Sisukord

1 Lie algebra

Matemaatika haru, mida me täna tunneme kui *Lie teooriat* kerkis esile geomeetria ja lineaaralgebra uurimisest. Lie teooria üheks keskseks mõisteks on *Lie algebra* - vektorruum, mis on varustatud mitteassotsiatiivse korrutamisega ehk nõndanimetatud *Lie suluga*. Lie algebrad ja nende uurimine on tihedalt seotud teise Lie teooria keskse mõistega, milleks on *Lie rühm*. Viimased on struktuurid, mis on korraga nii algebralised rühmad kui ka topoloogilised muutkonnad, kusjuures rühma korrutamine ja selle pöördtehe on mõlemad pidevad. Osutub, et igale Lie rühmale saab vastavusse seada Lie algebra, kuid üldjuhul kahjuks vastupidine väide ei kehti. Samas on võimalik näidata pisut nõrgem tulemus: suvalise lõplikumõõtmelise reaalsele või komplekssele Lie algebra jaoks leidub temale üheselt vastav sidus Lie rühm.[5] Just selle viimase, nõndanimetatud *Lie kolmanda teoreemi* tõttu on võimalik Lie rühmasid vaadelda Lie algebrate kontekstis ja see teebki Lie algebrad äärmiselt oluliseks.

Tähistagu kõikjal järgnevas K nullkarakteristikaga korpust ning $\mathcal{V}$ vektorruumi üle korpuse K. Ruumi kokkuhoiu ja mugavuse mõttes kasutame edaspidi vajaduse korral summade tähistamisel Einsteini summeerimiskokkulepet. Teisi sõnu, kui meil on indeksid i ja j, mis omavad väärtusi $1, \ldots, n$, kus $n \in \mathbb{N}$, siis jätame vahel summeerimisel summamärgi kirjutamata ning säilitame summeerimise tähistamiseks vaid indeksid. Einsteini summeeruvuskokkulepet arvestades kehtivad näiteks järgmised võrdused:

$$\begin{aligned}
x^i e_i &= \sum_{a=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n, \\
\lambda^i_j x^j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda^i_j x^j = \lambda^i_1 x^1 + \lambda^i_2 x^2 + \cdots + \lambda^i_n x^n, \\
\eta_{ij} u^i v^j &= \eta_{11} u^1 v^1 + \eta_{12} u^1 v^2 + \cdots + \eta_{1n} u^1 v^n + \eta_{21} u^2 v^1 + \cdots + \eta_{nn} u^n v^n,
\end{aligned}$$

ja nii edasi.

Järgnevas anname minimaalse ülevaate klassikalisest Lie algebrate teooriast, mida on tarvis edasiste peatükkide mõistmiseks.

1.1 Maatriksrühmad ja bilineaarvorm

Meenutame, et *lineaarkujutus* $\phi \colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ vektorruumist $\mathcal{V}_1$ vektorruumi $\mathcal{V}_2$ säilitab vektorite liitmise ja skalaariga korrutamise, see tähendab

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$$

ning

$$\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x),$$

kus $x, y \in \mathcal{V}_1$ ja λ on skalaar. Kui vektorruumid $\mathcal{V}_1$ ja $\mathcal{V}_2$ langevad kokku, siis ütleme me kujutuse ϕ kohta *lineaarteisendus*.

Algebrast on teada, et lineaarteisendusel eksisteerib pöördteisendus siis ja ainult siis, kui ta on nii üks-ühene kui ka pealeteisendus. Kõigi vektorruumi $\mathcal{V}$ pööratavate lineaarteisenduste rühma nimetatakse vektorruumi $\mathcal{V}$ *pööratavate lineaarteisenduste rühmaks*[1] ja tähistatakse $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Selge, et selle rühma korrutamiseks on tavaline lineaarteisenduste kompositsioon.

Et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisendus on pööratav parajasti siis kui tema determinant on nullist erinev, siis rühma $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ kuuluvad need ja ainult need lineaarteisendused, mille determinant pole null. Kui vaatleme vaid lineaarteisendusi, mille determinant on üks, saame olulise alamrühma $\mathrm{SL}(\mathcal{V})$, mida nimetatakse vektorruumi $\mathcal{V}$ *spetsiaalsete lineaarteisenduste rühmaks*.

Et igal vektorruumil leidub baas, siis võime vektorruumi $\mathcal{V}$ jaoks fikseerida mingi baasi. Sel juhul saame kõik lineaarteisendused esitada maatriksitena ning nõnda võime edaspidi lineaarteisenduste rühmade asemel rääkida *maatriksrühmadest*. Kui $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ moodustab vektorruumi $\mathcal{V}$ baasi ning $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ on mingi lineaarteisendus, siis talle vastav maatriks selle baasi suhtes on (a^i_j), mis on määratud valemiga

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a^i_j e_i.$$

Selge, et vaadeldes rühmi $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ ja $\mathrm{SL}(\mathcal{V})$ maatriksrühmadena on rühma tehteks juba tavaline maatriksite korrutamine. Ilmselt saab nimetatud maatriksrühmad defineerida suvalise korpuste jaoks, ja nii ka reaal- ning kompleksarvude korral. Sellest lähtuvalt kasutatakse sageli nullist erineva determinandiga $n \times n$ maatriksrühmade tähistuseks $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ või $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ning neid rühmi nimetame vastavalt *reaalsete pööratavate lineaarteisenduste rühmaks* ja *kompleksete pööratavate lineaarteisenduste rühmaks*. Analoogiliselt on kasutusel tähistused $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ja $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Rühmal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ on palju tuntud alamrühmi. Klassikaliseks näiteks on $n \times n$ *ortogonaalsete maatriksite rühm* $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, kuhu kuuluvad ortogonaalsed maatriksid, see tähendab sellised maatriksid A, mille korral $A^T = A^{-1}$. Teise näitena võib tuua unitaarsete maatriksite rühma $\mathrm{U}(n)$, mille elementideks on anti-Hermite'i maatriksid A, mis rahuldavad tingimust $A^\dagger = \overline{A}^T = -A$. Edasi on lihtne konstrueerida saadud alamrühmade *spetsiaalsed* variandid. *Spetsiaalsete komplekssete*

[1]Inglise keeles *general linear group*.

ortogonaalmaatriksite rühm on

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}),$$

ja *spetsiaalsete unitaarsete maatriksite rühmaks* on

$$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}).$$

Definitsioon 1.1. Olgu $\mathcal{V}$ vektorruum üle korpuse K. Kujutust $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to K$ nimetatakse *bilineaarvormiks*, kui iga $x, y, z \in \mathcal{V}$ ja skalaaride $\lambda, \mu \in K$ korral

i. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$,

ii. $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z)$.

