

Sisukord

1	Sissejuhatus	2
2	Lie algebra	3
2.1	Maatrigrühmad ja bilineaarvorm	3
2.2	Eksponentsiaalkujutus	6
2.3	Lie algebra definitsioon	8
2.4	Struktuurikonstandid	10
2.5	Esitused	13
2.6	Algebralised struktuurid	15
3	n-Lie algebra	17
3.1	n -Lie algebra definitsioon	17
3.2	Indutseeritud n -Lie algebra	19
3.3	Nambu mehaanika. Nambu-Poissoni sulg	22
4	n-Lie superalgebra	28
4.1	Lie superalgebra	28
4.2	n -Lie superalgebra	32
4.3	Indutseeritud n -Lie superalgebra	38
5	3-Lie superalgebrate klassifikatsioon	44
5.1	$(2, 1)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon	44
5.2	$(1, 2)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon	46

1 Sissejuhatus

Matemaatika haru, mida me täna tunneme kui *Lie teooriat* kerkis esile geomeetria ja lineaaralgebra uurimisest. Lie teooria üheks keskseks mõisteks on *Lie algebra* - vektorruum, mis on varustatud mitteassotsiatiivse korrutamisega ehk nõndanimetatud *Lie suluga*. Lie algebrad ja nende uurimine on tihedalt seotud teise Lie teooria keskse mõistega, milleks on *Lie rühm*. Viimased on struktuurid, mis on korraga nii algebralised rühmad kui ka topoloogilised muutkonnad, kusjuures rühma korrutamine ja selle pöördtehe on mõlemad pidevad. Osutub, et igale Lie rühmale saab vastavusse seada Lie algebra, kuid üldjuhul kahjuks vastupidine väide ei kehti. Samas on võimalik näidata pisut nõrgem tulemus: suvalise lõplikumõõtmealise reaalsele või komplekssele Lie algebra jaoks leidub temale üheselt vastav sidus Lie rühm.[10] Just selle viimase, nõndanimetatud *Lie kolmanda teoreemi* tõttu on võimalik Lie rühmasid vaadelda Lie algebrate kontekstis ja see teebki Lie algebrad äärmiselt oluliseks.

Tähistagu kõikjal järgnevas K nullkarakteristikaga korpust ning \mathcal{V} vektorruumi üle korpuse K . Ruumi kokkuhoiu ja mugavuse mõttes kasutame edaspidi vajaduse korral summade tähistamisel Einsteini summeerimiskokkulepet. Teisi sõnu, kui meil on indeksid i ja j , mis omavad väärtusi $1, \dots, n$, kus $n \in \mathbb{N}$, siis jätame vahel summeerimisel summanärgi kirjutamata ning säilitame summeerimise tähistamiseks vaid indeksid. Einsteini summeeruvuskokkulepet arvestades kehtivad näiteks järgmised võrdused:

$$\begin{aligned}x^i e_i &= \sum_{a=1}^n x^a e_a = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n, \\ \lambda_j^i x^j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^i x^j = \lambda_1^i x^1 + \lambda_2^i x^2 + \dots + \lambda_n^i x^n, \\ \eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \dots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \dots + \eta_{nn} u^n v^n,\end{aligned}$$

ja nii edasi.

Järgnevas anname minimaalse ülevaate klassikalisest Lie algebrate teooriast, mida on tarvis edasiste peatükkide mõistmiseks.

2 Lie algebra

2.1 Maatriksrühmad ja bilineaarvorm

Meenutame, et *lineaarkujutus* $\phi: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ vektorruumist \mathcal{V}_1 vektorruumi \mathcal{V}_2 säilitab vektorite liitmise ja skalaariga korrutamise, see tähendab

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \text{ja} \quad \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x),$$

kus $x, y \in \mathcal{V}_1$ ning λ on skalaar. Kui vektorruumid \mathcal{V}_1 ja \mathcal{V}_2 langevad kokku, siis ütleme me kujutuse ϕ kohta *lineaarteisendus*.

Algebrast on teada, et lineaarteisendusel eksisteerib pöördteisendus siis ja ainult siis, kui ta on nii üks-ühene kui ka pealetisendus. Kõigi vektorruumi \mathcal{V} pööratavate lineaarteisenduste rühma nimetatakse vektorruumi \mathcal{V} *pööratavate lineaarteisenduste rühmaks*¹ ja tähistatakse $GL(\mathcal{V})$. Selge, et selle rühma korrutamiseks on tavaline lineaarteisenduste kompositsioon.

Et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisendus on pööratav parajasti siis kui tema determinant on nullist erinev, siis rühma $GL(\mathcal{V})$ kuuluvad need ja ainult need lineaarteisendused, mille determinant pole null. Kui vaatleme vaid lineaarteisendusi, mille determinant on üks, saame olulise alamrühma $SL(\mathcal{V})$, mida nimetatakse vektorruumi \mathcal{V} *spetsiaalsete lineaarteisenduste rühmaks*.

Et igal vektorruumil leidub baas, siis võime vektorruumi \mathcal{V} jaoks fikseerida mingi baasi. Sel juhul saame kõik lineaarteisendused esitada maatriksitena ning nõnda võime edaspidi lineaarteisenduste rühmade asemel rääkida *maatriksrühmadest*. Kui $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ moodustab vektorruumi \mathcal{V} baasi ning $\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ on mingi lineaarteisendus, siis talle vastav maatriks selle baasi suhtes on (a_j^i) , mis on määratud valemiga

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i.$$

Selge, et vaadeldes rühmi $GL(\mathcal{V})$ ja $SL(\mathcal{V})$ maatriksrühmadena on rühma tehteks juba tavaline maatriksite korrutamine. Ilmselt saab nimetatud maatriksrühmad defineerida suvalise korpuste jaoks, ja nii ka reaali- ning kompleksarvude korral. Sellest lähtuvalt kasutatakse sageli nullist erineva determinandiga $n \times n$ maatriksrühmade tähistuseks $GL(n, \mathbb{R})$ või $GL(n, \mathbb{C})$, ning neid rühmi nimetame vastavalt *reaalsete pööratavate lineaarteisenduste rühmaks* ja *komplekssete pööratavate lineaarteisenduste rühmaks*. Analooiliselt on kasutusel tähistused $SL(n, \mathbb{R})$ ja $SL(n, \mathbb{C})$.

¹Inglise keeles *general linear group*.

Rühmal $GL(n, \mathbb{C})$ on palju tuntud alamrühmi. Klassikaliseks näiteks on $n \times n$ ortogonaalsete maatriksite rühm $O(n, \mathbb{C})$, kuhu kuuluvad ortogonaalsed maatriksid, see tähendab sellised maatriksid A , mille korral $A^T = A^{-1}$. Teise näitena võib tuua unitaarsete maatriksite rühma $U(n)$, mille elementideks on anti-Hermite'i maatriksid A , mis rahuldavad tingimust $A^\dagger = \overline{A}^T = -A$. Edasi on lihtne konstrueerida saadud alamrühmade spetsiaalsed variandid. Spetsiaalsete komplekssete ortogonaalmaatriksite rühm on

$$SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C}),$$

ja spetsiaalsete unitaarsete maatriksite rühmaks on

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}).$$

Definitsioon 2.1. Olgu \mathcal{V} vektorruum üle korpuse K . Kujutust $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ nimetatakse bilineaarvormiks, kui iga $x, y, z \in \mathcal{V}$ ja skalaaride $\lambda, \mu \in K$ korral

- i. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$,
- ii. $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z)$.

Kui vektorruumis \mathcal{V} on antud baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, siis saab bilineaarvormi $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ esitada talle vastava maatriksi $B = (b_{ij})$ abil, kus $b_{ij} = (e_i, e_j)$. Tõepoolest, kui meil on antud vektorid $x = \lambda^i e_i$ ja $y = \mu^j e_j$, siis kasutades (\cdot, \cdot) lineaarsust mõlema muutuja järgi võime arvutada

$$(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} \lambda^i \mu^j.$$

Me ütleme, et bilineaarvorm $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ on sümmeetriline kui iga $x, y \in \mathcal{V}$ korral $(x, y) = (y, x)$. Selge, et sümmeetrilise bilineaarvormi maatriksi B korral kehtib võrdus $B = B^T$. Vormi (\cdot, \cdot) nimetatakse kaldsümmeetriliseks kui iga $x, y \in \mathcal{V}$ korral kehtib võrdus $(x, y) = -(y, x)$. Lihtne on veenduda, et kaldsümmeetrilise bilineaarvormi korral rahuldab talle vastav maatriks B seost $B^T = -B$.

Definitsioon 2.2. Olgu \mathcal{V} vektorruum kus on fikseeritud mingi baas, olgu ϕ vektorruumi \mathcal{V} lineaarteisendus ning olgu $A = (a_j^i)$ on lineaarteisenduse ϕ maatriks fikseeritud baasi suhtes. Lineaarteisenduse ϕ jäljeks nimetatakse kujutust $\text{Tr}_{\mathcal{V}} : GL(\mathcal{V}) \rightarrow K$, kus

$$\text{Tr}_{\mathcal{V}}(A) = \sum_i a_i^i.$$

Juhul kui maatriksi A korral $\text{Tr}_{\mathcal{V}} A = 0$, siis ütleme, et maatriks A on jäljeta.

Näide 2.1. On hästi teada, et vektorruumi \mathcal{V} kõigi lineaarteisenduste ehk endomorfismide hulk $\text{End } \mathcal{V}$ on ise ka vektorruum, kusjuures kui vektorruumi \mathcal{V} dimensioon on $\dim(\mathcal{V}) = n$, siis ruumi $\text{End } \mathcal{V}$ dimensioon on $\dim(\text{End } \mathcal{V}) = n^2$. Kasutades jälge $\text{Tr}_{\mathcal{V}}$ saame defineerida bilineaarvormi $(\cdot, \cdot) : \text{End } \mathcal{V} \times \text{End } \mathcal{V} \rightarrow K$ järgmiselt:

$$(A, B) = \text{Tr}_{\mathcal{V}}(AB),$$

kus A ja B on maatriksid, mis vastavad vektorruumi $\text{End } \mathcal{V}$ teisendustele mingi baasi suhtes. Selge, et selliselt defineeritud bilineaarvorm sümmeetriline.

Kasutades bilineaarvormi sümmeetrilisuse või kaldsümmeetrilisuse mõistet saame sisse tuua *ortogonaalsuse* mõiste. Me ütleme, et vektorid x ja y on bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes ortogonaalsed, kui $(x, y) = 0$. Selge, et ortogonaalsuse tingimus ise on sümmeetriline, see tähendab kui x on ortogonaalne vektoriga y , siis kehtib ka vastupidine, y on ortogonaalne vektoriga x . Kui vektor $x \neq 0$ on iseenesega ortogonaalne, see tähendab $(x, x) = 0$, siis nimetatakse vektorit x *isotroopseks*. Selge, et Eukleidilises geomeetrias selliseid vektoreid ei leidu, kuid üldisemates situatsioonides esinevad nad küllaltki sageli, näiteks *Minkowski aegruumis*.

Edasises vaatleme ortogonaalseid ja sümplektilisi rühmi ning selleks nõuame, et vaatluse all olevad bilineaarvormid oleksid mittesingulaarsed ehk regulaarsed, see tähendab kui $(x, y) = 0$ iga $y \in \mathcal{V}$ korral, siis järelikult $x = 0$. Osutub, et bilineaarvorm (\cdot, \cdot) on regulaarne parajasti siis, kui temale vastav maatriks $B = (b_j^i)$ on pööratav, mis tähendab, et $\det B \neq 0$.

Definitsioon 2.3. Me ütleme, et lineaarne operaator ϕ on *ortogonaalne* regulaarse sümmeetrilise bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes, kui

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist \mathcal{V} .

Kui x on ortogonaalse lineaarse operaatori ϕ tuumast, siis kehtib $\phi(x) = 0$. Viimane aga tähendab, et iga $y \in \mathcal{V}$ korral $(x, y) = (\phi(x), \phi(y)) = (0, \phi(y)) = 0$. Kokkuvõttes, et (\cdot, \cdot) on regulaarne, siis järelikult $x = 0$ ja ϕ on üks-ühene. Kui nüüd veel \mathcal{V} on lõplikumõõtmeline, siis peab ϕ olema pööratav. Seda arutelu silmas pidades võime öelda, et ortogonaalsed lineaarsed operaatorid moodustavad rühma, mida me nimetame *ortogonaalsete lineaarteisenduste rühmaks* bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes. Võttes tarvitusele vektorruumi \mathcal{V} baasi saame konstrueerida ka *ortogonaalsete maatriksite rühma*, mida tähistatakse komplekssel juhul kui $O(n, \mathbb{C})$, kus $n \in \mathbb{N}$ märgib, et tegu on $n \times n$ maatriksitega.

Sümplektiliste teisenduste tarvis tuleb vaadelda kaldsümmeetrilisi bilineaarvorme.

Definitsioon 2.4. Me ütleme, et lineaarne operaator ϕ on *sümplektiline* regulaarse kaldisümmeetrilise bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes, kui

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist \mathcal{V} .

Märgime, et sümplektilised lineaarteisendused leiduvad ainult sellistes vektorruumides, mille dimensioon on paarisarvuline, see tähendab $\dim \mathcal{V} = 2n$, kus $n \in \mathbb{N}$. Sümplektilised teisendused moodustavad *sümplektiliste rühma*, mida tähistatakse kompleksel juhul $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$. Reaalsete sümplektiliste teisenduste rühma saame kui vaatleme ühisosa rühmaga $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}).$$

2.2 Eksponentsiaalkujutus

Kõikide seni käsitluse all olnud maatriksrühmade esindajad peavad vastavatesse rühmadesse kuulumiseks rahuldama mingeid algebralisi tingimusi. Need tingimused võib kirja panna maatriksite elementide kaudu, mille tulemusel saaame me mittelineaarseid võrrandeid, mis määravad rühma kuulumise. Osutub, et need tingimused on võimalik asendada mingi hulga ekvivalentsete lineaarsete võrranditega ja selline üleminek mittelineaarselt süsteemilt lineaarsele ongi võtmetähtsusega idee üleminekul Lie rühmadest Lie algebratele.[4]

Klassikaliseks viisiks kuidas sellist üleminekut realiseeritakse on *eksponentsiaalkujutuse* kasutuselevõtt. Nagu nimigi viitab, on tegu analüüsist tuttava kujutuse üldistusega. Et meil oli siiani tegemist vaid maatriksrühmadega, siis läheme siin ka edasi vaid eksponentsiaalkujutuse ühe tähtsa erijuhuga, *maatriksekspponentsiaaliga*, kuid olgu öeldud, et järgnevad väited kehtivad tegelikult ka üldisemas seades, nagu võib näha raamatus [10].

