TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Priit Lätt

Minkowski aegruumi geomeetriast

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Viktor Abramov

Autor: .... ”.....”juuni 2013
Juhendaja: .... ”.....”juuni 2013

TARTU 2013

Sisukord

1 Sissejuhatus

Märgime, et töös kasutame summade tähistamisel Einstein'i summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid i ja j, mis omavad väärtusi $1, \ldots, n$ ($n \in \mathbb{N}$), siis kirjutame

$$x^i e_a = \sum_{a=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n,$$

$$\lambda^i{}_j x^j = \sum_{j=1}^{n} = \lambda^i{}_1 x^1 + \lambda^i{}_2 x^2 + \cdots + \lambda^i{}_n x^n,$$

$$\eta_{ij} u^i v^j = \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \cdots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \cdots + \eta_{nn} u^n v^n,$$

ja nii edasi.

Vektori u pikkust tähistame edaspidi $|u|$.

2 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis toome välja definitsioonid ja tähtsamad tulemused, mida läheb tarvis töö järgmistes osades. Lihtsamad tulemused, millele on pööratud tähelepanu kursustes Algebra I või Geomeetria II, esitame seejuures tõestusteta.

2.1 ptk

3 Minkowski ruumi geomeetriline struktuur

3.1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused

Olgu $\mathbb{V}$ n-mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse. Me ütleme, et kujutus $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ on *bilineaarvorm*, kui g on mõlema muutuja järgi lineaarne, see tähendab $g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \alpha_2 g(u_2, v)$ ja $g(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 g(u, v_1) + \alpha_2 g(u, v_2)$ kus α_1 ja α_2 on suvalised reaalarvud ning u, u_1, u_2, v, v_1 ja v_2 on vektorruumi $\mathbb{V}$ elemendid.
Olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Bilineaarvormi g nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui $g(u,v) = g(v,u)$ ja *mittekidunuks*, kui $u = 0$ järeldub tingumusest iga $v \in \mathbb{V}$ korral $g(u,v) = 0$.

Definitsioon 3.1. *Mittekidunud sümmeetrilist bilineaarvormi $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ nimetatakse* skalaarkorrutiseks*. Vektorite u ja v skalaarkorrutist tähistame sageli ka kujul $u \cdot v$.*

Tänu skalaarkorrutise bilineaarsusele on kergesti tuletatavad järgmised omadused:

- $u \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, sest bilineaarsuse ingumusest saame $0 \cdot v = (0 * 0) \cdot v = 0 * (0 \cdot v) = 0$,
- kui $u_1, u_2, \dots, u_n, u, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$, siis $\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \cdot v = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v)$ ja $u \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = \sum_{i=1}^n (u \cdot v_i)$,
- kui $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on vektorruumi $\mathbb{V}$ baas ning kui tähistame $\eta_{ij} = e_i \cdot e_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, siis $u \cdot v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} u^i v^j = \eta_{ij} u^i v^j$, kus $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$.

Näide 3.1. *Vaatleme ruumi $\mathbb{R}^n$. Olgu $u = (u^1, u^2, \dots, u^n), v = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Lihtne on veenduda, et kujutus $g(u,v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^n v^n$ on skalaarkorrutis.*

Näites 1 defineeritud skalaarkorrutis on *positiivselt määratud*, see tähendab iga $v \neq 0$ korral $g(v,v) > 0$. Kui $g(v,v) < 0$ kõikide $v \neq 0$ korral, siis ütleme, et g on *negatiivselt määratud* ja kui g pole ei positiivselt ega negatiivselt määratud, siis öeldakse, et g on *määramata*.

Definitsioon 3.2. *Kui g on skalaarkorrutis vektorruumil $\mathbb{V}$, siis nimetame vektoreid u ja v g-*ortogonaalseteks *(või lihtsalt* ortogonaalseteks*, kui g roll on kontekstist selge), kui $g(u,v) = 0$. Kui $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ on alamruum, siis ruumi $\mathbb{W}$ ortogonaalne täiend $\mathbb{W}^\perp$ on hulk $\mathbb{W}^\perp = \{u \in \mathbb{V} : \forall v \in \mathbb{W} g(u,v) = 0\}$.*

Definitsioon 3.3. *Skalaarkorrutise g poolt määratud* ruutvormiks *nimetame kujutust $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, kus $Q(v) = g(v,v) = v \cdot v$, $v \in \mathbb{V}$.*

Lause 3.1. *Olgu g_1 ja g_2 kaks skalaarkorrutist vektorruumil $\mathbb{V}$, mis rahuldavad tingimust $g_1(u,u) = g_2(u,u)$ iga $v \in \mathbb{V}$ korral. Siis kehtib $g_1(u,v) = g_2(u,v)$ kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral, ehk teisi sõnu, $g_1 \equiv g_2$.*

