

Sisukord

1	Lie algebra	2
1.1	Matriksrühmad ja bilineaarvorm	2
1.2	Eksponentsiaalkujutus	6
1.3	Lie algebra definitsioon	8
1.4	Struktuurikonstandid	9
1.5	Esitused	12
2	n-Lie algebra	14
2.1	n -Lie algebra definitsioon	14
2.2	Indutseeritud n -Lie algebra	15
3	n-Lie superalgebra	19
4	Madaladimensionaalsete 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon	21
4.1	$(2, 1)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon	21
4.2	$(1, 2)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon	23

1 Lie algebra

Matemaatika haru, mida me täna tunneme kui *Lie teooriat* kerkis esile geomeetria ja lineaaralgebra uurimisest. Lie teooria üheks keskseks mõisteks on *Lie algebra* - vektorruum, mis on varustatud mitteassotsiatiivse korrutamisega ehk nõndanimetatud *Lie suluga*. Lie algebrad ja nende uurimine on tihedalt seotud teise Lie teooria keskse mõistega, milleks on *Lie rühm*. Viimased on struktuurid, mis on korraga nii algebralised rühmad kui ka topoloogilised muutkonnad, kusjuures rühma korrutamine ja selle pöördtehe on mõlemad pidevad. Osutub, et igale Lie rühmale saab vastavusse seada Lie algebra, kuid üldjuhul kahjuks vastupidine väide ei kehti. Samas on võimalik näidata pisut nõrgem tulemus: suvalise lõplikumõõtmelise reaalsele või komplekssele Lie algebra jaoks leidub temale üheselt vastav sidus Lie rühm.[10] Just selle viimase, nõndanimetatud *Lie kolmanda teoreemi* tõttu on võimalik Lie rühmasid vaadelda Lie algebrate kontekstis ja see teebki Lie algebrad äärmiselt oluliseks.

Tähistagu kõikjal järgnevas K nullkarakteristikaga korpust ning \mathcal{V} vektorruumi üle korpuse K . Ruumi kokkuhoiu ja mugavuse mõttes kasutame edaspidi vajaduse korral summade tähistamisel Einsteini summeerimiskokkulepet. Teisi sõnu, kui meil on indeksid i ja j , mis omavad väärtusi $1, \dots, n$, kus $n \in \mathbb{N}$, siis jätame vahel summeerimisel summanärgi kirjutamata ning säilitame summeerimise tähistamiseks vaid indeksid. Einsteini summeeruvuskokkulepet arvestades kehtivad näiteks järgmised võrdused:

$$\begin{aligned}x^i e_i &= \sum_{a=1}^n x^a e_a = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n, \\ \lambda_j^i x^j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^i x^j = \lambda_1^i x^1 + \lambda_2^i x^2 + \dots + \lambda_n^i x^n, \\ \eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \dots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \dots + \eta_{nn} u^n v^n,\end{aligned}$$

ja nii edasi.

Järgnevas anname minimaalse ülevaate klassikalisest Lie algebrate teooriast, mida on tarvis edasiste peatükkide mõistmiseks.

1.1 Maatriksrühmad ja bilineaarvorm

Meenutame, et *lineaarkujutus* $\phi: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ vektorruumist \mathcal{V}_1 vektorruumi \mathcal{V}_2 säilitab vektorite liitmise ja skalaariga korrutamise, see tähendab

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$$

ning

$$\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x),$$

kus $x, y \in \mathcal{V}_1$ ja λ on skalaar. Kui vektorruumid \mathcal{V}_1 ja \mathcal{V}_2 langevad kokku, siis ütleme me kujutuse ϕ kohta *lineaarteisendus*.

Algebrast on teada, et lineaarteisendusel eksisteerib pöördteisendus siis ja ainult siis, kui ta on nii üks-ühene kui ka pealeteisendus. Kõigi vektorruumi \mathcal{V} pööratavate lineaarteisenduste rühma nimetatakse vektorruumi \mathcal{V} *pööratavate lineaarteisenduste rühmaks*¹ ja tähistatakse $GL(\mathcal{V})$. Selge, et selle rühma korrumamiseks on tavaline lineaarteisenduste kompositsioon.

Et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisendus on pööratav parajasti siis kui tema determinant on nullist erinev, siis rühma $GL(\mathcal{V})$ kuuluvad need ja ainult need lineaarteisendused, mille determinant pole null. Kui vaatleme vaid lineaarteisendusi, mille determinant on üks, saame olulise alamrühma $SL(\mathcal{V})$, mida nimetatakse vektorruumi \mathcal{V} *spetsiaalsete lineaarteisenduste rühmaks*.

Et igal vektorruumil leidub baas, siis võime vektorruumi \mathcal{V} jaoks fikseerida mingi baasi. Sel juhul saame kõik lineaarteisendused esitada maatriksitena ning nõnda võime edaspidi lineaarteisenduste rühmade asemel rääkida *maatriksrühmadest*. Kui $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ moodustab vektorruumi \mathcal{V} baasi ning $\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ on mingi lineaarteisendus, siis talle vastav maatriks selle baasi suhtes on (a_j^i) , mis on määratud valemiga

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i.$$

Selge, et vaadeldes rühmi $GL(\mathcal{V})$ ja $SL(\mathcal{V})$ maatriksrühmadena on rühma tehniks juba tavaline maatriksite korrumamine. Ilmselt saab nimetatud maatriksrühmad defineerida suvalise korpuste jaoks, ja nii ka reaali- ning kompleksarvude korral. Sellest lähtuvalt kasutatakse sageli nullist erineva determinandiga $n \times n$ maatriksrühmade tähistuseks $GL(n, \mathbb{R})$ või $GL(n, \mathbb{C})$, ning neid rühmi nimetame vastavalt *reaalsete pööratavate lineaarteisenduste rühmaks* ja *komplekssete pööratavate lineaarteisenduste rühmaks*. Analoogiliselt on kasutusel tähistused $SL(n, \mathbb{R})$ ja $SL(n, \mathbb{C})$.

Rühmal $GL(n, \mathbb{C})$ on palju tuntud alamrühmi. Klassikaliseks näiteks on $n \times n$ *ortogonaalsete maatriksite rühm* $O(n, \mathbb{C})$, kuhu kuuluvad ortogonaalsed maatriksid, see tähendab sellised maatriksid A , mille korral $A^T = A^{-1}$. Teise näitena võib tuua unitaarsete maatriksite rühma $U(n)$, mille elementideks on anti-Hermite'i maatriksid A , mis rahuldavad tingimust $A^\dagger = \overline{A}^T = -A$. Edasi on lihtne konstrueerida saadud alamrühmade *spetsiaalsed* variandid. *Spetsiaalsete komplekssete*

¹Inglise keeles *general linear group*.

ortogonaalmaatriksite rühm on

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}),$$

ja spetsiaalsete unitaarsete maatriksite rühmaks on

$$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}).$$

Definitsioon 1.1. Olgu \mathcal{V} vektorruum üle korpuse K . Kujutust $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ nimetatakse *bilineaarvormiks*, kui iga $x, y, z \in \mathcal{V}$ ja skalaaride $\lambda, \mu \in K$ korral

- i. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z),$
- ii. $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z).$

Kui vektorruumis \mathcal{V} on antud baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, siis saab bilineaarvormi $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ esitada talle vastava maatriksi $B = (b_{ij})$ abil, kus $b_{ij} = (e_i, e_j)$. Tõepoolest, kui meil on antud vektorid $x = \sum_i \lambda^i e_i$ ja $y = \sum_j \mu^j e_j$, siis kasutades (\cdot, \cdot) linearsust mõlema muutuja järgi võime arvutada

$$(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} \lambda^i \mu^j.$$

Me ütleme, et bilineaarvorm $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$ on *sümmeetriline* kui iga $x, y \in \mathcal{V}$ korral $(x, y) = (y, x)$. Selge, et sümmeetrilise bilineaarvormi maatriksi B korral kehtib võrdus $B = B^T$. Vormi (\cdot, \cdot) nimetatakse *kaldsümmeetriliseks* kui iga $x, y \in \mathcal{V}$ korral kehtib võrdus $(x, y) = -(y, x)$. Lihtne on veenduda, et kaldsümmeetrilise bilineaarvormi korral rahuldab talle vastav maatriks B seost $B^T = -B$.

