Sisukord

1 Lie algebra

Matemaatika haru, mida me täna tunneme kui *Lie teooriat* kerkis esile geomeetria ja lineaaralgebra uurimisest. Lie teooria üheks keskseks mõisteks on *Lie algebra* - vektorruum, mis on varustatud mitteassotsiatiivse korrutamisega ehk nõndanimetatud *Lie suluga*. Lie algebrad ja nende uurimine on tihedalt seotud teise Lie teooria keskse mõistega, milleks on *Lie rühm*. Viimased on struktuurid, mis on korraga nii algebralised rühmad kui ka topoloogilised muutkonnad, kusjuures rühma korrutamine ja selle pöördtehe on mõlemad pidevad. Osutub, et igale Lie rühmale saab vastavusse seada Lie algebra ja kehtib ka vastupidine, pisut nõrgem tulemus. Nimelt suvalise lõplikumõõtmelise reaalsele või kompleksele Lie algebra jaoks leidub temale üheselt vastav sidus Lie rühm.[4] Just selle viimase, *Lie kolmanda teoreemi* tõttu on võimalik Lie rühmasid vaadelda Lie algebrate kontekstis ja see teebki Lie algebrad äärmiselt oluliseks.

Tähistagu kõikjal järgnevas K nullkarakteristikaga korpust ning V vektorruumi üle korpuse K. Ruumi kokkuhoiu ja mugavuse mõttes kasutame edaspidi vajaduse korral summade tähistamisel Einsteini summeerimiskokkulepet. See tähendab, kui meil on indeksid i ja j, mis omavad väärtusi $1, \ldots, n$, kus $n \in N$, siis jätame vahel summeerimisel summamärgi kirjutamata ning säilitame summeerimise tähistamiseks vaid indeksid. Einsteini summeeruvuskokkulepet arvestades kehtivad näiteks järgmised võrdused:

$$\begin{aligned}
x^i e_i &= \sum_{a=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n, \\
\lambda^i_j x^j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda^i_j x^j = \lambda^i_1 x^1 + \lambda^i_2 x^2 + \cdots + \lambda^i_n x^n, \\
\eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \cdots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \cdots + \eta_{nn} u^n v^n,
\end{aligned}$$

ja nii edasi.

Järgnevas teeme raamatu [3] põhjal põgusa sissejuhatuse klassikalisse Lie teooriasse.

1.1 Maatriksrühmade näiteid

Meenutame, et *lineaarkujutus* $\phi\colon V_1 \to V_2$ vektorruumist V_1 vektorruumi V_2 säilitab vektorite liitmise ja skalaariga korrutamise, see tähendab

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$$

ning

$$\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x),$$

kus $x, y \in V_1$ ja λ on skalaar. Kui vektorruumid V_1 ja V_2 langevad kokku, siis ütleme me kujutuse ϕ kohta ka *lineaarteisendus*.

Algebrast on teada, et lineaarteisendusel eksisteerib pöördteisendus siis ja ainult siis, kui ta on nii üks-ühene kui ka pealeteisendus. Kõigi vektorruumi V pööratavate lineaarteisenduste rühma nimetatakse vektorruumi V *lineaarteisenduste rühmaks*[1] ja tähistatakse $\mathrm{GL}(V)$. Selge, et selle rühma korrutamiseks on tavaline lineaarteisenduste kompositsioon.

Et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisendus on pööratav parajasti siis kui tema determinant on nullist erinev, siis rühma $\mathrm{GL}(V)$ kuuluvad need ja ainult need lineaarteisendused, mille determinant pole null. Kui vaatleme vaid lineaarteisendusi, mille determinant on üks, saame olulise alamrühma $\mathrm{SL}(V)$, mida nimetatakse vektorruumi V *spetsiaalsete lineaarteisenduste rühmaks*.

