreem II.7.3] *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega g varustatud vektorruumis \mathbb{V} leidub ortonormeeritud baas.*

Tõestus. Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui $\{b\}$ on mingi baas, siis $\left\{\frac{1}{|b|}b\right\}$ on ortonormeeritud baas. Eeldame nüüd, et igas $(n-1)$ -mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ning olgu \mathbb{V} n -mõõtmeline vektorruum baasiga $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Eelduse järgi on ruumis \mathbb{V} ortonormeeritud süsteem $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$, kusjuures

$$\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} = \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ omadusega

$$a_n \perp \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\},$$

sest siis $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \frac{1}{|a_n|}a_n\}$ on ruumi \mathbb{V} ortonormeeritud baas. Otsime vektorit a_n kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Paneme tähele, et kui a_n on sellisel kujul, siis $a_n \neq 0$, sest vastasel korral $b_n \in \text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$, mis on vastuolus süsteemi $\text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ lineaarse sõltumatusega. Kui a_n on kujul 2.1, siis kõikide $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ korral

$$a_n \perp e_k \iff a_n \cdot e_k = 0 \iff \left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = 0$$

Samas, kuna

$$\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = b_n \cdot e_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j (e_j \cdot e_k) = b_n \cdot e_k + \alpha_k,$$

siis $a_n \perp e_k \iff \alpha_k = -(b_n \cdot e_k)$.

Järelikult võime võtta $a_n := b_n - \sum_{j=1}^{n-1} (b_n \cdot e_j) e_j$. □

Märkus 2.1. Teoreemi 4.1 tõestuses antud algortimi ortonormeeritud baasi leidmiseks nimetatakse *Gram-Schmidt'i algoritmiks* või *ortogonaliseerimisprotsessiks*.

Teoreem 2.2 (Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus). [Pöl12, teoreem II.1.1.] Olgu \mathbb{V} vektorruum skalaarkorrutisega $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Sellisel juhul kehtib võrratus

$$g^2(u, v) \leq g(u, u) g(v, v) \quad (2.2)$$

kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Tõestus. Olgu \mathbb{V} reaalne vektorruum skalaarkorrutisega g ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Siis iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(u + \lambda v, u + \lambda v) = g(u, u) + 2g(u, \lambda v) + g(\lambda v, \lambda v) = \\ &= g(u, u) + 2\lambda g(u, v) + \lambda^2 g(v, v) \leq g(u, u) + 2\lambda |g(u, v)| + \lambda^2 g(v, v). \end{aligned}$$

Saime λ suhtes võrratuse

$$g(v, v) \lambda^2 + 2|g(u, v)| \lambda + g(u, u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on \mathbb{R} . Kui $g(v, v) > 0$, siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminandi jaoks kehtib

$$4|g(u, v)|^2 - 4g(u, u)g(v, v) \leq 0,$$

millest järeldub vahetult võrratus 2.2. Juhul $g(v, v) = 0$ peab kõikide $\lambda \in \mathbb{R}$ korral kehtima $2|g(u, v)|\lambda + g(u, u) \geq 0$, mis on võimalik vaid siis, kui $g(u, v) = 0$. Sellisel juhul on tingimuse 2.2 kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et võrratuses 2.2 kehtib võrdus parajasti siis, kui u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Oletame esiteks, et vektorid u ja v on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ selliselt, et $u = \alpha v$. Seega

$$\begin{aligned} g^2(u, v) &= g^2(\alpha v, v) = \alpha^2 g^2(v, v) = \alpha^2 g(v, v) g(v, v) \\ &= g(\alpha v, \alpha v) g(v, v) = g(u, u) g(v, v), \end{aligned}$$

nagu tarvis.

Kehtigu nüüd tingimuses 2.2 võrdus. Veendume, et siis u ja v on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et $u \neq 0$ ja $v \neq 0$. Siis ka $g(u, u) \neq 0$ ja $g(v, v) \neq 0$. Paneme tähele, et

$$g^2(u, v) = g(u, u) g(v, v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{g^2(u, v) g(v, v)}{g^2(v, v)} = g(u, u).$$

Tähistades $a := \frac{g(u, v)}{g(v, v)}$, saame, et $a^2 g(v, v) = g(u, u)$ ehk $g(av, av) = g(u, u)$, millest $u = av$. \square

2.2 Tulemusi lineaaralgebrast

Lause 2.1. Olgu \mathbb{V} vektorruum ja $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ lineaarne teisendus ning g skalaarkorrutis ruumil \mathbb{V} . Kui $g(x, y) = g(Lx, Ly)$ kõikide $x, y \in \mathbb{V}$ korral, siis L on isomorfism ruumil \mathbb{V} .

Tõestus. Olgu \mathbb{V} vektorruum ja $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ lineaarne teisendus ja kehtigu $g(x, y) = g(Lx, Ly)$ kõikide $x, y \in \mathbb{V}$ korral. Veendumaks, et L on isomorfism piisab näidata, et L on injektiivne ja surjektiivne. Veendume kõigepealt kujutuse L üksühesuses. Olgu $x, y \in \mathbb{V}$, $x \neq y$. Oletame vastuväiteliselt, et $Lx = Ly$, siis $Lx - Ly = 0$ ja seega iga $z \in \mathbb{V}$ korral

$$g(Lx - Ly, Lz) = 0.$$

Teisalt, kuna g on skalaarkorrutis ja et $x \neq y$, siis leidub selline $z' \in \mathbb{V}$, et $g(x - y, z') \neq 0$. Kokkuvõttes saime

$$0 \neq g(x - y, z') = g(Lx - Ly, Lz') = 0,$$

mis on vastuolu.

Veendume nüüd teisenduse L surjektiivsuses. Olgu $x \in \mathbb{V}$. Meie eesmärk on leida $y \in \mathbb{V}$ selliselt, et $Ly = x$. Tähistame teisenduse L maatriksi tähega Λ . Siis

$$Ly = L(y^a e_a) = y^a \Lambda_a^b e_b = x^b e_b, \text{ kus } a, b = 1, 2, 3, 4.$$

Saime võrrandisüsteemi $y^a \Lambda_a^b = x^b$, mis on üheselt lahenduv, kuna $\det \Lambda = \pm 1$. Seega võime võtta $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. \square

Teoreem 2.3. Olgu A ja B n -järku ruutmaatriksid. Siis $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$.

Tõestus. Vahetu kontroll. \square

Teoreem 2.4 (Blokkmaatriksite korrutamine). Olgu meil $m \times p$ maatriks A ja olgu meil $p \times n$ maatriks B . Jagame maatriksi A blokkideks, kus on q rea blokki ja

s veeru blokki ning jagame matriksi B blokkideks, kus on s rea blokki ja r veeru blokki kujul

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qs} \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{sr} \end{pmatrix}.$$

Siis saame arvutada $m \times n$ matriksi $C = AB$, kus on q rea blokki ja r veeru blokki kujul

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qr} \end{pmatrix}$$

ning $C_{ab} = \sum_{i=1}^s A_{ai} B_{ib}$.

Teoreem 2.5 (Blokkmatriksi pöördmatriks). Olgu M regulaarne matriks, mis on esitatud blokkmatriksina kujul $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, kus A, B, C, D on suvalise suurusega alammatriks, kusjuures A ja D on ruutmatriksid. Siis saame matriksi M pöördmatriksi M^{-1} arvutada blokkidena järgmise eeskirja alusel:

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Topoloogiline muutkond

Definitsioon 2.1. Topoloogilist ruumi (X, τ) nimetatakse n -mõõtmeliseks topoloogiliseks muutkonnaks, kui

- 1) (X, τ) on Hausdorffi topoloogiline ruum,
- 2) topoloogial τ leidub loenduv baas,
- 3) leidub hulga X homöomorfism ruumi \mathbb{R}^n lahtise alamhulgaga.

Muutkonda tähistame tähega M .

Muutkonda võime vaadelda kui geomeetrilise pinna üldistust. Vahetult muutkonna definitsiooni põhjal on selge (τ on Hausdorffi topoloogiline ruum), et muutkonna iga punkti mingit ümbrust võime vaadelda kui n -mõõtmelist eukleidilist ruumi.

Definitsioon 2.2. Olgu M muutkond ja $B \subset \mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk. Paari (p, ψ) , kus $p \in A \subset M$ ja $\psi : A \rightarrow B$ on homöomorfism nimetatakse muutkonna M *lokaalseks kaardiks* punktis p .