Tõestus. Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$ ja kehtigu võrdus $g_1(u,u) = g_2(u,u)$ iga u korral. Defineerime uue kujutuse

$$g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R},\ g(u,v) \mapsto g_1(u,v) - g_2(u,v).$$

Paneme esiteks tähele, et selliselt defineeritud g on sümmeetriline ja bilineaarne. Tõepoolest, olgu $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$. Siis

$$\begin{aligned} & g(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = g_1(\alpha u_1 + \beta u_2, v) - g_2(\alpha u_1 + \beta u_2, v) \\ = \ & \alpha g_1(u_1, v) + \beta g_1(u_2, v) - \alpha g_2(u_1, v)\, \beta g_2(u_2, v) \\ = \ & \alpha(g_1(u_1, v) - g_2(u_1, v)) + \beta(g_1(u_2, v) - g_2(u_2, v)) \\ = \ & \alpha g(u_1, v) + \beta g(u_2, v) \text{ ja analoogiliselt} \\ & g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2). \end{aligned}$$

Kujutuse g sümmeetrilisus on g_1 ja g_2 sümmeetrilisust arvestades ilmne. Tõestuse lõpetamiseks piisab nüüd näidata, et $g = 0$. Ühelt poolt paneme tähele, et

$$g(u+v, u+v) = g_1(u+v, u+v) - g_2(u+v, u+v) = 0.$$

Teisalt

$$\begin{aligned} & g(u+v, u+v) = g(u, u+v) + g(v, u+v) \\ = \ & g(u,u) + g(u,v) + g(v,u) + g(v,v) \\ = \ & g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) = 2g(u,v). \end{aligned}$$

Kokkuvõttes saime $2g(u,v) = 0$ ehk $g(u,v) = 0$, mida oligi tarvis. □

Teoreem 3.1. *Olgu $\mathbb{V}$ reaalne n-mõõtmeline vektorruum ning olgu $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ skalaarkorrutis. Vektorruumil $\mathbb{V}$ leidub baas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nii, et $g(e_i, e_j) = 0$ kui $i \neq j$ ja $Q(e_i) = \pm 1$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Enamgi veel, baasivektorite arv, mille korral $Q(e_i) = -1$ on sama kõikide neid tingimusi rahuldavate baaside korral sama.*

Tõestus. Arvestades *Gram*[1]*-Schmidti* [2] algoritmi muutub teoreemi tõestus ilmseks[3]. □

[1] Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) - taani matemaatik
[2] Erhard Schmidt (1876 – 1959) - Tartus sündinud saksma matemaatik
[3] Vaata Lisa 1, Märkus 4.1

Definitsioon 3.4. *Vektorruumi $\mathbb{V}$ baasi teoreemist 4.2 nimetame ortonormeeritud baasiks.*

Skalaarkorrutise g suhtses ortonormaalse baasi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorite arvu r, mille korral $Q(e_i) = -1, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nimetame skalaarkorrutise g *indeksiks*. Edasises eeldame, et ortonormeeritud baasid on indekseeritud nii, et baasivektorid e_i, mille korral $Q(e_i) = -1$, paiknevad loetelu lõpus, ehk ortonormeeritud baasi

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \ldots, e_n\}$$

korral $Q(e_i) = 1$, kui $i = 1, 2, \ldots, n-r$, ja $Q(e_i) = -1$, kui $i = n-r+1, \ldots, n$. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$ saame sellise baasi suhtes skalaarkorrutise g arvutada järgmiselt:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^{n-r} v^{n-r} - u^{n-r+1} v^{n-r+1} - \cdots - u^n v^n.$$

Märkus 3.1. *Vektorruumi $\mathbb{V}$ skalaarkorrutisega g, mille indeks $r > 0$ nimetatakse* pseudoeukleidiliseks ruumiks.

3.2 Minkowski aegruumi mõiste

Definitsioon 3.5. Minkowski aegruumiks *nimetatakse* 4*-mõõtmelist reaalset vektorruumi $\mathcal{M}$, millel on defineeritud mittekidunud sümmeetriline bilineaarvorm g indeksiga* 1.
Ruumi $\mathcal{M}$ elemente nimetatakse sündmusteks *ja kujutust g nimetatakse* Lorentzi skalaarkorrutiseks *ruumil $\mathcal{M}$.*

Vahetult Minkowski ruumi definitsioonist selgub, et ruumil $\mathcal{M}$ leidub baas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ järgmise omadusega. Tähistades $u = u^i e_i$ ja $v = v^i e_i$, siis

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - u^4 v^4.$$

Olgugi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ või lühidalt $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormeeritud baas. Kui $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$, siis tähistame sündmuse x koordinaadid baasi $\{b_a\}$ suhtes (x^1, x^2, x^3, x^4) ja seejuures ütleme, et (x^1, x^2, x^3) on *ruumikoordinaadid* ning (x^4) on *ajakoordinaat*.

