統計検定 (社会科学)

田淵進

November 4, 2025

第 I 部

2023 年

1

略

2

2.1

2.2

一般に、価格および数量ラスパイレス指数はそれぞれ

$$P_L = \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{0i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \times 100$$
$$Q_L = \frac{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \times 100$$

で与えられ、パーシェ指数はそれぞれ

$$P_P = \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}} \times 100$$
$$Q_P = \frac{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}} \times 100$$

で与えられる。よって表 1 からの計算にっよって、ラスパイレス価格指数は

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{10363 \times 43.12 + 2272 \times 118.17}{10363 \times 44.74 + 2272 \times 119.86} \times 100 \\ &= 0.9718 \times 100 = 97.18 \end{aligned}$$

となる。

2.3

前問の定義から

$$
\begin{aligned}
P_L &= \bar{x} \\
Q_L &= \bar{y}
\end{aligned}
$$

である。

2.4

いま、

$$
\begin{aligned}
s_{xy} &= \sum_{n=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} w_i y_i + \bar{x}\bar{y} \sum_{i=1}^{n} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i - P_L Q_L
\end{aligned}
$$

とかける。ここで、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i &= \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \\
&= \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}} \times \frac{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \\
&= P_P Q_L
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
s_{xy} &= P_P Q_L - P_L Q_L \\
&= Q_L (P_P - P_L)
\end{aligned}
$$

と示される。

2.5

P_L と Q_L の大小関係は s_{xy} の符号と等しい。一般的に、価格と数量の間には負の相関がある場合が多いため、P_P は P_L より大きくなる傾向がある。

3

3.1

$t = 1, T$ のみのデータを使った場合、モデルの LSE は

$$Y_t = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} X_t + \epsilon_t \quad (t = 1, T)$$

を満たすので、

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta} &= \frac{Y_T - Y_1}{X_T - X_1} \\
\tilde{\alpha} &= \frac{1}{2}(Y_1 + Y_T) - \tilde{\beta}\frac{1}{2}(X_1 + X_T) &= \frac{X_1}{X_T - X_1}Y_1 - \frac{X_T}{X_T - X_1}Y_T
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
V[\tilde{\alpha}] &= \frac{X_1^2 + X_T^2}{(X_T - X_1)^2}\sigma^2 \\
V[\tilde{\beta}] &= \frac{2}{(X_T - X_1)^2}\sigma^2
\end{aligned}$$

である。

3.2

いま、$m = (X_1 + X_T)/2$ とおいて

$$\sum_{t=1}^{T}(X - \bar{X})^2 = \frac{(X_T - X_1)^2}{2} + 2\big(\bar{X} - m\big)^2 + \sum_{t=2}^{T-1}(X_t - \bar{X})^2$$

と変形できるので、条件は

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= m \\
X_2 = \cdots = X_{T-1} &= m
\end{aligned}$$

である。

3.3

前問の値を用いて、

$$\begin{aligned}
V[\tilde{Y}_{T+1}] &= V[\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} X_{T+1}] \\
&= V\left[\frac{X_{T+1} - X_T}{X_T - X_1}Y_1 + \frac{X_{T+1} - X_1}{X_T - X_1}Y_T\right] \\
&= \frac{(X_{T+1} - X_T)^2 + (X_1 - X_{T+1})^2}{(X_T - X_1)^2}\sigma^2
\end{aligned}$$

3.4

モデルが正しいと仮定したとき、3 点で測る際に最も $V[\tilde{\beta}]$ を小さくするには、X_c を X_1 または X_T と同じ値にするのが合理的である。

一方、単回帰であるかどうかを検証するためには、直線からのズレが大きくなる可能性が大きい $X_c = (X_1 + X_T)/2$ が適当である。