Kui muutkonna M saab katta ühe lokaalse kaardiga, siis öeldakse, et muutkond M on *triviaalne*.

Näide 2.1. Järgmised hulgad on topoloogilised muutkonnad.

- (a) Ringjoon on 1-mõõtmeline mittetriviaalne topoloogiline muutukond.
 - 1) Võime võtta topoloogiaks alamruumi topoloogia, see on Hausdorffi topoloogiline ruum.
 - 2) Alamruumi topoloogial on samuti loenduv baas.
 - 3) Homöomorfismiks sobib võtta neli lokaalset kaarti, mille saame, kui projitseerime ülemise ja alumise poolringi x -teljele ja vasak- ning parempoolse poolringi y -teljele.
- (b) Sfäär on topoloogiline muutkond. (Põhjendus on analoogiline osaga (a).)

Definitsioon 2.3. Me ütleme, et muutkond M on *ühelisisidus*, kui suvalise kinnise joone võib pideva deformatsiooni abil tõmmata üheks punktiks.

3 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

3.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu \mathbb{V} n -mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ on *bilineaarvorm*, kui g on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab $g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \alpha_2 g(u_2, v)$ ja $g(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 g(u, v_1) + \alpha_2 g(u, v_2)$ kus α_1 ja α_2 on suvalised reaalarvud ning u, u_1, u_2, v, v_1 ja v_2 on vektorruumi \mathbb{V} elemendid.

Olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Bilineaarvormi g nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $g(u, v) = g(v, u)$ ja *mittekidunuks*, kui tingumusest $g(u, v) = 0$ iga $v \in \mathbb{V}$ korral järeldub $u = 0$.

Definitsioon 3.1. Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse *skalaarkorrutiseks*. Vektorite u ja v skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul $u \cdot v$.

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, sest g bilineaarsuse tõttu $g(0, v) = g(0 \cdot 0, v) = 0 \cdot g(0, v) = 0$,
- kui $u_1, u_2, \dots, u_n, u, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$, siis $(\sum_{i=1}^n u_i) \cdot v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v)$ ja $u \cdot (\sum_{i=1}^n v_i) = \sum_{i=1}^n (u \cdot v_i)$,
- kui $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on vektorruumi \mathbb{V} baas ning kui tähistame $\eta_{ij} = e_i \cdot e_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, siis $u \cdot v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u^i v^j = \eta_{ij} u^i v^j$, kus $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$.

Näide 3.1. Vaatleme ruumi \mathbb{R}^n . Olgu $u = (u^1, u^2, \dots, u^n), v = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Lihtne on veenduda, et kujutus $g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^n v^n$ on skalaarkorrutis.

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga $v \neq 0$ korral $g(v, v) > 0$. Kui $g(v, v) < 0$ kõikide $v \neq 0$ korral, siis ütleme, et g on *negatiivselt määratud* ja kui g pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et g on *määramata*.

Definitsioon 3.2. Kui g on skalaarkorrutis vektorruumil \mathbb{V} , siis nimetame vektoreid u ja v *g -ortogonaalseteks* (või lihtsalt *ortogonaalseteks*, kui g roll on kontekstist selge), kui $g(u, v) = 0$. Kui $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ on alamruum, siis ruumi \mathbb{W} ortogonaalne täiend \mathbb{W}^\perp on hulk $\mathbb{W}^\perp = \{u \in \mathbb{V} : \forall v \in \mathbb{W} \text{ korral } g(u, v) = 0\}$.

Definitsioon 3.3. Skalaarkorrutise g poolt määratud *ruutvormiks* nimetame kujutust $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v$, $v \in \mathbb{V}$.

Lause 3.1. Olgu g_1 ja g_2 kaks skalaarkorrutist vektorruumil \mathbb{V} , mis rahuldavad tingimust $g_1(u, u) = g_2(u, u)$ iga $u \in \mathbb{V}$ korral. Siis kehtib $g_1(u, v) = g_2(u, v)$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, ehk teisi sõnu, $g_1 \equiv g_2$.

Tõestus. Olgu \mathbb{V} vektorruum ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$ ja kehtigu võrdus $g_1(u, u) = g_2(u, u)$ iga u korral. Defineerime uue kujutuse

$$g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, g(u, v) \mapsto g_1(u, v) - g_2(u, v).$$

Paneme esiteks tähele, et selliselt defineeritud g on sümmeetriline ja bilineaarne. Tõepoolest, olgu $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$. Siis

$$\begin{aligned} g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= g_1(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - g_2(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \\ &= \alpha g_1(u_1, v) + \beta g_1(u_2, v) - \alpha g_2(u_1, v) - \beta g_2(u_2, v) = \\ &= \alpha (g_1(u_1, v) - g_2(u_1, v)) + \beta (g_1(u_2, v) - g_2(u_2, v)) = \\ &= \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) \text{ ja analoogiliselt} \\ g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2). \end{aligned}$$

Kujutuse g sümmeetrilisus on g_1 ja g_2 sümmeetrilisust arvestades ilmne. Tõestuse lõpetamiseks piisab nüüd näidata, et $g = 0$. Ühelt poolt paneme tähele, et

$$g(u + v, u + v) = g_1(u + v, u + v) - g_2(u + v, u + v) = 0.$$

Teisalt,

$$\begin{aligned} g(u + v, u + v) &= g(u, u + v) + g(v, u + v) = \\ &= g(u, u) + g(u, v) + g(v, u) + g(v, v) = \\ &= g(u, u) + 2g(u, v) + g(v, v) = 2g(u, v). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime $2g(u, v) = 0$ ehk $g(u, v) = 0$, mida oligi tarvis. \square

Teoreem 3.1. Olgu \mathbb{V} reaalne n -mõõtmeline vektorruum ning olgu $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ skalaarkorrutis. Vektorruumil \mathbb{V} leidub baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nii, et $g(e_i, e_j) = 0$ kui $i \neq j$ ja $Q(e_i) = \pm 1$ iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral $Q(e_i) = -1$ on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.

Tõestus. Arvestades *Gram²-Schmidt³* algoritmi ortonormeeritud baasi leidmiseks, muutub teoreemi tõestus ilmseks⁴. \square

²Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) - taani matemaatik

³Erhard Schmidt (1876 – 1959) - Tartus sündinud saksa matemaatik

⁴Vaata 2.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused, Märkus 2.1

Definitsioon 3.4. Vektorruumi \mathbb{V} baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.

Skalaarkorrutise g suhtses ortonormaalse baasi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorite arvu r , mille korral $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nimetame skalaarkorrutise g *indeksiks*. Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid e_i , mille korral $Q(e_i) = -1$, paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

korral $Q(e_i) = 1$, kui $i = 1, 2, \dots, n-r$, ja $Q(e_i) = -1$, kui $i = n-r+1, \dots, n$. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$ saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise g arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \dots - u^n v^n.$$

Märkus 3.1. Vektorruumi \mathbb{V} skalaarkorrutisega g , mille indeks $r > 0$ nimetatakse *pseudoeukleidiliseks ruumiks*.

3.2 Minkowski aegruumi mõiste

Definitsioon 3.5. *Minkowski aegruumiks* nimetatakse 4-mõõtmelist reaalsel vektorruumi \mathcal{M} , millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm g indeksiga 1.

Ruumi \mathcal{M} elemente nimetatakse *sündmusteks* ja kujutust g nimetatakse *Lorentzi skalaarkorrutiseks* ruumil \mathcal{M} .

Märkus 3.2. Edasises ütleme Minkowski ruumi kontekstis Lorentzi skalaarkorrutise g kohta lihtsalt skalaarkorrutis.

Ilmselt on Minkowski ruum pseudoeukleidiline ruum. Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil \mathcal{M} leidub baas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ järgmise omadusega. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ või lühidalt $\{e_a\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas. Kui $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$, siis tähistame sündmuse x koordinaadid baasi $\{e_a\}$ suhtes (x^1, x^2, x^3, x^4) ja seejuures ütleme, et (x^1, x^2, x^3) on *ruumikoordinaadid* ning (x^4) on *ajakoordinaat*.

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis g ei ole ruumil \mathcal{M} positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nii, et $g(u, u) = 0$. Selliseid vektoreid nimetatakse *nullpikkusega vektoriteks*. Kui aga $g(u, u) < 0$, siis ütleme, et u on *ajasarnane*⁵ ning kui $g(u, u) > 0$, siis nimetame vektorit u *ruumisarnaseks*⁶. Osutub, et ruumis \mathcal{M} leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullpikkusega vektoritest.

