

# 統計検定 (統計数理)

田淵進

November 11, 2025

## 第 I 部

## 2021 年

1,2,3

略

4

4.1, 4.2, 4.3

自明な計算から

$$\begin{aligned} V[\bar{X}] &= \sigma^2/n \\ E[(X_1 - X_2)^3] &= 0 \\ E[Y_i Y_j Y_k] &= \begin{cases} \tau & (i = j = k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

4.4

$$\begin{aligned} \sum_i^n (X_i - \bar{X})^3 &= \sum_i^n (Y_i - \bar{X})^3 \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i^3 - 3Y_i^2 \bar{Y} + 3Y_i \bar{Y}^2 - \bar{Y}^3) \end{aligned}$$

となるので、期待値を各項で計算して

$$\begin{aligned} E\left[\sum_i^n (X_i - \bar{X})^3\right] &= n\tau - 3n \cdot \frac{\tau}{n} + 3n \cdot \frac{\tau}{n^2} + n \cdot \frac{n \cdot \tau}{n^3} \\ &= \tau \left(n - 3 + \frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

#### 4.5

まず、

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \left(\sum_{i=1}^n a_i(Y_i + \mu)\right)^3 \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i Y_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu\right)\right)^3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i Y_i\right)^3 + 3\left(\sum_{i=1}^n a_i Y_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu\right) + 3\left(\sum_{i=1}^n a_i Y_i\right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu\right)^3 \end{aligned}$$

この期待値を取ると

$$\tau \left(\sum_{i=1}^n a_i^3\right) + 3\mu\sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^3$$

となるので、求める条件は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i^3 &= \tau \end{aligned}$$

となる。

## 5

### 5.1

$$\begin{aligned} V[y] &= E[(Lx - L\mu)^T(Lx - L\mu)] = L^T V[x] L \\ &= L^T L \end{aligned}$$

### 5.2

共分散が 0 であれば良いので,

$$\text{Cov}(Lx, Mx) = L^T M = O$$

が求める条件である.

### 5.3

### 5.4

一般に,  $L, M$  に対して,

$$LM^T = AMM^T$$

が成り立つような  $l \times m$  行列  $A$  が存在するための条件を考える. 両辺を転置して

$$ML^T = MM^T A^T \tag{1}$$

となる. ここで, 一般に  $\text{Im } M = \text{Im } MM^T$  が成り立つことに注意すると,  $\text{Im } ML^T \subset \text{Im } MM^T$  となるので, 任意の  $u \in \text{Im } ML^T \subset \text{Im } MM^T$  に対して,  $v \in \mathbb{R}^m$  を取って

$$u = (MM^T)v$$

となる  $v$  が存在する. 特に,  $r = \text{rank}(M)$  として, 一次独立な  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^l$  に対して,  $Mx_i = (MM^T)v_i$  となる  $v_i \in \mathbb{R}^m$  が存在するので,  $A^T$  を  $A^T x_i = v_i$  かつその他の空間で 0 となる写像として特徴づければ,  $A$  は常に存在することがわかる.

特に  $M$  がフルランクであれば,  $MM^T$  が可逆になるので,

$$A = (MM^T)^{-1} LM^T$$

として取ることができる.

## 第 II 部

# 2022 年

## 1

### 1.1

$A, B, C$  がすべて独立のとき,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{9}{16}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{27}{64}$$

である.

### 1.2

上界は  $3/4$  であり, 下界は余事象を考えて  $1/2$  である. よって  $P(A \cap B)$  の取りうる値を  $I$  とすると,  $I \subset [1/2, 3/4]$  である. 逆の包含を構成的に示す. 確率空間として  $\Omega = [0, 1]$  に Lebesgue 測度を入れたものを考える. このとき,  $r \in [0, 1/4]$  として  $A = [0, 3/4], B = [r, r + 3/4]$  とおくと,  $P(A) = P(B) = 3/4$  および  $A \cap B = [r, 3/4]$  であり, この確率は  $[1/2, 3/4]$  の範囲を動く.