Olgu A mingi $n \times n$ maatriks, $k \in \mathbb{N}$ ning olgu I ühikmaatriksit. Tähistame $A^0 = I$ ning $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ korda}}$.

Definitsioon 2.5. Olgu X reaalne või kompleksne $n \times n$ maatriks. Maatriksi X *eksponendiks*, mida tähistatakse e^X või $\exp X$, nimetatakse astmerida

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \quad (2.1)$$

Ilmselt tuleks definitsiooni korrektsuses veendumaks näidata, et suvalise maatriksi X korral rida (2.1) koondub. Selleks meenutame, et $n \times n$ maatriksi $X = (X_{ij})$

normi arvutatakse valemi

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

järgi. Arvestades, et $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$, siis $\|X^k\| \leq \|X\|^k$. Rakendades nüüd normi (2.2) rea (2.1) liikmetele saame

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = e^{\|X\|} < \infty,$$

mis tähendab, et rida (2.1) koondub absoluutselt ja seega ta ka koondub. Märkamaks, et e^X on pidev funktsioon märgime esiteks, et X^k on argumendi X suhtes pidev funktsioon ja seega on rea (2.1) osasummad pidevad. Teisalt paneme tähele, et (2.1) koondub ühtlaselt hulkadel, mis on kujul $\{\|X\| \leq R\}$, ja seega on rida kokkuvõttes pidev.

Seega on maatrikseksponentsiaal korrektselt defineeritud ning ka pidev. Järgmises lauses on toodud rida eksponentsiaalkujutuse põhilisi omadusi, mille võrdlemisi lihtsad tõestused võib huvi korral võib leida näiteks raamatust [7].

Lause 2.1. *Olgu X ja Y suvalised $n \times n$ maatriksid. Siis kehtivad järgmised väited:*

- 1) $e^0 = I$,
- 2) $(e^X)^T = e^{X^T}$,
- 3) e^X on pööratav ning kehtib $(e^X)^{-1} = e^{X^{-1}}$,
- 4) $e^{(\lambda+\mu)X} = e^{\lambda X} e^{\mu X}$ suvaliste $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ korral,
- 5) kui $XY = YX$, siis $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$,
- 6) kui C on pööratav, siis $e^{CXC^{-1}} = C e^X C^{-1}$,
- 7) $\det e^X = e^{\text{Tr } X}$.

Ostutub, et rühma $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ühikelemendi mingis ümbruses on võimalik suvaline maatriks esitada kujul e^A , kus A on mingi $n \times n$ maatriks. Rühma $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ korral on maatriks A reaalne. Oluline on tähele panna, et vaadeldes rühma $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, ei ole eksponentfunktsiooni kujutis terve rühm. Selles veenumiseks piisab võtta $n = 1$ ning näha, et $\exp(\text{GL}(1, \mathbb{R})) = \mathbb{R}^+$, ehk kujutiseks on reaaltelje positiivne osa, samas kui $\text{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ehk reaaltelg ilma nullpunktita.

Niisiis eksponentkujutust kasutades on oht kaotada rühma globaalne struktuur, samas kui lokaalne struktuur säilib.

Et maatriksi A korral kuuluks maatriks e^A mõnda punktis 2.1. Maatriksrühmad ja bilineaarvorm nimetatud rühma tuleb maatriksile A seada mingid lineaarsed kitsendused. Näiteks spetsiaalse lineaarse rühma $SL(n)$ korral võime mittelineaarse tingimuse e^A determinandi kohta asendada lineaarse tingimusega maatriksi A jälje kohta kasutades lause 2.1 punkti 7). Nii on näiteks $\det e^A = 1$ parajasti siis, kui $\text{Tr}_{\mathcal{V}} A = 0$.

Kokkuvõttes nägime, et eksponentsiaalkujutuse abil on võimalik asendada klassikalised maatriksrühmad maatrikshulkadega, millele on seatud teatud lineaarsed kitsendused. Selge, et need hulgad on kinnised lineaarkombinatsioonide suhtes ja nii võib neid vaadelda kui vektorruume. Tavalise maatriksite korrutamise osas kahjuks kinnisus säilida ei pruugi. Samas kui meil on $n \times n$ maatriksid A ja B , mis on vastavalt kas kaldsümmeetrilised, rahuldavad anti-Hermite'i tingimust või neil puudub jälg, siis maatriksil $C = AB - BA$ on samuti selline omadus. Niisiis saadud maatrikshulgad ei moodusta ainuüksi vektorruumi, vaid on kinnised ka teatud binaarse tehte suhtes.

2.3 Lie algebra definitsioon

Enne kui Lie algebra definitsiooni anname tuletame meelde, et *algebraks* üle korpuse K nimetatakse vektorruumi \mathcal{V} üle korpuse K , millel on defineeritud bilineaarne korrutamine $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Kui algebra tehe rahuldab assotsiatiivsuse tingimust, siis nimetatakse seda algebrat assotsiatiivseks, ning vastasel korral mitteassotsiatiivseks. Nii on näiteks vektorruumi \mathcal{V} lineaarteisenduste vektorruum $\text{End } \mathcal{V}$ assotsiatiivne algebra, mille tehteks on teisenduste kompositsioon: $f \circ g$. Samas võime vektorruumi $\text{End } \mathcal{V}$ varustada ka teistsuguse korrutamisega ning saada uue algebralise struktuuri, kui võtame tehteks näiteks $f \circ g - g \circ f$. Üldiselt selline korrutamine aga enam kommutatiivne ei ole.

Definitsioon 2.6 (Lie algebra). Algebrat \mathfrak{g} üle korpuse K nimetatakse *Lie algebraks*, kui tema korrutamine $[\cdot, \cdot]: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ rahuldab kõikide $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tingimusi

$$[x, x] = 0, \quad (2.3)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (2.4)$$

Me ütleme definitsioonis toodud korrutise $[x, y]$ kohta elementide x ja y *Lie sulg*, ning bilineaarvormi $[\cdot, \cdot]$ kohta öeldakse ka *kommutaator*. Definitsioonis toodud samasust (2.4) nimetatakse *Jacobi samasuseks*. Sageli on otstarbekas tähistada Lie algebrat \mathfrak{g} paarina $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$.

Märkus 2.1. Paljudes käsitlustes antakse Lie algebrale veidi üldisem definitsioon, kui algebrat \mathfrak{g} ei vaaldeda mitte vektorruumina üle korpuse, vaid moodulina üle ringi, nagu seda on tehtud näiteks viites [5].

Piltlikult öeldes mõõdab kommutaator algebra elementide mittekommuteeruvust ja seda asjaolu kirjeldavat võrdust (2.3) võime kirjutada ka kujul

$$[x, y] = -[y, x]. \quad (2.5)$$

Tõepoolest, (2.3) järgi kehtib $[x + y, x + y] = 0$, millest saame bilineaarsuse abil $[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$, ehk kehtibki $[x, y] = -[y, x]$.

Kommutatiivsuse abil on loomulik defineerida *Abeli Lie algebra* ehk kommutatiivne Lie algebra.

Definitsioon 2.7. Me ütleme, et Lie algebra \mathfrak{g} on *Abeli Lie algebra*, kui iga $x, y \in \mathfrak{g}$ korral $[x, y] = 0$.

Rakendades võrdust (2.5) saame Jacobi samasuse kirjutada kui

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]. \quad (2.6)$$

Näide 2.2. Olgu \mathcal{A} algebra, millel on assotsiatiivne korrutustehe $\star: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Defineerides kommutaatori valemiga

$$[x, y] = x \star y - y \star x, \quad x, y \in \mathcal{A}, \quad (2.7)$$

saame algebrast \mathcal{A} moodustada Lie algebra \mathcal{A}_L . Valemist (2.7) järeldub vahetult, et Lie algebra definitsiooni nõue (2.3) kehtib. Jacobi samasuse kehvivuseks märgime, et

$$\begin{aligned} & [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \\ & = [x, y \star z - z \star y] + [y, z \star x - x \star z] + [z, x \star y - y \star x] = \\ & = [x, y \star z] - [x, z \star y] + [y, z \star x] - [x, x \star z] + [z, x \star y] - [z, y \star x] = \\ & = x \star y \star z - y \star z \star x - x \star z \star y + z \star y \star x + y \star z \star x - z \star x \star y - \\ & \quad y \star x \star z + x \star z \star y + z \star x \star y - x \star y \star z - z \star y \star x + y \star x \star z = 0, \end{aligned}$$

kus $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Niisiis suvalisest assotsiatiivsest algebrast on võimalik konstrueerida Lie algebra. Arvestades, et maatriksite ja lineaarteisenduste korrutamine rahuldavad assotsiatiivsuse tingimust, on näites 2.2 esitatud eeskirja abil võimalik kõiki punktis 2.1 toodud rühmi võimalik vaadelda kui Lie algebraid. Märgime, et Lie algebrate tähistamiseks kasutatakse tavaliselt väikeseid gooti tähti, seega näiteks pööratavate lineaarteisenduste rühmale $GL(n)$ vastavaks Lie algebraks on $\mathfrak{gl}(n)$.

Seni oleme me vaadelnud ainult selliseid Lie algebraid, kus kommutaator on antud kujul $[x, y] = xy - yx$. Rõhutame, et tegelikult on Lie algebra suvaline vektorruum, kus on anutd bilineaarne kaldsümmeetriline korrutamine, mis rahuldab Jacobi samasust. Enamgi veel, kirjutus $xy - yx$ ei oma üldises situatsioonis üldse mõtet, kuna vektorruumil \mathfrak{g} ei pruugi olla defineeritud korrutamise operatsiooni. Seda asjaolu sobib hästi ilmsetama järgminenäide.

Näide 2.3. Olgu $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ ning defineerime Lie sulu kui vektorkorrutise

$$[x, y] = x \times y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right), \quad (2.8)$$

kus $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathfrak{g}$. Selge, et sedasi defineeritud kommutaator on bilineaarne ning kaldsümmeetriline. Kehtib ka Jacobi samasus. Selleks märgime valemi (2.8) põhjal, et

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= (x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3, \\ &\quad x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1, \\ &\quad x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_2z_3), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} [[x, y], z] &= (x_3y_1z_3 - x_1y_3z_3 - x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2, \\ &\quad x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 - x_2y_3z_3 + x_3y_2z_3, \\ &\quad x_2y_3z_2 - x_3y_2z_2 - x_3y_1z_1 + x_1y_3z_1), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} [y, [x, z]] &= (x_1y_2z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_1y_3z_3, \\ &\quad x_2y_3z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_2y_1z_1, \\ &\quad x_3y_1z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_3y_2z_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Liites valemite (2.10) ja (2.11) paremad pooled, saame täpselt valemi (2.9), mis samasuse (2.6) põhjal ongi täpselt Jacobi samasus.

2.4 Struktuurikonstandid

Eeldame, et järgnevas on meil antud lõplikumõõtmeline Lie algebra \mathfrak{g} , üle korpusse K , mille vektorruumil on fikseeritud baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Siinjuures tuletame meelde, et Lie algebra aluseks oleva vektorruumi baasi elemente nimetatakse sageli selle Lie algebra *generaatoriteks*. Et Lie sulg $[\cdot, \cdot]$ on bilineaarne vorm, siis tema väärtused Lie algebral \mathfrak{g} on täielikult määratud, kui me teame millega võrduvad $[e_\alpha, e_\beta]$, kus $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tõepoolest, suvalise vektori võime esitada baasivektorite e_1, e_2, \dots, e_n lineaarkombinatsioonina ja kõikide vektorite $x, y \in \mathfrak{g}$ korral leiduvad $a^\alpha, b^\beta \in K$ nii, et $x = a^\alpha e_\alpha$ ja $y = b^\beta e_\beta$, kus $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$. Niisiis saame $[x, y]$ välja arvutada järgmiselt:

$$[x, y] = [a^\alpha e_\alpha, b^\beta e_\beta] = a^\alpha b^\beta [e_\alpha, e_\beta].$$

Iga $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral võime omakorda ka vektori $[e_\alpha, e_\beta]$ avaldata lineaarkombinatsioonina baasivektoritest kujul

$$[e_\alpha, e_\beta] = K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda,$$

ja seega jääb meile $[x, y]$ arvutamiseks lõpuks võrdus

$$[x, y] = a^\alpha b^\beta K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda.$$

Definitsioon 2.8. Olgu \mathfrak{g} lõplikumõõtmeline Lie algebra ning $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ selle Lie algebra vektorruumi baas. Tähistades

$$[e_\alpha, e_\beta] = K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\},$$

siis arve $K_{\alpha\beta}^\lambda$ nimetatakse Lie algebra \mathfrak{g} *struktuurikonstantideks*.

Kasutades kommutaatori $[\cdot, \cdot]$ kaldsümmeetrilisust saame struktuurikonstantide kohta valemi

$$K_{\alpha\beta}^\lambda = -K_{\beta\alpha}^\lambda. \quad (2.12)$$

Jacobi samasuse abil saame veel teisegi tingimuse, mida struktuurikonstandid rahuldama peavad.

$$\begin{aligned} [e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] + [e_\beta, [e_\gamma, e_\alpha]] + [e_\gamma, [e_\alpha, e_\beta]] &= 0, \\ [e_\alpha, K_{\beta\gamma}^\lambda e_\lambda] + [e_\beta, K_{\gamma\alpha}^\lambda e_\lambda] + [e_\gamma, K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda] &= 0, \\ K_{\beta\gamma}^\lambda [e_\alpha, e_\lambda] + K_{\gamma\alpha}^\lambda [e_\beta, e_\lambda] + K_{\alpha\beta}^\lambda [e_\gamma, e_\lambda] &= 0, \\ K_{\beta\gamma}^\lambda K_{\alpha\lambda}^\mu e_\mu + K_{\gamma\alpha}^\lambda K_{\beta\lambda}^\mu e_\mu + K_{\alpha\beta}^\lambda K_{\gamma\lambda}^\mu e_\mu &= 0, \\ K_{\beta\gamma}^\lambda K_{\alpha\lambda}^\mu + K_{\gamma\alpha}^\lambda K_{\beta\lambda}^\mu + K_{\alpha\beta}^\lambda K_{\gamma\lambda}^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Näide 2.4. Vaatleme eespool näiteks toodud spetsiaalsete unitaarsete maatrikside rühma $SU(n)$ erijuhul $n = 2$. Rühmale $SU(2)$ vastab Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$, mille element $x \in \mathfrak{su}(2)$ rahuldab tingimusi

$$\text{Tr } x = 0, \quad (2.13)$$

$$x^\dagger + x = 0. \quad (2.14)$$

Tingimuste (2.13) ja (2.14) põhjal on võimalik näidata, et Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ generaatoriteks on maatriksid

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

nagu võib näha bakalaureusetöös [11].