Näide 3.2. Üheks ruumi \mathcal{M} baasiks, mis koosneb vaid nullpikkusega vektoritest on näiteks $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$, kus $e_1^0 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2^0 = (0, 1, 0, 1)$, $e_3^0 = (0, 0, 1, 1)$ ja $e_4^0 = (-1, 0, 0, 1)$. Tõepoolest, süsteemi $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja e_1^0, \dots, e_4^0 on nullpikkusega, sest

$$\begin{aligned} Q(e_1^0) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_2^0) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q(e_3^0) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q(e_4^0) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

Teoreem 3.2. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ nullpikkusega vektorid. Vektorid u ja v on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$.

Tõestus. Piisavus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ paralleelsed nullpikkusega vektorid. Siis leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$. Seega

$$g(u, v) = g(tv, v) = tg(v, v) = 0$$

ehk vektorid u ja v on ortogonaalsed, nagu tarvis.

Tarvilikkus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ ortogonaalsed nullpikkusega vektorid, st $g(u, v) = 0$. *Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuse*⁷ $g^2(u, v) \leq g(u, u)g(v, v)$ põhjal $0 \leq g(u, u)g(v, v)$, sest u ja v on ortogonaalsed. Teisalt, et u ja v on nullpikkusega vektorid, siis $g(u, u)g(v, v) = 0$ ja järelikult kehtib Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuses võrdus $0 = 0$, mis tähendab, et u ja v on lineaarselt sõltuvad. \square

Võtame nüüd vaatluse alla kaks sellist sündmust $x, x_0 \in \mathcal{M}$, $x \neq x_0$, mida ühendab nullpikkusega vektor, see tähendab $Q(x - x_0) = 0$. Seda asjaolu arvesse võttes saame, et kui $\{e_a\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormaalne baas ja me tähistame $x = x^a e_a$, $x_0 = x_0^a e_a$, siis kehtib võrdus

$$Q(x - x_0) = (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0. \quad (3.1)$$

⁵inglise keeles *timelike*

⁶inglise keeles *spacelike*

⁷Vaata 2.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused, Teoreem 2.2

Kõigi selliste $x \in \mathcal{M}$ hulka, mille korral on tingimus 3.1 täidetud nimetatakse *nullkoonuseks*⁸ punktis x_0 ja tähistatakse $\mathcal{C}_N(x_0)$. Seega

$$\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}.$$

Piltlikult võime öelda, et hulga $\mathcal{C}_N(x_0)$ elemendid on ühendatavad sündmusega x_0 valguskiire $R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ abil.

3.3 Ortogonaalteisendus ruumis \mathcal{M}

Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ ruumi \mathcal{M} kaks ortonormaalset baasi. Osutub, et leidub parajasti üks selline lineaarne kujutus $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, et $L(e_a) = \hat{e}_a$, $a = 1, 2, 3, 4$. Tõepoolest, leiduvad arvud Λ^a_b nii, et baasi $\{\hat{e}_a\}$ vektorid avalduvad baasi $\{e_a\}$ suhtes üheselt kujul $\hat{e}_b = \Lambda^a_b e_a$. Arvudest Λ^a_b tekkiva maatriksiga assotsieeruv Lorentzi teisendus sobibki otsitavaks teisenduseks L . Järgnevaga uurime kujutuse L omadusi veidi lähemalt.

Definitsioon 3.6. Ruumi \mathcal{M} lineaarset kujutust $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ nimetatakse *pseudoortogonaalteisenduseks*, kui ta säilitab skalaarkorrutise g , see tähendab iga x ja y korral ruumist \mathcal{M} kehtib võrdus $g(Lx, Ly) = g(x, y)$.

Lause 3.2. Olgu $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ lineaarne kujutus. Siis järgmised väited on samaväärsed:

- (i) L on pseudoortogonaalteisendus;
- (ii) L säilitab ruumi \mathcal{M} ruutvormi, see tähendab $Q(Lx) = Q(x)$ iga $x \in \mathcal{M}$ korral;
- (iii) L kujutab suvalise ruumi \mathcal{M} ortonormaalse baasi ruumi \mathcal{M} ortonormaalseks baasiks.

Tõestus. (i) \implies (ii). Olgu L pseudoortogonaalne teisendus. Siis definitsiooni põhjal $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ iga $x, y \in \mathcal{M}$ korral. Seega kehtib ka $Q(Lx) = g(Lx, Lx) = g(x, x) = Q(x)$ kõikide $x \in \mathcal{M}$ korral ehk L säilitab ruutvormi.

(ii) \implies (i) on täpselt lause 3.1.

(ii) \implies (iii). Kehtigu (ii) (ja seega ka (i)) ning olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortogonaalne baas ruumis \mathcal{M} . Siis ka $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ on ortonormaalne baas ruumis \mathcal{M} , sest

$$g(Le_i, Le_j) = g(e_i, e_j) = \begin{cases} -1, & \text{kui } i = j = 4, \\ 1, & \text{kui } i = j, i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

⁸Füüsikas öeldakse sageli *nullkoonuse* asemel *valguse koonus*.

ja arvestades kujutuse L lineaarsust, on ka süsteem $\{Le_1, Le_2, Le_3, Le_4\}$ lineaarselt sõltumatu.

(iii) \implies (ii). Olgu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas ja kehtigu tingimus (iii). Veendume, et alati $Q(Lx) = Q(x)$, kus $x \in \mathcal{M}$ on suvaline. Fikseerime $x \in \mathcal{M}$ ning esitugu ta koordinaatides kujul $x = x^i e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x^i e_i) = x^i Q(e_i) = x^i Q(Le_i) = \\ &= Q(x^i Le_i) = Q(L(x^i e_i)) = Q(Lx). \end{aligned} \quad \square$$

Ruumi kokkuhoiu mõttes toome sisse 4×4 maatriksi η , mille me defineerime kui

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ja mille elemente tähistame vastavalt vajadusele kas η_{ab} või η^{ab} , $a, b = 1, 2, 3, 4$. Loomulik on maatriksit η nimetada *Miknowski ruumi meetrikaks*.

Sellise tähistuse korral $\eta_{ab} = 1$, kui $a = b = 1, 2, 3$ ja $\eta_{ab} = -1$, kui $a = b = 4$ ning $\eta_{ab} = 0$ muudel juhtudel. Vahetult on kontrollitav, et $\eta = \eta^T$ ja $\eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = E$, kus E on ühikmaatriks.

Arvestades sissetoodud tähistusi saame nüüd kirjutada $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$, kus $\{e_a\}$ on ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas. Enamgi veel, avaldades vektorid $u, v \in \mathcal{M}$ baasivektorite kaudu $u = u^i e_i$ ja $v = v^j e_j$, saame summeerimiskokkulepet kasutades kirjutada $g(u, v) = \eta_{ab} u^a v^b$.

Olgu $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ruumi \mathcal{M} pseudoortogonaalteisendus ja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ selle ruumi ortonormeeritud baas. Lause 3.2 põhjal on siis ka $\hat{e}_1 = Le_1, \hat{e}_2 = Le_2, \hat{e}_3 = Le_3, \hat{e}_4 = Le_4$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas, kusjuures iga e_i , $i = 1, 2, 3, 4$ saab esitada vektorite \hat{e}_j lineaarkombinatsioonina kujul

$$e_i = \Lambda^1_i \hat{e}_1 + \Lambda^2_i \hat{e}_2 + \Lambda^3_i \hat{e}_3 + \Lambda^4_i \hat{e}_4 = \Lambda^j_i \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.2)$$

kus arvud Λ^j_i on mingid reaalarvulised konstandid. Arvestades valemit 3.2 võime nüüd ortogonaalsuse tingimuse $g(e_c, e_d) = \eta_{cd}$, $c, d = 1, 2, 3, 4$, kirjutada kujul

$$\Lambda^1_c \Lambda^1_d + \Lambda^2_c \Lambda^2_d + \Lambda^3_c \Lambda^3_d - \Lambda^4_c \Lambda^4_d = \eta_{cd}$$

või kasutades summeerimiskokkulepet, siis lühidalt

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \quad (3.3)$$

Seose 3.3 saame maatrikskujul kirjutada kui

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (3.4)$$

Korrutades võrduse 3.4 mõlemaid pooli maatriksiga Λ^{-1} saame $\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1}$. Korrutades nüüd saadud tulemust veel paremalt maatriksiga η^{-1} on tulemuseks $\Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}$. Viimast arvesse võttes võime kirjutada $\Lambda \eta \Lambda^T = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^T = \Lambda \eta^{-1} (\eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}) = \Lambda \Lambda^{-1} \eta^{-1} = \eta^{-1} = \eta$ ehk

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta. \quad (3.5)$$

Seos 3.5 on koordinaatides välja kirjutatuna täpselt

$$\Lambda^a{}_c \eta^{cd} \Lambda^b{}_d = \eta^{ab}. \quad (3.6)$$

Definitsioon 3.7. Maatriksit $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$ nimetame *pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruvaks* maatriksiks.