よって  $I = [1/2, 3/4]$

### 1.3

$P(A \cap B \cap C)$  の取りうる範囲を  $J$  とすると,  $A = C$  の場合を考えると  $J \supset I$  がわかる. また, 上界は明らかに  $3/4$  である. 一方, 下界は余事象を考えて  $1/4$  であるので,  $[1/4, 1/2]$  の範囲を  $P(A \cap B \cap C)$  が取りうることを示す. 確率空間として前問と同じ  $\Omega, A, B$  を  $r = 1/4$  として取ったうえで,  $C = [0, p] \cup [3/4, 3/2 - p]$  ( $0 \in [1/2, 3/4]$ ) とおくと,  $P(C) = 3/4$  かつ  $A \cap B \cap C = [1/4, p]$  であり, この確率は  $[1/4, 1/2]$  の範囲を動く.

よって  $J = [1/4, 3/4]$

### 1.4

いま, 有限な確率空間として

$$\Omega = \{\varepsilon, a, b, ab, c, ac, bc, abc\}$$

$$A = \{a, ab, ac, abc\}$$

$$B = \{b, ab, bc, abc\}$$

$$C = \{c, ac, bc, abc\}$$

と置くことができる．このとき，条件から  $P(A \cap B^c) = 3/16$  などが成り立つので，対称性から

$$P(\varepsilon) = s - 1/8$$

$$P(a) = 3/16 - s$$

$$P(b) = 3/16 - s$$

$$P(c) = 3/16 - s$$

$$P(ab) = s$$

$$P(bc) = s$$

$$P(ac) = s$$

$$P(abc) = 9/16 - s$$

とかける．それぞれが非負になるための条件は  $1/8 \leq s \leq 3/16$  である．よって  $P(A \cap B \cap C) = 9/16 - s$  の取りうる値は  $[3/8, 7/16]$  である．

## 2

### 2.1

定義から

$$F_1(u) = P(U \leq u) = \frac{1+u}{2}$$
$$F_2(v) = P(V \leq v) = \frac{1+v}{2}$$

すなわち,  $[-1, 1]$  で一様分布に従う.

### 2.2

$(U, V)$  の同時密度は,

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} v = 1/4$$

となるので,  $(U, V)$  は  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  で一様分布に従い, 成分ごとに独立である.

### 2.3

座標平面上に  $u^2 + v^2 \leq 1$  となる領域を描くと, この面積の  $1/4$  倍が確率に等しいので,  $P(U^2 + V^2 \leq 1) = \pi/4$  となる.

### 2.4

同様に,  $|u - v| \leq 1$  の領域を考えて

$$P(|U - V| \leq 1) = \frac{3}{4}$$

である.

## 2.5

$U^2 - 2UV + V^2 \leq 1$  の条件のもとで,  $(u, v)$  はこの領域を一様に分布する. よって

$$\begin{aligned}
 E[V] &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v \int_{-1}^{v+1} du dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v \int_{v-1}^1 du dv \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v(v+2) dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v(2-v) dv \\
 &= 0 \\
 E[V^2] &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v^2 \int_{-1}^{v+1} du dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v^2 \int_{v-1}^1 du dv \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v^2(v+2) dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v^2(2-v) dv \\
 &= \frac{5}{18}
 \end{aligned}$$

となる. 対称性から  $E[U] = 0$ ,  $E[U^2] = 5/18$  であるので, 共分散は

$$\begin{aligned}
 Cov(U, V) &= E[UV] - E[U]E[V] \\
 &= E[UV] \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v \int_{-1}^{v+1} u du dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v \int_{v-1}^1 u du dv \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v \cdot \frac{(v+1)^2 - 1}{2} dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v \cdot \frac{1 - (v-1)^2}{2} dv \\
 &= \frac{5}{36}
 \end{aligned}$$

よって, 相関係数は  $1/2$  となる.

### 3

#### 3.1

$X$  はパラメータ  $\lambda$  の Poisson 分布に従うので,

$$E[X] = \lambda$$

$$V[X] = \lambda$$

である.

#### 3.2

$\Lambda$  はパラメータ  $\alpha, \beta$  の Gamma 分布に従うので,

$$\begin{aligned} E[\Lambda] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \\ E[\Lambda^2] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^2 \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

ゆえ,

$$\begin{aligned} V[\Lambda] &= E[\Lambda^2] - E[\Lambda]^2 \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

となる.

#### 3.3

$X$  の分布は,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \int_0^\infty P(X = k \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\alpha \end{aligned}$$



と求まる.