Arvutame Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ generaatoritel Lie sulu väärtused ja leiame seeläbi struktuurikonstandid. Ilmselt kõik suvalise $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ korral $[\rho_\alpha, \rho_\alpha] = 0$. Arvestades veel omadust (2.12) on meile huvi pakkuvad kommutaatorid on vaid kujul $[\rho_\alpha, \rho_\beta]$, kus $\alpha < \beta$.

$$[\rho_1, \rho_2] = \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = -2\rho_3, \quad (2.15)$$

$$[\rho_1, \rho_3] = \rho_1\rho_3 - \rho_3\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2\rho_2, \quad (2.16)$$

$$[\rho_2, \rho_3] = \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -2\rho_1. \quad (2.17)$$

Seega võrduste (2.15), (2.16) ja (2.17) põhjal on antud baasi suhtes nullist erinevad struktuurikonstandid

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $K_{12}^3 = -2$, | 3. $K_{13}^2 = 2$, | 5. $K_{23}^1 = -2$, |
| 2. $K_{21}^3 = 2$, | 4. $K_{31}^2 = -2$, | 6. $K_{32}^1 = 2$. |

Valides näiteks $x = \begin{pmatrix} 3i & 7+i \\ -7+i & -3i \end{pmatrix}$ ja $y = \begin{pmatrix} i & 5+2i \\ -5+2i & -i \end{pmatrix}$, siis ilmselt $x, y \in \mathfrak{su}(2)$, ja saame arvutada Lie sulu $[x, y]$. Nüüd ühelt poolt vahetu arvutuse tulemusena

$$\begin{aligned} [x, y] &= xy - yx = \begin{pmatrix} -40+9i & -5+8i \\ 5+8i & -40-9i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40-9i & 5-8i \\ -5-8i & -40+9i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 18i & -10+16i \\ 10+16i & -18i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kuid teisalt $x = \rho_1 + 7\rho_2 + 3\rho_3$ ja $y = 2\rho_1 + 5\rho_2 + \rho_3$, ning saame kasutada

struktuurikonstante:

$$\begin{aligned}
[x, y] &= [\rho_1 + 7\rho_2 + 3\rho_3, 2\rho_1 + 5\rho_2 + \rho_3] = \\
&= 2[\rho_1, \rho_1] + 5[\rho_1, \rho_2] + [\rho_1, \rho_3] + 14[\rho_2, \rho_1] + 35[\rho_2, \rho_2] + 7[\rho_2, \rho_3] + \\
&\quad 6[\rho_3, \rho_1] + 15[\rho_3, \rho_2] + 3[\rho_3, \rho_3] = \\
&= 5[\rho_1, \rho_2] + [\rho_1, \rho_3] - 14[\rho_1, \rho_2] + 7[\rho_2, \rho_3] - 6[\rho_1, \rho_3] - 15[\rho_2, \rho_3] = \\
&= -9[\rho_1, \rho_2] - 5[\rho_1, \rho_3] - 8[\rho_2, \rho_3] = \\
&= -9K_{12}^\lambda \rho_\lambda - 5K_{13}^\lambda \rho_\lambda - 8K_{23}^\lambda \rho_\lambda = \\
&= -9K_{12}^3 \rho_3 - 5K_{13}^2 \rho_2 - 8K_{23}^1 \rho_1 = \\
&= -9 \cdot (-2)\rho_3 - 5 \cdot 2\rho_2 - 8 \cdot (-2)\rho_1 = \\
&= 16\rho_1 - 10\rho_2 + 18\rho_3 = \\
&= \begin{pmatrix} 18i & -10 + 16i \\ 10 + 16i & -18i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ootuspäraselt annavad mõlemad variandid sama tulemuse, kuid teise variandi puhul ei soorita me kordagi selle algebra korrutustehet.

Ilmselt sõltuvad Lie algebra struktuurikonstandid algebra vektorruumi baasist. Olgu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ Lie algebra \mathfrak{g} vektorruumi kaks erinevad baasi, ning olgu nad omavahel järgmises seoses:

$$\hat{e}_\alpha = a_\alpha^\lambda e_\lambda. \quad (2.18)$$

Siis

$$\hat{K}_{\alpha\beta}^\xi \hat{e}_\xi = [\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = [a_\alpha^\mu e_\mu, a_\beta^\nu e_\nu] = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu [e_\mu, e_\nu] = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu K_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda. \quad (2.19)$$

Kui võrduste ahela (2.19) kõige vasakpoolsemas osas kasutada samasust (2.18), siis kehtib

$$\hat{K}_{\alpha\beta}^\xi a_\xi^\lambda e_\lambda = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu K_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda,$$

millest kokkuvõttes saame valemi

$$a_\xi^\lambda \hat{K}_{\alpha\beta}^\xi = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu K_{\mu\nu}^\lambda.$$

2.5 Esitused

Olgu $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_1})$ ja $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_2})$ Lie algebrad. Lineaarkujutust $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ nimetatakse Lie algebrate *homomorfismiks*, kui ta säilitab kommutaatori, see tähendab iga $x, y \in \mathfrak{g}_1$ korral kehtib võrdus

$$\varphi([x, y]_{\mathfrak{g}_1}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{g}_2}.$$

Homomorfismi φ nimetatakse Lie algebrate *isomorfismiks*, kui φ on ka üks-ühene ning pealekujutus. Klassikalisel viisil on defineeritud ka Lie algebrate *endomorfismi* ning *automorfismi* mõisted.

Homomorfismi mõiste viib meid väga tähtsa osani Lie algebrate teoorias, milleks on *esitused*.

Definitsioon 2.9. Olgu \mathfrak{g} Lie algebra ja \mathcal{V} vektorruum. Siis nimetatakse homomorfismi $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ Lie algebra \mathfrak{g} *esituseks* vektorruumile \mathcal{V} .

Esituseks paneme tähele, et selline definitsioon omab mõtet, kuna eelneva arutelu põhjal on selge, et $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ on tõepoolest Lie algebra. Niisiis on \mathfrak{g} esitus vektorruumil \mathcal{V} lineaarne kujutus φ Lie algebrast \mathfrak{g} vektorruumi \mathcal{V} endomorfismide ringi nii, et

$$\varphi([x, y])(v) = (\varphi(x)\varphi(y))(v) - (\varphi(y)\varphi(x))(v),$$

kõikide $x, y \in \mathfrak{g}$ ja $v \in \mathcal{V}$ korral. Me ütleme, et esitus φ on *täpne*, kui $\varphi(x) = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = 0$. Teisi sõnu on esitus täpne parajasti siis, kui ta on üks-ühene.

Näide 2.5. Olgu \mathfrak{g} Lie algebra. Vaatleme lineaarset kujutust

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \ni x \mapsto \text{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

mis on $y \in \mathfrak{g}$ korral on defineeritud eeskirjaga

$$\text{ad}_x(y) = [x, y]. \quad (2.20)$$

Kujutus $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ on Lie algebra \mathfrak{g} esitus. Seda esitust nimetatakse \mathfrak{g} *adjungeeritud esituseks*. Märkamaks, et ad on tõepoolest esitus märgime kõigepealt, et arvestades eeskirja (2.20) ning kommutaatori lineaarsust, on kujutuse ad lineaarsus ilmne. Veendumaks, et kujutus $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ on esitus tuleb kontrollida, et iga $x, y, z \in \mathfrak{g}$ korral kehtiks võrdus $[\text{ad}_x, \text{ad}_y](z) = \text{ad}_{[x, y]}(z)$, mille saame Jacobi samasusest (2.4).

$$\begin{aligned} 0 &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \\ &= [x, [y, z]] + [y, -[x, z]] - [[x, y], z] = \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] - [[x, y], z] \end{aligned}$$

ehk $[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z]$. Nüüd, et Lie algebras $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ arvutatakse kommutaatori väärtusi eeskirja $[\text{ad}_x, \text{ad}_y] = \text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x$ järgi, siis

$$[\text{ad}_x, \text{ad}_y](z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z] = \text{ad}_{[x, y]}(z).$$

Esituste teooria üheks väga oluliseks tulemuseks on nõndanimetatud *Ado teoreem*, mis väidab, et iga lõplikumõõtmeline Lie algebra \mathfrak{g} on Lie algebra $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ alamalgebra, kus \mathcal{V} on mingi lõplikumõõtmeline vektorruum. Niisiis, Lie algebrat \mathfrak{g} on tegelikult võimalik vaadelda kui maatriksalgebrat.[7]

Teoreem 2.2 (Ado, 1935). *Iga lõplikumõõtmeline Lie algebra üle nullkarakteristikaga korpuse omab täpset lõplikumõõtmelist esitust.*

Tegelikult kehtib ka Ado teoreemi oluliselt tugevam variant, kus on kaotatud eeldus korpuse nullkarakteristika kohta.[8]

2.6 Algebralised struktuurid

Et meie põgus ülevaade Lie algebratest oleks vähegi täielik tuleks vähemalt definitsiooni tasemel sisse tuua ka sellised standardsed mõisted algebraste struktuuride vallast nagu *alamalgebra* ja *ideaal*. Tõsi, seda juba Lie algebrate kontekstis.

Definitsioon 2.10. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ Lie algebra ning olgu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ alamruum. Me ütleme, et $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot])$ on Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ *Lie alamalgebra*, kui iga $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ korral $[h_1, h_2] \in \mathfrak{h}$.

Olgu $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Võttes arvesse definitsiooni 2.10 saame, et Lie algebral $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ on mitmeid Lie alamalgebraid. Nendeks on näiteks spetsiaalsete lineaarsete teisenduste Lie algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ ja ortogonaalsete lineaarsete teisenduste Lie algebra $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$.

Võrduse (2.5) järgi on selge, et Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ korral ei ole mõtet vahet teha vasak- ja parempoolsetel ideaalidel, kuna kõik ideaalid on automaatselt kahepoolsed.

Definitsioon 2.11. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ Lie algebra ning olgu \mathfrak{h} vektorruumi \mathfrak{g} alamvektorruum liitmise suhtes. Me ütleme, et \mathfrak{h} on Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ *ideaal*, kui iga $x \in \mathfrak{h}$ ja $y \in \mathfrak{g}$ korral $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

Leidmaks näidet ideaalist piisab meil vaid ette kujutada mõnd Abeli Lie algebrat. Selge, et iga tema alamruum on ideaal. Teatavasti saab algebra \mathcal{A} ja tema ideaali I abil konstrueerida faktoralgebra \mathcal{A}/I . Analoogiline on situatsioon ka Lie algebrate puhul. Kui \mathfrak{h} on Lie algebra \mathfrak{g} ideaal, siis faktoralgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ kõrvalklassideks on $\bar{x} = x + \mathfrak{h}$. Vaatleme kujutust $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}: \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, mis on defineeritud kui

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = [x, y] + \mathfrak{h}, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Ilmselt on selliselt defineeritud kommutaator korrektne, see tähendab ei sõltu esindajate x ja y valikust. Osutub, et faktorrüüm $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ koos kommutaatoriga $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ on Lie algebra, mida me nimetame *Lie faktoralgebraks*.

Samuti võib kõneleda Lie algebra \mathfrak{g} *tsentist*, mille all mõeldakse hulka, kuhu kuuluvad elemendid $x \in \mathfrak{g}$, mis iga $a \in \mathfrak{g}$ korral rahuldavad tingimust $[x, a] = 0$. Selge, et iga tsenter on automaatselt ka Lie algebra \mathfrak{g} ideaal.

3 n -Lie algebra

Selles peatüki eesmärgiks on klassikalise Lie algebra üldistame, mille käigus toome sisse n -Lie algebra mõiste. Edasi tutvustame esmalt artiklis [3] näidatud eeskirja, mille abil on võimalik Lie algebrast konstrueerida ternaarne Lie algebra ning jätkame seda teooriaarendust tuginedes artiklile [2], kus kirjeldatakse üldisemalt kuidas n -Lie algebrast indutseerida $(n + 1)$ -Lie algebra.

3.1 n -Lie algebra definitsioon

Lie algebra definitsioonis on kesksel kohal kaldsümmeetriline bilineaarne korrutustehe, mis rahuldab Jacobi samasust. Üheks viisiks Lie algebra mõistet üldistada, ongi just nimelt tema korrutamise üldistamine. Seda tehes on loomulik nõuda, et ka üldistatud korrutamistehe rahuldaks kaldsümmeetrilisuse tingimust ning Jacobi samasust, või vähemalt selle mingit analoogi, mis annaks klassikalisel juhul täpselt Jacobi samasuse.

Filippov² tutvustas aastal 1985 artikis [6] n -Lie algebrate klassi, kus bilineaarne korrutamine on asendatud n -lineaarse kaldsümmeetrilise operatsiooniga, mis rahuldab teatud samasust.[9] Tänaseks on just see, Nambu mehaanikast välja kasvanud üldistus osutunud üheks põhiliseks Lie algebrate edasiseks uurimissuunaks.