Et igal vektorruumil leidub baas, siis võime vektorruumi V jaoks fikseerida mingi baasi. Sel juhul saame kõik lineaarteisendused esitada maatriksitena ning nõnda võime edaspidi lineaarteisenduste rühmade asemel rääkida *maatriksrühmadest*. Kui $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ moodustab vektorruumi V baasi ning $\phi\colon V \to V$ on mingi lineaarteisendus, siis talle vastav maatriks selle baasi suhtes on (a^i_j), mis on määratud valemiga

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a^i_j e_i.$$

Selge, et vaadeldes rühmi $\mathrm{GL}(V)$ ja $\mathrm{SL}(V)$ maatriksrühmadena on rühma tehteks juba tavaline maatriksite korrutamine. Ilmselt saab nimetatud maatriksrühmad defineerida suvalise korpuste jaoks, ja nii ka reaal- ning kompleksarvude korral. Sellest lähtuvalt kasutatakse sageli nullist erineva determinandiga $n \times n$ maatriksrühmade tähistuseks $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ või $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ning neid rühmi nimetame vastavalt *reaalsete lineaarteisenduste rühmaks* ja *komplekssete lineaarteisenduste rühmaks*. Analoogiliselt on kasutusel tähistused $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ja $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Rühmal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ on palju tuntud alamrühmi. Klassikaliseks näiteks on $n \times n$ *ortogonaalsete maatriksite rühm* $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, kuhu kuuluvad ortogonaalsed maatriksid, see tähendab sellised maatriksid A, mille korral $A^T = A^{-1}$. Teise näitena võib tuua unitaarsete maatriksite rühma $\mathrm{U}(n)$, mille elementideks on anti-Hermite'i maatriksid A, mis rahuldavad tingimust $A^\dagger = \overline{A}^T = -A$. Edasi on lihtne konstrueerida saadud alamrühmade *spetsiaalsed* variandid. *Spetsiaalsete komplekssete ortogonaalmaatriksite rühm* on

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}),$$

ja *spetsiaalsete unitaarsete maatriksite rühmaks* on

$$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}).$$

[1] Inglise keeles *general linear group*.

1.2 Bilineaarvorm

Definitsioon 1.1. Olgu V vektorruum üle korpuse K. Kujutust $\psi\colon V^2 \to K$ nimetatakse *bilineaarvormiks*, kui iga $x, y, z \in V$ ja skalaaride $\lambda, \mu \in K$ korral

i. $\psi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\psi(x, z) + \mu\psi(y, z)$,

ii. $\psi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\psi(x, y) + \mu\psi(x, z)$.

Kui vetorruumis V on antud baas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, siis saab bilineaarvormi $\psi\colon V^2 \to K$ esitada talle vastava maatriksi $B = (b_{ij})$ abil, kus $b_{ij} = \psi(e_i, e_j)$. Tõepoolest, kui meil on antud vektorid $x = \sum_i \lambda^i e_i$ ja $y = \sum_j \mu^j e_j$, siis kasutades ψ lineaarsust mõlema muutuja järgi võime arvutada

$$\psi(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij}\lambda^i\mu^j.$$

Me ütleme, et bilineaarvorm $\psi\colon V^2 \to K$ on *sümmeetriline* kui iga $x, y \in V$ korral $\psi(x, y) = \psi(y, x)$. Selge, et sümmeetrilise bilineaarvormi maatriksi B korral kehtib võrdus $B = B^T$. Vormi ψ nimetatakse *kaldsümmeetriliseks* kui iga $x, y \in V$ korral kehtib võrdus $\psi(x, y) = -\psi(y, x)$. Lihtne on veenduda, et kaldsümmeetrilise bilineaarvormi korral rahuldab talle vastav maatriks B seost $B^T = -B$.

Näide 1.1. Skalaarkorrutis on bilineaarvorm.

Definitsioon 1.2 (Jälg)**.** Olgu V vektorruum kus on fikseeritud mingi baas, olgu ϕ vektorruumi V lineaarteisendus ning olgu $A = (a^i_j)$ on lineaarteisenduse ϕ maatriks fikseeritud baasi suhtes. Lineaarteisenduse ϕ *jäljeks* nimetatakse kujutust $\mathrm{Tr}_V\colon \mathrm{GL}(V) \to K$, kus

$$\mathrm{Tr}_V(A) = \sum_i a^i_j.$$

Näide 1.2. On hästi teada, et vektorruumi V kõigi lineaarteisenduste hulk $\mathrm{Lin}\, V$ on ise ka vektorruum, kusjuures kui $\dim(V) = n$, siis $\dim(\mathrm{Lin}\, V) = n^2$. Kasutades jälge Tr_V saame defineerida bilineaarvormi vektorruumil $\psi\colon \mathrm{Lin}\, V \times \mathrm{Lin}\, V \to K$ järgmiselt:

$$\psi(A, B) = \mathrm{Tr}_V(AB),$$

kus A ja B on maatriksid, mis vastavad vektorruumi $\mathrm{Lin}\, V$ teisendustele mingi baasi suhtes.