### 3.4

いま,  $X$  のモーメント母関数を考えると

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{e^t}{1 + \beta}\right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

ここで,  $\gamma + 1 = e^{-t}(\beta + 1)$  とおくと,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma}\right)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1 + \gamma}\right)^k \\ &= \left(\frac{\beta}{e^t \gamma}\right)^{\alpha} \\ &= \left(\frac{\beta}{1 + \beta - e^t}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

となる.  $t$  について微分すると

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \alpha \left(\frac{\beta}{1 + \beta - e^t}\right)^{\alpha+1} e^t \\ M''_X(t) &= \alpha \left(\frac{\beta}{1 + \beta - e^t}\right)^{\alpha+1} e^t + \alpha(\alpha + 1) \left(\frac{\beta}{1 + \beta - e^t}\right)^{\alpha+2} e^{2t} \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} E[X] &= M'_X(0) = \frac{\alpha}{\beta} \\ V[X] &= M''_X(0) - E[X]^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

を得る.

### 3.5

モーメント法においては, 推定量は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} &= \bar{X} \\ \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2} &= \tilde{S}^2 \end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\bar{X}^2}{S^2 - \bar{X}} \\ \hat{\beta} &= \frac{\bar{X}}{S^2 - \bar{X}} \end{aligned}$$

を得る. 特に,  $S^2 > \bar{X}$  のときに推定量は正になる.

4

略

5

5.1

正規分布の再生性から,

$$D_i = Y_i - X_i \sim N(\theta, 2\sigma^2)$$

となる.

5.2

次のように取れば良い.

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \\ a_i &= \mu_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \\ b_1 &= -\theta/2 \\ b_2 &= \theta/2\end{aligned}$$

実際, このようにおくと,

$$\begin{aligned}Z_{i1} &= \mu_i + \varepsilon_{i1} \\ Z_{i2} &= \mu_i + \theta + \varepsilon_{i2}\end{aligned}$$

となる.

5.3

いま,

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{..} &:= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Z_{i1} + Z_{i2}) \\ \bar{Z}_{i.} &:= \frac{1}{2} (Z_{i1} + Z_{i2}) \\ \bar{Z}_{.j} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{ij}\end{aligned}$$

と定めると,

$$S_A = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n (\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2$$

$$S_B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Z_{ij} - \bar{Z}_{.j})^2$$

$$S_E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Z_{ij} - \bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{.j} + \bar{Z}_{..})^2$$

このとき,  $S_A/\sigma^2$  は自由度  $\phi_A$  の非心  $\chi^2$  分布に従い,  $S_B/\sigma^2$  は自由度  $\phi_B$  の非心  $\chi^2$  分布に従い,  $S_E/\sigma^2$  は自由度  $\phi_E$  の  $\chi^2$  分布に従う. また, このとき,  $S_A, S_B, S_E$  は独立である. よって, 仮説  $\theta = 0$  のもとでは  $S_B$  が中心  $\chi^2$  分布に従い,

$$\frac{S_A^2 \phi_E}{S_E^2 \phi_A} \sim F(\phi_A, \phi_E)$$

となり, 仮説  $\mu_i \equiv \mu$  のもとでは  $S_A$  が中心  $\chi^2$  分布に従い,

$$\frac{S_B^2 \phi_E}{S_E^2 \phi_B} \sim F(\phi_B, \phi_E)$$

となる

## 5.4

$\theta$  に関する検定において,  $X_1$  を欠測した場合,  $Y_1$  の値からは  $\theta, \mu_i$  の寄与が分離できないため,  $Y_1$  を利用して検定を行うことはできない.

実際,  $S_A$  の定義の和の一行目が 0 となっており, 残りの  $n-1$  個の和の形になっている.

## 5.5

$\mu_i$  に関する検定において,  $X_1$  を欠測した場合でも,  $Y_1$  と他の  $Y_i$  の値から,  $\mu_1$  の大きさに関する検定ができる.

実際,  $S_B$  の定義の和の一行目は  $Y_1$  を含んでおり, 他の  $Y_i$  と比較できる形になっている.

## 第 III 部

# 2023 年

1,2 は簡単なので省略. 問 1 で推定量  $\alpha$  の  $\beta$  に対する漸近相対効率を問われているが, この定義は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V[\beta]}{V[\alpha]} \quad (2)$$

のことである. ただし,  $n$  はサンプル数であり,  $\alpha, \beta$  は  $n$  に依存している値で, 特に一致推定量であれば分散は 0 に収束する.

## 3

### 3.1

$X$  は指数分布  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ) に従うので,

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる.

### 3.2

モーメント母関数は  $t < \lambda$  の範囲で

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

となる.