Definitsioon 1.2. Olgu \mathcal{V} vektorruum kus on fikseeritud mingi baas, olgu ϕ vektorruumi \mathcal{V} lineaarteisendus ning olgu $A = (a_j^i)$ on lineaarteisenduse ϕ maatriks fikseeritud baasi suhtes. Lineaarteisenduse ϕ *jäljeks* nimetatakse kujutust $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}} : \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \rightarrow K$, kus

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}(A) = \sum_i a_i^i.$$

Juhul kui maatriksi A korral $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}} A = 0$, siis ütleme, et maatriks A on *jäljeta*.

Näide 1.1. On hästi teada, et vektorruumi \mathcal{V} kõigi lineaarteisenduste hulk $\mathrm{Lin} \mathcal{V}$ on ise ka vektorruum, kusjuures kui vektorruumi \mathcal{V} dimensioon on $\dim(\mathcal{V}) = n$, siis ruumi $\mathrm{Lin} \mathcal{V}$ dimensioon on $\dim(\mathrm{Lin} \mathcal{V}) = n^2$. Kasutades jälge $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}$ saame defineerida bilineaarvormi $(\cdot, \cdot) : \mathrm{Lin} \mathcal{V} \times \mathrm{Lin} \mathcal{V} \rightarrow K$ järgmiselt:

$$(A, B) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}(AB),$$

kus A ja B on maatriksid, mis vastavad vektorruumi $\mathrm{Lin} \mathcal{V}$ teisendustele mingi baasi suhtes. Selge, et selliselt defineeritud bilineaarvorm sümmeetriline.

Kasutades bilineaarvormi sümmeetrilisuse või kaldsümmeetrilisuse mõistet saame sisse tuua *ortogonaalsuse* mõiste. Me ütleme, et vektorid x ja y on bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes ortogonaalsed, kui $(x, y) = 0$. Selge, et ortogonaalsuse tingimus ise on sümmeetriline, see tähendab kui x on ortogonaalne vektoriga y , siis kehtib ka vastupidine, y on ortogonaalne vektoriga x . Kui vektor $x \neq 0$ on iseenesega ortogonaalne, see tähendab $(x, x) = 0$, siis nimetatakse vektorit x *isotroopseks*. Selge, et Eukleidilises geomeetrias selliseid vektoreid ei leidu, kuid üldisemates situatsioonides esinevad nad küllaltki sageli, näiteks *Minkowski aegruumis*.

Edasises vaatleme ortogonaalseid ja sümplektilisi rühmi ning selleks nõuame, et vaatluse all olevad bilineaarvormid oleksid mittesingulaarsed ehk regulaarsed, see tähendab kui $(x, y) = 0$ iga $y \in \mathcal{V}$ korral, siis järelikult $x = 0$. Osutub, et bilineaarvorm (\cdot, \cdot) on regulaarne parajasti siis, kui temale vastav maatriks $B = (b_j^i)$ on pööratav, mis tähendab, et $\det B \neq 0$.

Definitsioon 1.3. Me ütleme, et lineaarne operaator ϕ on *ortogonaalne* regulaarse sümmeetrilise bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes, kui

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist \mathcal{V} .

Kui x on ortogonaalse lineaarse operaatori ϕ tuumast, siis kehtib $\phi(x) = 0$. Viimane aga tähendab, et iga $y \in \mathcal{V}$ korral $(x, y) = (\phi(x), \phi(y)) = (0, \phi(y)) = 0$. Kokkuvõttes, et (\cdot, \cdot) on regulaarne, siis järelikult $x = 0$ ja ϕ on üks-ühene. Kui nüüd veel \mathcal{V} on lõplikumõõtmeline, siis peab ϕ olema pööratav. Seda arutelu silmas pidades võime öelda, et ortogonaalsed lineaarsed operaatorid moodustavad rühma, mida me nimetame *ortogonaalsete lineaarteisenduste rühmaks* bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes. Võttes tarvitusele vektorruumi \mathcal{V} baasi saame konstrueerida ka *ortogonaalsete maatriksite rühma*, mida tähistatakse komplekssel juhul kui $O(n, \mathbb{C})$, kus $n \in \mathbb{N}$ märgib, et tegu on $n \times n$ maatriksitega.

Sümplektiliste teisenduste tarvis tuleb vaadelda kaldsümmeetrilisi bilineaarvorme.

Definitsioon 1.4. Me ütleme, et lineaarne operaator ϕ on *sümplektiline* regulaarse kaldsümmeetrilise bilineaarvormi (\cdot, \cdot) suhtes, kui

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist \mathcal{V} .

Märgime, et sümplektilised lineaarteisendused leiduvad ainult sellistes vektorruumides, mille dimensioon on paarisarvuline, see tähendab $\dim \mathcal{V} = 2n$, kus

$n \in \mathbb{N}$. Sümplektilised teisendused moodustavad *sümplektiliste rühma*, mida tähistatakse kompleksel juhul $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$. Reaalsete sümplektiliste teisenduste rühma saame kui vaatleme ühisosa rühmaga $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}).$$

1.2 Eksponentsiaalkujutus

Kõikide seni käsitle all olnud maatriksrühmade esindajad peavad vastavatesse rühmadesse kuulumiseks rahuldama mingeid algebralisi tingimusi. Need tingimused võib kirja panna maatriksite elementide kaudu, mille tulemusel saame me mittelineaarseid võrrandeid, mis määravad rühma kuulumise. Osutub, et need tingimused on võimalik asendada mingi hulga ekvivalentsete lineaarsete võrranditega ja selline üleminek mittelineaarselt süsteemilt lineaarsele ongi võtmetähtsusega idee üleminekul Lie rühmadest Lie algebratele.[4]

Klassikaliseks viisiks kuidas sellist üleminekut realiseeritakse on *eksponentsiaalkujutuse* kasutuselevõtt. Nagu nimigi viitab, on tegu analüüsist tuttava kujutuse üldistusega. Et meil oli siiani tegemist vaid maatriksrühmadega, siis läheme siin ka edasi vaid eksponentsiaalkujutuse ühe tähtsa erijuhuga, *maatriksekspponentsiaaliga*, kuid olgu öeldud, et järgnevad väited kehtivad tegelikult ka üldisemas seades, nagu võib näha raamatus [10].

Olgu A mingi $n \times n$ maatriks, $k \in \mathbb{N}$ ning olgu I ühikmaatriksit. Tähistame $A^0 = I$ ning $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-korda}}$.