Definitsioonile eelnevas arutelus tõestasime maatriksi Λ kohta järgmise lemma.

Lemma 3.1. *Pseudoortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruva maatriksi Λ korral on tingimused 3.3, 3.4, 3.5 ja 3.6 samaväärsed.*

Kuna ortogonaalteisenduse maatriks mistahes ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, ja vastupidi, kui ortogonaalteisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on ortogonaalmaatriks, siis sellest järeldub kergesti järgmine lause.

Lause 3.3. [Kil05, lk 271] *Kui Λ on ortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ assotsieeruv maatriks, siis Λ on ka ortogonaalteisenduse L^{-1} ja baasiga $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$ assotsieeruv maatriks.*

Lihtne on veenduda, et lause väide jääb kehtimaka juhul kui asendame lause sõnastuses *ortogonaalteisenduse* ja *ortogonaalmaatriksi* vastavalt *pseudoortogonaalteisenduse* ja *pseudoortogonaalmaatriksiga*.⁹

Me vaatleme ortogonaalteisendusega L ja baasiga $\{e_a\}$ seotud maatriksit Λ kui koordinaatide teisenemise maatriksit tavalisel viisil. Seega, kui $x \in \mathcal{M}$ on esitub koordinaatides baasi $\{e_i\}$ suhtes kujul $x = x^i e_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, siis tema koordinaadid baasi $\{\hat{e}_i\} = \{Le_i\}$ suhtes avalduvad kujul $x = \hat{x}^i \hat{e}_i$, kus

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3 + \Lambda^1{}_4 x^4, \\ \hat{x}^2 &= \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3 + \Lambda^2{}_4 x^4, \\ \hat{x}^3 &= \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3 + \Lambda^3{}_4 x^4, \\ \hat{x}^4 &= \Lambda^4{}_1 x^1 + \Lambda^4{}_2 x^2 + \Lambda^4{}_3 x^3 + \Lambda^4{}_4 x^4, \end{aligned}$$

⁹[Kil05] antud tõestuses tuleb asendada eukleidiline meetrika δ_{ij} Minkowski meetrikaga η_{ij} ja seega jääb tulemus kehtima ka pseudoortogonaalsel juhul.

mille võime lühidalt kirja panna kui

$$\hat{x}^i = \Lambda^i_j x^j, \text{ kus } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Definitsioon 3.8. 4×4 maatriksit Λ , mis rahuldab tingimust 3.4 (ja lemma 3.1 põhjal siis ka tingimusi 3.3, 3.5 ja 3.6) nimetatakse (*homogeenseks*) *Lorentzi teisenduseks*.

Kuna ruumi \mathcal{M} ortogonaalsteisendus L on isomorfism¹⁰ ja seega pööratav, siis temaga assotsieeruv maatriks Λ on samuti pööratav, kusjuures

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta. \quad (3.7)$$

Tõepoolest, arvestades tingimust 3.4 ja asjaolu, et $\eta = \eta^{-1}$, siis saame

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \iff \eta \Lambda^{-1} = \Lambda^T \eta \iff \eta^{-1} \eta \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \iff \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta.$$

Teoreem 3.3. *Kõigi (homogeensete) Lorentzi teisenduste hulk on rühm maatriksite korrutamise suhtes. Seda rühma nimetatakse (homogeenseks) Lorentzi rühmaks ja tähistatakse \mathcal{L}_{GH} .*

Tõestus. Veendumaks, et kõigi (homogeensete) Lorentzi teisenduste hulk \mathcal{L}_{GH} on rühm peame näitama, et \mathcal{L}_{GH} on kinnine korrutamise ja pöördelemendi võtmise suhtes.

Olgu $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$. Veendume esiteks, et korrutis $\Lambda_1 \Lambda_2$ kuulub hulka \mathcal{L}_{GH} . Selleks piisab näidata, et $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \eta$.

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = (\Lambda_2^T \Lambda_1^T) \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T \eta \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta,$$

ja seega $\Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$ nagu tarvis.

Jääb veel näidata, et ka $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$. Seose 3.7 ja võrduste $\eta = \eta^T$, $\eta \eta = E$ põhjal saame kirjutada

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} &= (\eta \Lambda^T \eta)^T \eta (\eta \Lambda^T \eta) = \left(\eta^T (\Lambda^T)^T \eta^T \right) \eta \eta \Lambda^T \eta = \\ &= \eta \Lambda \eta \Lambda^T \eta = \eta \eta \eta = \eta. \end{aligned}$$

Viimane aga tähendabki, et $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$. □

Arvestades võrdust 3.7 võime välja arvutada maatriksi Λ^{-1} ja esitada ta maatriksi Λ elementide kaudu:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 & -\Lambda^4_1 \\ \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 & -\Lambda^4_2 \\ \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 & -\Lambda^4_3 \\ -\Lambda^1_4 & -\Lambda^2_4 & -\Lambda^3_4 & \Lambda^4_4 \end{pmatrix}.$$

¹⁰Vaata 2.2 Tulemusi lineaaralgebrast, Lause 2.1

3.4 Lorentzi rühm

Definitsioon 3.9. Me ütleme, et $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ on *ortokroonne*, kui $\Lambda_4^4 \geq 1$ ja *mitte-ortokroonne*, kui $\Lambda_4^4 \leq -1$.

Edasise teooriaarenduse seisukohalt on otstarbekas tõestada järgmine teoreem.

Teoreem 3.4. [Nab12, teoreem 1.3.1] *Olgu $u, v \in \mathcal{M}$, kusjuures u on ajasarnane ja v ajasarnane või nullpikkusega ning olgu $\{e_a\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormaalne baas, mille suhtes u ja v avalduvad kujul $u = u^a e_a$ ja $v = v^a e_a$. Siis kehtib parajasti üks järgmistest tingimusest:*

- (a) $u^4 v^4 > 0$, mille korral $g(u, v) < 0$,
- (b) $u^4 v^4 < 0$, mille korral $g(u, v) > 0$.

Tõestus. Oletame, et teoreemi eeldused on täidetud. Siis

$$\begin{aligned} g(u, u) &= (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^4)^2 < 0 \text{ ja} \\ g(v, v) &= (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Niisiis

$$\begin{aligned} (u^4 v^4)^2 &> \left((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 \right) \left((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \right) \stackrel{(*)}{\geq} \\ &\geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3, \end{aligned}$$

kus võrratus $(*)$ tuleneb Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratusest ruumi \mathbb{R}^3 jaoks. Nüüd aga $|u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3|$, millest saame, et $u^4 v^4 \neq 0$ ja $g(u, v) \neq 0$. Oletame konkreetseuse mõttes, et $u^4 v^4 > 0$. Siis

$$u^4 v^4 = |u^4 v^4| > |u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3| \geq u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3,$$

millest

$$u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4 < 0$$

ehk $g(u, v) < 0$. Kui aga $u^4 v^4 > 0$, siis $g(u, -v) < 0$ ja seega $g(u, v) > 0$. \square

Järeldus 3.1. *Kui $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ on ortogonaalne ajasarnase vektoriga $v \in \mathcal{M}$, siis u on ruumisarnane.*

Tõestus. Olgu $v \in \mathcal{M}$ ajasarnane ja olgu $u \in \mathcal{M}$ nullist erinev ning ortogonaalne vektoriga v . Oletame vastuväiteliselt, et u on ajasarnane. Siis eelmise teoreemi põhjal kehtib kas $g(u, v) > 0$ või $g(u, v) < 0$. Et u ja v on ortogonaalsed, siis $g(u, v) = 0$, mis on vastuolus eelnevaga. Järelikult on u ruumisarnane. \square

Tähistame ruumi \mathcal{M} kõigi ajasarnaste vektorite hulga tähega τ ja defineerime hulgas τ seose \sim järgnevalt. Kui $u, v \in \tau$, siis $u \sim v$ parajasti siis, kui $g(u, v) < 0$. Sedasi defineeritud seos \sim on ekvivalents:

- (a) **refleksiivsus** järeldub vahetult ajasarnase vektori definitsioonist;
- (b) seose \sim **sümmeetrilisus** tuleneb skalaarkorrutise sümmeetrilisusest;
- (c) **refleksiivsuseks** märgime, et kui $g(u, v) < 0$ ja $g(v, w) < 0$, siis teoreemi 3.4 põhjal $u^4 v^4 > 0$ ja $v^4 w^4 > 0$ ehk u^4 ja v^4 ning v^4 ja w^4 on sama märgiga ja seega $\text{sign } u^4 = \text{sign } w^4$, millest saame $u^4 w^4 > 0$. Rakendades nüüd veelkord teoreemi 3.4, siis saame, et $g(u, w) < 0$.