Kui vetorruumis $\mathcal{V}$ on antud baas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, siis saab bilineaarvormi $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ esitada talle vastava maatriksi $B = (b_{ij})$ abil, kus $b_{ij} = (e_i, e_j)$. Tõepoolest, kui meil on antud vektorid $x = \sum_i \lambda^i e_i$ ja $y = \sum_j \mu^j e_j$, siis kasutades $(\cdot,\cdot)$ lineaarsust mõlema muutuja järgi võime arvutada

$$(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} \lambda^i \mu^j.$$

Me ütleme, et bilineaarvorm $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ on *sümmeetriline* kui iga $x, y \in \mathcal{V}$ korral $(x, y) = (y, x)$. Selge, et sümmeetrilise bilineaarvormi maatriksi B korral kehtib võrdus $B = B^T$. Vormi $(\cdot,\cdot)$ nimetatakse *kaldsümmeetriliseks* kui iga $x, y \in \mathcal{V}$ korral kehtib võrdus $(x, y) = -(y, x)$. Lihtne on veenduda, et kaldsümmeetrilise bilineaarvormi korral rahuldab talle vastav maatriks B seost $B^T = -B$.

Definitsioon 1.2. Olgu $\mathcal{V}$ vektorruum kus on fikseeritud mingi baas, olgu ϕ vektorruumi $\mathcal{V}$ lineaarteisendus ning olgu $A = (a^i_j)$ on lineaarteisenduse ϕ maatriks fikseeritud baasi suhtes. Lineaarteisenduse ϕ *jäljeks* nimetatakse kujutust $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\colon \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \to K$, kus

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}(A) = \sum_i a^i_i.$$

Juhul kui maatriksi A korral $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}} A = 0$, siis ütleme, et maatriks A on *jäljeta.*

Näide 1.1. On hästi teada, et vektorruumi $\mathcal{V}$ kõigi lineaarteisenduste hulk $\mathrm{Lin}\,\mathcal{V}$ on ise ka vektorruum, kusjuures kui vektorruumi $\mathcal{V}$ dimensioon on $\dim(\mathcal{V}) = n$, siis ruumi $\mathrm{Lin}\,\mathcal{V}$ dimendsioon on $\dim(\mathrm{Lin}\,\mathcal{V}) = n^2$. Kasutades jälge $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}$ saame defineerida bilineaarvormi $(\cdot,\cdot) :\ \mathrm{Lin}\,\mathcal{V} \times \mathrm{Lin}\,\mathcal{V} \to K$ järgmiselt:

$$(A, B) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}(AB),$$

kus A ja B on maatriksid, mis vastavad vektorruumi $\mathrm{Lin}\,\mathcal{V}$ teisendustele mingi baasi suhtes. Selge, et selliselt defineeritud bilineaarvorm sümmeetriline.

Kasutades bilineaarvormi sümmeetrilisuse või kaldsümmeetrilisuse mõistet saame sisse tuua *ortogonaalsuse* mõiste. Me ütleme, et vektorid x ja y on bilineaarvormi $(\cdot,\cdot)$ suhtes ortogonaalsed, kui $(x,y)=0$. Selge, et ortogonaalsuse tingimus ise on sümmeetriline, see tähendab kui x on ortogonaalne vektoriga y, siis kehtib ka vastupidine, y on ortogonaalne vektoriga x. Kui vektor $x \neq 0$ on iseenesega ortogonaalne, see tähendab $(x,x)=0$, siis nimetatakse vektorit x *isotroopseks.* Selge, et Eukleidilises geomeetrias selliseid vektoreid ei leidu, kuid üldisemates situatsioonides esinevad nad küllaltki sageli, näiteks *Minkowski aegruumis.*

Edasises vaatleme ortogonaaseid ja sümplektilisi rühmi ning selleks nõuame, et vaatluse all olevad bilineaarvormid oleksid mittesingulaarsed ehk regulaarsed, see tähendab kui $(x,y)=0$ iga $y \in \mathcal{V}$ korral, siis järelikult $x=0$. Osutub, et bilineaarvorm $(\cdot,\cdot)$ on regulaarne parajasti siis, kui temale vastav maatiks $B=(b^i_j)$ on pööratav, mis tähendab, et $\det B \neq 0$.

Definitsioon 1.3. Me ütleme, et lineaarne operaator ϕ on *ortogonaalne* regulaarse sümmeetrilise bilineaarvormi $(\cdot,\cdot)$ suhtes, kui

$$(\phi(x),\phi(y))=(x,y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist $\mathcal{V}$.

Kui x on ortogonaalse lineaarse operaatori ϕ tuumast, siis kehtib $\phi(x)=0$. Viimane aga tähendab, et iga $y \in \mathcal{V}$ korral $(x,y)=(\phi(x),\phi(y))=(0,\phi(y))=0$. Kokkuvõttes, et $(\cdot,\cdot)$ on regulaarne, siis järelikult $x=0$ ja ϕ on üks-ühene. Kui nüüd veel $\mathcal{V}$ on lõplikumõõtmeline, siis peab ϕ olema pööratav. Seda arutelu silmas pidades võime öelda, et ortogonaalsed lineaarsed operaatorid moodustavad rühma, mida me nimetame *ortogonaalsete lineaarteisenduste rühmaks* bilineaarvormi $(\cdot,\cdot)$ suhtes. Võttes tarvitusele vektorruumi $\mathcal{V}$ baasi saame konstrueerida ka *ortogonaalsete maatriksite rühma*, mida tähistatakse kompleksel juhul kui $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, kus $n \in \mathbb{N}$ märgib, et tegu on $n \times n$ maatriksitega.

Sümplektiliste teisenduste tarvis tuleb vaadelda kaldsümmeetrilisi bilineaarvorme.

Definitsioon 1.4. Me ütleme, et lineaarne operaator ϕ on *sümplektiline* regulaarse kaldsümmeetrilise bilineaarvormi $(\cdot,\cdot)$ suhtes, kui

$$(\phi(x),\phi(y))=(x,y)$$

kõikide x ja y korral vektorruumist $\mathcal{V}$.