Definitsioon 3.1 (n -Lie algebra). Vektorruumi \mathfrak{g} nimetatakse *n -Lie algebraks*, kui on määratud n -lineaarne kaldsümmeetriline kujutus $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathfrak{g}^n \rightarrow \mathfrak{g}$, mis suvaliste

$$x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{g}$$

korral rahuldab tingimust

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, [y_1, \dots, y_n]] = \sum_{i=1}^n [y_1, \dots, [x_1, \dots, x_{n-1}, y_i], \dots, y_n]. \quad (3.1)$$

Võrdust (3.1) n -Lie algebra definitsiooniks nimetatakse üldistatud Jacobi samasuseks või ka *Filippovi samasuseks*. Vahetu kontrolli põhjal on selge, et valides $n = 2$, saame Filippovi samasusest (3.1) Jacobi samasuse (2.4). Seejuures n -aarse Lie sulu kaldsümmeetrilisus tähendab, et suvaliste $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ korral

$$[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = -[x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n]. \quad (3.2)$$

Toome siinkohal n -Lie algebra kohta näite, mille Filippov esitas artiklis [6] vahetult pärast oma definitsiooni.

²Aleksei Fedorovich Filippov (1923 – 2006), vene matemaatik

Näide 3.1. Olgu E reaalne $(n + 1)$ -mõõtmeline Eukleidiline ruum, ning tähistame elementide $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ vektorkorrutise $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Meenutame, et vektorkorrutis on kaldsümmeetriline ning iga teguri suhtes lineaarne. Lisaks, kui meil on ruumi E mingi baas $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$, siis avaldub see vektorikorrutis determinandina

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & e_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \dots & x_{n+1,n} & e_{n+1} \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

kus $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{n+1,i})$ on vektorite x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, koordinaadid.

Kui me varustame ruumi E nüüd n -aarse vektorkorrutisega (3.3), siis saame $(n + 1)$ -mõõtmelise reaalse kaldsümmeetrilise algebra, mida tähistame \mathcal{E}_{n+1} . Tänu determinandi multilineaarsusele on vektorkorrutis täielikult määratud baasivektorite korrutustabeliga. Võrdusest (3.3) saame me baasivektoritele järgmise korrutustabeli:

$$[e_1, \dots, e_{i-1}, \hat{e}_i, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}] = (-1)^{n+1+i} e_i, \quad (3.4)$$

kus $i = 1, 2, \dots, n + 1$, ja \hat{e}_i tähistab vektori e_i arvutusest välja jätmist. Ülejäänud baasivektorite korrutised on kas nullid või kättesaadavad võrdusest (3.4) ja kaldsümmeetrilisusest.

Selle põhjal saab näidata, et algebra $(\mathcal{E}_{n+1}, [\cdot, \dots, \cdot])$ on n -Lie algebra.[6]

Punktis 2.6 toodud konstruktsioonid on võimalik esitada ka üldisemal juhul.

Definitsioon 3.2. Me ütleme, et \mathfrak{h} on n -Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ alamalgebra, kui $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ on alamruum, ning suvaliste $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{h}$ korral $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathfrak{h}$.

Definitsioon 3.3. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie algebra ning olgu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ alamruum. Me ütleme, et \mathfrak{h} on \mathfrak{g} *ideaal*, kui iga $h \in \mathfrak{h}$ ja $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathfrak{g}$ korral

$$[h, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathfrak{h}.$$

Analoogiliselt klassikalisele juhule defineeritakse ka n -Lie faktoralgebra. Kui meil on antud n -Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ ja tema ideaal \mathfrak{h} , siis faktoralgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ kõrvalklassideks on $\bar{x} = x + \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$, ja kommutaatoriks on

$$[x_1 + \mathfrak{h}, x_2 + \mathfrak{h}, \dots, x_n + \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = [x_1, x_2, \dots, x_n] + \mathfrak{h}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}.$$

3.2 Indutseeritud n -Lie algebra

Artiklis [2] on uuritud põhjalikult konstruktsiooni, mille abil on võimalik etteantud n -Lie algebrast teatud tingimustel indutseerida $(n + 1)$ -Lie algebra. Toome järgnevas ära selle konstruktsiooniga seotud põhilised tulemused.

Definitsioon 3.4 (Jälg). Olgu \mathcal{A} vektorruum ning olgu $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$. Me ütleme, et lineaarkujutus $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ on ϕ jälg, kui suvaliste $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ korral

$$\tau(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Olgu $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ n -lineaarne ja $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ lineaarne kujutus. Toome muga- vuse ja selguse mõttes sisse uue kujutuse $\phi_i: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n + 1$, mis on defineeritud kui

$$\begin{aligned} \phi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

kus \hat{x}_i tähistab kõrvalejäävat elementi, see tähendab $\phi_i(x_1, \dots, x_{n+1})$ arvutatakse elementidel $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}$.

Defineerime nende kujutuste abil uue $(n + 1)$ -lineaarse kujutuse $\phi_\tau: \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{A}$ valemiga

$$\phi_\tau(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad (3.5)$$

Seega võttes näiteks $n = 2$ saame valemi (3.5) põhjal kirjutada

$$\phi_\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1)\phi(x_2, x_3) - \tau(x_2)\phi(x_1, x_3) + \tau(x_3)\phi(x_1, x_2).$$

Osutub, et selliselt defineeritud kujutusel ϕ_τ on mitmed head omadused, nagu võib lugeda artiklitest [2, 3].

Lemma 3.1. *Olgu \mathcal{A} vektorruum ning $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ n -lineaarne kaldsümmeetriline kujutus ja $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ lineaarne. Siis kujutus $\phi_\tau: \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{A}$ on samuti kaldsümmeetriline. Lisaks, kui τ on ϕ jälg, siis τ on ka ϕ_τ jälg.*

Tõestus. Eeldame, et \mathcal{A} on vektorruum, $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ on n -lineaarne ning kaldsümmeetriline ja $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ on lineaarne.

Veendumaks, et ϕ_τ on $(n + 1)$ -lineaarne ning kaldsümmeetriline olgu $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x_j^1, x_j^2 \in \mathcal{A}$ ja λ ning μ skalaarid. Arvestades

nii ϕ kui ka τ linearsust määrgime ϕ_τ linearsuseks, et

$$\begin{aligned}
& \phi_\tau(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\
&= \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) + \\
&\quad (-1)^{j-1} \tau(\lambda x_j^1 + \mu x_j^2) \phi_j(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\
&= \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} \lambda (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_{n+1}) + \\
&\quad \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} \mu (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_{n+1}) + \\
&\quad \lambda (-1)^{j-1} \tau(x_j^1) \phi_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_{n+1}) + \\
&\quad \mu (-1)^{j-1} \tau(x_j^2) \phi_j(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\
&= \lambda \phi_\tau(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_{n+1}) + \mu \phi_\tau(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Kaldsümmeetrilisis avaldub samuti vahetu arvutuse tulemusena:

$$\begin{aligned}
& \phi_\tau(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_{n+1}) = \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j-1, i \neq j}}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_{n+1}) + \\
&\quad (-1)^{j-1-1} \tau(x_{j-1}) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) + \\
&\quad (-1)^{j-1} \tau(x_j) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
&= - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j-1, i \neq j}}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{n+1}) - \\
&\quad (-1)^{j-1} \tau(x_{j-1}) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) - \\
&\quad (-1)^{j-1-1} \tau(x_j) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
&= -\phi_\tau(x_1, \dots, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Tõestuse lõpetuseks eeldame, et τ on ϕ jälg ja näitame, et sel juhul on τ ka ϕ_τ jälg.

Et τ on ϕ jälg, siis iga $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ korral $\tau(\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ ja

seega

$$\begin{aligned}
& \tau(\phi_\tau(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \tau((-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_{n+1})) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \tau(\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} 0 = 0,
\end{aligned}$$

nagu tarvis. Sellega on lemma tõestatud. \square

Kasutades lemmat on võimalik tõestada järgmine teoreem [2].

Teoreem 3.2. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie algebra ning olgu τ lineaarkujutuse $[\cdot, \dots, \cdot]$ jälg. Siis $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\tau)$ on $(n+1)$ -Lie algebra.

Teoreemis kirjeldatud viisil saadud $(n+1)$ -Lie algebrat $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\tau)$ nimetatakse n -Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ poolt *indutseeritud* $(n+1)$ -Lie algebraks.

Teoreemist 3.2 saame teha olulise järelduse:

Järeldus 3.3. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ Lie algebra ning olgu antud $[\cdot, \cdot]$ jälg $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow K$. Siis ternaarne sulg $[\cdot, \cdot, \cdot]: \mathfrak{g}^3 \rightarrow \mathfrak{g}$, mis on defineeritud valemiga

$$[x, y, z] = \tau(x)[y, z] + \tau(y)[z, x] + \tau(z)[x, y],$$

määrab 3-Lie algebra struktuuri \mathfrak{g}_τ vektorruumil \mathfrak{g} . \square

Lause 3.4. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie algebra ning olgu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ alamalgebra. Kui τ on $[\cdot, \dots, \cdot]$ jälg, siis \mathfrak{h} on ka $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\tau)$ alamalgebra.

Tõestus. Olgu \mathfrak{h} n -Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ alamalgebra, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathfrak{h}$ ning olgu τ sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ jälg. Siis

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]_\tau = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \tau(x_i) [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}],$$

mis on \mathfrak{h} elementide lineaarkombinatsioon, kuna iga $i = 1, 2, \dots, n+1$ korral $[x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}] \in \mathfrak{h}$. \square

Lause 3.5. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ ideaal \mathfrak{h} . Siis \mathfrak{h} on $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\tau)$ ideaal parajasti siis, kui $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ või $\mathfrak{h} \subseteq \ker \tau$.

Tõestus. Olgu $h \in \mathfrak{h}$ ja $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ suvalised. Siis

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, h]_\tau = \sum_{i=1}^n (-1)^i \tau(x_i) [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, h] + (-1)^{n+1} \tau(h) [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Et \mathfrak{h} on $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ ideaal, siis ilmselt

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \tau(x_i) [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, h] \in \mathfrak{h}.$$

Niisiis, tingimus $[x_1, x_2, \dots, x_n, h]_\tau \in \mathfrak{h}$ on samaväärne tingimusega

$$(-1)^{n+1} \tau(h) [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathfrak{h}.$$

Viimase võime aga lahti kirjutada kujul $\tau(h) = 0$ või $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathfrak{h}$. \square

3.3 Nambu mehaanika. Nambu-Poissoni sulg

Filippovile olid n -Lie algebra konstrueerimisel peamiseks inspiratsiooniks Jaapani füüsiku ja Nobeli preemia laureaadi Yoichiro Nambu tööd Hamiltoni mehaanika üldistuste vallas, mida täna tuntakse kui Nambu mehaanikat. Osutub, et seal esinev *Nambu-Poissoni* sulg on n -Lie algebra sulu erijuht, mida on põhjalikult uurinud Takhtajan.[12] Tuginedes Takhtajani artiklile toome Nambu mehaanika abil veel ühe näite n -Lie algebrast.

Alustame klassikalisest situatsioonist ehk tavalisest Hamiltoni mehaanikast.

Definitsioon 3.5. *Poissoni muutkonnaks* nimetatakse siledat muutkonda M koos funktsioonide algebraga $A = C^\infty(M)$, kui on antud binaarne kujutus kujutus $\{\cdot, \cdot\}: A \otimes A \rightarrow A$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. kaldsümmeetrilisus, iga $f_1, f_2 \in A$ korral

$$\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}, \quad (3.6)$$

2. kehtib Leibnizi tingimus, ehk iga $f_1, f_2, f_3 \in A$ korral

$$\{f_1 f_2, f_3\} = f_1 \{f_2, f_3\} + f_2 \{f_1, f_3\}, \quad (3.7)$$

3. kehtib Jacobi samasus, kui $f_1, f_2, f_3 \in A$, siis

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0. \quad (3.8)$$

Poissoni muutkonna definitsioonis esinevat kujutust $\{\cdot, \cdot\}$ nimetatakse *Poissoni suluks*, ja funktsioonide algebrat A nimetatakse *vaadeldavate algebraks*. Kuna definitsioonis on nõutud tingimused (3.6) ja (3.8), siis on selge, et Poissoni muutkonnal on olemas Lie algebra struktuur. Selgub, et Poissoni sulg mängib klassikalises mehaanikas olulist rolli. Nimelt, klassikalises mehaanikas on teada, et dünaamilise süsteemi arengut kirjeldab Poissoni sulg, mille abil on võimalik formuleerida Hamiltoni liikumisvõrrandid

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}, \quad f \in A, \quad (3.9)$$

kus $H \in A$ on fikseeritud operaator, mis vastab süsteemi koguenergiele, ja mida nimetatakse *Hamiltoniaaniks*. Saadud konstruktsioon kirjeldab süsteemi muutumist ajas, ehk selle süsteemi dünaamikat, ja on seega olulisel kohal paljude kvantteooriate kirjeldustes.

Lihtsaima Poissoni muutkonna näitena võime vaadelda $M = \mathbb{R}^2$ koordinaatidega x ja y , ning Poissoni suluga

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)},$$

või üldisemalt $M = \mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, koordinaatidega $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, kus struktuur on antud suluga

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial y_i} - \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right). \quad (3.10)$$

Nii defineeritud Poissoni sulg rahuldab Poissoni muutkonna definitsioonis seatud tingimusi. Tõepoolest, võrdusest (3.10) järeldeb kaldsümmeetrilisus vahetult. Leibnizi reegli kehtivuseks märgime, et

$$\begin{aligned} \{f_1 f_2, f_3\} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial x_i} \frac{\partial f_3}{\partial y_i} - \frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial y_i} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f_3}{\partial y_i} - \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f_3}{\partial x_i} \right] = \\ &= f_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_3}{\partial y_i} - \frac{\partial f_2}{\partial y_i} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} \right) + f_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_3}{\partial y_i} - \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} \right) = \\ &= f_1 \{f_2, f_3\} + f_2 \{f_1, f_3\}. \end{aligned}$$

Veendumaks, et kehtib ka Jacobi samasus, piisab vahetult arvutada

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\}, \quad \{f_2, \{f_3, f_1\}\}, \quad \{f_3, \{f_1, f_2\}\}.$$

Arvestades, et funktsioonide korrutamine on defineeritud punktiviisi ning korrutise diferentseerimise eeskirja võime saadud tulemusi liites näha, et nende summa on tõepoolest null, ehk tingimus (3.8) on täidetud.

