統計検定 (統計数理)

田淵進

November 2, 2025

第 I 部
2023 年

1,2 は簡単なので省略．問 1 で推定量 α の β に対する漸近相対効率を問われているが，この定義は

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V[\beta]}{V[\alpha]} \tag{1}$$

のことである．ただし，n はサンプル数であり，α, β は n に依存している値で，特に一致推定量であれば分散は 0 に収束する．

3

3.1

X は指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ に従うので，

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる．

3.2

モーメント母関数は $t < \lambda$ の範囲で

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

となる.

3.3

確率変数 X_W の従う密度は $g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)}$ で与えられるので，$h > 0$ に対しては

$$\begin{aligned} E[X_W] &= \int_0^\infty x \frac{e^{hx} \lambda e^{-\lambda x}}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{\lambda}{M_X(h)} \int_0^\infty x e^{-(\lambda - h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_\infty^0 e^{-(\lambda - h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \cdot \frac{\lambda}{(\lambda - h)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda - h} \\ &> E[X] \end{aligned}$$

となる.

3.4

一般の確率密度 f に従う分布 X について，X_W のモーメント母関数を考えると，

$$\begin{aligned} E[e^{tX_W}] &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_{-\infty}^\infty e^{(t+h)x} f(x) dx \\ &= \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \end{aligned}$$

ここで，t に関する r 回微分を考えると，

$$E[X^r] = \frac{M_X^{(r)}(h+0)}{M_X(h)}$$

を得る．

3.5

$h=0$ とすると，$M_X(0)=1$ であるので，X_W と X の分布は等しい．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E[X_W]}{\mathrm{d}h} &= \frac{M_X''(h)M_X(h) - (M_X'(h))^2}{M_X(h)^2} \\ &= E[X_W^2] - E[X_W]^2 \\ &= Var(X_W) \\ &> 0\end{aligned}$$

となる．よって，$h>0$ に対して $E[X_W] > E[X]$ であり，$h<0$ に対して $E[X_W] < E[X]$ である．

4

4.1

W が自由度 k のカイ二乗分布に従うとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
E[W] &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t\cdot t^{k/2-1}e^{-t/2}dt \\
&= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}2^{k/2+1}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \\
&= k
\end{aligned}
$$

であり，特に $k\geq 3$ においては

$$
\begin{aligned}
E[1/W] &= \int_0^\infty \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}t^{k/2-1}e^{-t/2}dt \\
&= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}2^{k/2-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right) \\
&= \frac{1}{k-2}
\end{aligned}
$$

となる．

4.2

今，$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2 I_n)$ であり，係数ベクトル $\beta\in\mathbb{R}^p$ 及び説明変数行列 $X\in\mathbb{R}^{n\times p}$ について，線形回帰モデル

$$
Y = X\beta+\varepsilon
$$

が与えられている．今，仮定より X のランクは p である．このとき，X の転置行列を X とすると，

$$
P \coloneqq X\left(X^TX\right)^{-1}X^T
$$

は $\Im(X)$ への直交射影である．実際，

$$
\begin{aligned}
P^2 &= X\left(X^TX\right)^{-1}X^TX\left(X^TX\right)^{-1}X^T \\
&= X\left(X^TX\right)^{-1}X^T \\
&= P \\
P^T &= \left(X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right)^T \\
&= X\left(X^TX\right)^{-1}X^T \\
&= P
\end{aligned}
$$

が成り立つため，直交射影である．また明らかに $\Im P \subset \Im X$ であり，任意の $v \in \Im X$ に対して，ある $c \in \mathbb{R}^p$ が存在して $v = Xc$ とかけるので，

$$
\begin{aligned}
Pv &= X\left(X^T X\right)^{-1} X^T v \\
&= X\left(X^T X\right)^{-1} X^T X c \\
&= Xc \\
&= v \in \Im P
\end{aligned}
$$

となることから，$\Im X = \Im P$ も成り立つ．

ここで，$\Im X$ と $\Im X$ の直交補空間の正規直交基底をそれぞれ $\{g_1, \cdots, g_p\}$，$\{g_{p+1}, \cdots, g_n\}$ とする．このとき，行列

$$
G \coloneqq (g_1, \cdots, g_n)
$$

という直交行列を取ると，基底の変換によって，ある $\eta_1, \ldots, \eta_p \in \mathbb{R}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
G^T Y &= G^T X\beta + G^T \varepsilon & (2) \\
&= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + G^T \varepsilon & (3)
\end{aligned}
$$

と表される．特に，$G^T \varepsilon$ は再び $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うので，各成分を $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ とおくと

$$
\begin{aligned}
G^T \hat{Y} = X\hat{\beta} &= PY \\
&= P(X\beta + \varepsilon) \\
&= X\beta + G^T P\varepsilon \\
&= \begin{pmatrix} \eta_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \eta_p + \gamma_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\left\| Y - X\hat{\beta} \right\|^2 &= \frac{1}{n}\left\| G^T Y - G^T X\hat{\beta} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=p+1}^{n} \gamma_i^2
\end{aligned}
$$

