

統計検定 (統計数理)

田淵進

November 2, 2025

第Ⅰ部

2022 年

1

1.1

第Ⅱ部

2023 年

1,2 は簡単なので省略。問 1 で推定量 α の β に対する漸近相対効率を問われているが、この定義は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V[\beta]}{V[\alpha]} \quad (1)$$

のことである。ただし、 n はサンプル数であり、 α, β は n に依存している値で、特に一致推定量であれば分散は 0 に収束する。

3

3.1

X は指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$) に従うので,

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる.

3.2

モーメント母関数は $t < \lambda$ の範囲で

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \end{aligned}$$

となる.

3.3

確率変数 X_W の従う密度は $g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)}$ で与えられるので, $h > 0$ に対しては

$$\begin{aligned} E[X_W] &= \int_0^{\infty} x \frac{e^{hx} \lambda e^{-\lambda x}}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{\lambda}{M_X(h)} \int_0^{\infty} x e^{-(\lambda-h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \cdot \frac{\lambda}{(\lambda-h)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda-h} \\ &> E[X] \end{aligned}$$

となる.

3.4

一般の確率密度 f に従う分布 X について, X_W のモーメント母関数を考えると,

$$\begin{aligned} E[e^{tX_W}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+h)x} f(x) dx \\ &= \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \end{aligned}$$

ここで, t に関する r 回微分を考えると,

$$E[X^r] = \frac{M_X^{(r)}(h+0)}{M_X(h)}$$

を得る.

3.5

$h = 0$ とすると, $M_X(0) = 1$ であるので, X_W と X の分布は等しい. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{dE[X_W]}{dh} &= \frac{M_X''(h)M_X(h) - (M_X'(h))^2}{M_X(h)^2} \\ &= E[X_W^2] - E[X_W]^2 \\ &= \text{Var}(X_W) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる. よって, $h > 0$ に対して $E[X_W] > E[X]$ であり, $h < 0$ に対して $E[X_W] < E[X]$ である.

4

4.1

W が自由度 k のカイ二乗分布に従うとする。このとき、

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty t \cdot t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2+1}\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= k \end{aligned}$$

であり、特に $k \geq 3$ においては

$$\begin{aligned} E[1/W] &= \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2-1}\Gamma\left(\frac{k}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{k-2} \end{aligned}$$

となる。

4.2

今、 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ であり、係数ベクトル $\beta \in \mathbb{R}^p$ 及び説明変数行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ について、線形回帰モデル

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

が与えられている。今、仮定より X のランクは p である。このとき、 X の転置行列を X とすると、

$$P := X(X^T X)^{-1} X^T$$

は $\mathfrak{S}(X)$ への直交射影である。実際、

$$\begin{aligned} P^2 &= X(X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= P \\ P^T &= \left(X(X^T X)^{-1} X^T\right)^T \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= P \end{aligned}$$

が成り立つため、直交射影である。また明らかに $\Im P \subset \Im X$ であり、任意の $v \in \Im X$ に対して、ある $c \in \mathbb{R}^p$ が存在して $v = Xc$ とかけるので、

$$\begin{aligned} Pv &= X(X^T X)^{-1} X^T v \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T Xc \\ &= Xc \\ &= v \in \Im P \end{aligned}$$

となることから、 $\Im X = \Im P$ も成り立つ。

ここで、 $\Im X$ と $\Im X$ の直交補空間の正規直交基底をそれぞれ $\{g_1, \dots, g_p\}$, $\{g_{p+1}, \dots, g_n\}$ とする。このとき、行列

$$G := (g_1, \dots, g_n)$$

という直交行列を取ると、基底の変換によって、ある $\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathbb{R}$ を用いて

$$G^T Y = G^T X \beta + G^T \varepsilon \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + G^T \varepsilon \quad (3)$$

と表される。特に、 $G^T \varepsilon$ は再び $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うので、各成分を $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ とおくと

$$\begin{aligned} G^T \hat{Y} &= X \hat{\beta} = PY \\ &= P(X\beta + \varepsilon) \\ &= X\beta + G^T P \varepsilon \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \eta_p + \gamma_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \|Y - X \hat{\beta}\|^2 = \frac{1}{n} \|G^T Y - G^T X \hat{\beta}\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=p+1}^n \gamma_i^2 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\|X\hat{\beta} - X\beta\|^2 &= \|G^T X\hat{\beta} - G^T X\beta\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \gamma_i^2\end{aligned}$$

となる. 以上から,

$$\begin{aligned}W_1 &:= n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=p+1}^n \gamma_i^2 \\ W_2 &= \|X\hat{\beta} - X\beta\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^p \gamma_i^2\end{aligned}$$

はそれぞれ独立に, 自由度 $n-p$, p のカイ二乗分布に従う.