Kuna Lorentzi skalaarkorrutis g ei ole ruumil $\mathcal{M}$ positiivselt määratud, siis leiduvad vektorid $u \in \mathcal{M}, u \neq 0$ nii, et $g(u, u) = 0$. Selliseid vektoreid nimetatakse *nullvektoriteks*. Osutub, et ruumis $\mathcal{M}$ leidub koguni baase, mis koosnevad vaid nullvektoritest.

Näide 3.2. *Üheks ruumi $\mathcal{M}$ baasiks, mis koosneb vaid nullvektoritest on näiteks* $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$, *kus* $e_1^0 = (1,0,0,1)$, $e_2^0 = (0,1,0,1)$, $e_3^0 = (0,0,1,1)$ *ja* $e_4^0 = (-1,0,0,1)$. *Tõepoolest, süsteemi* $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0\}$ *lineaarne sõltumatus on vahetult kontrollitav ja* $e_1^0, \ldots, e_4^0$ *on nullvektorid, sest*

$$\begin{aligned} Q\left(e_1^0\right) &= 1^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_2^0\right) &= 0 + 1^2 + 0 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_3^0\right) &= 0 + 0 + 1^2 - 1^2 = 0, \\ Q\left(e_4^0\right) &= (-1)^2 + 0 + 0 - 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Samas paneme tähele, et selline baas ei saa koosneda paarikaupa ortogonaalsetest vektoritest.

Teoreem 3.2. *Olgu* $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ *nullvektorid. Vektorid* u *ja* v *on ortogonaalsed siis ja ainult siis, kui nad on paralleelsed, st leidub* $t \in \mathbb{R}$ *nii, et* $u = tv$.

Tõestus. Piisavus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ paralleelsed nullvektorid. Siis leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $u = tv$. Seega

$$g(u,v) = g(tv,v) = tg(v,v) = 0$$

ehk vektorid u ja v on ortogonaalsed, nagu tarvis.
Tarvilikkus. Olgu $u, v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ ortogonaalsed nullvoktorid, st $g(u,v) = 0$. *Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuse*[4] $g^2(u,v) \leq g(u,u)\, g(v,v)$ põhjal $0 \leq g(u,u)\, g(v,v)$, sest u ja v on ortogonaalsed. Teisalt, et u ja v on nullvektorid, siis $g(u,u)\, g(v,v) = 0$ ja järelikult kehtib Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratuses võrdud $0 = 0$, mis tähendab, et u ja v on lineaarselt sõltuvad. □

Võtame nüüd vaatluse alla kaks sellist sündmust $x, x_0 \in \mathcal{M}$, $x \neq x_0$, mida ühendav vektor on nullvektor, see tähendab $Q(x - x_0) = 0$. Seda asjaolu arvesse võttes saame, et kui $\{e_a\}$ ruumi $\mathcal{M}$ ortonormaalne baas ja me tähistame $x = x^a e_a$, $x_0 = x_0^a e_a$, siis kehtib võrdus

$$Q(x - x_0) = \left(x^1 - x_0^1\right)^2 + \left(x^2 - x_0^2\right)^2 + \left(x^3 - x_0^3\right)^2 - \left(x^4 - x_0^4\right)^2 = 0. \tag{3.1}$$

Kõigi selliste $x \in \mathcal{M}$ hulka, mille korral on tingimus (3.1) täidetud nimetatakse *nullkoonuseks* (või ka *valguse koonuseks*) punktis x_0 ja tähistatakse $\mathcal{C}_N(x_0)$. Seega $\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}$. Kirjeldavalt võime öelda, et kõik hulga $\mathcal{C}_N(x_0)$ elemendid on ühendatavad sündmusega x_0 *valguskiire* $R_{x_0,x}$ abil, mille me defineerime kui $R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$.

[4] Vaata Lisa 1, Teoreem 4.2

4 Lisa 1

4.1 Skalaarkorrutisega seotud abitulemused

Teoreem 4.1. *Lõplikumõõtmelises skalaarkorrutisega g varustatud vektorruumis* $\mathbb{V}$ *leidub ortonormeeritud baas.*

Tõestus. Esiteks märgime, et igas ühemõõtmelises vektorruumis eksisteerib ortonormeeritud baas, sest kui $\{b\}$ on mingi baas, siis $\left\{\frac{1}{|b|}b\right\}$ on ortonormeeritud baas. Eeldame nüüd, et igas $(n-1)$-mõõtmelises vektorruumis on olemas ortonormeeritud baas ning olgu $\mathbb{V}$ n-mõõtmeline vektorruum baasiga $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Eelduse järgi on ruumis $\mathbb{V}$ ortonormeeritud süsteem $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$, kusjuures