Definitsioon 1.5. Olgu X reaalne või kompleksne $n \times n$ maatriks. Maatriksi X *eksponendiks*, mida tähistatakse e^X või $\exp X$, nimetatakse astmerida

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \quad (1.1)$$

Ilmselt tuleks definitsiooni korrektsuses veendumaks näidata, et suvalise maatriksi X korral rida (1.1) koondub. Selleks meenutame, et $n \times n$ maatriksi $X = (X_{ij})$ normi arvutatakse valemi

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

järgi. Arvestades, et $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$, siis $\|X^k\| \leq \|X\|^k$. Rakendades nüüd normi (1.2) rea (1.1) liikmetele saame

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = e^{\|X\|} < \infty,$$

mis tähendab, et rida (1.1) koondub absoluutselt ja seega ta ka koondub. Märkamaks, et e^X on pidev funktsioon märgime esiteks, et X^k on argumendi X suhtes pidev funktsioon ja seega on rea (1.1) osasummad pidevad. Teisalt paneme tähele, et (1.1) koondub ühtlaselt hulkadel, mis on kujul $\{\|X\| \leq R\}$, ja seega on rida kokkuvõttes pidev.

Seega on maatriksekspponentsiaal korrektselt defineeritud ning ka pidev. Järgmises lauses on toodud rida eksponentsiaalkujutuse põhilisi omadusi, mille võrdlemisi lihtsad tõestused võib huvi korral võib leida näiteks teosest [7].

Lause 1.1. *Olgu X ja Y suvalised $n \times n$ maatriksid. Siis kehtivad järgmised väited:*

- 1) $e^0 = I$,
- 2) $(e^X)^T = e^{X^T}$,
- 3) e^X on pööratav ning kehtib $(e^X)^{-1} = e^{X^{-1}}$,
- 4) $e^{(\lambda+\mu)X} = e^{\lambda X} e^{\mu X}$ suvaliste $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ korral,
- 5) kui $XY = YX$, siis $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$,
- 6) kui C on pööratav, siis $e^{CXC^{-1}} = C e^X C^{-1}$,
- 7) $\det e^X = e^{\text{Tr}_V X}$.

Ostutub, et rühma $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ühikelemendi mingis ümbruses on võimalik suvaline maatriks esitada kujul e^A , kus A on mingi $n \times n$ maatriks. Rühma $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ korral on maatriks A reaalne. Oluline on tähele panna, et vaadeldes rühma $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, ei ole eksponentfunktsiooni kujutis terve rühm. Selles veenumiseks piisab võtta $n = 1$ ning näha, et $\exp(\text{GL}(1, \mathbb{R})) = \mathbb{R}^+$, ehk kujutiseks on reaaltelje positiivne osa, samas kui $\text{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ehk reaaltelg ilma nullpunktita.

Niisiis eksponentkujutust kasutades on oht kaotada rühma globaalne struktuur, samas kui lokaalne struktuur säilib.

Et maatriksi A korral kuuluks maatriks e^A mõnda punktis 1.1. Maatriksrühmad ja bilineaarvorm nimetatud rühma tuleb maatriksile A seada mingid lineaarsed kitsendused. Näiteks spetsiaalse lineaarse rühma $\text{SL}(n)$ korral võime mittelineaarse tingimuse e^A determinandi kohta asendada lineaarse tingimusega maatriksi A jälje kohta kasutades lause 1.1 punkti 7). Nii on näiteks $\det e^A = 1$ parajasti siis, kui $\text{Tr}_V A = 0$.

Kokkuvõttes nägime, et eksponentsiaalkujutuse abil on võimalik asendada klassikalised maatriksrühmad maatrikshulkadega, millele on seatud teatud lineaarsed kitsendused. Selge, et need hulgad on kinnised lineaarkombinatsioonide suhtes ja

nii võib neid vaadelda kui vektorruume. Tavalise maatriksite korrutamise osas kahjuks kinnisus säilida ei pruugi. Samas kui meil on $n \times n$ maatriksid A ja B , mis on vastavalt kas kaldsümmeetrilised, rahuldavad anti-Hermite'i tingimust või neil puudub jälg, siis maatriksil $C = AB - BA$ on samuti selline omadus. Niisiis saadud maatrikshulgad ei moodusta ainuüksi vektorruumi, vaid on kinnised ka teatud binaarse tehte suhtes.

1.3 Lie algebra definitsioon

Enne kui Lie algebra definitsiooni anname tuletame meelde, et *algebraks* üle korpuse K nimetatakse vektorruumi \mathcal{V} üle korpuse K , millel on defineeritud bilineaarne korrutamine $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Kui algebra tehe rahuldab assotsiatiivsuse tingimust, siis nimetatakse seda algebrat assotsiatiivsekt ning vastasel korral mitteassotsiatiivseks. Nii on näiteks vektorruumi \mathcal{V} lineaarteisenduste vektorruum $\text{Lin } \mathcal{V}$ assotsiatiivne algebra, mille tehteks on teisenduste kompositsioon: $f \circ g$. Samas võime vektorruumi $\text{Lin } \mathcal{V}$ varustada ka teistsuguse korrutamisega ning saada uue algebra-lise struktuuri, kui võtame tehteks näiteks $f \circ g - g \circ f$. Üldiselt selline korrutamine aga enam kommutatiivne ei ole.

Definitsioon 1.6 (Lie algebra). Algebrat \mathfrak{g} üle korpuse K nimetatakse *Lie algebraks*, kui tema korrutamine $[\cdot, \cdot]: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ rahuldab kõikide $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tingimusi

$$[x, x] = 0, \quad (1.3)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (1.4)$$

Me ütleme definitsioonis toodud korrutise $[x, y]$ kohta elementide x ja y *Lie sulg*, ning bilineaarvormi $[\cdot, \cdot]$ kohta öeldakse ka *kommutaator*. Definitsioonis toodud samasust (1.4) nimetatakse *Jacobi samasuseks*. Sageli on otstarbekas tähistada Lie algebrat \mathfrak{g} paarina $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$.

Märkus 1.1. Paljudes käsitlustes antakse Lie algebrale veidi üldisem definitsioon, kui algebrat \mathfrak{g} ei vaadelda mitte vektorruumina üle korpuse, vaid moodulina üle ringi, nagu seda on tehtud näiteks viites [5].

Piltlikult öeldes mõõdab kommutaator algebra elementide mittekommuteeruvust ja seda asjaolu kirjeldavat võrdust (1.3) võime kirjutada ka kujul

$$[x, y] = -[y, x]. \quad (1.5)$$

Tõepoolest, (1.3) järgi kehtib $[x + y, x + y] = 0$, millest saame bilineaarsuse abil $[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$, ehk kehtibki $[x, y] = -[y, x]$.