### 3.3

確率変数  $X_W$  の従う密度は  $g(x) = \frac{e^{hx}f(x)}{M_X(h)}$  で与えられるので、 $h > 0$  に対しては

$$\begin{aligned} E[X_W] &= \int_0^\infty x \frac{e^{hx} \lambda e^{-\lambda x}}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{\lambda}{M_X(h)} \int_0^\infty x e^{-(\lambda-h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_0^\infty e^{-(\lambda-h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \cdot \frac{\lambda}{(\lambda-h)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda-h} \\ &> E[X] \end{aligned}$$

となる。

### 3.4

一般の確率密度  $f$  に従う分布  $X$  について、 $X_W$  のモーメント母関数を考えると、

$$\begin{aligned} E[e^{tX_W}] &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_{-\infty}^\infty e^{(t+h)x} f(x) dx \\ &= \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \end{aligned}$$

ここで、 $t$  に関する  $r$  回微分を考えると、

$$E[X^r] = \frac{M_X^{(r)}(h+0)}{M_X(h)}$$

を得る。

### 3.5

$h = 0$  とすると、 $M_X(0) = 1$  であるので、 $X_W$  と  $X$  の分布は等しい。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{dE[X_W]}{dh} &= \frac{M_X''(h)M_X(h) - (M_X'(h))^2}{M_X(h)^2} \\ &= E[X_W^2] - E[X_W]^2 \\ &= \text{Var}(X_W) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる. よって,  $h > 0$  に対して  $E[X_W] > E[X]$  であり,  $h < 0$  に対して  $E[X_W] < E[X]$  である.

## 4

### 4.1

$W$  が自由度  $k$  のカイ二乗分布に従うとする。このとき、

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty t \cdot t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2+1} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= k \end{aligned}$$

であり、特に  $k \geq 3$  においては

$$\begin{aligned} E[1/W] &= \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2-1} \Gamma\left(\frac{k}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{k-2} \end{aligned}$$

となる。

### 4.2

今、 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$  であり、係数ベクトル  $\beta \in \mathbb{R}^p$  及び説明変数行列  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$  について、線形回帰モデル

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

が与えられている。今、仮定より  $X$  のランクは  $p$  である。このとき、 $X$  の転置行列を  $X^T$  とすると、

$$P := X(X^T X)^{-1} X^T$$

は  $\text{Im}(X)$  への直交射影である。実際、

$$\begin{aligned} P^2 &= X(X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= P \\ P^T &= \left(X(X^T X)^{-1} X^T\right)^T \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= P \end{aligned}$$



が成り立つため、直交射影である。また明らかに  $\text{Im } P \subset \text{Im } X$  であり、任意の  $v \in \text{Im } X$  に対して、ある  $c \in \mathbb{R}^p$  が存在して  $v = Xc$  とかけるので、

$$\begin{aligned} Pv &= X(X^T X)^{-1} X^T v \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T Xc \\ &= Xc \\ &= v \in \text{Im } P \end{aligned}$$

となることから、 $\text{Im } X = \text{Im } P$  も成り立つ。

ここで、 $\text{Im } X$  と  $\text{Im } X$  の直交補空間の正規直交基底をそれぞれ  $\{g_1, \dots, g_p\}$ ,  $\{g_{p+1}, \dots, g_n\}$  とする。このとき、行列

$$G := (g_1, \dots, g_n)$$

という直交行列を取ると、基底の変換によって、ある  $\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathbb{R}$  を用いて

$$G^T Y = G^T X \beta + G^T \varepsilon \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + G^T \varepsilon \quad (4)$$

と表される。特に、 $G^T \varepsilon$  は再び  $N(0, \sigma^2 I_n)$  に従うので、各成分を  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  とおくと

$$\begin{aligned} G^T \hat{Y} &= X \hat{\beta} = PY \\ &= P(X\beta + \varepsilon) \\ &= X\beta + G^T P\varepsilon \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \eta_p + \gamma_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \|Y - X\hat{\beta}\|^2 = \frac{1}{n} \|G^T Y - G^T X\hat{\beta}\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=p+1}^n \gamma_i^2 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\|X\hat{\beta} - X\beta\|^2 &= \|G^T X\hat{\beta} - G^T X\beta\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \gamma_i^2\end{aligned}$$

となる. 以上から,

$$\begin{aligned}W_1 &:= n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=p+1}^n \gamma_i^2 \\ W_2 &= \|X\hat{\beta} - X\beta\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^p \gamma_i^2\end{aligned}$$

はそれぞれ独立に, 自由度  $n-p$ ,  $p$  のカイ二乗分布に従う.

