

1 Indutseeritud n -Lie algebra

See peatükk tugineb artiklile [2]

Edasises eeldame, et kõik vektorruumid on üle vaadeldud üle 0-karakteristikaga korpuse \mathbb{K} .

Definitsioon 1.1 (Lie algebra). Vektorruumi A nimetatakse *Lie algebraks*, kui on määratud bilineaarvorm $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$, mis suvaliste $x, y, z \in A$ korral rahuldab tingimusi

- $[x, y] = -[y, x]$,
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

Bilineaarvormi $[\cdot, \cdot]$ Lie algebra definitsioonis nimetatakse selle Lie algebra suluks. Edaspidi tähistame konkreetsuse mõttes sageli Lie suluga $[\cdot, \cdot]$ varustatud vektorruumi A paarina $(A, [\cdot, \cdot])$.

Definitsioon 1.2 (n -Lie algebra). Vektorruumi A nimetatakse *n -Lie algebraks*, kui on määratud n -lineaarne kaldsümmeetriline kujutus $[\cdot, \dots, \cdot] : A^n \times A \rightarrow A$, mis suvaliste

$$x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_n \in A$$

korral rahuldab tingimust

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, [y_1, \dots, y_n]] = \sum_{i=1}^n [y_1, \dots, [x_1, \dots, x_{n-1}, y_i], \dots, y_n].$$

Definitsioon 1.3 (Jälg). Olgu A vektorruum ning olgu $\phi : A^n \rightarrow A$. Me ütleme, et lineaarkujutus $\tau : A \rightarrow \mathbb{K}$ on ϕ -jälg, kui suvaliste $x_1, \dots, x_n \in A$ korral $\tau(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 0$.

Olgu $\phi : A^n \rightarrow A$ n -lineaarne ja $\tau : A \rightarrow \mathbb{K}$ lineaarne kujutus. Defineerime nende kujutuste abil uue $(n+1)$ -lineaarse kujutuse $\phi_\tau : A^{n+1} \rightarrow A$ valemiga

$$\phi_\tau(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}), \quad (1)$$

kus \hat{x}_i tähistab kõrvalejäävat elementi, see tähendab $\phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ arvutatakse elementidel $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}$.

Rikastame defineeritud kujutust ühe näitega. Võttes $n = 2$ saame valemi 1 põhjal kirjutada

$$\phi_\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1)\phi(x_2, x_3) - \tau(x_2)\phi(x_1, x_3) + \tau(x_3)\phi(x_1, x_2).$$

Edasises toome ära mõningad kujutuse ϕ_τ tähtsamad omadused.

Lemma 1.1. Olgu A vektorruum ning $\phi: A^n \rightarrow A$ n -lineaarne kaldsümmeetriline kujutus ja $\tau: A \rightarrow \mathbb{K}$ lineaarne. Siis kujutus $\phi_\tau: A^{n+1} \rightarrow A$ on samuti kaldsümmeetriline. Lisaks, kui τ on ϕ -jälg, siis τ on ka ϕ_τ -jälg.

Teoreem 1.2. Olgu (A, ϕ) n -Lie algebra ning olgu τ linearkujutuse ϕ -jälg. Siis (A, ϕ_τ) on $(n+1)$ -Lie algebra.

Teoreemis kirjeldatud viisil saadud $(n+1)$ -Lie algebrat (A, ϕ_τ) nimetatakse n -Lie algebra (A, ϕ) poolt *indutseeritud* $(n+1)$ -Lie algebraks.

Teoreemist 1.2 saame teha olulise järelduse:

Järeldus 1.3. Olgu $(A, [\cdot, \cdot])$ Lie algebra ning olgu antud $[\cdot, \cdot]$ jälg $\tau: A \rightarrow \mathbb{K}$. Siis ternaarne sulg $[\cdot, \cdot, \cdot]: A^3 \rightarrow A$, mis on defineeritud valemiga

$$[x, y, z] = \tau(x)[y, z] + \tau(y)[z, x] + \tau(z)[x, y],$$

määrab 3-Lie algebra struktuuri A_τ vektorruumil A .

2 n -Lie superalgebra

See peatükk tugineb artiklile [1]

Järgnevas eeldame, et meil on antud supervektorruum ehk supervektorruum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ ning n -lineaarne kujutus $\phi: \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

- $|\phi(x_1, \dots, x_n)| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$
- $\phi(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n),$

kus $|x| \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tähistab elemendi x paartust. Samuti eeldame, et $S: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{K}$ on lineaarne kujutus, mis rahuldab

- $S(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 0,$
- $S(x) = 0$ iga $x \in \mathcal{G}_{\bar{1}}$.

Selge, et siin sisse toodud kujutused ϕ ja S on eelnevas kirjeldatu analoogid supervektorruumis. Seejuures kujutust $S: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{K}$ nimetatakse *superjäljeks*.

Kasutades kujutusi ϕ ja S defineerime analoogiliselt vektorruumide situatsioonile, kuid nüüd juba supervektorruumi iseärasusi arvesse võttes, see tähendab paarsusi arvestades, uue kujutuse $\phi_S: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ valemiga

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i| \sum_{j=1}^{i-1} |x_j|} S(x_i) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

Saadud kujutuse tähtsamad omadused võtab kokku järgmine oluline lemma:

Lemma 2.1. $(n+1)$ -lineaarne kujutus $\phi_S: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ rahuldab tingimusi

1. $|\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|,$
2. $\phi_S(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi_S(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n+1}),$
3. $S(\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1})).$

Üldistame nüüd definitsiooni 1.1 supervektorruumi jaoks ning defineerime n -Lie superalgebra.

Definitsioon 2.1 (n -Lie superalgebra). Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ supervektorruum. Me ütleme, et \mathcal{G} on n -Lie superalgebra, kui \mathcal{G} on varustatud gradueeritud n -Lie suluga $[\cdot, \dots, \cdot]: \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

1. $|[x_1, \dots, x_n]| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$
2. $[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} [x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n],$
3. $[y_1, \dots, y_{n-1}, [x_1, \dots, x_n]] =$
 $= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_x(i-1)\tau_y(n-1)} [x_1, \dots, x_{i-1}, [y_1, \dots, y_{n-1}, x_i], x_{i+1}, \dots, x_n],$

kus $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ ning $\tau_x(k) = \sum_{j=1}^{k-1} |x_j|.$

Võttes arvesse n -Lie superalgebra definitsiooni saame sõnastada teoreemi 1.2 superanalooži järgmiselt:

Teoreem 2.2. Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ n -Lie superalgebra suluga $[\cdot, \dots, \cdot]: \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}$, ning V lõplikumõõtmeline vektorruum ja olgu antud \mathcal{G} esitus $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \text{gl } V$. Defineerides $[\cdot, \dots, \cdot]: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ valemiga

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} n+1(-1)^{i-1}(-1)^{|x_i|\tau_x(i-1)} S(\phi(x_i)) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}],$$

on supervektorruum \mathcal{G} , varustatuna suluga $[\cdot, \dots, \cdot]: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ $(n+1)$ -Lie superalgebra.

Viited

- [1] Viktor Abramov. Super 3-Lie Algebras Induced by Super Lie Algebras. 2014.
- [2] Joakim Arnlind, Abdenmour Kitouni, Abdenacer Makhlouf, and Sergei Silvestrov. Structure and cohomology of 3-lie algebras induced by lie algebras. 85:123–144, 2014.