Rakendades võrdust (1.5) saame Jacobi samasuse kirjutada kui

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]. \quad (1.6)$$

Näide 1.2. Olgu \mathcal{A} algebra, millel on assotriatiivne korrutustehe $\star: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Defineerides kommutaatori valemiga

$$[x, y] = x \star y - y \star x, \quad x, y \in \mathcal{A}, \quad (1.7)$$

saame algebrast \mathcal{A} moodustada Lie algebra \mathcal{A}_L . Valemist (1.7) järeldub vahetult, et Lie algebra definitsiooni nõue (1.3) kehtib. Jacobi samasuse kehvivuseks märgime, et

$$\begin{aligned} & [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \\ &= [x, y \star z - z \star y] + [y, z \star x - x \star z] + [z, x \star y - y \star x] = \\ &= [x, y \star z] - [x, z \star y] + [y, z \star x] - [y, x \star z] + [z, x \star y] - [z, y \star x] = \\ &= x \star y \star z - y \star z \star x - x \star z \star y + z \star y \star x + y \star z \star x - z \star x \star y - \\ & \quad y \star x \star z + x \star z \star y + z \star x \star y - x \star y \star z - z \star y \star x + y \star x \star z = 0, \end{aligned}$$

kus $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Niisiis suvalisest assotsiatiivsest algebrast on võimalik konstrueerida Lie algebra. Arvestades, et maatriksite ja lineaarteisenduste korrutamine rahuldavad assotriatiivsuse tingimust, on näites 1.2 esitatud eeskirja abil võimalik kõiki punktis 1.1 toodud rühmi võimalik vaadelda kui Lie algebraid. Märgime, et Lie algebrate tähistamiseks kasutatakse tavaliselt väikeseid gooti tähti, seega näiteks pööratavate lineaarteisenduste rühmale $GL(n)$ vastavaks Lie algebraks on $\mathfrak{gl}(n)$.

1.4 Struktuurikonstandid

Eeldame, et järgnevas on meil antud lõplikumõõtmeline Lie algebra \mathfrak{g} , üle korpusse K , mille vektorruumil on fikseeritud baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Siinjuures tuletame meelde, et Lie algebra aluseks oleva vektorruumi baasi elemente nimetatakse sageli selle Lie algebra *generaatoriteks*. Et Lie sulg $[\cdot, \cdot]$ on bilineaarne vorm, siis tema väärtused Lie algebral \mathfrak{g} on täielikult määratud, kui me teame millega võrduvad $[e_\alpha, e_\beta]$, kus $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tõepoolest, suvalise vektori võime esitada baasivektorite e_1, e_2, \dots, e_n lineaarkombinatsioonina ja kõikide vektorite $x, y \in \mathfrak{g}$ korral leiduvad $a^\alpha, b^\beta \in K$ nii, et $x = a^\alpha e_\alpha$ ja $y = b^\beta e_\beta$, kus $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$. Niisiis saame $[x, y]$ välja arvutada järgmiselt:

$$[x, y] = [a^\alpha e_\alpha, b^\beta e_\beta] = a^\alpha b^\beta [e_\alpha, e_\beta].$$

Iga $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral võime omakorda ka vektori $[e_\alpha, e_\beta]$ avaldata lineaarkombinatsioonina baasivektoritest kujul

$$[e_\alpha, e_\beta] = K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda,$$

ja seega jääb meile $[x, y]$ arvutamiseks lõpuks võrdus

$$[x, y] = a^\alpha b^\beta K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda.$$

Definitsioon 1.7. Olgu \mathfrak{g} lõplikumõõtmeline Lie algebra ning $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ selle Lie algebra vektorruumi baas. Tähistades $[e_\alpha, e_\beta] = K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda$, kus $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$, siis arve $K_{\alpha\beta}^\lambda$ nimetatakse Lie algebra \mathfrak{g} *struktuurikonstantideks*.

Kasutades kommutaatori $[\cdot, \cdot]$ kaldsümmeetrilisust saame struktuurikonstantide kohta valemi

$$K_{\alpha\beta}^\lambda = -K_{\beta\alpha}^\lambda. \quad (1.8)$$

Jacobi samasuse abil saame veel teisegi tingimuse, mida struktuurikonstandid rahuldama peavad.

$$\begin{aligned} [e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] + [e_\beta, [e_\gamma, e_\alpha]] + [e_\gamma, [e_\alpha, e_\beta]] &= 0, \\ [e_\alpha, K_{\beta\gamma}^\lambda e_\lambda] + [e_\beta, K_{\gamma\alpha}^\lambda e_\lambda] + [e_\gamma, K_{\alpha\beta}^\lambda e_\lambda] &= 0, \\ K_{\beta\gamma}^\lambda [e_\alpha, e_\lambda] + K_{\gamma\alpha}^\lambda [e_\beta, e_\lambda] + K_{\alpha\beta}^\lambda [e_\gamma, e_\lambda] &= 0, \\ K_{\beta\gamma}^\lambda K_{\alpha\lambda}^\mu e_\mu + K_{\gamma\alpha}^\lambda K_{\beta\lambda}^\mu e_\mu + K_{\alpha\beta}^\lambda K_{\gamma\lambda}^\mu e_\mu &= 0, \\ K_{\beta\gamma}^\lambda K_{\alpha\lambda}^\mu + K_{\gamma\alpha}^\lambda K_{\beta\lambda}^\mu + K_{\alpha\beta}^\lambda K_{\gamma\lambda}^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Näide 1.3. Vaatleme eespool näiteks toodud spetsiaalsete unitaarsete maatriksite rühma $SU(n)$ erijuhul $n = 2$. Rühmale $SU(2)$ vastab Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$, mille element $x \in \mathfrak{su}(2)$ rahuldab tingimusi

$$\text{Tr } x = 0, \quad (1.9)$$

$$x^\dagger + x = 0. \quad (1.10)$$

Tingimuste (1.9) ja (1.10) põhjal on võimalik näidata, et Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ generaatoriteks on maatriksid

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

nagu võib näha bakalaureusetöös [11].

Arvutame Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ generaatoritel Lie sulu väärtused ja leiame seeläbi struktuurikonstandid. Ilmselt kõik suvalise $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ korral $[\rho_\alpha, \rho_\alpha] = 0$. Arvestades veel omadust (1.8) on meile huvi pakkuvad kommutaatorid on vaid kujul

$[\rho_\alpha, \rho_\beta]$, kus $\alpha < \beta$.

$$[\rho_1, \rho_2] = \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = -2\rho_3, \quad (1.11)$$

$$[\rho_1, \rho_3] = \rho_1\rho_3 - \rho_3\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2\rho_2, \quad (1.12)$$

$$[\rho_2, \rho_3] = \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -2\rho_1. \quad (1.13)$$

Seega võrduste (1.11), (1.12) ja (1.13) põhjal on antud baasi suhtes nullist erinevad struktuurikonstandid

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $K_{12}^3 = -2$, | 3. $K_{13}^2 = 2$, | 5. $K_{23}^1 = -2$, |
| 2. $K_{21}^3 = 2$, | 4. $K_{31}^2 = -2$, | 6. $K_{32}^1 = 2$. |