Muutkonna M Poissoni struktuuri on valemi (3.10) asemel võimalik kirjeldada ka kaasaegse diferentsiaalgeomeetria aparatuuri abil. Selleks oletame, et muutkonnal M on antud kaldsümmeetriline vorm $\eta: D(M) \otimes D(M) \rightarrow C^\infty(M)$, kus sümboliga $D(M)$ on tähistatud muutkonna M vektorväljade vektorruum. Poissoni sulu võib siis defineerida valemiga

$$\{f_1, f_2\} = \eta(\nabla f_1, \nabla f_2), \quad (3.11)$$

kus $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ ja vektorväli ∇f on funktsiooni f gradient. Kui x_1, x_2, \dots, x_n on muutkonna lokaalsed koordinaadid, siis vektorväljad

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

moodustavad vektorväljade mooduli baasi, ning vorm η tekitab kaldsümmeetrilise kaks korda kovariantse tensori

$$\eta_{ij} = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

mida nimetatakse *Poissoni tensoriks*.

Seega saame arvutada

$$\begin{aligned}
\{f_1, f_2\} &= \eta(\nabla f_1, \nabla f_2) = \eta\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \eta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} = \\
&= \sum_{i < j} \eta_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \sum_{i > j} \eta_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \eta_{ii} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \\
&= \sum_{i < j} \eta_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \sum_{j > i} \eta_{ji} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \\
&= \sum_{i < j} \eta_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \sum_{i < j} \eta_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \\
&= \sum_{i < j} \eta_{ij} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i < j} \eta_{ij} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) + \sum_{j < i} \eta_{ji} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i < j} \eta_{ij} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) - \sum_{j < i} \eta_{ij} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i < j} \eta_{ij} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) + \sum_{j < i} \eta_{ij} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right).
\end{aligned}$$

Tuues sisse väliskorrutise

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} (f_1, f_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right),$$

siis võime Poissoni sulu (3.11) panna kirja kujul

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} (f_1, f_2).$$

Nambu asendas oma käsitluses binaarse Poissoni sulu ternaarse või koguni n -aarse operatsiooniga muutkonna M vaadeldavate algebral A . Dünaamilise süsteemi

kirjeldamiseks ehk Hamiltoni liikumisvõrrandi (3.9) formuleerimise jaoks on sellisel juhul tarvis ühe Hamiltoniaani asemel vaadata vastavalt kas kahte või $n - 1$ Hamiltoniaani H_1, H_2, \dots, H_{n-1} . Sellisel juhul näitavad need Hamiltoniaanid süsteemi dünaamikat määravate sõltumatute parameetrite maksimaalset arvu.

Definitsioon 3.6. Muutkonda M nimetatakse n -järku *Nambu-Poissoni muutkonaks*, kui on määratud kujutus $\{\cdot, \dots, \cdot\}: A^{\otimes n} \rightarrow A$, mis on

1. kaldsümmeetriline, see tähendab iga $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ korral

$$\{f_1, \dots, f_n\} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \{f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)}\}, \quad (3.12)$$

2. rahuldab Leibnizi tingimust, ehk iga $f_1, f_2, \dots, f_{n+1} \in A$ korral

$$\{f_1 f_2, f_3, \dots, f_n\} = f_1 \{f_2, f_3, \dots, f_n\} + f_2 \{f_1, f_3, \dots, f_n\}, \quad (3.13)$$

3. iga $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, g_1, g_2, \dots, g_n$, korral on täidetud samasus

$$\{f_1, \dots, f_{n-1}, \{g_1, \dots, g_n\}\} = \sum_{i=1}^n \{g_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{n-1}, g_i\}, \dots, g_n\}. \quad (3.14)$$

Definitsioonis nõutavat n -aarset operatsiooni nimetatakse seejuures *Nambu suluks*, ja kaldsümmeetrilisuse tingimuses tähistab σ indekseid $i = 1, 2, \dots, n$ permutatsiooni ning $\varepsilon(\sigma)$ selle permutatsiooni paarsust. Tegelikult on aga võrdusega (3.12) antud kaldsümmeetrilisus täpselt sama, mis n -Lie algebra definitsioonis nõutud kaldsümmeetrilisus (3.2), sest järjestikku kahe elemendi vahetamise tulemusel on võimalik saada mistahes permutatsioon. Teisalt Nambu muutkonna definitsioonis nõutud samasus (3.14) ei ole mitte midagi muud, kui juba meile tuttav Filippovi samasus (3.1). Seega kokkuvõttes tekib meil Nambu muutkonnal loomulikult viisil n -Lie algebra struktuur.

Kokkuvõttes on Nambu-Poissoni muutkonnal dünaamiline süsteem määratud $n - 1$ funktsiooniga H_1, H_2, \dots, H_{n-1} , mille abil on võimalik formuleerida *Nambu-Hamiltoni liikumisvõrrandid*

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, \dots, H_{n-1}, f\}, \quad f \in A.$$

Sellise süsteemi saab analoogiliselt klassikalisele juhule kirjeldada kasutades diferentsiaalgeomeetria vahendeid, nagu on näha Takhtajani artiklis [12]. Selleks defineerime Nambu sulu valemiga

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \eta(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n),$$

kus $\eta: D(M)^{\oplus n} \rightarrow C^\infty(M)$ on kaldsümmeetriline vorm ja $D(M)$ tähistab muutkonna M vektorväljade vektorruumi. Kasutades muutkonnal M lokaalseid koordinaate η kaldsümmeetrilised n -korda kovariantsed *Nambu tensorid* $\eta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ nii, et

$$\eta = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \eta_{i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_n}},$$

ja kokkuvõttes saab Nambu sulg kuju

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \eta_{i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} (f_1, \dots, f_n).$$

4 n -Lie superalgebra

Järgnevas toome sisse *supermatemaatika* põhimõisted ning defineerime nende abil *Lie superalgebra*. Edasi ühendame Lie superalgebra konstruktsiooni Filippovi n -Lie algebraga, ning konstrueerime n -Lie superalgebra.

4.1 Lie superalgebra

Eelmises peatükis nägime, kuidas Filippov leidis viisi Lie algebra üldistamiseks kasutades binaarse operatsiooni asemel n -aarset operatsiooni, kuid jättes aluseks oleva algebra samaks. Teine viis Lie algebra mõistet üldistada on vaadelda algebra asemel *superalgebrat*. Tuletame selleks kõigepealt meelde mõned baasdefiniitsioonid.

Definiitsioon 4.1. Vektorruumi \mathcal{V} nimetatakse \mathbb{Z}_2 -*graduateeritud vektorruumiks* ehk *supervektorruumiks*, kui ta on esitatav vektorruumide otsesummana $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$. Vektorruumi $\mathcal{V}_{\bar{0}}$ elemente nimetatakse seejuures *paarisvektoriteks* ja $\mathcal{V}_{\bar{1}}$ elemente *paarituteks* vektoriteks.

Kui supervektorruumi element $x \in \mathcal{V}$ korral $x \in \mathcal{V}_{\bar{0}}$ või $x \in \mathcal{V}_{\bar{1}}$, siis ütleme, et vektor x on *homogeenne*. Homogeensete vektorite korral on otstarbekas vaadelda kujutust $|\cdot|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{Z}_2$, mis on defineeritud võrdusega

$$|x| = \begin{cases} \bar{0}, & \text{kui } x \in \mathcal{V}_{\bar{0}}, \\ \bar{1}, & \text{kui } x \in \mathcal{V}_{\bar{1}}. \end{cases}$$

Homogeense elemendi x korral nimetame suurust $|x| \in \mathbb{Z}_2$ tema paarsuseks. Märkime, et kasutades edaspidises kirjutist $|x|$ eeldame vaikimisi, et element $x \in \mathcal{V}$ on homogeenne.

Supervektorruumi $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ *alamruumiks* nimetatakse supervektorruumi $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{W}_{\bar{1}} \subseteq \mathcal{V}$, kui vastavate otseliidetavate graduateeringud ühtivad, see tähendab $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{V}_i$, kus $i \in \mathbb{Z}_2$.

Definiitsioon 4.2. Olgu supervektorruumil \mathcal{A} antud bilineaarne algebraline tehe $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Supervektorruumi \mathcal{A} nimetatakse *superalgebraks*, kui tehe ϕ rahuldab suvaliste homogeensete vektorite $x, y \in \mathcal{A}$ korral tingimust

$$|\phi(x, y)| = |x| + |y|. \quad (4.1)$$

Paneme tähele, et superalgebra definiitsioonis nõutav kujutus $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ nõuab taustal, et supervektorruum \mathcal{A} oleks tegelikult algebra. Supervektorruumi ühikelement ja assotsiatiivsus defineeritakse tavapärasel viisil.

Sellega on meil olemas piisvad vahendid, et defineerida *Lie superalgebra*.

Definitsioon 4.3. Olgu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ superalgebra, millel on määratud bilineaarne kujutus $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, mis on suvaliste homogeensete elementide $x, y, z \in \mathfrak{g}$ korral

1. kaldsümmeetriline gradueeritud mõttes:

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x], \quad (4.2)$$

2. rahuldab gradueeritud Jacobi samasust

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]. \quad (4.3)$$

Supermatemaatikas on standardseks võtteks elementide x ja y järjekorra vahetamisel seda operatsiooni balansseerida korrutades saadav tulemus läbi suurusega $(-1)^{|x||y|}$, see tähendab võetakse arvesse elementide gradueeringuid. Seega on definitsiooni tingimus (4.2) põhjendatud. Gradueeritud Jacobi samasuse (4.3) selline kuju võib esmapilgul tunduda mõnevõrra üllatav, kuid tuletades meelde, et me võime klassikalise Jacobi samasuse kirja panna ka kujul (2.6), siis on selge, et selline üldistus omab mõtet. Enamgi veel, kui x ja y on paarisvektorid, siis saamegi täpselt samasuse (2.6).

Märkus 4.1. Prefiks „*super*“ kõikide mõistete ees pärineb teoreetilise füüsika harust, mida nimetatakse supersümmeetriaks. Meie vaadeldavad „*super*“-struktuurid loovad algebralised vahendid, milles on võimalik supersümmeetrilisi füüsikalisi teooriaid formuleerida. Täpsemalt on superruumis võimalik ühes konstruktsioonis siduda oma iseloomult täiesti erinevad fermionid ja bosonid, see on aine- ja väljaosakesed.

Nii avaldub ka Lie superalgebra tähtsus ja rakendus teoreetilises füüsikas, kus neid kasutatakse supersümmeetriate matemaatilises kirjelduses. Tavaliselt vaadeldakse neis teooriates superalgebra paarisosa kui bosoneid, ja paaritule osale seatakse vastavusse fermionid.

Lause 4.1. Olgu $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, [\cdot, \cdot])$ Lie superalgebra. Sel juhul,

- 1) kui $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = 0$, siis \mathfrak{g} on Lie algebra;
- 2) kui $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = 0$, siis \mathfrak{g} on Abeli Lie superalgebra, see tähendab $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Tõestus. Olgu $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, [\cdot, \cdot])$ Lie superalgebra.

- 1) Eeldame, et $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = 0$. Siis suvaliste $x, y \in \mathfrak{g}$ korral $|x| = |y| = \bar{0}$ ja $|x||y| = \bar{0}$, ning tingimusest (4.2) saab tavaline kaldsümmeetrilisus, ning nagu eelnevalt juba märgitud, on sel juhul gradueeritud Jacobi samasus täpselt Jacobi samasus.

- 2) Olgu nüüd $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = 0$, see tähendab \mathfrak{g} koosneb ainult paaritute elementidest ehk iga $x, y \in \mathfrak{g}$ korral $|x| = |y| = \bar{1}$. Kuna sulg $[\cdot, \cdot]$ määrab \mathfrak{g} superalgebra struktuuri, siis kehtib $|[x, y]| = |x| + |y|$, mis tähendab, et kahe elemendi sulg on alati paariselement. Teisalt $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = 0$, ja järelikult suvaliste $x, y \in \mathfrak{g}$ korral $[x, y] = 0$, mis tähendabki, et \mathfrak{g} on Abeli Lie superalgebra.

□

Meenutame, et näites 2.2 andsime eeskirja, kuidas suvalisest assotsiatiivsest algebrast on võimalik konstrueerida Lie algebra. Osutub, et analoogiline situatsioon kehtib ka Lie superalgebra korral.

Näide 4.1. Olgu $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ assotsiatiivne superalgebra, kus elementide $x, y \in \mathcal{A}$ korrutis on tähistatud xy . Me saame anda supervektorruumile \mathcal{A} Lie superalgebra struktuuri, kui defineerime homogeensete elementide jaoks sulu võrdusega

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx, \quad x, y \in \mathcal{A}, \quad (4.4)$$

ning mittehomogeensete elementide jaoks rakendame korrutamise bilineaarsust.

Sel juhul

$$\begin{aligned} [x, y] &= xy - (-1)^{|x||y|}yx = \\ &= -(-1)^{|x||y|} [-(-1)^{|x||y|}xy + yx] = \\ &= -(-1)^{|x||y|} [y, x], \end{aligned}$$

ehk nõue (4.2) on täidetud.

Gradueeritud Jacobi samasuse jaoks rakendame kaks korda valemit (4.4) ning arvutame võrduses (4.3) olevad liikmed, kusjuures assotsiatiivsust arvesse võttes jätame korrutistes sulud kirjutamata.

$$\begin{aligned} -[x, [y, z]] &= -xyz + (-1)^{|x||y|+|x||z|}yzx + (-1)^{|y||z|}xzy - (-1)^{|x||y|+|x||z|+|y||z|}zyx, \\ [[x, y], z] &= xyz - (-1)^{|x||z|+|y||z|}zxy - (-1)^{|x||y|}yxz + (-1)^{|x||y|+|x||z|+|y||z|}zyx, \\ (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]] &= (-1)^{|x||y|}yxz - (-1)^{|x||y|+|x||y|+|y||z|}xzy - \\ &\quad (-1)^{|x||y|+|x||z|}yzx + (-1)^{|x||y|+|x||y|+|x||z|+|y||z|}zxy. \end{aligned}$$

Arvestades, et $(-1)^{2k+l} = (-1)^l$ mistahes $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral, siis saame tulemusi liites kokku täpselt nulli, ehk sulg (4.4) rahuldab graduateeritud Jacobi samasust. Kokkuvõttes oleme saanud eeskirja, mille abil on suvaline assotsiatiivne superalgebra võimalik varustada Lie superalgebra struktuuriga.