Märgime, et sümplektilised lineaarteisendused leiduvad ainult sellistes vektorruumides, mille dimensioon on paarisarvuline, see tähendab $\dim\mathcal{V}=2n$, kus

$n \in \mathbb{N}$. Sümplektilised teisendused moodustavad *sümplektiliste rühma*, mida tähistatakse kompleksel juhul $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$. Reaalsete sümplektiliste teisenduste rühma saame kui vaatleme ühisosa rühmaga $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}).$$

1.2 Eksponentsiaalkujutus

Kõikide seni käsitluse all olnud maatriksrühmade esindajad peavad vastavatesse rühmadesse kuulumiseks rahuldama mingeid algebralisi tingimusi. Need tingimused võib kirja panna maatriksite elementide kaudu, mille tulemusel saaame me mittelineaarseid võrrandeid, mis määravad rühma kuulumise. Osutub, et need tingimused on võimalik asendada mingi hulga ekvivalentsete lineaarsete võrranditega ja selline üleminek mittelineaarselt süsteemilt lineaarsele ongi võtmetähtsusega idee üleminekul Lie rühmadest Lie algebratele.[3]

Klassikaliseks viisiks kuidas sellist üleminekut realiseeritakse on *eksponentsiaalkujutuse* kasutuselevõtt. Nagu nimigi viitab, on tegu analüüsist tuttava kujutuse üldistusega. Et meil oli siiani tegemist vaid maatriksrühmadega, siis läheme siin ka edasi vaid eksponentsiaalkujutuse ühe tähtsa erijuhuga, *maatrikseksponentsiaaliga*, kuid olgu öeldud, et järgnevad väited kehtivad tegelikult ka üldisemas seades, nagu võib näha raamatus [5].

Olgu A mingi $n \times n$ maatriks, $k \in \mathbb{N}$ ning olgu I ühikmaatriksit. Tähistame $A^0 = I$ ning $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-korda}}$.

Definitsioon 1.5. Olgu X reaalne või kompleksne $n \times n$ maatriks. Maatriksi X *eksponendiks*, mida tähistatakse e^X või $\exp X$, nimetatakse astmerida

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{1.1}$$

Ilmselt tuleks definitsiooni korrektsuses veendumaks näidata, et suvalise maatriksi X korral rida (1.1) koondub. Selleks meenutame, et $n \times n$ maatriksi $X = (X_{ij})$ normi arvutatakse valemi

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |X_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

järgi. Arvestades, et $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$, siis $\|X^k\| \leq \|X\|^k$. Rakendades nüüd normi (1.2) rea (1.1) liikmetele saame

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = e^{\|X\|} < \infty,$$

mis tähendab, et rida (1.1) koondub absoluutselt ja seega ta ka koondub. Märkamaks, et e^X on pidev funktsioon märgime esiteks, et X^k on argumendi X suhtes pidev funktsioon ja seega on rea (1.1) osasummad pidevad. Teisalt paneme tähele, et (1.1) koondub ühtlaselt hulkadel, mis on kujul $\{\|X\| \leq R\}$, ja seega on rida kokkuvõttes pidev.

Seega on maatrikseksponentsiaal korrektselt defineeritud ning ka pidev. Järgmises lauses on toodud rida eksponentsiaalkujutuse põhilisi omadusi, mille võrdlemisi lihtsad tõestused võib huvi korral võib leida näiteks teosest [4].

Lause 1.1. *Olgu X ja Y suvalised $n \times n$ maatriksid. Siis kehtivad järgmised väited:*

1) $e^0 = I$,

2) $\left(e^X\right)^T = e^{X^T}$,

3) e^X *on pööratav ning kehtib* $\left(e^X\right)^{-1} = e^{X^{-1}}$,

4) $e^{(\lambda+\mu)X} = e^{\lambda X} e^{\mu X}$ *suvaliste* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *korral,*

5) kui $XY = YX$, *siis* $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$,

6) kui C *on pööratav, siis* $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$,

7) $\det e^X = e^{\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}} X}$.

Ostutub, et rühma $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ühikelemendi mingis ümbruses on võimalik suvaline maatriks esitada kujul e^A, kus A on mingi $n \times n$ maatriks. Rühma $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ korral on maatriks A reaalne. Oluline on tähele panna, et vaadeldes rühma $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, ei ole eksponentfunktsiooni kujutis terve rühm. Selles veenumiseks piisab võtta $n = 1$ ning näha, et $\exp\left(\mathrm{GL}(1, \mathbb{R})\right) = \mathbb{R}^+$, ehk kujutiseks on reaaltelje positiivne osa, samas kui $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ehk reaaltelg ilma nullpunktita.

Niisiis eksponentkujutust kasutades on oht kaotada rühma globaalne struktuur, samas kui lokaalne struktuur säilib.

Et maatriksi A korral kuuluks maatriks e^A mõnda puntis 1.1. Maatriksrühmad ja bilineaarvorm nimetatud rühma tuleb maatriksile A seada mingid lineaarsed kitsendused. Näiteks spetsiaalse lineaarse rühma $\mathrm{SL}(n)$ korral võime mittelineaarse tingimuse e^A determinandi kohta asendada lineaarse tingimusega maatriksi A jälje kohta kasutades lause 1.1 punkti 7). Nii on näiteks $\det e^A = 1$ parajasti siis, kui $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}} A = 0$.

Kokkuvõttes nägime, et eksponentsiaalkujutuse abil on võimalik asendada klassikalised maatriksrühmad maatrikshulkadega, millele on seatud teatud lineaarsed kitsendused. Selge, et need hulgad on kinnised lineaarkombinatsioonide suhtes ja nii võib neid vaadelda kui vektorruume. Tavalise maatriksite korrutamise osas kahjuks kinnisus säilida ei pruugi. Samas kui meil on $n \times n$ maatriksid A ja B, mis on vastavalt kas kaldsümmeetrilised, rahuldavad anti-Hermite'i tingimust või neil puudub jälg, siis maatriksil $C = AB - BA$ on samuti selline omadus. Niisiis saadud maatrikshulgad ei moodusta ainuüksi vektorruumi, vaid on kinnised ka teatud binaarse tehte suhtes.

1.3 Lie algebra definitsioon

Enne kui Lie algebra definitsiooni anname tuletame meelde, et *algebraks* üle korpuse K nimetatakse vektorruumi $\mathcal{V}$ üle korpuse K, millel on defineeritud bilineaarne korrutamine $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Kui algebra tehe rahuldab assotsiatiivsuse tingimust, siis nimetatakse seda algebrat assotsiatiivsekt ning vastasel korral mitteassotsiatiivseks. Nii on näiteks vektorruumi $\mathcal{V}$ lineaarteisenduste vektorruum $\operatorname{Lin}\mathcal{V}$ assotsiatiivne algebra, mille tehteks on teisenduste kompositsioon: $f \circ g$. Samas võime vektorruumi $\operatorname{Lin}\mathcal{V}$ varustada ka teistsuguse korrutamisega ning saada uue algebralise struktuuri, kui võtame tehteks näiteks $f \circ g - g \circ f$. Üldiselt selline korrutamine aga enam kommutatiivne ei ole.