Valides näiteks $x = \begin{pmatrix} 3i & 7+i \\ -7+i & -3i \end{pmatrix}$ ja $y = \begin{pmatrix} i & 5+2i \\ -5+2i & -i \end{pmatrix}$, siis ilmselt $x, y \in \mathfrak{su}(2)$, ja saame arvutada Lie sulu $[x, y]$. Nüüd ühelt poolt vahetu arvutuse tulemusena

$$\begin{aligned} [x, y] &= xy - yx = \begin{pmatrix} -40+9i & -5+8i \\ 5+8i & -40-9i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40-9i & 5-8i \\ -5-8i & -40+9i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 18i & -10+16i \\ 10+16i & -18i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kuid teisalt $x = \rho_1 + 7\rho_2 + 3\rho_3$ ja $y = 2\rho_1 + 5\rho_2 + \rho_3$, ning saame kasutada struktuurikonstante:

$$\begin{aligned} [x, y] &= [\rho_1 + 7\rho_2 + 3\rho_3, 2\rho_1 + 5\rho_2 + \rho_3] = \\ &= 2[\rho_1, \rho_1] + 5[\rho_1, \rho_2] + [\rho_1, \rho_3] + 14[\rho_2, \rho_1] + 35[\rho_2, \rho_2] + 7[\rho_2, \rho_3] + \\ &\quad 6[\rho_3, \rho_1] + 15[\rho_3, \rho_2] + 3[\rho_3, \rho_3] = \\ &= 5[\rho_1, \rho_2] + [\rho_1, \rho_3] - 14[\rho_1, \rho_2] + 7[\rho_2, \rho_3] - 6[\rho_1, \rho_3] - 15[\rho_2, \rho_3] = \\ &= -9[\rho_1, \rho_2] - 5[\rho_1, \rho_3] - 8[\rho_2, \rho_3] = \\ &= -9K_{12}^\lambda \rho_\lambda - 5K_{13}^\lambda \rho_\lambda - 8K_{23}^\lambda \rho_\lambda = \\ &= -9K_{12}^3 \rho_3 - 5K_{13}^2 \rho_2 - 8K_{23}^1 \rho_1 = \\ &= -9 \cdot (-2)\rho_3 - 5 \cdot 2\rho_2 - 8 \cdot (-2)\rho_1 = \\ &= 16\rho_1 - 10\rho_2 + 18\rho_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 18i & -10+16i \\ 10+16i & -18i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ootuspäraselt annavad mõlemad variandid sama tulemuse, kuid teise variandi puhul ei soorita me kordagi selle algebra korrutustehet.

Ilmselt sõltuvad Lie algebra struktuurikonstandid algebra vektorruumi baasist. Olgu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ Lie algebra \mathfrak{g} vektorruumi kaks erinevat baasi, ning olgu nad omavahel järgmises seoses:

$$\hat{e}_\alpha = a_\alpha^\lambda e_\lambda. \quad (1.14)$$

Siis

$$\hat{K}_{\alpha\beta}^\xi \hat{e}_\xi = [\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta] = [a_\alpha^\mu e_\mu, a_\beta^\nu e_\nu] = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu [e_\mu, e_\nu] = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu K_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda. \quad (1.15)$$

Kui võrduste ahela (1.15) kõige vasakpoolsemas osas kasutada samasust (1.14), siis kehtib

$$\hat{K}_{\alpha\beta}^\xi a_\xi^\lambda e_\lambda = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu K_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda,$$

millest kokkuvõttes saame valemi

$$a_\xi^\lambda \hat{K}_{\alpha\beta}^\xi = a_\alpha^\mu a_\beta^\nu K_{\mu\nu}^\lambda.$$

1.5 Esitused

Olgu $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_1})$ ja $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}_2})$ Lie algebrad. Lineaarkujutust $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ nimetatakse Lie algebrate *homomorfismiks*, kui ta säilitab kommutaatori, see tähendab iga $x, y \in \mathfrak{g}_1$ korral kehtib võrdus

$$\varphi([x, y]_{\mathfrak{g}_1}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{g}_2}.$$

Homomorfismi φ nimetatakse Lie algebrate *isomorfismiks*, kui φ on ka üks-ühene ning pealekujutus. Klassikalisel viisil on defineeritud ka Lie algebrate *endomorfismi* ning *automorfismi* mõisted.

Homomorfismi mõiste viib meid väga tähtsa osani Lie algebrate teoorias, milleks on *esitused*.

Definitsioon 1.8. Olgu \mathfrak{g} Lie algebra ja \mathcal{V} vektorruum. Siis nimetatakse homomorfismi $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ Lie algebra \mathfrak{g} *esituseks* vektorruumile \mathcal{V} .

Esiteks paneme tähele, et selline definitsioon omab mõtet, kuna eelneva arutelu põhjal on selge, et $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ on tõepoolest Lie algebra. Niisiis on \mathfrak{g} esitus vektorruumil \mathcal{V} lineaarne kujutus φ Lie algebrast \mathfrak{g} vektorruumi \mathcal{V} endomorfismide ringi nii, et

$$\varphi([x, y])(v) = (\varphi(x)\varphi(y))(v) - (\varphi(y)\varphi(x))(v),$$

kõikide $x, y \in \mathfrak{g}$ ja $v \in \mathcal{V}$ korral. Me ütleme, et esitus φ on *täpne*, kui $\varphi(x) = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = 0$. Teisi sõnu on esitus täpne parajasti siis, kui ta on üks-ühene.

Näide 1.4. Olgu \mathfrak{g} Lie algebra. Vaatleme lineaarset kujutust

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \ni x \mapsto \text{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

mis on $y \in \mathfrak{g}$ korral on defineeritud eeskirjaga

$$\text{ad}_x(y) = [x, y]. \quad (1.16)$$

Kujutus $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ on Lie algebra \mathfrak{g} esitus. Seda esitust nimetatakse \mathfrak{g} *adjungeeritud esituseks*. Märkamaks, et ad on tõepoolest esitus märgime kõigepealt, et arvestades eeskirja (1.16) ning kommutaatori lineaarsust, on kujutuse ad lineaarsus ilmne. Veendumaks, et kujutus $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ on esitus tuleb kontrollida, et iga $x, y, z \in \mathfrak{g}$ korral kehtiks võrdus $[\text{ad}_x, \text{ad}_y](z) = \text{ad}_{[x, y]}(z)$, mille saame Jaboci samasusest (1.4).

$$\begin{aligned} 0 &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \\ &= [x, [y, z]] + [y, -[x, z]] - [[x, y], z] = \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] - [[x, y], z] \end{aligned}$$

ehk $[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z]$. Nüüd, et Lie algebras $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ arvutatakse kommutaatori väärtusi eeskirja $[\text{ad}_x, \text{ad}_y] = \text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x$ järgi, siis

$$[\text{ad}_x, \text{ad}_y](z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z] = \text{ad}_{[x, y]}(z).$$

Esituste teooria üheks väga oluliseks tulemuseks on nõndanimetatud *Ado teoreem*, mis väidab, et iga lõplikumõõtmeline Lie algebra \mathfrak{g} on Lie algebra $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ alamalgebra, kus \mathcal{V} on mingi lõplikumõõtmeline vektorruum. Niisiis, Lie algebrat \mathfrak{g} on tegelikult võimalik vaadelda kui maatriksalgebrat.[7]

Teoreem 1.2 (Ado, 1935). *Iga lõplikumõõtmeline Lie algebra üle nullkarakteristikaga korpuse omab täpset lõplikumõõtmelist esitust.*

Tegelikult kehtib ka Ado teoreemi oluliselt tugevam variant, kus on kaotatud eeldus korpuse nullkarakteristika kohta.[8]

2 n -Lie algebra

Selles peatüki eesmärgiks on klassikalise Lie algebra üldistame, mille käigus toome sisse n -Lie algebra mõiste. Edasi tutvustame artiklis [3] näidatud eeskirja, mille abil on võimalik Lie algebrast konstrueerida ternaarne Lie algebra ning jätkame seda teooriaarendust tuginedes artiklile [2], kus kirjeldatakse kuidas n -Lie algebrast indutseerida $(n+1)$ -Lie algebra, ja tõestame sellega seonduvad põhilised tulemused.