4.3

前問と同じ記号を用いて, $G^T \varepsilon' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)^T$ とおく. このとき,

$$Z - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 - \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma'_p - \gamma_p \\ \gamma'_{p+1} \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}E \left[\|Z - \hat{Y}\|^2 \mid Y \right] &= E \left[\sum_{i=1}^p (\gamma'_i - \gamma_i)^2 + \sum_{i=p+1}^n \gamma_i'^2 \mid Y \right] \\ &= \sum_{i=1}^p E [(\gamma'_i - \gamma_i)^2 \mid Y] + \sum_{i=p+1}^n E[\gamma_i'^2] \\ &= n\sigma^2 + W_2\sigma^2\end{aligned}$$

となる.

4.4

各値がどのような確率変数かはわかっているので，計算すると

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\Delta(Z) - \Delta(Y)}{\hat{\sigma}^2}\right] &= E\left[\frac{n\sigma^2 + W_2\sigma^2 - W_1\sigma^1}{\sigma^2 W_1/n}\right] \\ &= \frac{n(n+p)}{n-p-2} - n \\ &= \frac{2n(p+1)}{n-p-2} \end{aligned}$$

であり，極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(p+1)}{n-p-2} = 2(p+1)$$

5

5.1

各 U_i は有限母集団 $\{z_1, \dots, z_n\}$ からの非復元抽出であるので, $E[U_i] = \bar{z}$ であり, $V[U_i] = \sigma_N^2$ である. よって,

$$E[\bar{U}] = \bar{z}$$

であり, 有限母集団修正を考慮すると,

$$V[\bar{U}] = \frac{\sigma_N^2}{m} \frac{N-m}{N-1}$$

となる.

5.2

いま, $m\bar{U} + n\bar{V} = (m+n)\bar{z}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} D &= \bar{U} - \bar{V} \\ &= \bar{U} - \frac{(m+n)\bar{z} - m\bar{U}}{n} \\ &= \frac{m+n}{n}(\bar{U} - \bar{z}) \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} (N-2)\tilde{S}^2 &= \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{U})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{V})^2 = \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{z})^2 - m(\bar{U} - \bar{z})^2 - n(\bar{V} - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{z})^2 - \frac{mn}{m+n}(\bar{U} - \bar{V})^2 \\ &= N\sigma_N^2 - \frac{mn}{m+n}D^2 \end{aligned}$$

となり,

$$N\sigma_N^2 - (N-2)\tilde{S}^2 = \frac{mn}{m+n}D^2$$

を得る.

5.3

いま,

$$\begin{aligned}
 E[D] &= 0 \\
 V[D] &= \left(\frac{m+n}{n} \right)^2 V[\bar{U}] \\
 &= \frac{(m+n)^2}{n^2} \cdot \frac{\sigma_N^2}{m} \cdot \frac{N-m}{N-1} \\
 &= \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)mn} \sigma_N^2
 \end{aligned}$$

5.4

2. の結果と 3. の途中式より

$$\frac{D - E[D]}{\sqrt{V[D]}} = \frac{U - E[U]}{\sqrt{V[U]}}$$

が成り立ち、右辺は近似的に標準正規分布に従うので、左辺も近似的に標準正規分布に従う。

5.5

いま,

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^2 &= \frac{D^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \tilde{S}^2} \\
 &= \frac{mn}{N} \cdot \frac{D^2}{\tilde{S}^2}
 \end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}^2 &= \frac{D^2}{V[D]} \\
 &= \frac{D^2(N-1)mn}{N^2\sigma_N^2} \\
 &= \frac{D^2(N-1)mn}{N(N-2)\tilde{S}^2 + mnD^2} \\
 &= \frac{(N-1)mn}{N(N-2)\frac{\tilde{S}^2}{D^2} + mn} \\
 &= \frac{(N-1)mn}{(N-2) \cdot \frac{mn}{\tilde{T}^2} + mn} \\
 &= \frac{N-1}{N-2 + \tilde{T}^2} \tilde{T}^2
 \end{aligned}$$

よって、両辺の平方根を取れば良い。ここで、 \tilde{W} は近似的に標準正規分布に従うので、検定が可能である。また、関数 g は単調増加であるため、 T を用いても同様の検定ができる。