Loomulikult räägitakse ka Lie superalgebrate puhul homomorfismidest. Need defineeritakse klassikalisel viisil, see tähendab kui $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ ja $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{h}_{\bar{1}}$ on Lie superalgebrad, siis $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ nimetatakse Lie superalgebrate homomorfismiks, kui $f([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [f(x), f(y)]_{\mathfrak{h}}$ suvaliste $x, y \in \mathfrak{g}$ korral. Homomorfismi $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ gradueering $|f| \in \mathbb{Z}_2$ määratakse seejuures seosest

$$f(\mathfrak{g}_i) \subseteq \mathfrak{h}_{i+|f|}, \quad i \in \mathbb{Z}_2.$$

Niisiis, f on paaris, kui $f(\mathfrak{g}_i) \subseteq \mathfrak{h}_i$, ja f on paaritu, kui $f(\mathfrak{g}_i) \subseteq \mathfrak{h}_{i+\bar{1}}$. Samamoodi võib kujutuse gradueeringust rääkida ka supervektorruumi või superalgebra korral. Homomorfismi, mille lähte- ja sihtalgebra ühtivad nimetame endomorfismiks ja supervektorruumi \mathcal{V} kõigi endomorfismide hulka tähistame $\text{End } \mathcal{V}$.

Lemma 4.2. *Olgu \mathcal{V} supervektorruum ja $f, g \in \text{End } \mathcal{V}$. Kui $|f| = |g|$, siis $f \circ g$ on paaris, ning vastasel korral paaritu.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ supervektorruum, $f, g \in \text{End } \mathcal{V}$ ja $i \in \mathbb{Z}_2$. Siis

$$(f \circ g)(\mathcal{V}_i) = f(g(\mathcal{V}_i)) \subseteq f(\mathcal{V}_{i+|g|}) \subseteq \mathcal{V}_{i+|g|+|f|}.$$

Kui $|f| = |g|$, siis $i+|g|+|f| = i$ ehk $f \circ g$ on paaris. Vastasel korral $i+|g|+|f| = i+\bar{1}$ ja seega $f \circ g$ on paaritu. \square

Lemma põhjal on selge, et supervektorruumis $\text{End } \mathcal{V}$ kujutuste kompositsioon \circ rahuldab tingimust (4.1), ning seega on $\text{End } \mathcal{V}$ superalgebra. Ühes eelmise näitega saame nüüd teha järgmise järelduse.

Järeldus 4.3. *Olgu \mathcal{V} supervektorruum. Assotsiatiivne superalgebra $\text{End } \mathcal{V}$, mis on varustatud suluga*

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f, \quad f, g \in \text{End } \mathcal{V}, \quad (4.5)$$

on Lie superalgebra. \square

Lause 4.4. *Olgu \mathcal{V} supervektorruum. Lie superalgebra $\text{End } \mathcal{V}$ elementide f, g ja h korral kehtivad võrdused*

$$[f, g \circ h] = [f, g] \circ h + (-1)^{|f||g|} g \circ [f, h], \quad (4.6)$$

$$[f \circ g, h] = f \circ [g, h] + (-1)^{|g||h|} [f, h] \circ g. \quad (4.7)$$

Tõestus. Olgu $f, g, h \in \text{End } \mathcal{V}$. Vastavalt valemile (4.5) saame siis kirjutada

$$\begin{aligned}
[f, g \circ h] &= \\
&= f \circ g \circ h + (-1)^{1+|g \circ h||f|} g \circ h \circ f = \\
&= f \circ g \circ h - (-1)^{|f||g|+|f||h|} g \circ h \circ f = \\
&= f \circ g \circ h - (-1)^{|f||g|} g \circ f \circ h + (-1)^{|f||g|} g \circ f \circ h - (-1)^{|f||g|+|f||h|} g \circ h \circ f = \\
&= [f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f] \circ h + g \circ [(-1)^{|f||g|} f \circ h - (-1)^{|f||g|+|f||h|} h \circ f] = \\
&= [f, g] \circ h + (-1)^{|f||g|} g \circ [f, h],
\end{aligned}$$

ehk võrdus (4.6) kehtib.

Veendumaks, et kehtib ka (4.7) paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
[f \circ g, h] &= \\
&= -(-1)^{|f \circ g||h|} [h, f \circ g] = \\
&= -(-1)^{|f \circ g||h|} ([h, f] \circ g + (-1)^{|f||h|} f \circ [h, g]) = \\
&= -(-1)^{|f \circ g||h|} [h, f] \circ g - (-1)^{|f \circ g||h|+|f||h|} f \circ [h, g] = \\
&= (-1)^{|f||h|+|h||g|+|h||f|} [f, h] \circ g + (-1)^{|f||h|+|g||h|+|f||h|+|h||g|} f \circ [g, h] = \\
&= (-1)^{|h||g|} [f, h] \circ g + f \circ [g, h] = \\
&= f \circ [g, h] + (-1)^{|g||h|} [f, h] \circ g,
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis. □

4.2 n -Lie superalgebra

Kombineerime nüüd Filippovi n -Lie algebra ning eelnevas alapeatükis tutvustatud Lie superalgebra üheks n -Lie superalgebraks, nagu seda on tehtud artiklis [1].

Definitsioon 4.4 (n -Lie superalgebra). Olgu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ supervektorruum. Me ütleme, et \mathfrak{g} on n -Lie superalgebra, kui \mathfrak{g} on varustatud gradueeritud n -Lie suluga $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathfrak{g}^n \rightarrow \mathfrak{g}$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. n -aarne sulg $[\cdot, \dots, \cdot]$ on n -lineaarne ja on kooskõlas gradueeringutega, see tähendab suvaliste homogeensete elementide $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ korral

$$|[x_1, \dots, x_n]| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (4.8)$$

2. $[\cdot, \dots, \cdot]$ on kaldsümmeetriline gradueeritud mõttes, see tähendab iga $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ja suvaliste homogeensete elementide $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ korral

$$[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} [x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n], \quad (4.9)$$

3. kõikide homogeensete elementide $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in \mathfrak{g}$ korral on täidetud gradueeritud Filippovi samasus

$$\begin{aligned} & [y_1, \dots, y_{n-1}, [x_1, \dots, x_n]] = \\ & = \sum_{i=1}^n (-1)^{|\mathbf{x}|_{i-1} |\mathbf{y}|^{n-1}} [x_1, \dots, x_{i-1}, [y_1, \dots, y_{n-1}, x_i], x_{i+1}, \dots, x_n], \end{aligned} \quad (4.10)$$

kus $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ ning $|\mathbf{x}|_i = \sum_{j=1}^i |x_j|$.

Paneme tähele, et võttes definitsioonis 4.4 $n = 2$, saame Lie superalgebra, mis tähenab, et üldistus sellisel kujul omab mõtet. Enne edasist teooriaarendust vaatame lähemalt ühte n -Lie superalgebra näidet.

Teoreem 4.5. *Olgu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ supervektorruum ning $\text{End } \mathcal{V}$ tema endomorfismide supervektorruum. Defineerime kujutuse $[\cdot, \dots, \cdot]: (\text{End } \mathcal{V})^n \rightarrow \text{End } \mathcal{V}$ valemiga*

$$[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma| + |\phi_{\sigma}|} \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \circ \phi_{i_n}, \quad (4.11)$$

kus $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ on ruumi $\text{End } \mathcal{V}$ endomorfismide ennik, $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ on arvude $(1, 2, \dots, n)$ permutatsioon, ja $|\sigma|$ tähistab selle permutatsiooni paarsust. Seejuures $|\phi_{\sigma}|$ arvutatakse valemiga

$$|\phi_{\sigma}| = \sum_{k=1}^n |\phi_{i_k}| \left(|\phi_{i_{k_1}}| + |\phi_{i_{k_2}}| + \dots + |\phi_{i_{k_r}}| \right), \quad (4.12)$$

kus $(i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_r})$ on arvud, mis permutatsioonis σ moodustavad arvuga i_k inversiooni, see tähendab iga $l = 1, 2, \dots, r$ korral $i_{k_l} > i_k$ ja i_{k_l} eelneb elemendile i_k permutatsioonis σ .

Sel juhul on $\text{End } \mathcal{V}$, varustatuna suluga (4.11), n -Lie superalgebra.

Enne kui asume teoreemi tõestuse juurde näitame, et kehtib järgmine lemma.

Lemma 4.6. *Valemis (4.11) esitatud n -aarne kommutaator on võimalik avaldada binaarsete $(n-1)$ -aarsete kommutaatorite abil järgmiselt:*

$$[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (-1)^{|\phi_k| \sum_{l < k} |\phi_l|} \phi_k \circ [\phi_1, \dots, \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \dots, \phi_n]. \quad (4.13)$$

Tõestus. Et üldise juhu tõestus paremini jälgitav oleks tõestame väite esmalt juhul $n = 3$. Olgu selleks $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \text{End } \mathcal{V}$ ning kasutame samu tähistusi nagu teoreemi sõnastuses. Vahetu arvutuse tulemusel näeme, et ühelt poolt

$$\begin{aligned}
[\phi_1, \phi_2, \phi_3] &= \\
&= (-1)^{|\phi_{123}|} \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3 + (-1)^{1+|\phi_{132}|} \phi_1 \circ \phi_3 \circ \phi_2 + \\
&\quad (-1)^{1+|\phi_{213}|} \phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_3 + (-1)^{|\phi_{231}|} \phi_2 \circ \phi_3 \circ \phi_1 + \\
&\quad (-1)^{|\phi_{312}|} \phi_3 \circ \phi_1 \circ \phi_2 + (-1)^{1+|\phi_{321}|} \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \\
&= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3 + \\
&\quad (-1)^{1+|\phi_2||\phi_3|} \phi_1 \circ \phi_3 \circ \phi_2 + \\
&\quad (-1)^{1+|\phi_1||\phi_2|} \phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_3 + \\
&\quad (-1)^{|\phi_1||\phi_2|+|\phi_1||\phi_3|} \phi_2 \circ \phi_3 \circ \phi_1 + \\
&\quad (-1)^{|\phi_1||\phi_3|+|\phi_2||\phi_3|} \phi_3 \circ \phi_1 \circ \phi_2 + \\
&\quad (-1)^{1+|\phi_2||\phi_3|+|\phi_1||\phi_3|+|\phi_1||\phi_2|} \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ning teisalt

$$\begin{aligned}
&\phi_1 \circ [\phi_2, \phi_3] + \phi_2 \circ [\phi_1, \phi_3] + \phi_3 \circ [\phi_1, \phi_2] = \\
&= \phi_1 \circ (\phi_2 \circ \phi_3 - (-1)^{|\phi_2||\phi_3|} \phi_3 \circ \phi_2) + \\
&\quad \phi_2 \circ (\phi_1 \circ \phi_3 - (-1)^{|\phi_1||\phi_3|} \phi_3 \circ \phi_1) + \\
&\quad \phi_3 \circ (\phi_1 \circ \phi_2 - (-1)^{|\phi_1||\phi_2|} \phi_2 \circ \phi_1) = \\
&= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3 + (-1)^{1+|\phi_2||\phi_3|} \phi_1 \circ \phi_3 \circ \phi_2 + \\
&\quad \phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_3 + (-1)^{1+|\phi_1||\phi_3|} \phi_2 \circ \phi_3 \circ \phi_1 + \\
&\quad \phi_3 \circ \phi_1 \circ \phi_2 + (-1)^{1+|\phi_1||\phi_2|} \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nüüd piisab vaid paneme tähele, et korrutades võrduste ahela (4.15) vasaku poole viimased kaks liidetavat vastavalt suurustega

$$(-1)^{1+|\phi_1||\phi_2|} \quad \text{ja} \quad (-1)^{|\phi_1||\phi_3|+|\phi_2||\phi_3|},$$

saame täpselt sama tulemuse nagu valemis (4.14), ehk kokkuvõttes kehtib võrdus

$$[\phi_1, \phi_2, \phi_3] = \phi_1 \circ [\phi_2, \phi_3] - (-1)^{|\phi_1||\phi_2|} \phi_2 \circ [\phi_1, \phi_3] + (-1)^{|\phi_1||\phi_3|+|\phi_2||\phi_3|} \phi_3 \circ [\phi_1, \phi_2],$$

mis on täpselt (4.13), kui võtta $n = 3$.

Vaatame edasi üldist situatsiooni. Olgu $n > 2$ suvaline naturaalarv ja olgu

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in \text{End } \mathcal{V}$. Rakendades valemit (4.11) saame kirjutada

$$\begin{aligned}
& [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \\
& = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma| + |\phi_{\sigma}|} \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \circ \phi_{i_n} = \\
& = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (-1)^{|\phi_k| \sum_{l < k} |\phi_l|} \phi_k \circ \sum_{\sigma'} (-1)^{|\sigma'| + |\phi_{\sigma'}|} \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \circ \phi_{i_{n-1}} = \\
& = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (-1)^{|\phi_k| \sum_{l < k} |\phi_l|} \phi_k \circ [\phi_1, \dots, \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \dots, \phi_n].
\end{aligned}$$

□

Tõepoolest, olgu $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in \text{End } \mathcal{V}$. Siis lemma 4.2 järgi on

$$|\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n| = \sum_{i=1}^n |\phi_i|.$$

Seega on valemi (4.11) paremal pool kõigi liidetavate sama ja seejuures võrdne arvuga $\sum_{i=1}^n |\phi_i|$. Ilmselt on ka nende summa paarsus siis täpselt selline, ehk kokkuvõttes $[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \sum_{i=1}^n |\phi_i|$, nagu tarvis. Gradueeritud kaldsümmeetrilisuse kehtivuseks märgime, et permutatsioonis kahe elemendi ära vahetamisel permutatsiooni paarsus muutub, ning sellega on põhjendatud „−“. Teguri $(-1)^{|\phi_i||\phi_{i+1}|}$ saame vahetult valemi (4.12) struktuurist.

Nagu klassikalise Lie algebra, ja tegelikult ka n -Lie algebra ning Lie superalgebra korral, on meil võimalik vaadelda struktuurikonstante. Selle tarbeks peab loomulikult fikseerima $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ supervektorruumi baasi. Olgu selleks

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_p, f_1, f_2, \dots, f_q\}, \quad (4.16)$$

kusjuures $\mathfrak{g}_0 = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ ja $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_q\}$.