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}.$$

Seega tarvitseb meil leida veel $a_n \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ omadusega

$$a_n \perp \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\},$$

sest siis $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{|a_n|}a_n\}$ on ruumi $\mathbb{V}$ ortonormeeritud baas.
Otsime vektorit a_n kujul

$$a_n = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j, \text{ kus } \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Paneme tähele, et kui a_n on sellisel kujul, siis $a_n \neq 0$, sest vastasel korral $b_n \in \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$, mis on vastuolus süsteemi $\operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ lineaarse sõltumatusega. Kui a_n on kujul (4.1), siis kõikide $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ korral

$$a_n \perp e_k \iff a_n \cdot e_k = 0 \iff \left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = 0$$

Samas, kuna

$$\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j e_j\right) \cdot e_k = b_n \cdot e_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j \left(e_j \cdot e_k\right) = b_n \cdot e_k + \alpha_k,$$

siis $a_n \perp e_k \iff \alpha_k = -\left(b_n \cdot e_k\right)$. Järelikult võime võtta $a_n := b_n - \sum_{j=1}^{n-1} \left(b_n \cdot e_j\right) e_j$. □

Märkus 4.1. *Teoreemi 4.1 tõestuses antud algortimi ortonormeetirud baasi leidmiseks nimetatakse* Gram-Schmidti algoritmiks *või* ortogonaliseerimisprotsessiks*.*

Teoreem 4.2 (Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus). *Olgu $\mathbb{V}$ vektroruum skalaarkorrutisega $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Sellisel juhul kehtib võrratus*

$$g^2(u,v) \leq g(u,u)\, g(v,v) \tag{4.2}$$

kõikide $u, v \in \mathbb{V}$ korral. Seejuures võrdus kehtib parajasti siis, kui elemendid u ja v on lineaarselt sõltuvad.

Tõestus. Olgu $\mathbb{V}$ reaalne vektorruum skalaarkorrutisega g ning olgu $u, v \in \mathbb{V}$. Siis iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(u+\lambda v, u+\lambda v) = g(u,u) + 2g(u,\lambda v) + g(\lambda v, \lambda v) \\ &= g(u,u) + 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 g(v,v) \leq g(u,u) + 2\lambda |g(u,v)| + \lambda^2 g(v,v)\,. \end{aligned}$$

Saime λ suhtes võrratuse

$$g(v,v)\,\lambda^2 + 2|g(u,v)|\lambda + g(u,u) \geq 0,$$

mille reaalarvuliste lahendite hulk on $\mathbb{R}$. Kui $g(v,v) > 0$, siis on tegu ruutvõrratusega. Seega vastava ruutvõrrandi diskriminant $4|g(u,v)|^2 - 4g(u,u)\,g(v,v) \leq 0$, millest järeldub vahetult võrratus (4.1). Juhul $g(v,v) = 0$ peab kõikide $\lambda \in \mathbb{R}$ korral kehtima $2|g(u,v)|\lambda + g(u,u) \geq 0$, mis on võimalik vaid siis, kui $g(u,v) = 0$. Sellisel juhul on tingimuse (4.1) kehtivus aga ilmne.

Veendume veel, et tingimuses (4.1) kehtib võrdus parajasti siis, kui u ja v on lineaarselt sõltuvad.
Oletame esiteks, et vektorid u ja v on lineaarselt sõltuvad. Siis leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ selliselt, et $u = \alpha v$. Seega

$$\begin{aligned} g^2(u,v) &= g^2(\alpha v, v) = \alpha^2 g^2(v,v) = \alpha^2 g(v,v)\, g(v,v) \\ &= g(\alpha v, \alpha v)\, g(v,v) = g(u,u)\, g(v,v)\,, \end{aligned}$$

nagu tarvis.
Kehtigu nüüd tingimuses (4.1) võrdus. Veendume, et siis u ja v on lineaarselt sõltuvad. Üldistust kitsendamata võime eeldada, et $u \neq 0$ ja $v \neq 0$. Siis ka $g(u,u) \neq 0$ ja $g(v,v) \neq 0$. Paneme tähele, et

$$g^2(u,v) = g(u,u)\, g(v,v)$$

on eelnevat arvestades samaväärne tingimusega

$$\frac{g^2(u,v)\, g(v,v)}{g^2(v,v)} = g(u,u)\,.$$

Tähistades $a := \frac{g(u,v)}{g(v,v)}$, saame, et $a^2 g(v,v) = g(u,u)$ ehk $g(av, av) = g(u,u)$, millest $u = av$.

□