2.1 n -Lie algebra definitsioon

Lie algebra definitsioonis on kesksel kohal kaldsümmeetriline bilineaarne korrutustehe, mis rahuldab Jacobi samasust. Üheks viisiks Lie algebra mõistet üldistada, ongi just nimelt tema korrutamise üldistamine. Seda tehes on loomulik nõuda, et ka üldistatud korrutamistehe rahuldaks kaldsümmeetrilisuse tingimust ning Jacobi samasust, või vähemalt selle mingit analoogi, mis annaks klassikalisel juhul täpselt Jacobi samasuse.

Filippov² näitas aastal 1985 artikis [6] n -Lie algebrate klassi, kus bilineaarne korrutamine on asendatud n -lineaarse kaldsümmeetrilise operatsiooniga, mis rahuldab teatud samasust.[9] Tänapäeval on just see, Nambu mehaanikast välja kasvanud üldistus osutunud üheks põhiliseks Lie algebrate edasiseks uurimissuunaks.

Definitsioon 2.1 (n -Lie algebra). Vektorruumi \mathcal{A} nimetatakse n -Lie algebraks, kui on määratud n -lineaarne kaldsümmeetriline kujutus $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$, mis suvaliste

$$x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{A}$$

korral rahuldab tingimust

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, [y_1, \dots, y_n]] = \sum_{i=1}^n [y_1, \dots, [x_1, \dots, x_{n-1}, y_i], \dots, y_n]. \quad (2.1)$$

Võrdust (2.1) n -Lie algebra definitsiooniks nimetatakse üldistatud Jacobi samasuseks või ka *Filippovi samasuseks*. Vahetu kontrolli põhjal on selge, et valides $n = 2$, saame Filippovi samasusest (2.1) Jacobi samasuse (1.4). n -aarse Lie sulu kaldsümmeetrilisus tähendab, et suvaliste $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ korral

$$[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = -[x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n].$$

Toome siinkohal n -Lie algebra kohta näite, mille Filippov esitas oma artiklis [6] vahetult pärast oma definitsiooni.

²Aleksei Fedorovich Filippov (1923 – 2006), vene matemaatik

Näide 2.1. Olgu E reaalne $(n+1)$ -mõõtmeline Eukleidiline ruum, ning tähistame elementide $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ vektorkorrutise $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Meenutame, et vektorkorrutis on kaldsümmeetriline ning iga teguri suhtes lineaarne. Lisaks, kui meil on ruumi E mingi baas $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$, siis avaldub see vektorrkorrutis järgmise kui determinant

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & e_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \dots & x_{n+1,n} & e_{n+1} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

kus $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{n+1,i})$ on vektorite x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, koordinaadid.

Kui me varustame ruumi E nüüd n -aarse vektorkorrutisega (2.2), siis saame $(n+1)$ -mõõtmelise reaalse kaldsümmeetrilise algebra, mida tähistame \mathcal{A}_{n+1} . Tänu determinandi multilineaarsusele on vektorkorrutis täielikult määratud baasivektorite korrutustabeliga. Võrdusest (2.2) saame me baasivektoriteke järgmise korrutustabeli:

$$[e_1, \dots, e_{i-1}, \hat{e}_i, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}] = (-1)^{n+1+i} e_i, \quad (2.3)$$

kus $i = 1, 2, \dots, n+1$, ja \hat{e}_i tähistab vektori e_i arvutusest välja jätmist. Ülejäänud baasivektorite korrutised on kas nullid või kättesaadavad võrdusest (2.3) ja kaldsümmeetrilisusest.

Selle põhjal ei ole keeruline veenuda, et algebra $(\mathcal{A}_{n+1}, [\cdot, \dots, \cdot])$ on n -Lie algebra.

2.2 Indutseeritud n -Lie algebra

See alapeatükk tugineb artiklile [2].

Definitsioon 2.2 (Jälg). Olgu \mathcal{A} vektorruum ning olgu $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$. Me ütleme, et lineaarkujutus $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ on ϕ jälg, kui suvaliste $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ korral

$$\tau(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Olgu $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ n -lineaarne ja $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ lineaarne kujutus. Toome muga-vuse ja selguse mõttes sisse uue kujutuse $\phi_i: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n+1$, mis on defineeritud kui

$$\begin{aligned} \phi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

kus \hat{x}_i tähistab kõrvalejäävat elementi, see tähendab $\phi_i(x_1, \dots, x_{n+1})$ arvutatakse elementidel $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}$.

Defineerime nende kujutuste abil uue $(n+1)$ -lineaarse kujutuse $\phi_\tau: \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{A}$ valemiga

$$\phi_\tau(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad (2.4)$$

Seega võttes näiteks $n = 2$ saame valemi (2.4) põhjal kirjutada

$$\phi_\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1) \phi(x_2, x_3) - \tau(x_2) \phi(x_1, x_3) + \tau(x_3) \phi(x_1, x_2).$$

Osutub, et selliselt defineeritud kujutusel ϕ_τ on mitmed head omadused.

Lemma 2.1. *Olgu \mathcal{A} vektorruum ning $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ n -lineaarne kaldsümmeetriline kujutus ja $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ lineaarne. Siis kujutus $\phi_\tau: \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{A}$ on samuti kaldsümmeetriline. Lisaks, kui τ on ϕ jälg, siis τ on ka ϕ_τ jälg.*

Tõestus. Eeldame, et \mathcal{A} on vektorruum, $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ on n -lineaarne ning kaldsümmeetriline ja $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$ on lineaarne.

Veendumaks, et ϕ_τ on $(n+1)$ -lineaarne ning kaldsümmeetriline olgu $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x_j^1, x_j^2 \in \mathcal{A}$ ja λ ning μ skalaarid. Arvestades nii ϕ kui ka τ lineaarsust märgime ϕ_τ lineaarsuseks, et

$$\begin{aligned} \phi_\tau(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) + \\ &\quad (-1)^{j-1} \tau(\lambda x_j^1 + \mu x_j^2) \phi_j(x_1, \dots, \lambda x_j^1 + \mu x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \lambda (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_{n+1}) + \\ &\quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \mu (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_{n+1}) + \\ &\quad \lambda (-1)^{j-1} \tau(x_j^1) \phi_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_{n+1}) + \\ &\quad \mu (-1)^{j-1} \tau(x_j^2) \phi_j(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \lambda \phi_\tau(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_{n+1}) + \mu \phi_\tau(x_1, \dots, x_j^2, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Kaldsümmeetrilisus avaldub samuti vahetu arvutuse tulemusena:

$$\begin{aligned}
& \phi_\tau(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_{n+1}) = \\
& = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j-1, i \neq j}}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_{n+1}) + \\
& \quad (-1)^{j-1-1} \tau(x_{j-1}) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) + \\
& \quad (-1)^{j-1} \tau(x_j) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
& = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j-1, i \neq j}}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{n+1}) - \\
& \quad (-1)^{j-1} \tau(x_{j-1}) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) - \\
& \quad (-1)^{j-1-1} \tau(x_j) \phi(x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) = \\
& = -\phi_\tau(x_1, \dots, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Tõestuse lõpetuseks eeldame, et τ on ϕ jälg ja näitame, et sel juhul on τ ka ϕ_τ jälg.

Et τ on ϕ jälg, siis iga $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ korral $\tau(\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ ja seega

$$\begin{aligned}
\tau(\phi_\tau(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) &= \sum_{i=1}^{n+1} \tau((-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi_i(x_1, \dots, x_{n+1})) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \tau(\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})) = \sum_{i=1}^{n+1} 0 = 0.
\end{aligned}$$

□

Kasutades eelmist lemmat saame tõestada järgmise tähtsa teoreemi.