Kasutades bilineaarvormi sümmeetrilisuse või kaldsümmeetrilisuse mõistet saame sisse tuua *ortogonaalsuse*: me ütleme, et vektorid x ja y on bilineaarvormi ψ suhtes ortogonaalsed, kui $\psi(x, y) = 0$. Selge, et ortogonaalsuse tingimus ise on sümmeetriline, see tähendab kui x on ortogonaalne vektoriga y, siis kehtib ka vastupidine, y on ortogonaalne vektoriga x. Kui vektor $x \neq 0$ on iseenesega ortogonaalne, see tähendab $\psi(x, x) = 0$, siis nimetatakse vektorit x *isotroopseks*. Selge, et Eukleidilises geomeetrias selliseid vektoreid ei leidu, kuid üldisemas käsitluses kohtab neid juba üsna madalal tasemel, näiteks *Minkowski ruumis*.

Edasises vaatleme ortogonaaseid ja sümplektilisi rühmi ning selleks nõuame, et vaatluse all olevad bilineaarvormid oleksid mittesingulaarsed ehk regulaarsed, see tähendab kui $\psi(x, y) = 0$ iga $y \in V$ korral, siis järelikult $x = 0$. Osutub, et bilineaarvorm ψ on regulaarne parajasti siis, kui temale vastav maatiks $B = (b^i_j)$ on pööratav, mis tähendab, et $\det B \neq 0$.

Definitsioon 1.3. Me ütleme, et lineaarne operaator ψ on *ortogonaalne* regulaarse sümmeetrilise bilineaarvormi ψ suhtes, kui

$$\psi(\phi(x), \phi(y)) = \psi(x, y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist V.

Kui x on ortogonaalse lineaarse operaatori ϕ tuumast, siis kehtib $\phi(x) = 0$.

2 Indutseeritud n-Lie algebra

See peatükk tugineb artiklile [2]

Edasises eeldame, et kõik vektoruumid on üle vaadeldud üle 0-karakteristikaga korpuse $\mathbb{K}$.

Definitsioon 2.1 (Lie algebra)**.** Vektorruumi A nimetatakse *Lie algebraks*, kui on määratud bilineaarvorm $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$, mis suvaliste $x, y, z \in A$ korral rahuldab tingimusi

- $[x, y] = -[y, x]$,
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

Bilineaarvormi $[\cdot,\cdot]$ Lie algebra definistioonis nimetatakse selle Lie algebra suluks. Edaspidi tähistame konkreetsuse mõttes sageli Lie suluga $[\cdot,\cdot]$ varustatud vektorruumi A paarina $(A, [\cdot,\cdot])$.

Definitsioon 2.2 (n-Lie algebra)**.** Vektorruumi A nimetatakse *n-Lie algebraks*, kui on määratud n-lineaarne kaldsümmeetriline kujutus $[\cdot,\ldots,\cdot] : A^n \times A \to A$, mis suvaliste

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_n \in A$$

korral rahuldab tingimust

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, [y_1, \ldots, y_n]] = \sum_{i=1}^{n} [y_1, \ldots, [x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i], \ldots, y_n].$$

Definitsioon 2.3 (Jälg)**.** Olgu A vektorruum ning olgu $\phi\colon A^n \to A$. Me ütleme, et lineaarkujutus $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ on *ϕ-jälg*, kui suvaliste $x_1, \ldots, x_n \in A$ korral $\tau(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = 0$.

Olgu $\phi\colon A^n \to A$ n-lineaarne ja $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ lineaarne kujutus. Defineerime nende kujutuste abil uue $(n+1)$-lineaarse kujutuse $\phi_\tau\colon A^{n+1} \to A$ valemiga

$$\phi_\tau(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}), \tag{1}$$

kus $\hat{x_i}$ tähistab kõrvalejäätavat elementi, see tähendab $\phi(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$ arvutatakse elementidel $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$.

Rikastame defineeritud kujutust ühe näitega. Võttes $n = 2$ saame valemi 1 põhjal kirjutada

$$\phi_\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1)\phi(x_2, x_3) - \tau(x_2)\phi(x_1, x_3) + \tau(x_3)\phi(x_1, x_2).$$

Edasises toome ära mõningad kujutuse ϕ_τ tähtsamad omadused.