であり，

$$\begin{aligned}\left\|X\hat{\beta}-X\beta\right\|^2 &= \left\|G^TX\hat{\beta}-G^TX\beta\right\|^2\\ &= \sum_{i=1}^{p}\gamma_i^2\end{aligned}$$

となる．以上から，

$$\begin{aligned}W_1 &:= n\hat{\sigma^2}/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=p+1}^{n}\gamma_i^2\\ W_2 &= \left\|X\hat{\beta}-X\beta\right\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{p}\gamma_i^2\end{aligned}$$

はそれぞれ独立に，自由度 $n-p$，p のカイ二乗分布に従う．

4.3

前問と同じ記号を用いて，$G^T\varepsilon' = (\gamma_1',\dots,\gamma_n')^T$ とおく．このとき，

$$Z-\hat{Y} = \begin{pmatrix}\gamma_1'-\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_p'-\gamma_p\\ \gamma_{p+1}'\\ \vdots\\ \gamma_n'\end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}E\left[\left\|Z-\hat{Y}\right\|\,\middle|Y\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{p}(\gamma_i'-\gamma_i)^2+\sum_{i=p+1}^{n}\gamma_i'^2 \mid \middle|Y\right]\\ &= \sum_{i=1}^{p}E\left[(\gamma_i'-\gamma_i)^2\,\middle|Y\right]+\sum_{i=p+1}^{n}E\big[\gamma_i'^2\big]\\ &= n\sigma^2+W_2\sigma^2\end{aligned}$$

となる．

4.4

各値がどのような確率変数かはわかっているので，計算すると

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{\Delta(Z)-\Delta(Y)}{\hat{\sigma^2}}\right] &= E\left[\frac{n\sigma^2+W_2\sigma^2-W_1\sigma^1}{\sigma^2 W_1/n}\right] \\
&= \frac{n(n+p)}{n-p-2}-n \\
&= \frac{2n(p+1)}{n-p-2}
\end{aligned}
$$

であり，極限は

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{2n(p+1)}{n-p-2} = 2(p+1)
$$

5

5.1

各 U_i は有限母集団 $\{z_1, \ldots, z_n\}$ からの非復元抽出であるので，$E[U_i] = \bar{z}$ であり，$V[U_i] = \sigma_N^2$ である．よって，

$$E[\bar{U}] = \bar{z}$$

であり，有限母集団修正を考慮すると，

$$V[\bar{U}] = \frac{\sigma_N^2}{m} \frac{N-m}{N-1}$$

となる．

5.2

いま，$m\bar{U} + n\bar{V} = (m+n)\bar{z}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} D &= \bar{U} - \bar{V} \\ &= \bar{U} - \frac{(m+n)\bar{z} - m\bar{U}}{n} \\ &= \frac{m+n}{n}\left(\bar{U} - \bar{z}\right) \end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} (N-2)\tilde{S}^2 = \sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{U})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{V})^2 &= \sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{z})^2 - m(\bar{U} - \bar{z})^2 - n(\bar{V} - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{z})^2 - \frac{mn}{m+n}(\bar{U} - \bar{V})^2 \\ &= N\sigma_N^2 - \frac{mn}{m+n}D^2 \end{aligned}$$

となり，

$$N\sigma_N^2 - (N-2)\tilde{S}^2 = \frac{mn}{m+n}D^2$$

を得る．

5.3

いま，

$$
\begin{aligned}
E[D] &= 0 \\
V[D] &= \left(\frac{m+n}{n}\right)^2 V[\bar{U}] \\
&= \frac{(m+n)^2}{n^2}\cdot\frac{\sigma_N^2}{m}\cdot\frac{N-m}{N-1} \\
&= \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)mn}\sigma_N^2
\end{aligned}
$$

5.4

2. の結果と 3. の途中式より

$$
\frac{D-E[D]}{\sqrt{V[D]}} = \frac{U-E[U]}{\sqrt{V[U]}}
$$

が成り立ち，右辺は近似的に標準正規分布に従うので，左辺も近似的に標準正規分布に従う．

5.5

いま，

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}^2 &= \frac{D^2}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\tilde{S}^2} \\
&= \frac{mn}{N}\cdot\frac{D^2}{\tilde{S}^2}
\end{aligned}
$$

であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}^2 &= \frac{D^2}{V[D]} \\
&= \frac{D^2(N-1)mn}{N^2\sigma_N^2} \\
&= \frac{D^2(N-1)mn}{N(N-2)\tilde{S}^2+mnD^2} \\
&= \frac{(N-1)mn}{N(N-2)\frac{\tilde{S}^2}{D^2}+mn} \\
&= \frac{(N-1)mn}{(N-2)\cdot\frac{mn}{\tilde{T}^2}+mn} \\
&= \frac{N-1}{N-2+\tilde{T}^2}T^2
\end{aligned}
$$

よって，両辺の平方根を取れば良い．ここで，$\tilde{W}$ は近似的に標準正規分布に従うので，検定が可能である．また，関数 g は単調増加であるため，T を用いても同様の検定ができる．