Teoreem 2.2. *Olgu (\mathcal{A}, ϕ) n -Lie algebra ning olgu τ lineaarkujutuse ϕ jälg. Siis (\mathcal{A}, ϕ_τ) on $(n+1)$ -Lie algebra.*

Tõestus. Eeldame, et paar (\mathcal{A}, ϕ) omab n -Lie algebra struktuuri, see tähendab $\phi: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ on kõikide argumentide järgi lineaarne, kaldsümmeetriiline ja rahuldab Filippovi samasust, ning olgu kujutuse ϕ jälg $\tau: \mathcal{A} \rightarrow K$.

Lemma põhjal on siis ϕ_τ oma argumentide järgi lineaarne ning kaldsümmeetriiline. Seega peame teoreemi tõestamiseks näitama, et ϕ_τ rahuldab Filippovi samasust

$$\begin{aligned}
& \phi_\tau(x_1, \dots, x_n, \phi_\tau(y_1, \dots, y_{n+1})) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_\tau(y_1, \dots, y_{i-1}, \phi_\tau(x_1, \dots, x_n, y_i), y_{i+1}, \dots, y_{n+1})
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Olgu selleks $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in \mathcal{A}$. Siis ühelt poolt

$$\begin{aligned}
& \phi_\tau(x_1, \dots, x_n, \phi_\tau(y_1, \dots, y_{n+1})) = \\
& = \phi_\tau \left(x_1, \dots, x_n, \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(y_i) \phi_i(y_1, \dots, y_{n+1}) \right) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(y_i) \phi_\tau(x_1, \dots, x_n, \phi_i(y_1, \dots, y_{n+1})) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(y_i) \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \tau(x_j) \phi_j(x_1, \dots, x_n, \phi_i(y_1, \dots, y_{n+1})) + \\
& \quad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(y_i) (-1)^{n+1-1} \underbrace{\tau(\phi_i(y_1, \dots, y_{n+1}))}_0 \phi(x_1, \dots, x_n) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} \tau(y_i) \tau(x_j) \phi_j(x_1, \dots, x_n, \phi_i(y_1, \dots, y_{n+1})) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \tau(y_i) \tau(x_j) \phi_j(x_1, \dots, x_n, \phi_i(y_1, \dots, y_{n+1})).
\end{aligned}$$

□

Teoreemis kirjeldatud viisil saadud $(n+1)$ -Lie algebrat (A, ϕ_τ) nimetatakse n -Lie algebra (A, ϕ) poolt *indutseeritud* $(n+1)$ -Lie algebraks.

Teoreemist 2.2 saame teha olulise järelduse:

Järeldus 2.3. Olgu $(A, [\cdot, \cdot])$ Lie algebra ning olgu antud $[\cdot, \cdot]$ jälg $\tau: A \rightarrow \mathbb{K}$. Siis ternaarne sulg $[\cdot, \cdot, \cdot]: A^3 \rightarrow A$, mis on defineeritud valemiga

$$[x, y, z] = \tau(x)[y, z] + \tau(y)[z, x] + \tau(z)[x, y],$$

määrab 3-Lie algebra struktuuri A_τ vektorruumil A .

3 n -Lie superalgebra

See peatükk tugineb artiklile [1]

Järgnevas eeldame, et meil on antud supervektorruum ehk supervektorruum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ ning n -lineaarne kujutus $\phi: \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

- $|\phi(x_1, \dots, x_n)| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$
- $\phi(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n),$

kus $|x| \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tähistab elemendi x paartust. Samuti eeldame, et $S: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{K}$ on lineaarne kujutus, mis rahuldab

- $S(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 0,$
- $S(x) = 0$ iga $x \in \mathcal{G}_{\bar{1}}$.

Selge, et siin sisse toodud kujutused ϕ ja S on eelnevas kirjeldatu analoogid supervektorruumis. Seejuures kujutust $S: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{K}$ nimetatakse *superjäljeks*.

Kasutades kujutusi ϕ ja S defineerime analoogiliselt vektorruumide situatsioonile, kuid nüüd juba supervektorruumi iseärasusi arvesse võttes, see tähendab paarsusi arvestades, uue kujutuse $\phi_S: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ valemiga

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i| \sum_{j=1}^{i-1} |x_j|} S(x_i) \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

Saadud kujutuse tähtsamad omadused võtab kokku järgmine oluline lemma:

Lemma 3.1. $(n+1)$ -lineaarne kujutus $\phi_S: \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ rahuldab tingimusi

1. $|\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|,$
2. $\phi_S(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} \phi_S(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_{n+1}),$
3. $S(\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1})) = 0.$

Üldistame nüüd definitsiooni 1.6 supervektorruumi jaoks ning defineerime n -Lie superalgebra.

Definitsioon 3.1 (n -Lie superalgebra). Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ supervektorruum. Me ütleme, et \mathcal{G} on n -Lie superalgebra, kui \mathcal{G} on varustatud gradueeritud n -Lie suluga $[\cdot, \dots, \cdot]: \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

1. $||[x_1, \dots, x_n]|| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$
2. $[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} [x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n],$
3. $[y_1, \dots, y_{n-1}, [x_1, \dots, x_n]] =$
 $= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_x(i-1)\tau_y(n-1)} [x_1, \dots, x_{i-1}, [y_1, \dots, y_{n-1}, x_i], x_{i+1}, \dots, x_n],$

kus $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ ning $\tau_x(k) = \sum_{j=1}^{k-1} |x_j|.$

Võttes arvesse n -Lie superalgebra definitsiooni saame sõnastada teoreemi 2.2 superanalooži järgmiselt:

Teoreem 3.2. Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ n -Lie superalgebra suluga $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{G}$, ning V lõplikumõõtmeline vektorruum ja olgu antud \mathcal{G} esitus $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{gl}V$. Defineerides $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ valemiga

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^n n+1 (-1)^{i-1} (-1)^{|x_i|\tau_x(i-1)} S(\phi(x_i)) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}],$$

on supervektorruum \mathcal{G} , varustatuna suluga $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \rightarrow \mathcal{G}$ $(n+1)$ -Lie superalgebra.

4 Madaladimensionaalsete 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

4.1 $(2, 1)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud $(2, 1)$ 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, e_2, f_1\}$, kus e_1 ja e_2 on paaris- ja f_1 on paaritu baasivektor.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 [e_1, e_1, e_1] &= 0, \\
 [e_1, e_1, e_2] &= 0, \\
 [e_1, e_1, f_1] &= 0, \\
 [e_1, e_2, e_2] &= 0, \\
 [e_1, e_2, f_1] &= m_1 \cdot f_1, \\
 [e_1, f_1, f_1] &= l_1 \cdot e_1 + l_2 \cdot e_2, \\
 [e_2, e_2, e_2] &= 0, \\
 [e_2, e_2, f_1] &= 0, \\
 [e_2, f_1, f_1] &= l_3 \cdot e_1 + l_4 \cdot e_2, \\
 [f_1, f_1, f_1] &= m_2 \cdot f_1,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

kus $m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $-m_1 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
5. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0$,
6. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0$,
8. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
9. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0$,

10. $l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$
11. $m_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0,$
12. $-l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$
13. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$
14. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_1 = 0,$
15. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$
16. $l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_2 = 0,$
17. $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 - l_2 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_2 = 0,$
18. $l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$
19. $l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$
20. $-l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0,$
21. $-l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$
22. $-l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$
23. $-l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$
24. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$
25. $l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 - l_3 \cdot m_2 - l_3 \cdot m_2 = 0,$
26. $l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 - l_4 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_2 = 0,$
27. $m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 = 0,$
28. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
29. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 = 0,$
30. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 = 0,$
31. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 + l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 = 0,$
32. $m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 = 0.$

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_1 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_1 \cdot m_1 = 0$,
5. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
6. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0$,
8. $l_1 \cdot m_2 = 0$,
9. $l_2 \cdot m_2 = 0$,
10. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
11. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
12. $l_4 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_2 = 0$,
13. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
14. $l_3 \cdot m_2 = 0$,
15. $l_4 \cdot m_2 = 0$,
16. $m_1 \cdot m_2 = 0$,
17. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 = 0$,
18. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 = 0$,
19. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 = 0$,
20. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 = 0$,
21. $m_2 \cdot m_2 = 0$.