Lemma 2.1. *Olgu A vektorruum ning $\phi\colon A^n \to A$ n-lineaarne kaldsümmeetriline kujutus ja $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ lineaarne. Siis kujutus $\phi_\tau\colon A^{n+1} \to A$ on samuti kaldsümmeetriline. Lisaks, kui τ on ϕ-jälg, siis τ on ka ϕ_τ-jälg.*

Teoreem 2.2. *Olgu (A, ϕ) n-Lie algebra ning olgu τ lineaarkujutuse ϕ-jälg. Siis (A, ϕ_τ) on $(n+1)$-Lie algebra.*

Teoreemis kirjeldatud viisil saadud $(n+1)$-Lie algebrat (A, ϕ_τ) nimetatakse n-Lie algebra (A, ϕ) poolt *indutseeritud* $(n+1)$-Lie algebraks.

Teoreemist 2.2 saame teha olulise järlduse:

Järeldus 2.3. *Olgu $(A, [\cdot,\cdot])$ Lie algebra ning olgu antud $[\cdot,\cdot]$ jälg $\tau\colon A \to \mathbb{K}$. Siis ternaarne sulg $[\cdot,\cdot,\cdot]\colon A^3 \to A$, mis on defineeritud valemiga*

$$[x, y, z] = \tau(x)[y, z] + \tau(y)[z, x] + \tau(z)[x, y],$$

määrab 3-Lie algebra struktuuri A_τ vektorruumil A.

3 n-Lie superalgebra

See peatükk tugineb artiklile [1]

Järgnevas eeldame, et meil on antud supervektorruum ehk supervektorruum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ ning n-lineaarne kujutus $\phi\colon \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

- $|\phi(x_1, \ldots, x_n)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $\phi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\phi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)$,

kus $|x| \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tähistab elemendi x paartust. Samuti eeldame, et $S\colon \mathcal{G} \to \mathbb{K}$ on lineaarne kujutus, mis rahuldab

- $S(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = 0$,
- $S(x) = 0$ iga $x \in \mathcal{G}_{\bar{1}}$.

Selge, et siin sisse toodud kujutused ϕ ja S on eelnevas kirjeldatu analoogid supervektorruumis. Seejuures kujutust $S\colon \mathcal{G} \to \mathbb{K}$ nimetatakse *superjäljeks.*

Kasutades kujutusi ϕ ja S defineerime analoogiliselt vektorruumide situatsioonile, kuid nüüd juba supervektorruumi iseärasusi arvesse võttes, see tähendab paarsusi arvestades, uue kujutuse $\phi_S\colon \mathcal{G}^{n+1} \to G$ valemiga

$$\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}(-1)^{|x_i|\sum_{j=1}^{i-1}|x_j|} S(x_i)\phi(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Saadud kujutuse tähtsamad omadused võtab kokku järgmine oluline lemma:

Lemma 3.1. *$(n+1)$-lineaarne kujutus $\phi_S\colon \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ rahuldab tingimusi*

1. $|\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$,
2. $\phi_S(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\phi_S(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_{n+1})$,
3. $S(\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}))$.

Üldistame nüüd definitsiooni 2.1 supervektorruumi jaoks ning defineerime *n-Lie superalgebra.*

Definitsioon 3.1 (n-Lie superalgebra)**.** Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ supervektorruum. Me ütleme, et $\mathcal{G}$ on *n-Lie superalgebra*, kui $\mathcal{G}$ on varustatud gradueeritud n-Lie suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

1. $|[x_1, \ldots, x_n]| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

2. $[x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} [x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n]$,

3. $[y_1, \ldots, y_{n-1}, [x_1, \ldots, x_n]] =$
$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_x(i-1)\tau_y(n-1)} [x_1, \ldots, x_{i-1}, [y_1, \ldots, y_{n-1}, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n]$,

kus $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ ning $\tau_x(k) = \sum_{j=1}^{k-1} |x_i|$.