Definitsioon 1.6 (Lie algebra)**.** Algebrat $\mathfrak{g}$ üle korpuse K nimetatakse *Lie algebraks*, kui tema korrutamine $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ rahuldab kõikide $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tingimusi

$$[x, x] = 0, \tag{1.3}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{1.4}$$

Me ütleme definitsioonis toodud korrutise $[x, y]$ kohta elementide x ja y *Lie sulg*, ning bilineaarvormi $[\cdot,\cdot]$ kohta öeldakse ka *kommutaator*. Definitsioonis toodud samasust (1.4) nimetatakse *Jacobi samasuseks*. Piltlikult öeldes mõõdab kommutaator algebra elementide mittekommuteeruvust ja seda asjaolu kirjeldavat võrdust (1.3) võime kirjutada ka kujul

$$[x, y] = -[y, x]. \tag{1.5}$$

Tõepoolest, (1.3) järgi kehtib $[x + y, x + y] = 0$, millest saame bilineaarsuse abil $[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$, ehk kehtibki $[x, y] = -[y, x]$.

Rakendades võrdust (1.5) saame Jacobi samasuse kirjutada kui

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]. \tag{1.6}$$

Näide 1.2. Olgu $\mathcal{A}$ algebra, millel on assotriatiivne korrutustehe $\star\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Defineerides kommutaatori valemiga

$$[x, y] = x \star y - y \star x, \quad x, y \in \mathcal{A}, \tag{1.7}$$

saame algebrast $\mathcal{A}$ moodustada Lie algebra $\mathcal{A}_L$. Valemist (1.7) järeldub vahetult, et Lie algebra definitsiooni nõue (1.3) kehtib. Jacobi samasuse kehvivuseks märgime, et

$$\begin{aligned}
&[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]= \\
=&[x,y\star z-z\star y]+[y,z\star x-x\star z]+[z,x\star y-y\star x]= \\
=&[x,y\star z]-[x,z\star y]+[y,z\star x]-[x,x\star z]+[z,x\star y]-[z,y\star x]= \\
=&\,x\star y\star z-y\star z\star x-x\star z\star y+z\star y\star x+y\star z\star x-z\star x\star y- \\
&y\star x\star z+x\star z\star y+z\star x\star y-x\star y\star z-z\star y\star x+y\star x\star z=0,
\end{aligned}$$

kus $x,y,z\in\mathcal{A}$.

Niisiis suvalisest assotsiatiivsest algebrast on võimalik konstrueerida Lie algebra. Arvestades, et maatriksite ja lineaarteisenduste korrutamine rahuldavad assotsiatiivsuse tingimust, on näites 1.2 esitatud eeskirja abil võimalik kõiki punktis 1.1 toodud rühmi võimalik vaadelda kui Lie algebraid. Märgime, et Lie algebrate tähistamiseks kasutatakse tavaliselt väikeseid gooti tähti, seega näiteks pööratavate lineaarteisenduste rühmale $\mathrm{GL}(n)$ vastavaks Lie algebraks on $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$.

1.4 Lie algebra struktuurikonstandid

Eeldame, et järgnevas on meil antud lõplikumõõtmeline Lie algebra $\mathfrak{g}$, üle korpuse K, mille vektorruumil on fikseerutd baas $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$. Siinjuures tuletame meelde, et Lie algebra aluseks oleva vektorruumi baasi elemente nimetatakse sageli selle Lie algebra *generaatoriteks*. Et Lie sulg $[\cdot,\cdot]$ on bilineaarne vorm, siis tema väärtused Lie algebral $\mathfrak{g}$ on täielikult määratud, kui me teame millega võrduvad $[e_\alpha,e_\beta]$, kus $\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,n\}$. Tõepoolest, suvalise vektori võime esitada baasivektorite $e_1,e_2,\ldots,e_n$ lineaarkombinatsioonina ja kõikide vektorite $x,y\in\mathfrak{g}$ korral leiduvad $a^\alpha,b^\beta\in K$ nii, et $x=a^\alpha e_\alpha$ ja $y=b^\beta e_\beta$, kus $\alpha,\beta=1,2,\ldots,n$. Niisiis saame $[x,y]$ välja arvutada järgmiselt:

$$[x,y]=[a^\alpha e_\alpha,b^\beta e_\beta]=a^\alpha b^\beta[e_\alpha,e_\beta].$$

Iga $\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,n\}$ korral võime omakorda ka vektori $[e_\alpha,e_\beta]$ avaldata lineaarkombinatsioonina baasivektoritest kujul

$$[e_\alpha,e_\beta]=K^\lambda_{\alpha\beta}e_\lambda,$$

ja seega jääb meile $[x,y]$ arvutamiseks lõpuks võrdus

$$[x,y]=a^\alpha b^\beta K^\lambda_{\alpha\beta}e_\lambda.$$

Definitsioon 1.7. Olgu $\mathfrak{g}$ lõplikumõõtmeline Lie algebra ning $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ selle Lie algebra vektorruumi baas. Tähistades $[e_\alpha, e_\beta] = K^\lambda_{\alpha\beta} e_\lambda$, kus $\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n\}$, siis arve $K^\lambda_{\alpha\beta}$ nimetatakse Lie algebra $\mathfrak{g}$ *struktuurikonstantideks.*

Kasutades kommutaatori $[\cdot,\cdot]$ kaldsümmeetrilisust saame struktuurikonstantide kohta valemi

$$K^\lambda_{\alpha\beta} = -K^\lambda_{\beta\alpha}. \tag{1.8}$$

Jacobi samasuse abil saame veel teisegi tingimuse, mida struktuurikonstandid rahuldama peavad.