Definitsioon 4.5. Olgu n -Lie superalgebra \mathfrak{g} vektorruumi baas \mathcal{B} võrdusest (4.16). Baasile \mathcal{B} vastavateks *struktuurikonstantideks* nimetatakse arve $K_{A_1 A_2 \dots A_n}^B$, mis on määratud võrranditega

$$[z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}] = K_{A_1 A_2 \dots A_n}^B z_B,$$

kus $z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}, z_B \in \mathcal{B}$.

Ilmselt on meil baasi \mathcal{B} elementidel sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ arvutamiseks kolm võimalust: kõik argumendid on paaris, kõik argumendid on paaritud, või on nii paaris- kui ka paaritud elemente. Kuid arvestades gradueeritud kaldsümmeetrilisust võime

me argumentid alati sellisesse järjekorda viia, et väiksema indeksiga baasielement eelneb suurema indeksiga elemendile, ja paarisgradeeringuga vektorid eelnevad sulus paaritutele. Kokkuvõttes jäävad huvipakkuvate struktuurikonstantidena alles ainult:

- 1) $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_n}] = K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^\lambda e_\lambda,$
- 2) $[f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n}] = K_{i_1 i_2 \dots i_n}^B z_B,$
- 3) $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_k}, f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_{n-k}}] = K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k i_1 i_2 \dots i_{n-k}}^B z_B,$

kus $k < n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\}$ ja $k < l$ korral $\alpha_k < \alpha_l$ ning $i_k < i_l$.

Struktuurikonstantide kasutamise, seda eelkõige just ternaarsete Lie superalgebra korral, juurde naaseme hiljem peatüki ??? juures.

Märgime, et n -Lie superalgebra korral defineeritakse tema *ideaal* ning *alamalgebra* täpselt nagu n -Lie algebra korral (vt definitsioone 3.2 ja 3.3).

Lemma 4.7. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie superalgebra ja $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_n \subseteq \mathfrak{g}$ tema ideaalid. Siis $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_n]$ on samuti \mathfrak{g} ideaal.

Tõestus. Olgu $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_n$ n -Lie superalgebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ ideaalid ning olgu $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathfrak{g}$. Tähistame $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_n]$ ja valime suvalise $h \in \mathfrak{h}$. Siis leiduvad $h_i \in \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ nii, et $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]$ ja gradeeritud Filippovi samasuse järgi saame arvutada

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, h] &= \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, [h_1, h_2, \dots, h_n]] = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{|h|_{i-1}|x|_{n-1}} [h_1, \dots, h_{i-1}, [x_1, \dots, x_{n-1}, h_i], h_{i+1}, \dots, h_n], \end{aligned}$$

kus $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ ja $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Paneme tähele, et iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral $h_i \in \mathfrak{h}_i$. Kuna \mathfrak{h}_i on ideaal siis järeldub sellest, et $[x_1, \dots, x_{n-1}, h_i] \in \mathfrak{h}_i$. Kokkuvõttes on seega $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, h]$ ruumi \mathfrak{h} elementide lineaarkombinatsioon ehk $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, h] \in \mathfrak{h}$. \square

Arvestades lemmat saame defineerida järgmised mõisted.

Definitsioon 4.6. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie superalgebra ja \mathfrak{h} tema ideaal. Ideaali \mathfrak{h} poolt *tuletatud reaks* nimetatakse alamruumide jada $D^p(\mathfrak{h})$, $p \in \mathbb{N}$, kus

$$D^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \quad \text{ja} \quad D^{p+1}(\mathfrak{h}) = [D^p(\mathfrak{h}), \dots, D^p(\mathfrak{h})].$$

Ideaali \mathfrak{h} *keskseks kahanevaks reaks* nimetatakse alamruumide jada $C^p(\mathfrak{h})$, $p \in \mathbb{N}$, kus

$$C^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \quad \text{ja} \quad C^{p+1}(\mathfrak{h}) = [C^p(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}, \dots, \mathfrak{h}].$$

Definitsioon 4.7. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie superalgebra ja \mathfrak{h} tema ideaal. Me ütleme, et ideaal \mathfrak{h} on *lahenduv*, kui leidub $p \in \mathbb{N}$ nii, et $D^p(\mathfrak{h}) = \{0\}$. Ideaali \mathfrak{h} nimetatakse *nilpotentseks*, kui leidub $p \in \mathbb{N}$ nii, et $C^p(\mathfrak{h}) = \{0\}$.

Definitsioon 4.8. Me ütleme, et n -Lie superalgebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ on *lihtne*, kui tal ei ole muid ideaale peale $\{0\}$ ja iseenda ning $D^1(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Lemma 4.8. Olgu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ n -Lie superalgebra ja $g \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Siis mistahes $x_1, x_2, \dots, x_{n-2} \in \mathfrak{g}$ korral on Lie sulg arvutatuna elementide $g, g, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ suvalisel järjestusel alati null.

Tõestus. Olgu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ n -Lie superalgebra ja $g \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ ning olgu $x_1, x_2, \dots, x_{n-2} \in \mathfrak{g}$ suvalised. Oletame, et me tahame arvutada Lie sulgu elementide

$$g, g, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$$

mingil ümberjärjestusel. Kujutuse $[\cdot, \dots, \cdot]$ kaldsümmeetrilisuse tõttu on meil lõpliku arvu elementide järjekorra ümbervahetamisel võimalik jõuda olukorrani, kus g ja g on argumentidena üksteise kõrval. Selle protsessi tulemusena saame Lie sulu

$$(-1)^p [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}],$$

kus $p \in \mathbb{N}$ tähistab sooritatud ümbervahetamiste arvu ja indeksid $i_1, i_2, \dots, i_{n-2} \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ on paarikaupa erinevad. Seejuures rohkem kordajat (-1) ei esine, sest $g \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ ja seega $|g| = \bar{0}$. Lõpetuseks võime veel omakorda g ja g positsioonid ära vahetada, ning saame

$$\begin{aligned} & (-1)^p [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}] = \\ & = -(-1)^p (-1)^{|g||g|} [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}] = \\ & = (-1)^{p+1} [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}], \end{aligned}$$

ehk teisi sõnu

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}] = -[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}],$$

mis saab võimalik olla vaid juhul, kui

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, g, g, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-2}}] = 0.$$

Siis on aga ka esialgne sulg null. □

Lause 4.9. Olgu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ varustatuna sulg $[\cdot, \dots, \cdot]: \mathfrak{g}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ n -Lie superalgebra ja olgu $g \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Varustades supervektorruumi \mathfrak{g} sulga $[\cdot, \dots, \cdot]_g: \mathfrak{g}^{n-1} \rightarrow \mathfrak{g}$, mis on defineeritud valemiga

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]_g = [g, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g},$$

saame $(n-1)$ -Lie superalgebra.

Tõestus. Olgu lause eeldused täidetud ning olgu $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathfrak{g}$. Kuna $g \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, siis $|g| = \bar{0}$, ja seega

$$|[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]_g| = |[g, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]| = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| + |g| = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|.$$

Kaldsümmeetrilisuseks märgime, et

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}]_g &= \\ &= [g, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}] = \\ &= -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} [g, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n-1}] = \\ &= -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} [x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n-1}]_g. \end{aligned}$$

Veendumaks, et kehtib ka gradueeritud Filippovi samasus eeldame veel, et $y_1, y_2, \dots, y_{n-2} \in \mathfrak{g}$ ja tähistame $x = (g, x_1, \dots, x_{n-1})$ ning $y = (g, y_1, \dots, y_{n-2})$. Siis

$$\begin{aligned} [y_1, \dots, y_{n-2}, [x_1, \dots, x_{n-1}]_g]_g &= \\ &= [g, y_1, \dots, y_{n-2}, [g, x_1, \dots, x_{n-1}]] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{|x||x_{i-1}|} [g, x_1, \dots, x_{i-1}, [g, y_1, \dots, y_{n-2}, x_i], x_{i+1}, \dots, x_{n-1}] + \\ &\quad [[g, y_1, \dots, y_{n-2}, g], x_1, \dots, x_{n-1}] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{|x||x_{i-1}|} [x_1, \dots, x_{i-1}, [y_1, \dots, y_{n-2}, x_i]_g, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}]_g, \end{aligned}$$

sest lemma järgi $[g, y_1, \dots, y_{n-2}, g] = 0$. □

4.3 Indutseeritud n -Lie superalgebra

Tuginedes artiklile [1] rakendame punktis 3.2 tutvustatud eeskirja n -Lie superalgebra abil $(n+1)$ -Lie superalgebra konstrueerimiseks.

Definitsioon 4.9. Olgu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ supervektorruum ning olgu $\phi: \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}$. Lineaarkujutust $S: \mathcal{V} \rightarrow K$ nimetatakse ϕ *superjäljeks*, kui

- 1) iga $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ korral $S(\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$,
- 2) $S(x) = 0$ iga $x \in \mathcal{V}_{\bar{1}}$.

Märkus 4.2. Superjälje definitsioonis antud teine tingimus on ajendatud asjaolust, et blokkmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}$$

korral arvutatakse superjalg valemiga $S(A) = \text{Tr}(A_{00}) - \text{Tr}(A_{11})$, kus Tr on tavaline maatriksi jälg, ja A_{00}, A_{11} moodustavad paarisosa ning A_{01}, A_{10} moodustavad paaritu osa. Selge, et kui sellise maatriksi paarisosa on null, siis on tegu paaritu maatriksiga, ning tema superjalg on null.

Vaatleme n -lineaarset kujutus $\phi: \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}$, mis suvaliste homogeensete elementide $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ korral rahuldab tingimusi

$$|\phi(x_1, \dots, x_n)| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (4.17)$$

$$\phi(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n), \quad (4.18)$$

see tähendab ϕ on kooskõlas gradueeringutega ning kaldsümmeetriiline gradueeritud mõttes. Lisaks olgu meil antud kujutusele ϕ vastav superjalg $S: \mathcal{V} \rightarrow K$. Kasutades kujutusi ϕ ja S defineerime uue kujutuse $\phi_S: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow G$, mis homogeensete elementide jaoks on määratud valemiga

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||\mathbf{x}|_{i-1}} S(x_i) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}), \quad (4.19)$$

kus $|\mathbf{x}|_i = \sum_{j=1}^i |x_j|$. Mittehomogeensete elementide korral vaatleme eraldi tema paaris- ja paaritut osa, ning rakendame kujutuse (4.19) lineaarsust ja arvutame ϕ_S sel viisil.

Saadud kujutuse tähtsamad omadused võtab kokku järgmine lemma.

Lemma 4.10. *Olgu $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{V}$ homogeenised elemendid. Siis $(n+1)$ -lineaarne kujutus $\phi_S: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{g}$ rahuldab järgmisi tingimusi:*

- 1) $|\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$,
- 2) $\phi_S(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi_S(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n+1})$,
- 3) $S(\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1})) = 0$.

Tõestus. Olgu \mathcal{V} supervektorruum, rahuldagu n -lineaarne kujutus $\phi: \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}$ tingimusi (4.17) ja (4.18), ning olgu $S: \mathcal{V} \rightarrow K$ kujutuse ϕ superjalg. Kui Lisaks olgu $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{V}$ suvalised homogeenised elemendid ja tähistame $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$.

1) ...

2) Rakendame valemit (4.19) ja arvutame

$$\begin{aligned}
& \phi_S(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
& = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (-1)^{|x_j||x|_{j-1}} S(x_j) \phi_j(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
& = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq i+1}}^{n+1} (-1)^{j-1} (-1)^{|x_j||x|_{j-1}} S(x_j) \phi_j(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + \\
& \quad + (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|_{i-1}} S(x_i) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + \\
& \quad + (-1)^i (-1)^{|x_{i+1}||x|_i} S(x_{i+1}) \phi(x_1, \dots, x_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
& = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq i+1}}^{n+1} (-1)^{j-1} (-1)^{|x_j||x|_{j-1}} S(x_j) \phi_j(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n+1}) - \\
& \quad - 1(-1)^i (-1)^{|x_i||x|_{i-1}+|x_i||x_{i+1}|} (-1)^{|x_i||x_{i+1}|} S(x_i) \phi(x_1, \dots, x_{i+1}, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) - \\
& \quad - (-1)^{i-1} (-1)^{|x_{i+1}||x|_{i-1}} (-1)^{|x_{i+1}||x_i|} S(x_{i+1}) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_{i+1}, x_i, \dots, x_{n+1}) = \\
& = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi_S(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

3) Kuna S on kujutuse ϕ superjälj, siis S on lineaarne ja $S(\phi(y_1, \dots, y_n)) = 0$ mistahes elementide $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{V}$ korral. Seega

$$\begin{aligned}
& S(\phi_S(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) = \\
& = S\left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|_{i-1}} S(x_i) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})\right) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|_{i-1}} S(x_i) S(\phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} 0 = 0,
\end{aligned}$$

nagu tarvis. □

Artiklis [1] on toodud teoreem, mis ütleb, kuidas n -Lie superalgebrast superjälje abil $(n+1)$ -Lie superalgebra indutseerida saab.

Teoreem 4.11. Olgu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ n -Lie superalgebra suluga $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathfrak{g}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ ning olgu $S : \mathfrak{g} \rightarrow K$ sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ superjälj. Defineerides $(n+1)$ -lineaarse sulu

$[\cdot, \dots, \cdot]_S: \mathfrak{g}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{g}$ valemiga

$$[x_1, \dots, x_{n+1}]_S = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|_{i-1}} S(x_i) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}], \quad (4.20)$$

on supervektorruum \mathfrak{g} , varustatuna suluga (4.20) $(n+1)$ -Lie superalgebra.

Selle teoreemi valguses on selge, et lausetega 3.4 ja 3.5 analoogilised tulemused kehtivad ka n -Lie superalgebrate korral.

Lause 4.12. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie superalgebra ning olgu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ alamalgebra. Kui S on sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ superjalg, siis \mathfrak{h} on ka $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_S)$ alamalgebra. \square

Lause 4.13. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ ideaal \mathfrak{h} ja olgu S sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ superjalg. Siis \mathfrak{h} on $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_S)$ ideaal parajasti siis, kui $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ või $\mathfrak{h} \subseteq \ker S$. \square

Lause 4.14. Olgu $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ n -Lie superalgebra ja S sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ superjalg. Siis indutseeritud $(n+1)$ -Lie superalgebra $(\mathfrak{g}_S, [\cdot, \dots, \cdot]_S)$ on lahenduv.