Paneme tähele, et seos \sim jagab hulga τ täpselt kaheks ekvivalentsiklassiks. Tõepoolest, kui $u, v \in \mathcal{M}$ on ajasarnased, siis on meil teoreemi 3.4 põhjal kaks varianti. Peab kehtima kas

$$g(u, v) < 0 \text{ või} \quad (1)$$

$$g(u, v) > 0. \quad (2)$$

Kui kehtib võrratus (1), siis on $u \sim v$ ja korras. Vastupidi, kui u ja v jaoks kehtib (2), siis $u \not\sim v$ ja piisab näidata, et kui $w \in \tau$ korral $g(u, w) > 0$, siis $v \sim w$. Võrratuse (2) kehtivuseks peavad u, v ja w teoreemi 3.4 põhjal rahuldama võrratusi $u^4 v^4 < 0$ ja $u^4 w^4 < 0$, mis tähendab, et arvud u^4, v^4 ja u^4, w^4 on erinevate märkidega. Seega v^4 ja w^4 on samade märkidega ja järelikult $g(v, w) < 0$ ehk $v \sim w$.

Neid kahte ekvivalentsiklassi tähistatakse τ^+ ja τ^- . Märgime, et elementide ekvivalentsiklassidesse τ^+ ja τ^- jaotamine toimub meie postuleerimise täpsusega ja on meelevaldne.

Teoreem 3.5. [Nab12, teoreem 1.3.3] Olgu $\Lambda = [\Lambda^a_b]_{a,b=1,2,3,4}$ Lorentzi teisen-
dus, see tähendab $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ ja olgu $\{e_a\}$ ruumi \mathcal{M} ortonormeeritud baas. Siis on järgmised väited samaväärsed:

- (i) Λ on ortokroonne;
- (ii) Λ säilitab kõikide nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märgi, see tähendab, kui $u = u^a e_a$ on nullpikkusega, siis arvud u^4 ja $\hat{u}^4 = \Lambda^4_b u^b$ on sama märgiga;
- (iii) Λ säilitab kõikide ajasarnaste vektorite ajakoordinaadi märgi.

Tõestus. Olgu $u = u^a e_a \in \mathcal{M}$ ajasarnane või nullpikkusega vektor. Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratusest ruumis \mathbb{R}^3 saame

$$(\Lambda^4_1 u^1 + \Lambda^4_2 u^2 + \Lambda^4_3 u^3)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^3 (\Lambda^4_i)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 (u^j)^2 \right). \quad (3.8)$$

Sooritades nüüd võrduses 3.6 asenduse $a = b = 4$ saame

$$\begin{aligned} (\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2 - (\Lambda^4_4)^2 &= -1, \text{ millest järeldub} \\ (\Lambda^4_4)^2 &> (\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Et $u \neq 0$, siis tingimustest 3.8 ja 3.9 saame $(\Lambda^4_1 u^1 + \Lambda^4_2 u^2 + \Lambda^4_3 u^3)^2 < (\Lambda^4_4 u^4)^2$, mille võime ruutude vahe valemit kasutades kirjutada kujul

$$(\Lambda^4_1 u^1 + \Lambda^4_2 u^2 + \Lambda^4_3 u^3 - \Lambda^4_4 u^4) (\Lambda^4_1 u^1 + \Lambda^4_2 u^2 + \Lambda^4_3 u^3 + \Lambda^4_4 u^4) < 0. \quad (3.10)$$

Defineerides $v \in \mathcal{M}$ võrdusega $v = \Lambda^4_1 e^1 + \Lambda^4_2 e^2 + \Lambda^4_3 e^3 - \Lambda^4_4 e^4$ on v ajasarnane vektor, kusjuures seose 3.10 saame esitada kujul

$$g(u, v) \hat{u}^4 < 0. \quad (3.11)$$

Viimane võrratus ütleb meile, et arvudel $g(u, v)$ ja \hat{u}^4 on erinevad märgid. Näitame viimaks, et $\Lambda^4_4 \geq 1$ siis ja ainult siis, kui arvudel u^4 ja \hat{u}^4 on samad märgid. Selleks oletame esmalt, et $\Lambda^4_4 \geq 1$. Kui $u^4 > 0$, siis teoreemi 3.4 järgi $g(u, v) < 0$ ja seega 3.11 põhjal $\hat{u}^4 > 0$. Kui $u^4 < 0$, siis $g(u, v) > 0$, ja seega $\hat{u}^4 < 0$. Kokkuvõttes järeldub võrratusest $\Lambda^4_4 \geq 1$, et u^4 ja \hat{u}^4 on samamärgilised. Analoogiliselt saab näidata, et kui $\Lambda^4_4 \leq -1$, siis u^4 ja \hat{u}^4 on erimärgilised. \square

Teoreemi tõestusest saame teha järgmise olulise järelduse.

Järeldus 3.2. *Kui Λ on mitteortokroonne, siis ta muudab kõikide ajasarnaste ja nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märgi.*

Järelduse tulemust arvestades on mõistlik edasises uurida vaid hulga \mathcal{L}_{GH} elemente, mis on ortokroonsed. Kuna sellised Lorentzi teisendused ei muuda ajasarnaste ega nullpikkusega vektorite ajakoordinaadi märki, siis võime konkreetse mõttes piirduda vaid selliste ortonormaalsete baasidega $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$, kus $e_4 \sim \hat{e}_4$. Tuletame meelde, et siinjuures ei ole vahet kumba faktorhulga \mathcal{M}/\sim ekvivalentsiklassi elemendid e_4 ja \hat{e}_4 kuuluvad, sest nende ekvivalentsiklasside täpne fikseerimine on meelevaldne.

Meenutades veel seost 3.4, siis saame kirjutada $\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta$, millest tuleneb $(\det \Lambda)^2 = 1$. Järelikult kehtib kas

$$\det \Lambda = 1 \text{ või } \det \Lambda = -1,$$

ja seejuures ütleme, et Λ on *Lorentzi päristeisendus*, kui $\det \Lambda = 1$.

Lause 3.4. *Hulk $\mathcal{L} := \{\Lambda \in \mathcal{L}_{GH} : \det \Lambda = 1, \Lambda^4_4 \geq 1\}$ on korrutamise suhtes rühma \mathcal{L}_{GH} alamrühm, see tähendab ortokroonsed Lorentzi päristeisendused moodustavad rühma.*

Tõestus. Veendumaks, et hulk \mathcal{L} on rühm näitame, et ta on kinnine korrutamise ja pöördlemendi võtmise suhtes. Olgu $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$. Paneme tähele, et $\det(\Lambda_1 \Lambda_2) = \det \Lambda_1 \cdot \det \Lambda_2 = 1$ ja seose 3.7 põhjal $\det \Lambda^{-1} = \det(\eta \Lambda^T \eta) = (-1)^2 \det \Lambda^T = \det \Lambda = 1$.