$$\begin{aligned}
[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] + [e_\beta, [e_\gamma, e_\alpha]] + [e_\gamma, [e_\alpha, e_\beta]] &= 0, \\
\left[e_\alpha, K^\lambda_{\beta\gamma} e_\lambda\right] + \left[e_\beta, K^\lambda_{\gamma\alpha} e_\lambda\right] + \left[e_\gamma, K^\lambda_{\alpha\beta} e_\lambda\right] &= 0, \\
K^\lambda_{\beta\gamma}\left[e_\alpha, e_\lambda\right] + K^\lambda_{\gamma\alpha}\left[e_\beta, e_\lambda\right] + K^\lambda_{\alpha\beta}\left[e_\gamma, e_\lambda\right] &= 0, \\
K^\lambda_{\beta\gamma} K^\mu_{\alpha\lambda} e_\mu + K^\lambda_{\gamma\alpha} K^\mu_{\beta\lambda} e_\mu + K^\lambda_{\alpha\beta} K^\mu_{\gamma\lambda} e_\mu &= 0, \\
K^\lambda_{\beta\gamma} K^\mu_{\alpha\lambda} + K^\lambda_{\gamma\alpha} K^\mu_{\beta\lambda} + K^\lambda_{\alpha\beta} K^\mu_{\gamma\lambda} &= 0.
\end{aligned}$$

Näide 1.3. Vaatleme eespool näiteks toodud spetsiaalsete unitaarsete maatriksite rühma $\mathrm{SU}(n)$ erijuhul $n = 2$. Rühmale $\mathrm{SU}(2)$ vastab Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$, mille element $x \in \mathfrak{su}(2)$ rahuldab tingimusi

$$\operatorname{Tr} x = 0, \tag{1.9}$$

$$x^\dagger + x = 0. \tag{1.10}$$

Tingimuste (1.9) ja (1.10) põhjal on võimalik näidata, et Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ generaatoriteks on maatriksid

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

nagu võib näha bakalaureusetöös [6].

Arvutame Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ generaatoritel Lie sulu väärtused ja leiame seeläbi struktuurikonstandid. Ilmselt kõik suvalise $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ korral $[\rho_\alpha, \rho_\alpha] = 0$. Arvestades veel omadust (1.8) on meile huvi pakkuvad kommutaatorid on vaid kujul $[\rho_\alpha, \rho_\beta]$, kus $\alpha < \beta$.

$$[\rho_1, \rho_2] = \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = -2\rho_3, \tag{1.11}$$

$$[\rho_1, \rho_3] = \rho_1\rho_3 - \rho_3\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2\rho_2, \tag{1.12}$$

$$[\rho_2, \rho_3] = \rho_2\rho_3 - \rho_3\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -2\rho_1. \tag{1.13}$$

Seega võrduste (1.11), (1.12) ja (1.13) põhjal on antud baasi suhtes nullist erinevad struktuurikonstandid

1. $K^3_{12} = -2$,
2. $K^3_{21} = 2$,
3. $K^2_{13} = 2$,
4. $K^2_{31} = -2$,
5. $K^1_{23} = -2$,
6. $K^1_{32} = 2$.

Valides näiteks $x = \begin{pmatrix} 3i & 7+i \\ -7+i & -3i \end{pmatrix}$ ja $y = \begin{pmatrix} i & 5+2i \\ -5+2i & -i \end{pmatrix}$, siis ilmselt $x, y \in \mathfrak{su}(2)$, ja saame arvutada Lie sulu $[x, y]$. Nüüd ühelt poolt vahetu arvutuse tulemusena

$$
\begin{aligned}
[x, y] = xy - yx &= \begin{pmatrix} -40+9i & -5+8i \\ 5+8i & -40-9i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40-9i & 5-8i \\ -5-8i & -40+9i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 18i & -10+16i \\ 10+16i & -18i \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

kuid teisalt $x = \rho_1 + 7\rho_2 + 3\rho_3$ ja $y = 2\rho_1 + 5\rho_2 + \rho_3$, ning saame kasutada struktuurikonstante:

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= [\rho_1 + 7\rho_2 + 3\rho_3, 2\rho_1 + 5\rho_2 + \rho_3] = \\
&= 2[\rho_1, \rho_1] + 5[\rho_1, \rho_2] + [\rho_1, \rho_3] + 14[\rho_2, \rho_1] + 35[\rho_2, \rho_2] + 7[\rho_2, \rho_3] + \\
&\quad 6[\rho_3, \rho_1] + 15[\rho_3, \rho_2] + 3[\rho_3, \rho_3] = \\
&= 5[\rho_1, \rho_2] + [\rho_1, \rho_3] - 14[\rho_1, \rho_2] + 7[\rho_2, \rho_3] - 6[\rho_1, \rho_3] - 15[\rho_2, \rho_3] = \\
&= -9[\rho_1, \rho_2] - 5[\rho_1, \rho_3] - 8[\rho_2, \rho_3] = \\
&= -9K^\lambda_{12}\rho_\lambda - 5K^\lambda_{13}\rho_\lambda - 8K^\lambda_{23}\rho_\lambda = \\
&= -9K^3_{12}\rho_3 - 5K^2_{13}\rho_2 - 8K^1_{23}\rho_1 = \\
&= -9 \cdot (-2)\rho_3 - 5 \cdot 2\rho_2 - 8 \cdot (-2)\rho_1 = \\
&= 16\rho_1 - 10\rho_2 + 18\rho_3 = \\
&= \begin{pmatrix} 18i & -10+16i \\ 10+16i & -18i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ootuspäraselt annavad mõlemad variandid sama tulemuse, kuid teise variandi puhul ei soorita me kordagi selle algebra korrutustehet.

Ilmselt sõltuvad Lie algebra struktuurikonstandid algebra vektorruumi baasist. Olgu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ Lie algebra $\mathfrak{g}$ vektorruumi kaks erinevad baasi, ning olgu nad omavahel järgmises seoses:

$$
\hat{e}_\alpha = a^\lambda_\alpha e_\lambda. \tag{1.14}
$$

Siis

$$\hat{K}^{\xi}_{\alpha\beta}\hat{e}_{\xi} = [\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}] = [a^{\mu}_{\alpha}e_{\mu}, a^{\nu}_{\beta}e_{\nu}] = a^{\mu}_{\alpha}a^{\nu}_{\beta}[e_{\mu}, e_{\nu}] = a^{\mu}_{\alpha}a^{\nu}_{\beta}K^{\lambda}_{\mu\nu}e_{\lambda}. \tag{1.15}$$

Kui võrduste ahela (1.15) kõige vasakpoolsemas osas kasutada samasust (1.14), siis kehtib

$$\hat{K}^{\xi}_{\alpha\beta}a^{\lambda}_{\xi}e_{\lambda} = a^{\mu}_{\alpha}a^{\nu}_{\beta}K^{\lambda}_{\mu\nu}e_{\lambda},$$

millest kokkuvõttes saame valemi

$$a^{\lambda}_{\xi}\hat{K}^{\xi}_{\alpha\beta} = a^{\mu}_{\alpha}a^{\nu}_{\beta}K^{\lambda}_{\mu\nu}.$$

2 Indutseeritud n-Lie algebra

See peatükk tugineb artiklile [2]

Definitsioon 2.1 (n-Lie algebra)**.** Vektorruumi A nimetatakse *n-Lie algebraks*, kui on määratud n-lineaarne kaldsümmeetriline kujutus $[\cdot, \ldots, \cdot] : A^n \times A \to A$, mis suvaliste

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_n \in A$$

korral rahuldab tingimust

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, [y_1, \ldots, y_n]] = \sum_{i=1}^{n} [y_1, \ldots, [x_1, \ldots, x_{n-1}, y_i], \ldots, y_n].$$

Definitsioon 2.2 (Jälg)**.** Olgu A vektorruum ning olgu $\phi\colon A^n \to A$. Me ütleme, et lineaarkujutus $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ on *ϕ-jälg*, kui suvaliste $x_1, \ldots, x_n \in A$ korral $\tau(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = 0$.