Võttes arvesse n-Lie superalgebra definitsiooni saame sõnastada teoreemi 2.2 superanaloogi järgmiselt:

Teoreem 3.2. *Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ n-Lie superalgebra suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, ning V lõplikumõõtmeline vektorruum ja olgu antud $\mathcal{G}$ esitus $\phi \colon \mathcal{G} \to \mathrm{gl}\, V$. Defineerides $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ valemiga*

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=1} n + 1 (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i|\tau_x(i-1)} S(\phi(x_i)) \left[x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}\right],$$

on supervektorruum $\mathcal{G}$, varustatuna suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ $(n + 1)$-Lie superalgebra.

4 Madaladimensionaalsete n-Lie superalgebrate klassifikatsioon

4.1 $(2,1)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud $(2,1)$ 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, e_2, f_1\}$, kus e_1 ja e_2 on paaris- ja f_1 on paaritu baasivektor.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
[e_1, e_1, e_1] &= 0, \\
[e_1, e_1, e_2] &= 0, \\
[e_1, e_1, f_1] &= 0, \\
[e_1, e_2, e_2] &= 0, \\
[e_1, e_2, f_1] &= m_1 \cdot f_1, \\
[e_1, f_1, f_1] &= l_1 \cdot e_1 + l_2 \cdot e_2, \\
[e_2, e_2, e_2] &= 0, \\
[e_2, e_2, f_1] &= 0, \\
[e_2, f_1, f_1] &= l_3 \cdot e_1 + l_4 \cdot e_2, \\
[f_1, f_1, f_1] &= m_2 \cdot f_1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kus $m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $-m_1 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_1 = 0,$

2. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$

3. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$

4. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$

5. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0,$

6. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0,$

7. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$

8. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$

9. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0,$

10. $l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$

11. $m_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0,$

12. $-l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$

13. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$

14. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_1 = 0,$

15. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$

16. $l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_2 = 0,$

17. $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 - l_2 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_2 = 0,$

18. $l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$

19. $l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$

20. $-l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0,$

21. $-l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$

22. $-l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$

23. $-l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$

24. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$

25. $l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 - l_3 \cdot m_2 - l_3 \cdot m_2 = 0,$

26. $l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 - l_4 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_2 = 0,$

27. $m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 = 0,$

28. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 = 0,$

29. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 = 0,$

30. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 = 0,$

31. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 + l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 = 0,$

32. $m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 = 0.$

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_1 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_1 \cdot m_1 = 0$,
5. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
6. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0$,
8. $l_1 \cdot m_2 = 0$,
9. $l_2 \cdot m_2 = 0$,
10. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
11. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
12. $l_4 \cdot m_1 + m1 \cdot m2 = 0$,
13. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
14. $l_3 \cdot m_2 = 0$,
15. $l_4 \cdot m_2 = 0$,
16. $m_1 \cdot m_2 = 0$,
17. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l1 - l_2 \cdot l_3 = 0$,
18. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l2 - l_2 \cdot l_4 = 0$,
19. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l3 - l_3 \cdot l_4 = 0$,
20. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l3 - l_4 \cdot l_4 = 0$,
21. $m_2 \cdot m_2 = 0$.

Sellel võrrandisüsteemil on kolm mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ -\frac{c_1^2}{c_2} \\ -c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (2) saame kommutatsiooniseosed:

- $\begin{cases} [e_1, f_1, f_1] = c_1 e_1 + c_2 e_2, \\ [e_2, f_1, f_1] = -\frac{c_1^2}{c_2} e_1 - c_1 e_2 \end{cases},$
- $[e_1, e_2, f_1] = c f_1$,
- $[e_2, f_1, f_1] = c e_1$.

4.2 $(1, 2)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud $(1, 2)$ 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, f_1, f_2\}$, kus e_1 on paaris- ja f_1, f_2 on paaritud baasivektorid.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_1, e_1] = 0,\\
&[e_1, e_1, f_1] = 0,\\
&[e_1, e_1, f_2] = 0,\\
&[e_1, f_1, f_1] = l_1 \cdot e_1,\\
&[e_1, f_1, f_2] = l_2 \cdot e_1,\\
&[e_1, f_2, f_2] = l_3 \cdot e_1,\\
&[f_1, f_1, f_1] = m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2,\\
&[f_1, f_1, f_2] = m_3 \cdot f_1 + m_4 \cdot f_2,\\
&[f_1, f_2, f_2] = m_5 \cdot f_1 + m_6 \cdot f_2,\\
&[f_2, f_2, f_2] = m_7 \cdot f_1 + m_8 \cdot f_2,
\end{aligned} \tag{3}
$$

kus $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 = 0,$
2. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
3. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
4. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
5. $l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
6. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_7 - l_2 \cdot m_8 = 0,$
7. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 = 0,$
8. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 = 0,$
9. $l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 = 0,$
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 + l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 = 0,$
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 = 0,$
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 = 0,$