Seose 3.7 põhjal on ilmne ka $(\Lambda^{-1})_4^4 = (\Lambda^T)_4^4 = \Lambda_4^4 \geq 1$. Veendumaks, et $(\Lambda_1 \Lambda_2)_4^4 \geq 1$ tähistame $\vec{a} = ((\Lambda_1)_1^4, (\Lambda_1)_2^4, (\Lambda_1)_3^4)$ ja $\vec{b} = ((\Lambda_2)_4^1, (\Lambda_2)_4^2, (\Lambda_2)_4^3)$ ning skalaarkorrutise $\vec{a} \cdot \vec{b}$ all mõtleme eukleidilist skalaarkorrutist ruumis \mathbb{R}^3 . Seliseid tähistusi arvestades võime kirjutada

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 \Lambda_2)_4^4 &= (\Lambda_1)_1^4 (\Lambda_2)_4^1 + (\Lambda_1)_2^4 (\Lambda_2)_4^2 + (\Lambda_1)_3^4 (\Lambda_2)_4^3 + (\Lambda_1)_4^4 (\Lambda_2)_4^4 = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + (\Lambda_1)_4^4 (\Lambda_2)_4^4. \end{aligned}$$

Võttes valemis 3.3 $a = b = 4$ saame $((\Lambda_1)_4^4)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a} = 1$, millest

$$|\vec{a}| = \sqrt{((\Lambda_1)_4^4)^2 - 1} \leq (\Lambda_1)_4^4.$$

Analoogiliselt saame valemist 3.6, et $|\vec{b}| \leq (\Lambda_2)_4^4$ ja seega kokkuvõttes $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \leq (\Lambda_1)_4^4 (\Lambda_2)_4^4$. Viimane aga tähendab, et $(\Lambda_1 \Lambda_2) \geq 0$, millest piisab, et kehtiks $(\Lambda_1 \Lambda_2) \geq 1$. Tõepoolest, kui $\hat{\Lambda} \in \mathcal{L}_{GH}$ ja tähistame $\vec{c} = \left(\frac{\hat{\Lambda}_1^4}{\hat{\Lambda}_4^4}, \frac{\hat{\Lambda}_2^4}{\hat{\Lambda}_4^4}, \frac{\hat{\Lambda}_3^4}{\hat{\Lambda}_4^4} \right)$, siis 3.3 põhjal

$$-1 = \left(\hat{\Lambda}_1^4 \right)_4^2 + \left(\hat{\Lambda}_2^4 \right)_4^2 + \left(\hat{\Lambda}_3^4 \right)_4^2 - \left(\hat{\Lambda}_4^4 \right)_4^2 = - \left(\hat{\Lambda}_4^4 \right)_4^2 (1 - \vec{c} \cdot \vec{c}).$$

Viimane võrdus saab kehtida vaid juhul, kui $1 - \vec{c} \cdot \vec{c} > 0$. Järelikult

$$\left(\left(\hat{\Lambda} \right)_4^4 \right)^2 = \frac{1}{1 - \vec{c} \cdot \vec{c}} \geq 1$$

ehk kehtib kas $\left(\hat{\Lambda} \right)_4^4 \geq 1$ või $\left(\hat{\Lambda} \right)_4^4 \leq 1$. Sellega oleme näidanud, et \mathcal{L} on rühm. \square

Märkus 3.3. Rühma \mathcal{L} lausest 3.4 nimetatakse sageli *Lorentzi rühmaks*, nagu ka rühma \mathcal{L}_{GH} .

Vaatleme järgnevalt lähemalt hulga \mathcal{L} alamhulka \mathcal{R} , mille elemendid avalduvad kujul

$$R = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 & 0 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 & 0 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kus $(R_j^i)_{i,j=1,2,3}$ on ortogonaalne ja unimodulaarne, see tähendab $(R_j^i)^{-1} = (R_j^i)^T$ ja $\det(R_j^i) = 1$. Märgime, et tõepoolest $R \in \mathcal{L}$, sest $R_4^4 = 1$ definitsiooni järgi ning kasutades Laplace'i teoreemi saame $\det R = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det(R_j^i) = 1$. Samuti on täidetud ortogonaalsuse tingimus 3.4 kuna

$$\begin{aligned} R^T \eta R &= \begin{pmatrix} (R_j^i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta \begin{pmatrix} (R_j^i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_j^i)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_j^i) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (R_j^i)^T (R_j^i) & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_j^i)^{-1} (R_j^i) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta. \end{aligned}$$

Paneme veel tähele, et hulk \mathcal{R} on rühm. Tõepoolest, kui $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, siis

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja seega $(R_1 R_2)_4^4 = 1$ ning $\det \left(\begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} ((R_1)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \det \left(\begin{pmatrix} ((R_2)^i_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1$. Teisalt, kui $R \in \mathcal{R}$, siis valemist 3.7 saame

$$R^{-1} = \eta R^T \eta = \eta \begin{pmatrix} (R_j^i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \eta = \eta \begin{pmatrix} (R_j^i)^T & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_j^i)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järelikult $(R^{-1})_4^4 = 1$ ning $\det \left(\begin{pmatrix} (R^{-1})^i_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det (R_j^i)^T = \det (R_j^i) = 1$.

Et hulga \mathcal{R} elemendid kirjeldavad koordinaatide teisendusi, mis pööravad ruumikoordinaate, siis ütleme teisenduse $R \in \mathcal{R}$ kohta *pööre* ja rühma \mathcal{R} nimetame rühma \mathcal{L} *pöörete alamrühmaks*.

Lause 3.5. Olgu $\Lambda \in \mathcal{L}$. Siis on järgmised väited samaväärsed:

- (i) Λ on pööre, see tähendab $\Lambda \in \mathcal{R}$;
- (ii) $\Lambda_4^1 = \Lambda_4^2 = \Lambda_4^3 = 0$;
- (iii) $\Lambda_1^4 = \Lambda_2^4 = \Lambda_3^4 = 0$;
- (iv) $\Lambda_4^4 = 1$.

Tõestus. Implikatsioonid $(i) \implies (ii)$, $(i) \implies (iii)$ ja $(i) \implies (iv)$ on pöörde definitsiooni arvestades ilmsed.

Näitamaks, et (ii) , (iii) ja (iv) on samaväärsed märgime, et fikseerides seostes 3.3 ja 3.6 sobivalt indeksid saame

$$\begin{aligned} (\Lambda_4^1)^2 + (\Lambda_4^2)^2 + (\Lambda_4^3)^2 - (\Lambda_4^4)^2 &= -1, \\ (\Lambda_1^4)^2 + (\Lambda_2^4)^2 + (\Lambda_3^4)^2 - (\Lambda_4^4)^2 &= -1. \end{aligned}$$

Võttes arvesse, et Λ on ortokroonne, siis $\Lambda_4^4 \geq 1$ ja seega saame kirjutada

$$\begin{aligned}(\Lambda_4^1)^2 + (\Lambda_4^2)^2 + (\Lambda_4^3)^2 - 1 &\geq -1, \\ (\Lambda_1^4)^2 + (\Lambda_2^4)^2 + (\Lambda_3^4)^2 - 1 &\geq -1,\end{aligned}$$

mis saab aga võimalik olla vaid juhul, kui $\Lambda_4^1 = \Lambda_4^2 = \Lambda_4^3 = \Lambda_1^4 = \Lambda_2^4 = \Lambda_3^4 = 0$.

Tõestuse lõpetamiseks jääb veel näidata, et kui $\Lambda \in \mathcal{L}$ ja kehtib (ii) (ja seega ka (ii) ning (iv)), siis $(\Lambda_j^i)_{i,j=1,2,3}$ on ortogonaalne ja unimodulaarne. Võrdus $\det(\Lambda_j^i) = 1$ on tõestatud osas kus näitasime, et \mathcal{R} on rühm ja seega on (Λ_j^i) ortogonaalne. Jääb veel näidata, et $(\Lambda_j^i)^{-1} = (\Lambda_j^i)^T$. Selleks märgmine, et blokkmaatriksi pööramise eeskirja kohaselt

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} (\Lambda_j^i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} (\Lambda_j^i)^{-1} + (\Lambda_j^i)^{-1} 0 \left(1 - 0 (\Lambda_j^i)^{-1} 0\right)^{-1} 0 (\Lambda_j^i)^{-1} & -(\Lambda_j^i)^{-1} 0 \left(1 - 0 (\Lambda_j^i)^{-1} 0\right)^{-1} \\ -\left(1 - 0 (\Lambda_j^i)^{-1} 0\right)^{-1} 0 (\Lambda_j^i)^{-1} & \left(1 - 0 (\Lambda_j^i)^{-1} 0\right)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\Lambda_j^i)^{-1} & 0 \\ 0 & 1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_j^i)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Osas kus näitasime, et \mathcal{R} on rühm tuli ka välja, et $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda_j^i)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, millest $(\Lambda_j^i)^{-1} = (\Lambda_j^i)^T$ ehk (Λ_j^i) on ortogonaalne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et Λ on pööre, nagu tarvis. \square

3.5 Poincaré rühm

Arvestades Pythagorase teoreemi kahemõõtmelisel tasandil toome sisse kauguse mõiste üldistatuna Minkowski aegruumile.