Olgu $\phi\colon A^n \to A$ n-lineaarne ja $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ lineaarne kujutus. Defineerime nende kujutuste abil uue $(n+1)$-lineaarse kujutuse $\phi_\tau\colon A^{n+1} \to A$ valemiga

$$\phi_\tau(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \tau(x_i) \phi(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1}), \tag{2.1}$$

kus $\hat{x_i}$ tähistab kõrvalejäätavat elementi, see tähendab $\phi(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$ arvutatakse elementidel $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$.

Rikastame defineeritud kujutust ühe näitega. Võttes $n = 2$ saame valemi 2.1 põhjal kirjutada

$$\phi_\tau(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1)\phi(x_2, x_3) - \tau(x_2)\phi(x_1, x_3) + \tau(x_3)\phi(x_1, x_2).$$

Edasises toome ära mõningad kujutuse ϕ_τ tähtsamad omadused.

Lemma 2.1. *Olgu A vektorruum ning $\phi\colon A^n \to A$ n-lineaarne kaldsümmeetriline kujutus ja $\tau\colon A \to \mathbb{K}$ lineaarne. Siis kujutus $\phi_\tau\colon A^{n+1} \to A$ on samuti kaldsümmeetriline. Lisaks, kui τ on ϕ-jälg, siis τ on ka ϕ_τ-jälg.*

Teoreem 2.2. *Olgu (A, ϕ) n-Lie algebra ning olgu τ lineaarkujutuse ϕ-jälg. Siis (A, ϕ_τ) on $(n+1)$-Lie algebra.*

Teoreemis kirjeldatud viisil saadud $(n+1)$-Lie algebrat (A, ϕ_τ) nimetatakse n-Lie algebra (A, ϕ) poolt *indutseeritud* $(n+1)$-Lie algebraks.

Teoreemist 2.2 saame teha olulise järlduse:

Järeldus 2.3. *Olgu $(A, [\cdot, \cdot])$ Lie algebra ning olgu antud $[\cdot, \cdot]$ jälg $\tau\colon A \to \mathbb{K}$. Siis ternaarne sulg $[\cdot, \cdot, \cdot]\colon A^3 \to A$, mis on defineeritud valemiga*

$$[x, y, z] = \tau(x)[y, z] + \tau(y)[z, x] + \tau(z)[x, y],$$

määrab 3-Lie algebra struktuuri A_τ vektorruumil A.

3 n-Lie superalgebra

See peatükk tugineb artiklile [1]

Järgnevas eeldame, et meil on antud supervektorruum ehk supervektorruum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ ning n-lineaarne kujutus $\phi\colon \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

- $|\phi(x_1, \ldots, x_n)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $\phi\left(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\phi\left(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n\right)$,

kus $|x| \in \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$ tähistab elemendi x paartust. Samuti eeldame, et $S\colon \mathcal{G} \to \mathbb{K}$ on lineaarne kujutus, mis rahuldab

- $S\left(\phi\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = 0$,
- $S(x) = 0$ iga $x \in \mathcal{G}_{\overline{1}}$.

Selge, et siin sisse toodud kujutused ϕ ja S on eelnevas kirjeldatu analoogid supervektorruumis. Seejuures kujutust $S\colon \mathcal{G} \to \mathbb{K}$ nimetatakse *superjäljeks*.

Kasutades kujutusi ϕ ja S defineerime analoogiliselt vektorruumide situatsioonile, kuid nüüd juba supervektorruumi iseärasusi arvesse võttes, see tähendab paarsusi arvestades, uue kujutuse $\phi_S\colon \mathcal{G}^{n+1} \to G$ valemiga

$$\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}(-1)^{|x_i| \sum_{j=1}^{i-1} |x_j|} S(x_i)\phi\left(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}\right).$$

Saadud kujutuse tähtsamad omadused võtab kokku järgmine oluline lemma:

Lemma 3.1. *$(n+1)$-lineaarne kujutus $\phi_S\colon \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ rahuldab tingimusi*

1. $|\phi_S\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$,
2. $\phi_S\left(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}\right) = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\phi_S\left(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_{n+1}\right)$,
3. $S\left(\phi_S\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)\right)$.

Üldistame nüüd definitsiooni 1.6 supervektorruumi jaoks ning defineerime *n-Lie superalgebra.*

Definitsioon 3.1 (n-Lie superalgebra)**.** Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ supervektorruum. Me ütleme, et $\mathcal{G}$ on *n-Lie superalgebra*, kui $\mathcal{G}$ on varustatud gradueeritud n-Lie suluga $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, mis rahuldab tingimusi

1. $|[x_1,\dots,x_n]| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

2. $[x_1,\dots,x_i,x_{i+1},\dots,x_n] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}\,[x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_n]$,

3. $[y_1,\dots,y_{n-1},[x_1,\dots,x_n]] =$
$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\tau_x(i-1)\tau_y(n-1)}\,[x_1,\dots,x_{i-1},[y_1,\dots,y_{n-1},x_i]\,,x_{i+1},\dots,x_n]$,

kus $x=(x_1,\dots,x_n)$ ja $y=(y_1,\dots,y_{n-1})$ ning $\tau_x(k) = \sum_{j=1}^{k-1} |x_i|$.

Võttes arvesse n-Lie superalgebra definitsiooni saame sõnastada teoreemi 2.2 superanaloogi järgmiselt:

Teoreem 3.2. *Olgu $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ n-Lie superalgebra suluga $[\cdot,\dots,\cdot] : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$, ning V lõplikumõõtmeline vektorruum ja olgu antud $\mathcal{G}$ esitus $\phi\colon \mathcal{G} \to \mathrm{gl}\,V$. Defineerides $[\cdot,\dots,\cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ valemiga*

$$[x_1,\dots,x_{n+1}] = \sum_{i=1} n+1 (-1)^{i-1}(-1)^{|x_i|\tau_x(i-1)} S(\phi(x_i))\,[x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{n+1}]\,,$$

on supervektorruum $\mathcal{G}$, varustatuna suluga $[\cdot,\dots,\cdot] : \mathcal{G}^{n+1} \to \mathcal{G}$ $(n+1)$-Lie superalgebra.