14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0$,

15. $m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0$,

16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0$,

17. $m_1 \cdot m_5 + m_2 \cdot m_7 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0$,

18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0$,

19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_3 = 0$,

20. $m_2 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0$,

21. $m_1 \cdot m_3 + m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0$,

22. $m_3 \cdot m_4 + m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0$,

23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0$,

24. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - m_4 \cdot m_8 = 0$,

25. $m_3 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0$,

26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 = 0$,

27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0$,

28. $m_2 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0$,

29. $m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_2 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 = 0$,

30. $m_4 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 = 0$,

31. $m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 = 0$,

32. $m_5 \cdot m_6 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 = 0$,

33. $m_5 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 = 0$,

34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0$,

35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 = 0$,

36. $m_2 \cdot m_7 + m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 = 0$,

37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 = 0$,

38. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 = 0,$

39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 = 0,$

40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 = 0,$

41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 = 0.$

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 = 0,$
2. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0,$
3. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0,$
4. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0,$
5. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 + l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0,$
6. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 + l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 = 0,$
7. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 = 0,$
8. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 = 0,$
9. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 = 0,$
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 = 0,$
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 = 0,$
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 = 0,$
14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - 3 \cdot m_2 \cdot m_3 - 3 \cdot m_4 \cdot m_4 = 0,$
15. $m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_3 \cdot m_4 - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 = 0,$
16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - 3 \cdot m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_6 = 0,$
17. $m_2 \cdot m_7 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_1 \cdot m_5 = 0,$
18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_3 = 0,$

20. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 = 0$,

21. $m_2 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_3 = 0$,

22. $m_3 \cdot m_4 + 2 \cdot m_4 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_5 = 0$,

23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 = 0$,

24. $m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 - 2 \cdot m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 = 0$,

25. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0$,

26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 = 0$,

27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 = 0$,

28. $m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - 2 \cdot m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0$,

29. $m_3 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_3 \cdot m_3 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 = 0$,

30. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 + m_6 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_5 = 0$,

31. $m_4 \cdot m_7 + 2 \cdot m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 = 0$,

32. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 = 0$,

33. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 = 0$,

34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 = 0$,

35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 = 0$,

36. $m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_4 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 = 0$,

37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_7 = 0$,

38. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_6 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_6 = 0$,

39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_5 - 3 \cdot m_6 \cdot m_7 = 0$,

40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 = 0$,

41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 = 0$.

Sellel võrrandisüsteemil on neli mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \frac{c_1^2}{c_2} \\ -c_2 \\ c_1 \\ -\frac{c_2^2}{c_1} \\ c_2 \\ -\frac{c_2^3}{c_1^2} \\ \frac{c_2^2}{c_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (3) saame kommutatsiooniseosed:

- $\begin{cases} [f_1, f_1, f_1] = -c_1 \cdot f_1 + \frac{c_1^2}{c_2} \cdot f_2, \\ [f_1, f_1, f_2] = -c_2 \cdot f_1 + c_1 \cdot f_2, \\ [f_1, f_2, f_2] = -\frac{c_2^2}{c_1} \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2, \\ [f_2, f_2, f_2] = -\frac{c_2^3}{c_1^2} \cdot f_1 + \frac{c_2^2}{c_1} \cdot f_2, \end{cases}$,
- $[f_2, f_2, f_2] = c \cdot f_1,$
- $[f_1, f_1, f_1] = c \cdot f_2,$
- $[e_1, f_1, f_2] = c \cdot e_1.$

Viited

[1] Viktor Abramov. Super 3-Lie Algebras Induced by Super Lie Algebras. 2014.

[2] Joakim Arnlind, Abdennour Kitouni, Abdenacer Makhlouf, and Sergei Silvestrov. Structure and cohomology of 3-lie algebras induced by lie algebras. 85:123–144, 2014.

[3] Johan G. F. Belinfante and Bernard Kolman. *A Survey of Lie Groups and Lie Algebra with Applications and Computational Methods*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.

[4] A. Kirillov. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.