Definitsioon 3.10. Olgu $x = x^a$ ja $y = y^a$, $a = 1, 2, 3, 4$, kaks sündmust Minkowski ruumis \mathcal{M} . Sündmuste x ja y vaheliseks *kauguseks* nimetame reaalarvu s , mis on defineeritud valemiga

$$s = s(x, y) = \eta_{ab} (x^a - y^a) (x^b - y^b), \quad a, b = 1, 2, 3, 4,$$

kus η on Minkowski ruumi meetrika.

Meenutame, et Minkowski ruumi pseudoortogonaalteisendus L on defineeritud kui kujutus, mis säilitab skalaarkorrutise g . Olgu $x, y \in \mathcal{M}$. Osutub, et kujutuse

L ortogonaalsusest järeldub lihtsasti, et sündmuste x ja y vaheline kaugus sama, mis sündmustel Lx ja Ly , see tähendab $s(x, y) = s(Lx, Ly)$. Tõepoolest, kui Λ on kujutuse L maatriks, siis valemi 3.3 abil saame kirjutada

$$\begin{aligned} s(Lx, Ly) &= \eta_{ab} (\Lambda^a_c x^c - \Lambda^a_c y^c) (\Lambda^b_d x^d - \Lambda^b_d y^d) = \\ &= \eta_{ab} \Lambda^a_c (x^c - y^c) \Lambda^b_d (x^d - y^d) = \\ &= \eta \Lambda^a_c \Lambda^b_d (x^c - y^c) (x^d - y^d) = \\ &= \eta (x^c - y^c) (x^d - y^d) = s(x, y). \end{aligned}$$

Olgu $n \in \text{Mat}_{4,1} \mathbb{R}$ komponentidega $n^a, a = 1, 2, 3, 4$ mingi fikseeritud 1×4 reaalne maatriks. On väga loomulik oletada, et sündmuste x ja y jäigal nihutamisel

$$\hat{x}^b = x^b + n^b, \quad \hat{y}^b = y^b + n^b, \quad b = 1, 2, 3, 4, \quad (3.12)$$

ruumis \mathcal{M} nende sündmuste vaheline kaugus ei muutu. Arvestades meie antud kauguse definitsiooni see nii ilmselt ka on. Seejuures teisendusi 3.12 nimetame *nihketeisendusteks*.

Kokkuvõttes oleme leidnud kaks kujutuste klassi, nihked ja (homogeensed) Lorentzi teisendused, mille suhtes ruumi \mathcal{M} sündmuste vaheline kaugus on invariantne. Üldisemalt nimetame teisendust, mille suhtes sündmuste vaheline kaugus on invariantne suurus *sümmeetriateisenduseks*. Pöörame järgnevas pisut tähelepanu sellistele sümmeetriateisendustele, mille me saame kui vaatleme nihkeid koos Lorentzi teisendustega.

Definitsioon 3.11. Olgu $\Lambda \in \mathcal{L}_{GH}$ Lorentzi teisendus ja $n \in \text{Mat}_{4,1} \mathbb{R}$ nihketeisenduse maatriks. Kujutust $\mathcal{M} \ni x \mapsto \Lambda^a_b x^b + n^a \in \mathcal{M}$ nimetatakse *Poincaré teisenduseks*¹¹ ja tähistatakse paarina $\{n, \Lambda\}$.

Definitsioon 3.12. Kõikide Poincaré teisenduste hulka

$$P = \{\{n, \Lambda\} : n \in \text{Mat}_{4,1} \mathbb{R}, \Lambda \in \mathcal{L}_{GH}\}$$

koos tehtega $* : P \times P \rightarrow P$, $\{n_1, \Lambda_1\} * \{n_2, \Lambda_2\} \mapsto \{n_1 + \Lambda_1 n_2, \Lambda_1 \Lambda_2\}$, nimetame *Poincaré rühmaks*, mida tähistatakse sümboliga \mathcal{P} .

Veendumaks Poincaré rühma definitsiooni korrektsuses piisab näidata, et hulk P koos tehtega $* : P \times P \rightarrow P$ moodustab tõepoolest rühma. Selle tõestamiseks olgu meil fikseeritud kolm Poincaré teisendust $\{n_1, \Lambda_1\}$, $\{n_2, \Lambda_2\}$ ja $\{n_3, \Lambda_3\}$. Esiteks märgime, et $\Lambda_1 n_2 \in \text{Mat}_{4,1} \mathbb{R}$ ja seega ka $n_1 + \Lambda_1 n_2 \in \text{Mat}_{4,1} \mathbb{R}$ ja $\Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}_{GH}$,

¹¹Vahel kasutatakse *Poincaré teisenduse* asemel terminit *Mitthomogeenne Lorentzi teisendus*.

sest \mathcal{L}_{GH} on rühm maatriksite korrutamise suhtes ja seega $\{n_1, \Lambda_1\} * \{n_2, \Lambda_2\} \in P$. Assotsiatiivsus on vahetult kontrollitav:

$$\begin{aligned} (\{n_1, \Lambda_1\}\{n_2, \Lambda_2\})\{n_3, \Lambda_3\} &= \{n_1 + \Lambda_1 n_2, \Lambda_1 \Lambda_2\}\{n_3, \Lambda_3\} = \\ &= \{n_1 + \Lambda_1 n_2 + \Lambda_1 \Lambda_2 n_3, \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3\} = \{n_1 + \Lambda_1 (n_2 + \Lambda_2 n_3), \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3)\} = \\ &= \{n_1, \Lambda_1\}\{n_2 + \Lambda_2 n_3, \Lambda_2 \Lambda_3\} = \{n_1, \Lambda_1\}(\{n_2, \Lambda_2\}\{n_3, \Lambda_3\}) \end{aligned}$$

Lihtne on näha, et ühikuks sobib võtta $\{0, E\}$ ja seega on Poincaré teisenduse $\{n_1, \Lambda_1\}$ pöördelendiks teisendus $\{-(\Lambda_1)^{-1} n_1, (\Lambda_1)^{-1}\}$, sest

$$n_1 + \Lambda_1 (-(\Lambda_1)^{-1}) n_1 = n_1 - E n_1 = 0 \text{ ja } \Lambda_1 (\Lambda_1)^{-1} = E.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et Poincaré rühm \mathcal{P} on oma algebralistelt omadustelt tõepoolest rühm.

4 Teine peatükk

4.1 Lie rühm

Definitsioon 4.1. Rühma G nimetatakse *Lie rühmaks*, kui ta on topoloogiline muutkond ja tema (rühma) tehe on diferentseeruv.

4.2 Lie algebra

Definitsioon 4.2. Vektorruumi L nimetatakse *Lie algebraks*, kui on määratud bilineaarvorm $[\ ; \] : L \times L \rightarrow L$, mis on antikommuteeruv, see tähendab kõikide $u, v \in L$ korral $[u, v] = -[v, u]$ ja iga $u, v, w \in L$ puhul kehtib Jacobi samasus ehk $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Definitsioon 4.3. Bilineaarvormi $[\ ; \] : L \times L \rightarrow L$ Lie algebra definitsioonist nimetatakse *kommutaatoriks*.

Piltlikult võib öelda, et kommutaator mõõdab kui palju on Lie algebra elemendid mittekommuteeruvad.

Definitsioon 4.4. Olgu L Lie algebra ja $\{t_i\}_{i=1}^r$ selle algebra baas. Kui tähistame $[t_i, t_j] = c_{ij}^k t_k$, kus $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$, siis arve c_{ij}^k nimetame Lie algebra *struktuurikonstantideks*.

