[곱셈 시리즈] 음수 × 음수 = 양수

음수 $\times$ 음수 $=$ 양수

단순한 규칙을 넘어선 대수적 필연성

$$(-1) \times (-1) = 1$$

음수 곱하기 음수가 양수가 되는 결과($(-1) \times (-1) = 1$)는 단순히 암기해야 할 규칙이 아니라, 수학적 언어 체계가 가진 '논리적 일관성(Consistency)'을 보장하기 위한 **대수적 구조의 필연적인 귀결**입니다.

수학은 언제나 직관(비유)과 형식(공리)이라는 두 층위를 가집니다. 일상적 비유는 이해를 돕지만 한계가 명확하며, 궁극적인 정당화는 엄밀한 대수학적 구조를 통해서만 가능합니다.

직관적 설명과 그 한계: '부정의 부정은 긍정'

🖼️ 일상적 비유 (직관적 해석)

일상에서 흔히 쓰이는 비유는 "부정의 부정은 긍정"이라는 논리적 규칙에 기대는 것입니다.

- **빚의 비유:**
  - $+$는 자산이 **증가**하는 것.
  - $-$는 빚이나 손해가 **발생**하는 것.
  - *-3은 '3만큼의 빚'입니다.
  - $(-1) \times (-3)$는 '빚(-3)이 사라지는 것($\times -1$)'으로 해석될 수 있습니다. 빚이 사라지는 사건은 곧 자산이 증가($+3$)하는 **긍정적 효과**를 가져옵니다.
- **방향의 비유:**
  - $+$를 '앞으로',$-$를 '뒤로'라고 가정합니다.
  - $3 \times 2 = 6$은 '앞으로 3걸음씩 2번'입니다.
  - $3 \times (-2) = -6$은 '앞으로 3걸음씩 뒤로 2번', 즉 '뒤로 6걸음'입니다.
  - $(-3) \times (-2)$는 '뒤로 3걸음씩 뒤로 2번', 즉 **뒤로 가는 행위를 부정**하여 결국 **'앞으로 6걸음'($+6$)**과 같아집니다.

이러한 직관적 설명은 '아하' 하는 깨달음을 줄 수 있지만, 이는 수학의 공리 체계에서 파생된 결과에 대한 **사후적 비유**일 뿐, **수학적 정당화의 근거**가 되지는 못합니다.

대수학적 정당화: 논리적 일관성의 귀결

음수 $\times$ 음수가 양수가 되는 것은, 정수 집합 $\mathbb{Z}$가 덧셈과 곱셈을 가진 환(Ring)이라는 **대수적 구조**를 만족시키기 위해 **반드시** 지켜져야 하는 규칙입니다.

대수적 구조의 공리 (환 Ring)

정수 $\mathbb{Z}$의 환(Ring) 구조는 다음의 공리들을 만족합니다:

1. **덧셈에 대한 결합법칙:** $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. **덧셈에 대한 교환법칙:** $a + b = b + a$
3. **덧셈 항등원 0:** $a + 0 = a$
4. **덧셈 역원 $-a$ 존재:** 모든 a에 대해 $a + (-a) = 0$
5. **곱셈에 대한 결합법칙:** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. **곱셈 항등원 1:** $a \cdot 1 = a$
7. **분배법칙:** $(a + b)c = ac + bc$

$(-1) \times (-1) = 1$ 의 증명

이 공리 체계와 **일관성(Consistency)**을 유지하기 위해, 특히 **분배법칙**을 사용하여 $(-1) \times (-1)$의 값을 도출할 수 있습니다.

단계 1: $1 + (-1)$은 0이다.

(-1)은 덧셈 항등원 0을 만들기 위한 1의 덧셈 역원으로 정의됩니다 (공리 4).

$$1 + (-1) = 0$$

단계 2: 이 식에 (-1)을 곱한다.

식의 양변에 (-1)을 곱해도 등식은 성립해야 합니다.

$$(1 + (-1)) \cdot (-1) = 0 \cdot (-1)$$

단계 3: 좌변에 분배법칙을 적용하고, 우변을 정리한다.

- 좌변: 분배법칙 (공리 7) 적용:

$$1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)$$

- 우변: 어떤 수에 0을 곱하면 0이 되어야 합니다:

$$0 \cdot (-1) = 0$$

따라서, 우리는 다음과 같은 방정식을 얻습니다.

$$1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 0$$

단계 4: $1 \cdot (-1)$의 값을 대입한다.

곱셈 항등원 1 (공리 6)에 따라 $1 \cdot a = a$가 성립해야 하며, 부호 규칙의 일관성을 위해 $1 \cdot (-1) = -1$이어야만 합니다.

$$(-1) + ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

단계 5: $(-1) \cdot (-1)$을 해결한다.

위 식에서, (-1)에 어떤 수 $X = ((-1) \cdot (-1))$를 더했더니 덧셈 항등원 0이 되었습니다.

이는 X가 (-1)의 덧셈 역원이어야 한다는 뜻입니다 (공리 4).

(-1)의 덧셈 역원은 1입니다.

$$\therefore (-1) \cdot (-1) = 1$$

이처럼 $(-1) \times (-1) = 1$은 **환(Ring)의 공리 체계** 내에서 **논리적 일관성을 유지하기 위해** 필연적으로 도출되는 결과이며, 이는 정수 체계를 확장하는 기본 규칙으로 작용합니다.

대수적 해석의 확장: 크기와 방향성의 분리

곱셈 연산은 실수의 결과값을 결정할 때 **크기(절댓값)** 와 **방향성(부호)** 을 분리해서 계산하는 구조를 가집니다.

1. 곱의 크기 (절댓값): 입력값 각각의 크기를 곱합니다.

$$\text{For } y = a \cdot b, \quad |y| = |a| \cdot |b|$$

2. **곱의 방향성 (부호):** 입력값 각각의 방향성($\text{sign}(x) \in \{-1, 1, 0\}$)을 곱합니다.

sign(a)	sign(b)	sign(a·b)
1	1	1
-1	1	-1
1	-1	-1
-1	-1	1

$(-1) \times (-1) = 1$이라는 규칙은, 결국 '동일한 방향성(부호)을 가진 두 수의 곱은 항상 양의 방향을 가진다'는 방향성 연산의 근본 규칙을 완성합니다. 이처럼 대수학은 **문자를 사용해 일관된 논리**를 전개함으로써, 직관만으로는 설명하기 힘든 수학적 진리를 엄밀하게 정당화합니다.