4 Madaladimensionaalsete n-Lie superalgebrate klassifikatsioon

4.1 $(2,1)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud $(2,1)$ 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, e_2, f_1\}$, kus e_1 ja e_2 on paaris- ja f_1 on paaritu baasivektor.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$\begin{aligned}
[e_1, e_1, e_1] &= 0,\\
[e_1, e_1, e_2] &= 0,\\
[e_1, e_1, f_1] &= 0,\\
[e_1, e_2, e_2] &= 0,\\
[e_1, e_2, f_1] &= m_1 \cdot f_1,\\
[e_1, f_1, f_1] &= l_1 \cdot e_1 + l_2 \cdot e_2,\\
[e_2, e_2, e_2] &= 0,\\
[e_2, e_2, f_1] &= 0,\\
[e_2, f_1, f_1] &= l_3 \cdot e_1 + l_4 \cdot e_2,\\
[f_1, f_1, f_1] &= m_2 \cdot f_1,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

kus $m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $-m_1 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
5. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0$,
6. $m_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0$,
8. $l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0$,
9. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0$,

10. $l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$

11. $m_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0,$

12. $-l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$

13. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 = 0,$

14. $-l_2 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_1 = 0,$

15. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0,$

16. $l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_2 = 0,$

17. $l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 - l_2 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_2 = 0,$

18. $l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$

19. $l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$

20. $-l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 = 0,$

21. $-l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$

22. $-l_4 \cdot m_1 - l_4 \cdot m_1 = 0,$

23. $-l_4 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_1 = 0,$

24. $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_1 = 0,$

25. $l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 - l_3 \cdot m_2 - l_3 \cdot m_2 = 0,$

26. $l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 - l_4 \cdot m_2 - l_4 \cdot m_2 = 0,$

27. $m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2 = 0,$

28. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 + l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_1 - l_2 \cdot l_3 = 0,$

29. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_4 = 0,$

30. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 + l_1 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 - l_1 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_4 = 0,$

31. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 + l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 - l_2 \cdot l_3 - l_4 \cdot l_4 = 0,$

32. $m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_2 = 0.$

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
2. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
3. $l_1 \cdot m_1 + l_4 \cdot m_1 = 0$,
4. $l_1 \cdot m_1 = 0$,
5. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
6. $l_2 \cdot m_1 = 0$,
7. $l_1 \cdot m_1 - m_1 \cdot m_2 = 0$,
8. $l_1 \cdot m_2 = 0$,
9. $l_2 \cdot m_2 = 0$,
10. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
11. $l_4 \cdot m_1 = 0$,
12. $l_4 \cdot m_1 + m1 \cdot m2 = 0$,
13. $l_3 \cdot m_1 = 0$,
14. $l_3 \cdot m_2 = 0$,
15. $l_4 \cdot m_2 = 0$,
16. $m_1 \cdot m_2 = 0$,
17. $l_1 \cdot m_2 - l_1 \cdot l1 - l_2 \cdot l_3 = 0$,
18. $l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l2 - l_2 \cdot l_4 = 0$,
19. $l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l3 - l_3 \cdot l_4 = 0$,
20. $l_4 \cdot m_2 - l_2 \cdot l3 - l_4 \cdot l_4 = 0$,
21. $m_2 \cdot m_2 = 0$.

Sellel võrrandisüsteemil on kolm mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ -\frac{c_1^2}{c_2} \\ -c_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (4.1) saame kommutatsiooniseosed:

- $\begin{cases} [e_1, f_1, f_1] = c_1 e_1 + c_2 e_2, \\ [e_2, f_1, f_1] = -\frac{c_1^2}{c_2} e_1 - c_1 e_2 \end{cases}$,
- $[e_1, e_2, f_1] = c f_1$,
- $[e_2, f_1, f_1] = c e_1$.

4.2 $(1, 2)$ 3-Lie superalgebrate klassifikatsioon

Olgu meil antud $(1, 2)$ 3-Lie superalgebra, millel on fikseeritud baas $\{e_1, f_1, f_2\}$, kus e_1 on paaris- ja f_1, f_2 on paaritud baasivektorid.

Siis avaldub kommutaator baasielementidel järgmiselt:

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_1, e_1] = 0,\\
&[e_1, e_1, f_1] = 0,\\
&[e_1, e_1, f_2] = 0,\\
&[e_1, f_1, f_1] = l_1 \cdot e_1,\\
&[e_1, f_1, f_2] = l_2 \cdot e_1,\\
&[e_1, f_2, f_2] = l_3 \cdot e_1,\\
&[f_1, f_1, f_1] = m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2,\\
&[f_1, f_1, f_2] = m_3 \cdot f_1 + m_4 \cdot f_2,\\
&[f_1, f_2, f_2] = m_5 \cdot f_1 + m_6 \cdot f_2,\\
&[f_2, f_2, f_2] = m_7 \cdot f_1 + m_8 \cdot f_2,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

kus $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{K}$ on mingid konstandid.

Rakendades nullist erinevatele kommutaatoritele Filippovi samasuse analoogi supervektorruumis, saame järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_1 - l_2 \cdot m_2 = 0,$
2. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
3. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
4. $l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_1 - l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot m_3 - l_2 \cdot m_4 = 0,$
5. $l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot m_5 - l_2 \cdot m_6 = 0,$
6. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_1 \cdot m_7 - l_2 \cdot m_8 = 0,$
7. $l_1 \cdot l_3 - l_1 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot m_3 - l_3 \cdot m_4 = 0,$
8. $l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot m_5 - l_3 \cdot m_6 = 0,$
9. $l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 - l_2 \cdot m_7 - l_3 \cdot m_8 = 0,$
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 + l_1 \cdot l_1 - l_1 \cdot l_1 = 0,$
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_2 - m_2 \cdot m_4 = 0,$
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 - m_1 \cdot m_1 - m_2 \cdot m_3 = 0,$

14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0,$

15. $m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0,$

16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0,$

17. $m_1 \cdot m_5 + m_2 \cdot m_7 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0,$

18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$

19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_2 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_2 - l_1 \cdot l_3 = 0,$