Lie algebra struktuurikonstantide definitsiooni põhjal on selge, et struktuuri-konstantide väärtus sõltub Lie algebra baasi valikust. Lisaks saame vahetult kommutaatori antikommuteeruvusest omaduse

$$c_{ij}^k = [t_i, t_j] = -[t_j, t_i] = -c_{ji}^k, \quad (4.1)$$

kus t_i, t_j on Lie algebra baasivektorid. Tuletame nüüd Jacobi samasuse struktuurikonstantide jaoks:

$$\begin{aligned} [t_i, [t_j, t_k]] + [t_j, [t_k, t_i]] + [t_k, [t_i, t_j]] &= 0 \\ [t_i, c_{jk}^l t_l] + [t_j, c_{ki}^l t_l] + [t_k, c_{ij}^l t_l] &= 0 \\ c_{jk}^l [t_i, t_l] + c_{ki}^l [t_j, t_l] + c_{ij}^l [t_k, t_l] &= 0 \\ c_{jk}^l c_{il}^m t_m + c_{ki}^l c_{jl}^m t_m + c_{ij}^l c_{kl}^m t_m &= 0 \\ c_{jk}^l c_{il}^m + c_{ki}^l c_{jl}^m + c_{ij}^l c_{kl}^m &= 0 \end{aligned}$$

Näide 4.1. Vaatleme teist järku ruutmaatriksite hulka $\mathfrak{su}(2) \subset \text{Mat}_2 \mathbb{C}$, kus $u \in \mathfrak{su}(2)$ rahuldab tingimusi

$$\text{Tr } u = 0 \text{ ja} \quad (4.2)$$

$$u^t = -\bar{u}^T. \quad (4.3)$$

Hulk $\mathfrak{su}(2)$ koos tavalise Lie sulgude kommutaatoriga $[u, v] = uv - vu$, $u, v \in \mathfrak{su}(2)$, on Lie algebra.¹²

Olgu $u, v, w \in \mathfrak{su}(2)$. Kõigepealt märgime, et $(u + v) + (u + v)^t = u + v + u^t + v^t = 0$ ning $\text{Tr}(u + v) = 0$ ehk $u + v \in \mathfrak{su}(2)$. Veendumaks, et $\mathfrak{su}(2)$ on Lie algebra piisab nüüd näidata, et kommutaator $[\cdot, \cdot]$ rahuldab definitsioonis 4.2 antud tingimusi ning $[u, v] \in \mathfrak{su}(2)$ ja $\text{Tr}[u, v] = 0$.

Paneme tähele, et definitsiooni järgi $[u, v] = uv - vu = -(vu - uv) = -[v, u]$ ning kehtib Jacobi samasus, sest

$$\begin{aligned} & [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = \\ & = [u, vw - wv] + [v, wu - uw] + [w, uv - vu] = \\ & = [u, vw] - [u, wv] + [v, wu] - [v, uw] + [w, uv] - [w, vu] = \\ & = uvw - vwu - uww + wvu + vwu - wuv - \\ & - vuw + uwv + wuv - uvw - wvu + vuw = 0. \end{aligned}$$

Seega definitsiooni 4.2 eeldused on täidetud. Teoreemi 2.3 põhjal $\text{Tr}(uv) = \text{Tr}(vu)$ ja seega $\text{Tr}[u, v] = 0$. Lõpuks paneme veel tähele, et $[u, v] + [u, v]^t = 0$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} [u, v] + [u, v]^t & = uv - vu + (uv - vu)^t = uv - vu + (uv)^t - (vu)^t = \\ & = uv - vu + v^t u^t - u^t v^t = uv - vu + vu - uv = 0. \end{aligned}$$

Näites 4.1 toodud Lie algebrat $\mathfrak{su}(2)$ nimetatakse *teist järku spetsiaalsete unitaarsete maatriksite* Lie algebraks. Siin tuleks juttu teha miks $\mathfrak{su}(2)$ nii oluline on ja kuidas ta käesoleva tööga seotud on.

Uurime edasises veel pisut Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ omadusi. Tingimusest 4.2 saame, et $u \in \mathfrak{su}(2)$ peab omama kuju $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ ning arvestades ka tingimust 4.3, peab seega kehtima $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} = 0$, millest saame järgmised tingimused:

$$\begin{cases} a + \bar{a} = 0, \\ b + \bar{c} = 0. \end{cases}$$

Võttes $a = v + i\varphi$, siis peab kehtima $v + i\varphi + v - i\varphi = 0$ ehk $v = 0$, millest $a = i\varphi$.

Võttes veel arvesse, et $c = -\bar{b}$, siis saab maatriks u kuju $u = \begin{pmatrix} i\varphi & b \\ -\bar{b} & -i\varphi \end{pmatrix}$, kus $b = x + iy \in \mathbb{C}$ ja $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$. Viimane aga tähendab, et maatriksis u lineaarselt sõltumatuid reaalseid komponente kolm ehk $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2) = 3$. Arvestades tähistust

¹²Tingimus $u + u^t = 0$ tähendab, et u on anti-Hermite'i maatriks

$b = x + i$ ysaame kirjutada

$$u = \varphi \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sellega oleme leidnud Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ baasi

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \rho_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Märkus 4.1. Sageli nimetatakse Lie algebrate kontekstis baasivektoreid kohta ka *generaatoriteks*.

Definitsioon 4.5. Olgu L Lie algebra. Kujutust $\psi : L \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ nimetatakse Lie algebra L *esituseks*, kui $[\psi(u), \psi(v)] = \psi([u, v])$ kõikide $u, v \in L$ korral.

Definitsioon 4.6. Lie algebra *adjungeeritud esituseks* nimetatakse esitust ad , kus $\text{ad } u(v) = [u, v]$.

Veendumaks, et Lie algebra adjungeeritud esituse definitsioon on korrektne tuleb kontrollida, et kehtib võrdus $[\text{ad } u_1, \text{ad } u_2](v) = \text{ad } [u_1, u_2](v)$. Selle võrduse saame lihtsasti Jacobi samasusest kuna

$$\begin{aligned} 0 &= [u_1, [u_2, v]] + [u_2, [v, u_1]] + [v, [u_1, u_2]] = \\ &= [u_1, [u_2, v]] + [u_2, -[u_1, v]] - [[u_1, u_2], v] = \\ &= [u_1, [u_2, v]] - [u_2, [u_1, v]] - [[u_1, u_2], v], \end{aligned}$$

ehk $[u_1, [u_2, v]] - [u_2, [u_1, v]] = [[u_1, u_2], v]$ ja seega

$$[\text{ad } u_1, \text{ad } u_2](v) = [u_1, [u_2, v]] - [u_2, [u_1, v]] = [[u_1, u_2], v] = \text{ad } [u_1, u_2](v).$$

Näide 4.2. Leiame Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ baasi $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ adjungeeritud esituse

$$\{\text{ad } \rho_1, \text{ad } \rho_2, \text{ad } \rho_3\}.$$

Arvestades adjungeeritud esituse definitsiooni, tuleb meil selleks arvutada maatriksid $\text{ad } \rho_1(\rho_1), \text{ad } \rho_1(\rho_2), \dots, \text{ad } \rho_3(\rho_2)$ ja $\text{ad } \rho_3(\rho_3)$. Teemegi seda:

$$\begin{aligned} \text{ad } \rho_1(\rho_1) &= [\rho_1, \rho_1] = \rho_1\rho_1 - \rho_1\rho_1 = 0, \\ \text{ad } \rho_1(\rho_2) &= [\rho_1, \rho_2] = \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1 = -2\rho_3, \\ \text{ad } \rho_1(\rho_3) &= [\rho_1, \rho_3] = \rho_1\rho_3 - \rho_3\rho_1 = 2\rho_2, \\ \text{ad } \rho_2(\rho_1) &= [\rho_2, \rho_1] = -[\rho_1, \rho_2] = -\text{ad } \rho_1(\rho_2) = 2\rho_3, \\ \text{ad } \rho_2(\rho_2) &= [\rho_2, \rho_2] = \rho_2\rho_2 - \rho_2\rho_2 = 0, \\ \text{ad } \rho_2(\rho_3) &= [\rho_2, \rho_3] = \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_2 = -2\rho_1, \\ \text{ad } \rho_3(\rho_1) &= [\rho_3, \rho_1] = -[\rho_1, \rho_3] = -\text{ad } \rho_1(\rho_3) = -2\rho_2, \\ \text{ad } \rho_3(\rho_2) &= [\rho_3, \rho_2] = -[\rho_2, \rho_3] = -\text{ad } \rho_2(\rho_3) = 2\rho_1, \\ \text{ad } \rho_3(\rho_3) &= [\rho_3, \rho_3] = \rho_3\rho_3 - \rho_3\rho_3 = 0. \end{aligned}$$

Saadud võrduste põhjal võime nüüd kirjutada

$$\mathrm{ad} \rho_1 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{ad} \rho_2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{ad} \rho_3 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mis tähendab, Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ adjungeeritud esituse baasiks sobib kolmandat järku antisümmeetriliste maatriksite süsteem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Summary

Siia tuleb ingliskeelne kokkuvõte...

Viited

- [Kil05] M. Kilp. *Algebra I*. Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.
- [Nab12] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, NY, 2nd edition, 2012.
- [Põl12] M. Põldvere. Funktsionaalanalüüs 2 loengukonspekt, 2012.