Sellel võrrandisüsteemil on kolm mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ -\frac{c_1^2}{c_2} \\ c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (4.1) saame kommutatsiooniseosed:

- $\begin{cases} [e_1, f_1, f_1] = c_1 e_1 + c_2 e_2, \\ [e_2, f_1, f_1] = -\frac{c_1^2}{c_2} e_1 - c_1 e_2 \end{cases},$
- $[e_1, e_2, f_1] = c f_1,$
- $[e_2, f_1, f_1] = c e_1.$

4.2 (1, 2) 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud (1, 2) 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, f_1, f_2\}$, kus e_1 on paaris- ja f_1, f_2 on paaritud baasivektorid.

Siis avaldub kommutaator baasidelementidel järgmiselt:

$$\begin{aligned}
[e_1, e_1, e_1] &= 0, \\
[e_1, e_1, f_1] &= 0, \\
[e_1, e_1, f_2] &= 0, \\
[e_1, f_1, f_1] &= l_1 \cdot e_1, \\
[e_1, f_1, f_2] &= l_2 \cdot e_1, \\
[e_1, f_2, f_2] &= l_3 \cdot e_1, \\
[f_1, f_1, f_1] &= m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2, \\
[f_1, f_1, f_2] &= m_3 \cdot f_1 + m_4 \cdot f_2, \\
[f_1, f_2, f_2] &= m_5 \cdot f_1 + m_6 \cdot f_2, \\
[f_2, f_2, f_2] &= m_7 \cdot f_1 + m_8 \cdot f_2,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

kus $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 = 0,$
2. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
3. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
4. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
5. $l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
6. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_7 - l_2 \cdot m_8 = 0,$
7. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 = 0,$
8. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 = 0,$
9. $l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 = 0,$
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 + l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 = 0,$
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 = 0,$
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 = 0,$

14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0,$
15. $m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0,$
16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
17. $m_1 \cdot m_5 + m_2 \cdot m_7 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0,$
18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_3 = 0,$
20. $m_2 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0,$
21. $m_1 \cdot m_3 + m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0,$
22. $m_3 \cdot m_4 + m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0,$
24. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - m_4 \cdot m_8 = 0,$
25. $m_3 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0,$
26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 = 0,$
27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
28. $m_2 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
29. $m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_2 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 = 0,$
30. $m_4 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 = 0,$
31. $m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 = 0,$
32. $m_5 \cdot m_6 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 = 0,$
33. $m_5 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 = 0,$
34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 = 0,$
36. $m_2 \cdot m_7 + m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 = 0,$
37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 = 0,$

38. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 = 0$,
39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 = 0$,
40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 = 0$,
41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 = 0$.

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 = 0$,
2. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0$,
3. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0$,
4. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0$,
5. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 + l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0$,
6. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 + l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 = 0$,
7. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 = 0$,
8. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 = 0$,
9. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 = 0$,
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 = 0$,
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 = 0$,
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 = 0$,
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 = 0$,
14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - 3 \cdot m_2 \cdot m_3 - 3 \cdot m_4 \cdot m_4 = 0$,
15. $m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_3 \cdot m_4 - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 = 0$,
16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - 3 \cdot m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_6 = 0$,
17. $m_2 \cdot m_7 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_1 \cdot m_5 = 0$,
18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 = 0$,
19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_3 = 0$,

20. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 = 0,$
21. $m_2 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_3 = 0,$
22. $m_3 \cdot m_4 + 2 \cdot m_4 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_5 = 0,$
23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 = 0,$
24. $m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 - 2 \cdot m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 = 0,$
25. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0,$
26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 = 0,$
27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
28. $m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - 2 \cdot m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0,$
29. $m_3 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_3 \cdot m_3 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 = 0,$
30. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 + m_6 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_5 = 0,$
31. $m_4 \cdot m_7 + 2 \cdot m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 = 0,$
32. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 = 0,$
33. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 = 0,$
34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 = 0,$
35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 = 0,$
36. $m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_4 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 = 0,$
37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_7 = 0,$
38. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_6 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_6 = 0,$
39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_5 - 3 \cdot m_6 \cdot m_7 = 0,$
40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 = 0,$
41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 = 0.$

Sellel võrrandisüsteemil on neli mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \frac{c_1^2}{c_2} \\ c_2 \\ -c_2 \\ c_1 \\ -\frac{c_2^2}{c_1} \\ c_2 \\ -\frac{c_2^3}{c_1^2} \\ \frac{c_2^2}{c_1} \\ c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (4.2) saame kommutatsiooniseosed:

$$\bullet \begin{cases} [f_1, f_1, f_1] = -c_1 \cdot f_1 + \frac{c_1^2}{c_2} \cdot f_2, \\ [f_1, f_1, f_2] = -c_2 \cdot f_1 + c_1 \cdot f_2, \\ [f_1, f_2, f_2] = -\frac{c_2^2}{c_1} \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2, \\ [f_2, f_2, f_2] = -\frac{c_2^3}{c_1^2} \cdot f_1 + \frac{c_2^2}{c_1} \cdot f_2, \end{cases},$$

- $[f_2, f_2, f_2] = c \cdot f_1,$
- $[f_1, f_1, f_1] = c \cdot f_2,$
- $[e_1, f_1, f_2] = c \cdot e_1.$

Viited

- [1] Viktor Abramov. Super 3-Lie Algebras Induced by Super Lie Algebras. 2014.
- [2] Joakim Arnlind, Abdenmour Kitouni, Abdenacer Makhoulouf, and Sergei Silvestrov. Structure and cohomology of 3-lie algebras induced by lie algebras. 85:123–144, 2014.
- [3] Joakim Arnlind, Abdenacer Makhoulouf, and Sergei Silvestrov. Construction of n-lie algebras and n-ary hom-nambu-lie algebras. 52(12), 2011.
- [4] Johan G. F. Belinfante and Bernard Kolman. *A Survey of Lie Groups and Lie Algebra with Applications and Computational Methods*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [5] N. Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 1-3*. Bourbaki, Nicolas: Elements of mathematics. Hermann, 1989.
- [6] V.T. Filippov. n-lie algebras. *Siberian Mathematical Journal*, 26(6):879–891, 1985.
- [7] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [8] Gerhard Hochschild. An addition to ado’s theorem. 17:531–533, 1966.
- [9] Sh.M. Kasymov. Theory of n-lie algebras. *Algebra and Logic*, 26(3):155–166, 1987.
- [10] Alexander Kirillov. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [11] Priit Lätt. Minkowski aegruumi geomeetriast. 2013.