### 4.3

前問と同じ記号を用いて,  $G^T \varepsilon' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)^T$  とおく. このとき,

$$Z - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 - \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma'_p - \gamma_p \\ \gamma'_{p+1} \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}E \left[ \|Z - \hat{Y}\|^2 \mid Y \right] &= E \left[ \sum_{i=1}^p (\gamma'_i - \gamma_i)^2 + \sum_{i=p+1}^n \gamma_i'^2 \mid Y \right] \\ &= \sum_{i=1}^p E [(\gamma'_i - \gamma_i)^2 \mid Y] + \sum_{i=p+1}^n E[\gamma_i'^2] \\ &= n\sigma^2 + W_2\sigma^2\end{aligned}$$

となる.

## 4.4

各値がどのような確率変数かはわかっているので，計算すると

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\Delta(Z) - \Delta(Y)}{\hat{\sigma}^2}\right] &= E\left[\frac{n\sigma^2 + W_2\sigma^2 - W_1\sigma^1}{\sigma^2 W_1/n}\right] \\ &= \frac{n(n+p)}{n-p-2} - n \\ &= \frac{2n(p+1)}{n-p-2} \end{aligned}$$

であり，極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(p+1)}{n-p-2} = 2(p+1)$$

## 5

### 5.1

各  $U_i$  は有限母集団  $\{z_1, \dots, z_n\}$  からの非復元抽出であるので,  $E[U_i] = \bar{z}$  であり,  $V[U_i] = \sigma_N^2$  である. よって,

$$E[\bar{U}] = \bar{z}$$

であり, 有限母集団修正を考慮すると,

$$V[\bar{U}] = \frac{\sigma_N^2}{m} \frac{N-m}{N-1}$$

となる.

### 5.2

いま,  $m\bar{U} + n\bar{V} = (m+n)\bar{z}$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned} D &= \bar{U} - \bar{V} \\ &= \bar{U} - \frac{(m+n)\bar{z} - m\bar{U}}{n} \\ &= \frac{m+n}{n}(\bar{U} - \bar{z}) \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} (N-2)\tilde{S}^2 &= \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{U})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{V})^2 = \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{z})^2 - m(\bar{U} - \bar{z})^2 - n(\bar{V} - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{z})^2 - \frac{mn}{m+n}(\bar{U} - \bar{V})^2 \\ &= N\sigma_N^2 - \frac{mn}{m+n}D^2 \end{aligned}$$

となり,

$$N\sigma_N^2 - (N-2)\tilde{S}^2 = \frac{mn}{m+n}D^2$$

を得る.

### 5.3

いま,

$$\begin{aligned}
 E[D] &= 0 \\
 V[D] &= \left(\frac{m+n}{n}\right)^2 V[\bar{U}] \\
 &= \frac{(m+n)^2}{n^2} \cdot \frac{\sigma_N^2}{m} \cdot \frac{N-m}{N-1} \\
 &= \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)mn} \sigma_N^2
 \end{aligned}$$

### 5.4

2. の結果と 3. の途中式より

$$\frac{D - E[D]}{\sqrt{V[D]}} = \frac{U - E[U]}{\sqrt{V[U]}}$$

が成り立ち, 右辺は近似的に標準正規分布に従うので, 左辺も近似的に標準正規分布に従う.

### 5.5

いま,

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^2 &= \frac{D^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \tilde{S}^2} \\
 &= \frac{mn}{N} \cdot \frac{D^2}{\tilde{S}^2}
 \end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}^2 &= \frac{D^2}{V[D]} \\
 &= \frac{D^2(N-1)mn}{N^2\sigma_N^2} \\
 &= \frac{D^2(N-1)mn}{N(N-2)\tilde{S}^2 + mnD^2} \\
 &= \frac{(N-1)mn}{N(N-2)\frac{\tilde{S}^2}{D^2} + mn} \\
 &= \frac{(N-1)mn}{(N-2) \cdot \frac{mn}{\tilde{T}^2} + mn} \\
 &= \frac{N-1}{N-2 + \tilde{T}^2} \tilde{T}^2
 \end{aligned}$$

よって、両辺の平方根を取れば良い。ここで、 $\tilde{W}$  は近似的に標準正規分布に従うので、検定が可能である。また、関数  $g$  は単調増加であるため、 $T$  を用いても同様の検定ができる。