20. $m_2 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_4 - m_2 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_4 = 0,$

21. $m_1 \cdot m_3 + m_3 \cdot m_4 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_3 - m_3 \cdot m_4 = 0,$

22. $m_3 \cdot m_4 + m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_6 = 0,$

23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_6 = 0,$

24. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - m_4 \cdot m_8 = 0,$

25. $m_3 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0,$

26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_2 = 0,$

27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0,$

28. $m_2 \cdot m_5 + m_4 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0,$

29. $m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 - m_1 \cdot m_5 - m_2 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 - m_3 \cdot m_3 - m_4 \cdot m_5 = 0,$

30. $m_4 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_6 = 0,$

31. $m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_5 \cdot m_6 = 0,$

32. $m_5 \cdot m_6 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 - m_4 \cdot m_7 - m_6 \cdot m_8 = 0,$

33. $m_5 \cdot m_5 + m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_8 = 0,$

34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_3 - l_2 \cdot l_3 = 0,$

35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_3 - l_3 \cdot l_3 = 0,$

36. $m_2 \cdot m_7 + m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_6 - m_4 \cdot m_8 = 0,$

37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_5 - m_4 \cdot m_7 = 0,$

38. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_6 - m_6 \cdot m_8 = 0,$

39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 - m_5 \cdot m_5 - m_6 \cdot m_7 = 0,$

40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 - m_6 \cdot m_7 - m_8 \cdot m_8 = 0,$

41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 - m_5 \cdot m_7 - m_7 \cdot m_8 = 0.$

Kui koondame võrrandites samasugused kuid erinevate märkidega liikmed, siis jäävad järele järgmised võrrandid:

1. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 = 0,$
2. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0,$
3. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0,$
4. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 + l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 = 0,$
5. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 + l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 = 0,$
6. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 + l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 = 0,$
7. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 = 0,$
8. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 = 0,$
9. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 = 0,$
10. $l_1 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_1 = 0,$
11. $l_2 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
12. $m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_4 = 0,$
13. $m_1 \cdot m_1 + m_2 \cdot m_3 = 0,$
14. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 - 3 \cdot m_2 \cdot m_3 - 3 \cdot m_4 \cdot m_4 = 0,$
15. $m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_3 \cdot m_4 - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 = 0,$
16. $m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_8 - 3 \cdot m_2 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_6 = 0,$
17. $m_2 \cdot m_7 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_1 \cdot m_5 = 0,$
18. $l_1 \cdot m_3 + l_2 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_2 = 0,$
19. $l_2 \cdot m_3 + l_3 \cdot m_4 - l_1 \cdot l_3 = 0,$

20. $m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_6 = 0,$

21. $m_2 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_3 = 0,$

22. $m_3 \cdot m_4 + 2 \cdot m_4 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_5 = 0,$

23. $m_3 \cdot m_3 + m_4 \cdot m_5 + m_1 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 = 0,$

24. $m_3 \cdot m_6 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 - 2 \cdot m_6 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 = 0,$

25. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_5 \cdot m_6 - m_3 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_7 - m_3 \cdot m_8 = 0,$

26. $l_1 \cdot m_5 + l_2 \cdot m_6 - l_1 \cdot l_3 = 0,$

27. $l_2 \cdot m_5 + l_3 \cdot m_6 - l_2 \cdot l_3 = 0,$

28. $m_2 \cdot m_5 - m_1 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_8 - 2 \cdot m_3 \cdot m_4 - m_4 \cdot m_6 = 0,$

29. $m_3 \cdot m_6 - m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_3 \cdot m_3 - 2 \cdot m_4 \cdot m_5 = 0,$

30. $m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_8 + m_6 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_5 = 0,$

31. $m_4 \cdot m_7 + 2 \cdot m_3 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 = 0,$

32. $m_4 \cdot m_7 + m_6 \cdot m_8 = 0,$

33. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 = 0,$

34. $l_1 \cdot m_7 + l_2 \cdot m_8 - l_2 \cdot l_3 = 0,$

35. $l_2 \cdot m_7 + l_3 \cdot m_8 - l_3 \cdot l_3 = 0,$

36. $m_2 \cdot m_7 - 2 \cdot m_4 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_6 = 0,$

37. $m_1 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_8 - 3 \cdot m_3 \cdot m_5 - 3 \cdot m_4 \cdot m_7 = 0,$

38. $m_4 \cdot m_7 - 2 \cdot m_6 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_6 = 0,$

39. $m_3 \cdot m_7 + m_5 \cdot m_8 - 3 \cdot m_5 \cdot m_5 - 3 \cdot m_6 \cdot m_7 = 0,$

40. $m_6 \cdot m_7 + m_8 \cdot m_8 = 0,$

41. $m_5 \cdot m_7 + m_7 \cdot m_8 = 0.$

Sellel võrrandisüsteemil on neli mittetriviaalset lahendit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \frac{c_1^2}{c_2} \\ -c_2 \\ c_1 \\ -\frac{c_2^2}{c_1} \\ c_2 \\ -\frac{c_2^3}{c_1^2} \\ \frac{c_2^2}{c_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus $c, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ on suvalised parameetrid. Võttes arvesse samasusi (4.2) saame kommutatsiooniseosed:

- $\begin{cases} [f_1, f_1, f_1] = -c_1 \cdot f_1 + \dfrac{c_1^2}{c_2} \cdot f_2, \\ [f_1, f_1, f_2] = -c_2 \cdot f_1 + c_1 \cdot f_2, \\ [f_1, f_2, f_2] = -\dfrac{c_2^2}{c_1} \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2, \\ [f_2, f_2, f_2] = -\dfrac{c_2^3}{c_1^2} \cdot f_1 + \dfrac{c_2^2}{c_1} \cdot f_2, \end{cases}$,
- $[f_2, f_2, f_2] = c \cdot f_1$,
- $[f_1, f_1, f_1] = c \cdot f_2$,
- $[e_1, f_1, f_2] = c \cdot e_1$.

Viited

[1] Viktor Abramov. Super 3-Lie Algebras Induced by Super Lie Algebras. 2014.

[2] Joakim Arnlind, Abdennour Kitouni, Abdenacer Makhlouf, and Sergei Silvestrov. Structure and cohomology of 3-lie algebras induced by lie algebras. 85:123–144, 2014.

[3] Johan G. F. Belinfante and Bernard Kolman. *A Survey of Lie Groups and Lie Algebra with Applications and Computational Methods*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.

[4] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.

[5] Alexander Jr Kirillov. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.

[6] Priit Lätt. Minkowski aegruumi geomeetriast. 2013.