1 Indutseeritud n-Lie algebra

Edasises eeldame, et kõik vektoruumid on üle vaadeldud üle 0-karakteristikaga korpuse $\mathbb{K}$.

Definitsioon 1.1 (Lie algebra)**.** Vektorruumi A nimetatakse *Lie algebraks*, kui on määratud bilineaarvorm $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$, mis suvaliste $x, y, z \in A$ korral rahuldab tingimusi

- $[x, y] = -[y, x]$,
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

Bilineaarvormi $[\cdot,\cdot]$ Lie algebra definistioonis nimetatakse selle Lie algebra suluks. Edaspidi tähistame konkreetsuse mõttes sageli Lie suluga $[\cdot,\cdot]$ varustatud vektorruumi A paarina $(A, [\cdot,\cdot])$.

Definitsioon 1.2 (n-Lie algebra)**.** Vektorruumi A nimetatakse *n-Lie algebraks*, kui on määratud n-lineaarne kaldsümmeetriline kujutus $[\cdot,\ldots,\cdot] : A^n \times A \to A$, mis suvaliste

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_n \in A$$

korral rahuldab tingimust

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, [y_1, \ldots, y_n]] = \sum_{i=1}^{n} [y_1, \ldots, [x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i], \ldots, y_n].$$

Definitsioon 1.3 (Jälg)**.** Olgu A vektorruum ning olgu $\phi\colon A^n \to A$. Me ütleme, et lineaarkujutus $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ on *ϕ-jälg*, kui suvaliste $x_1, \ldots, x_n \in A$ korral $\tau(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = 0$.

Olgu $\phi\colon A^n \to A$ n-lineaarne ja $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ lineaarne kujutus. Defineerime nende kujutuste abil uue $(n+1)$-lineaarse kujutuse $\phi_\tau\colon A^{n+1} \to A$ valemiga

$$\phi_\tau(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1}), \tag{1}$$

kus $\hat{x_i}$ tähistab kõrvalejäätavat elementi, see tähendab $\phi(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$ arvutatakse elementidel $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$.

Rikastame defineeritud kujutust ühe näitega. Võttes $n = 2$ saame valemi 1 põhjal kirjutada

$$\phi_\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1)\phi(x_2, x_3) - \tau(x_2)\phi(x_1, x_3) + \tau(x_3)\phi(x_1, x_2).$$

Edasises toome ära mõningad kujutuse ϕ_τ tähtsamad omadused.

Lemma 1.1. *Olgu A vektorruum ning $\phi\colon A^n \to A$ n-lineaarne kaldsümmeetriline kujutus ja $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ lineaarne. Siis kujutus $\phi_\tau\colon A^{n+1} \to A$ on samuti kaldsümmeetriline. Lisaks, kui τ on ϕ-jälg, siis τ on ka ϕ_τ-jälg.*

Teoreem 1.2. *Olgu (A, ϕ) n-Lie algebra ning olgu τ lineaarkujutuse ϕ-jälg. Siis (A, ϕ_τ) on $(n+1)$-Lie algebra.*

Teoreemis kirjeldatud viisil saadud $(n+1)$-Lie algebrat (A, ϕ_τ) nimetatakse n-Lie algebra (A, ϕ) poolt *indutseeritud* $(n+1)$-Lie algebraks.

Teoreemist 1.2 saame teha olulise järlduse:

Järeldus 1.3. *Olgu $(A, [\cdot,\cdot])$ Lie algebra ning olgu antud $[\cdot,\cdot]$ jälg $\tau\colon A \to \mathbb{K}$. Siis ternaarne sulg $[\cdot,\cdot,\cdot]\colon A^3 \to A$, mis on defineeritud valemiga*

$$[x, y, z] = \tau(x)[y, z] + \tau(y)[z, x] + \tau(z)[x, y],$$

määrab 3-Lie algebra struktuuri A_τ vektorruumil A.

2 n-Lie superalgebra

Järgnevas eeldame, et meil on antud supervektorruum ehk supervektorruum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ ning n-lineaarne kujutus $\phi\colon \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

- $|\phi(x_1, \ldots, x_n)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $\phi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\phi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)$,

kus $|x| \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tähistab elemendi x paartust. Samuti eeldame, et $S\colon \mathcal{G} \to \mathbb{K}$ on lineaarne kujutus, mis rahuldab

- $S(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = 0$,
- $S(x) = 0$ iga $x \in \mathcal{G}_{\bar{1}}$.

Selge, et siin sisse toodud kujutused ϕ ja S on eelnevas kirjeldatu analoogid supervektorruumis. Seejuures kujutust $S\colon \mathcal{G} \to \mathbb{K}$ nimetatakse *superjäljeks.*

Kasutades kujutusi ϕ ja S defineerime analoogiliselt vektorruumide situatsioonile, kuid nüüd juba supervektorruumi iseärasusi arvesse võttes, see tähendab paarsusi arvestades, uue kujutuse $\phi_S\colon \mathcal{G}^{n+1} \to G$ valemiga

$$\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}(-1)^{|x_i|\sum_{j=1}^{i-1}|x_j|} S(x_i)\phi(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Saadud kujutuse tähtsamad omadused võtab kokku järgmine oluline lemma:

Lemma 2.1. *$(n+1)$-lineaarne kujutus $\phi_S\colon \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ rahuldab tingimusi*

1. $|\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$,
2. $\phi_S(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\phi_S(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_{n+1})$,
3. $S(\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}))$.

Üldistame nüüd definitsiooni 1.1 supervektorruumi jaoks ning defineerime *n-Lie superalgebra.*

Definitsioon 2.1 (n-Lie superalgebra)**.** Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ supervektorruum. Me ütleme, et $\mathcal{G}$ on *n-Lie superalgebra*, kui $\mathcal{G}$ on varustatud gradueeritud n-Lie suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

1. $|[x_1, \ldots, x_n]| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
2. $[x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}[x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n]$,
3. $[y_1, \ldots, y_{n-1}, [x_1, \ldots, x_n]] =$
   $= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_x(i-1)\tau_y(n-1)} [x_1, \ldots, x_{i-1}, [y_1, \ldots, y_{n-1}, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n]$,

kus $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ ning $\tau_x(k) = \sum_{j=1}^{k-1} |x_i|$.

Võttes arvesse n-Lie superalgebra definitsiooni saame sõnastada teoreemi 1.2 superanaloogi järgmiselt:

Teoreem 2.2. *Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ n-Lie superalgebra suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, ning V lõplikumõõtmeline vektorruum ja olgu antud $\mathcal{G}$ esitus $\phi\colon \mathcal{G} \to \mathrm{gl}\, V$. Defineerides $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ valemiga*

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=1} n + 1(-1)^{i-1}(-1)^{|x_i|\tau_x(i-1)} S(\phi(x_i)) [x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}],$$

on supervektorruum $\mathcal{G}$, varustatuna suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ $(n+1)$-Lie superalgebra.