Tõestus. Eeldame, et $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ on n -Lie superalgebra ja S tema sulu $[\cdot, \dots, \cdot]$ superjalg. Olgu

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}]_S = D^1(\mathfrak{g}_S).$$

Siis iga $i = 1, 2, \dots, n+1$ korral leiduvad $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1} \in \mathfrak{g}$ nii, et

$$x_i = [x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}]_S.$$

Sel juhul

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]_S &= \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|_{i-1}} S(x_i) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}] = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|_{i-1}} S([x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}]_S) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}] = \\ &= 0, \end{aligned}$$

sest lemma 4.10 järgi iga $i = 1, 2, \dots, n+1$ korral $S([x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}]_S) = 0$. \square

Lause tõestusest võime teha järelduse.

Järeldus 4.15. Kui S on n -Lie superalgebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ Lie sulu superjalg ja $(\mathfrak{g}_S, [\cdot, \dots, \cdot]_S)$ on vastav indutseeritud $(n+1)$ -Lie superalgebra, siis $D^p(\mathfrak{g}_S) = \{0\}$, kui $p \geq 2$. \square

Lause 4.16. Olgu n -Lie superalgebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ kommutaatori jälg S ja olgu $(\mathfrak{g}_S, [\cdot, \dots, \cdot]_S)$ neile vastav indutseeritud $(n+1)$ -Lie superalgebra. Tähistagu $(C^p(\mathfrak{g}))_{p=0}^\infty$ algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot])$ keskset kahanevat jada, ning tähistagu $(C^p(\mathfrak{g}_S))_{p=0}^\infty$ algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_S)$ keskset kahanevat jada. Siis iga $p \in \mathbb{N}$ korral

$$C^p(\mathfrak{g}_S) \subseteq C^p(\mathfrak{g}).$$

Enamgi veel, kui leidub $g \in \mathfrak{g}$ nii, et iga $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ korral $[g, x_1, \dots, x_n]_S = [x_1, \dots, x_n]$, siis kõikide $p \in \mathbb{N}$ jaoks kehtib võrdus

$$C^p(\mathfrak{g}_S) = C^p(\mathfrak{g}).$$

Tõestus. Viime tõestuse läbi kasutades matemaatilist induktsiooni. Baasjuht $p = 0$ on triviaalne, sest $C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ ja samuti $C^0(\mathfrak{g}_S) = \mathfrak{g}$.

Vaatleme juhtu $p = 1$. Siis iga $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]_S \in C^1(\mathfrak{g}_S)$ korral

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|-i-1} S(x_i) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}],$$

kus $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. See aga tähendab, et x on $C^1(\mathfrak{g})$ elementide lineaarkombinatsioon ja järelikult $x \in C^1(\mathfrak{g})$.

Oletame nüüd, et leidub $g \in \mathfrak{g}$ nii, et suvaliste $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathfrak{g}$ korral

$$[g, y_1, \dots, y_n]_S = [y_1, \dots, y_n].$$

Siis aga võib $x = [x_1, \dots, x_n] \in C^1(\mathfrak{g})$ esitada kujul $[g, x_1, \dots, x_n]_S$, mis tähendab, et $x \in C^1(\mathfrak{g}_S)$.

Oletame nüüd, et väide kehtib mingi $p \in \mathbb{N}$ korral ja vaatleme elementi $x \in C^{p+1}(\mathfrak{g}_S)$. Siis leiduvad $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$ ja $g \in C^p(\mathfrak{g}_S)$ nii, et

$$\begin{aligned} x &= [g, x_1, x_2, \dots, x_n]_S = \\ &= -(-1)^{|g||x_1|} [x_1, g, x_2, \dots, x_n]_S = \\ &= \dots = \\ &= (-1)^n (-1)^{|a||x|-n} [x_1, x_2, \dots, x_n, g]_S = \\ &= (-1)^{n+|a||x|-n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|-i-1} S(x_i) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, a] + \\ &\quad (-1)^{n+|a||x|-n} (-1)^n (-1)^{|a||x|-n} S(g) [x_1, \dots, x_n] = \\ &= (-1)^{n+|a||x|-n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i||x|-i-1} S(x_i) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, g], \end{aligned}$$

sest $S(g) = 0$, kuna $g \in C^p(\mathfrak{g}_S)$ ja seega on ta esitatav mingite elementide Lie suluna. Teisalt, et $g \in C^p(\mathfrak{g}_S)$, siis meie induktiivse eelduse põhjal $g \in C^p(\mathfrak{g})$, ja seega $x \in C^{p+1}(\mathfrak{g})$.

Tõestuse lõpetuseks eeldame, et leidub $g \in \mathfrak{g}$ nii, et iga $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathfrak{g}$ korral

$$[g, y_1, \dots, y_n]_S = [y_1, \dots, y_n].$$

Kui nüüd $x \in C^{p+1}(\mathfrak{g})$, siis $x = [h, x_1, \dots, x_{n-1}]$, kus $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathfrak{g}$ ja $h \in C^p(\mathfrak{g})$. Kokkuvõttes saame, et

$$x = [h, x_1, \dots, x_{n-1}] = [g, h, x_1, \dots, x_{n-1}]_S = -(-1)^{|g||h|}[h, g, x_1, \dots, x_{n-1}]_S.$$

Samas $h \in C^p(\mathfrak{g}) = C^p(\mathfrak{g}_S)$ ja seega $[h, g, x_1, \dots, x_{n-1}]_S \in C^{p+1}(\mathfrak{g}_S)$, millest saame, et $x \in C^{p+1}(\mathfrak{g}_S)$. \square

5 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

5.1 $(2, 1)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud $(2, 1)$ 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, e_2, f_1\}$, kus e_1 ja e_2 on paaris- ja f_1 on paaritu baasivektor.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 [e_1, e_1, e_1] &= 0, \\
 [e_1, e_1, e_2] &= 0, \\
 [e_1, e_1, f_1] &= 0, \\
 [e_1, e_2, e_2] &= 0, \\
 [e_1, e_2, f_1] &= m_1 \cdot f_1, \\
 [e_1, f_1, f_1] &= l_1 \cdot e_1 + l_2 \cdot e_2, \\
 [e_2, e_2, e_2] &= 0, \\
 [e_2, e_2, f_1] &= 0, \\
 [e_2, f_1, f_1] &= l_3 \cdot e_1 + l_4 \cdot e_2, \\
 [f_1, f_1, f_1] &= m_2 \cdot f_1,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

kus $m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $-m_1 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
5. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0$,
6. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0$,
8. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
9. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0$,
10. $l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0$,

11. $m_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0,$
12. $-l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$
13. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$
14. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_1 = 0,$
15. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$
16. $l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_2 = 0,$
17. $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 - l_2 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_2 = 0,$
18. $l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$
19. $l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$
20. $-l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0,$
21. $-l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$
22. $-l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$
23. $-l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$
24. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$
25. $l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 - l_3 \cdot m_2 - l_3 \cdot m_2 = 0,$
26. $l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 - l_4 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_2 = 0,$
27. $m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 = 0,$
28. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
29. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 = 0,$
30. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 = 0,$
31. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 + l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 = 0,$
32. $m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 = 0.$

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_1 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_1 \cdot m_1 = 0$,
5. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
6. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0$,
8. $l_1 \cdot m_2 = 0$,
9. $l_2 \cdot m_2 = 0$,
10. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
11. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
12. $l_4 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_2 = 0$,
13. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
14. $l_3 \cdot m_2 = 0$,
15. $l_4 \cdot m_2 = 0$,
16. $m_1 \cdot m_2 = 0$,
17. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 = 0$,
18. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 = 0$,
19. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 = 0$,
20. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 = 0$,
21. $m_2 \cdot m_2 = 0$.

Sellel võrrandisüsteemil on kolm mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ -\frac{c_1^2}{c_2} \\ -c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (5.1) saame kommutatsiooniseosed:

- $\begin{cases} [e_1, f_1, f_1] = c_1 e_1 + c_2 e_2, \\ [e_2, f_1, f_1] = -\frac{c_1^2}{c_2} e_1 - c_1 e_2 \end{cases},$
- $[e_1, e_2, f_1] = c f_1,$
- $[e_2, f_1, f_1] = c e_1.$

5.2 (1, 2) 3-Lie superalgebra klassifikatsioon

Olgu meil antud (1, 2) 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, f_1, f_2\}$, kus e_1 on paaris- ja f_1, f_2 on paaritud baasivektorid.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$\begin{aligned}
[e_1, e_1, e_1] &= 0, \\
[e_1, e_1, f_1] &= 0, \\
[e_1, e_1, f_2] &= 0, \\
[e_1, f_1, f_1] &= l_1 \cdot e_1, \\
[e_1, f_1, f_2] &= l_2 \cdot e_1, \\
[e_1, f_2, f_2] &= l_3 \cdot e_1, \\
[f_1, f_1, f_1] &= m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2, \\
[f_1, f_1, f_2] &= m_3 \cdot f_1 + m_4 \cdot f_2, \\
[f_1, f_2, f_2] &= m_5 \cdot f_1 + m_6 \cdot f_2, \\
[f_2, f_2, f_2] &= m_7 \cdot f_1 + m_8 \cdot f_2,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

kus $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 = 0,$
2. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
3. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
4. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
5. $l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
6. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_7 - l_2 \cdot m_8 = 0,$
7. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 = 0,$
8. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 = 0,$
9. $l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 = 0,$
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 + l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 = 0,$
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 = 0,$
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 = 0,$

14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0,$
15. $m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0,$
16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
17. $m_1 \cdot m_5 + m_2 \cdot m_7 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0,$
18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_3 = 0,$
20. $m_2 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0,$
21. $m_1 \cdot m_3 + m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0,$
22. $m_3 \cdot m_4 + m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0,$
24. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - m_4 \cdot m_8 = 0,$
25. $m_3 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0,$
26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 = 0,$
27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
28. $m_2 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
29. $m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_2 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 = 0,$
30. $m_4 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 = 0,$
31. $m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 = 0,$
32. $m_5 \cdot m_6 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 = 0,$
33. $m_5 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 = 0,$
34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 = 0,$
36. $m_2 \cdot m_7 + m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 = 0,$
37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 = 0,$

38. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 = 0$,
39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 = 0$,
40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 = 0$,
41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 = 0$.

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 = 0$,
2. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0$,
3. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0$,
4. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0$,
5. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 + l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0$,
6. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 + l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 = 0$,
7. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 = 0$,
8. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 = 0$,
9. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 = 0$,
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 = 0$,
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 = 0$,
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 = 0$,
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 = 0$,
14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - 3 \cdot m_2 \cdot m_3 - 3 \cdot m_4 \cdot m_4 = 0$,
15. $m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_3 \cdot m_4 - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 = 0$,
16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - 3 \cdot m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_6 = 0$,
17. $m_2 \cdot m_7 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_1 \cdot m_5 = 0$,
18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 = 0$,
19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_3 = 0$,

20. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 = 0,$
21. $m_2 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_3 = 0,$
22. $m_3 \cdot m_4 + 2 \cdot m_4 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_5 = 0,$
23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 = 0,$
24. $m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 - 2 \cdot m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 = 0,$
25. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0,$
26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 = 0,$
27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
28. $m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - 2 \cdot m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
29. $m_3 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_3 \cdot m_3 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 = 0,$
30. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 + m_6 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_5 = 0,$
31. $m_4 \cdot m_7 + 2 \cdot m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 = 0,$
32. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 = 0,$
33. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 = 0,$
34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 = 0,$
36. $m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_4 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 = 0,$
37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_7 = 0,$
38. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_6 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_6 = 0,$
39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_5 - 3 \cdot m_6 \cdot m_7 = 0,$
40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 = 0,$
41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 = 0.$

Sellel võrrandisüsteemil on neli mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \frac{c_1^2}{c_2} \\ -c_2 \\ c_1 \\ -\frac{c_2^2}{c_1} \\ c_2 \\ -\frac{c_2^3}{c_1^2} \\ \frac{c_2^2}{c_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (5.2) saame kommutatsiooniseosed:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \begin{cases} [f_1, f_1, f_1] = -c_1 \cdot f_1 + \frac{c_1^2}{c_2} \cdot f_2, \\ [f_1, f_1, f_2] = -c_2 \cdot f_1 + c_1 \cdot f_2, \\ [f_1, f_2, f_2] = -\frac{c_2^2}{c_1} \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2, \\ [f_2, f_2, f_2] = -\frac{c_2^3}{c_1^2} \cdot f_1 + \frac{c_2^2}{c_1} \cdot f_2, \end{cases} \\
 & \bullet [f_2, f_2, f_2] = c \cdot f_1, \\
 & \bullet [f_1, f_1, f_1] = c \cdot f_2, \\
 & \bullet [e_1, f_1, f_2] = c \cdot e_1.
 \end{aligned}$$

Viited

- [1] Viktor Abramov. Super 3-Lie Algebras Induced by Super Lie Algebras. 2014.
- [2] Joakim Arnlind, Abdenmour Kitouni, Abdenacer Makhoul, and Sergei Silvestrov. Structure and Cohomology of 3-Lie algebras induced by Lie algebras. 85:123–144, 2014.
- [3] Joakim Arnlind, Abdenacer Makhoul, and Sergei Silvestrov. Construction of n -Lie algebras and n -ary Hom-Nambu-Lie algebras. 52(12), 2011.
- [4] Johan G. F. Belinfante and Bernard Kolman. *A Survey of Lie Groups and Lie Algebra with Applications and Computational Methods*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [5] N. Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 1-3*. Bourbaki, Nicolas: Elements of mathematics. Hermann, 1989.
- [6] V.T. Filippov. n -Lie algebras. *Siberian Mathematical Journal*, 26(6):879–891, 1985.
- [7] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [8] Gerhard Hochschild. An addition to Ado’s theorem. 17:531–533, 1966.
- [9] Sh.M. Kasymov. Theory of n -Lie algebras. *Algebra and Logic*, 26(3):155–166, 1987.
- [10] Alexander Kirillov. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [11] Priit Lätt. Minkowski aegruumi geomeetriast. 2013.
- [12] Leon Takhtajan. On foundation of the generalized Nambu mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 160(2):295–315, 1994.