

統計検定 (統計数理)

田淵進

November 4, 2025

第 I 部 2022 年

1

1.1

A, B, C がすべて独立のとき,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{9}{16}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{27}{64}$$

である.

1.2

上界は $3/4$ であり, 下界は余事象を考えて $1/2$ である. よって $P(A \cap B)$ の取りうる値を I とすると, $I \subset [1/2, 3/4]$ である. 逆の包含を構成的に示す. 確率空間として $\Omega = [0, 1]$ に Lebesgue 測度を入れたものを考える. このとき, $r \in [0, 1/4]$ として $A = [0, 3/4], B = [r, r + 3/4]$ とおくと, $P(A) = P(B) = 3/4$ および $A \cap B = [r, 3/4]$ であり, この確率は $[1/2, 3/4]$ の範囲を動く. よって $I = [1/2, 3/4]$

1.3

$P(A \cap B \cap C)$ の取りうる範囲を J とすると, $A = C$ の場合を考えると $J \supset I$ がわかる. また, 上界は明らかに $3/4$ である. 一方, 下界は余事象を考えて $1/4$ であるので, $[1/4, 1/2]$ の範囲を $P(A \cap B \cap C)$ が取りうることを示す. 確率空間として前問と同じ Ω, A, B を $r = 1/4$ として取ったうえで, $C = [0, p] \cup [3/4, 3/2 - p]$ ($0 < p < 1/4$) とおくと, $P(C) = 3/4$ かつ $A \cap B \cap C = [1/4, p]$ であり, この確率は $[1/4, 1/2]$ の範囲を動く.

よって $J = [1/4, 3/4]$

1.4

いま、有限な確率空間として

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\varepsilon, a, b, ab, c, ac, bc, abc\} \\ A &= \{a, ab, ac, abc\} \\ B &= \{b, ab, bc, abc\} \\ C &= \{c, ac, bc, abc\}\end{aligned}$$

と置くことができる。このとき、条件から $P(A \cap B^c) = 3/16$ などが成り立つので、対称性から

$$\begin{aligned}P(\varepsilon) &= s - 1/8 \\ P(a) &= 3/16 - s \\ P(b) &= 3/16 - s \\ P(c) &= 3/16 - s \\ P(ab) &= s \\ P(bc) &= s \\ P(ac) &= s \\ P(abc) &= 9/16 - s\end{aligned}$$

とかける。それぞれが非負になるための条件は $1/8 \leq s \leq 3/16$ である。よって $P(A \cap B \cap C) = 9/16 - s$ の取りうる値は $[3/8, 7/16]$ である。

2

2.1

定義から

$$F_1(u) = P(U \leq u) = \frac{1+u}{2}$$
$$F_2(v) = P(V \leq v) = \frac{1+v}{2}$$

すなわち, $[-1, 1]$ で一様分布に従う.

2.2

(U, V) の同時密度は,

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} v = 1/4$$

となるので, (U, V) は $[-1, 1] \times [-1, 1]$ で一様分布に従い, 成分ごとに独立である.

2.3

座標平面上に $u^2 + v^2 \leq 1$ となる領域を描くと, この面積の $1/4$ 倍が確率に等しいので, $P(U^2 + V^2 \leq 1) = \pi/4$ となる.

2.4

同様に, $|u - v| \leq 1$ の領域を考えて

$$P(|U - V| \leq 1) = \frac{3}{4}$$

である.

2.5

$U^2 - 2UV + V^2 \leq 1$ の条件のもとで, (u, v) はこの領域を一様に分布する. よって

$$\begin{aligned} E[V] &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v \int_{-1}^{v+1} dudv + \frac{1}{3} \int_0^1 v \int_{v-1}^1 dudv \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v(v+2)dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v(2-v)dv \\ &= 0 \\ E[V^2] &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v^2 \int_{-1}^{v+1} dudv + \frac{1}{3} \int_0^1 v^2 \int_{v-1}^1 dudv \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v^2(v+2)dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v^2(2-v)dv \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

となる. 対称性から $E[U] = 0$, $E[U^2] = 5/18$ であるので, 共分散は

$$\begin{aligned} Cov(U, V) &= E[UV] - E[U]E[V] \\ &= E[UV] \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v \int_{-1}^{v+1} u du dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v \int_{v-1}^1 u du dv \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 v \cdot \frac{(v+1)^2 - 1}{2} dv + \frac{1}{3} \int_0^1 v \cdot \frac{1 - (v-1)^2}{2} dv \\ &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

よって, 相関係数は $1/2$ となる.

3

3.1

X はパラメータ λ の Poisson 分布に従うので,

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \\ V[X] &= \lambda \end{aligned}$$

である.

3.2

Λ はパラメータ α, β の Gamma 分布に従うので,

$$\begin{aligned} E[\Lambda] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \\ E[\Lambda^2] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^2 \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

ゆえ,

$$\begin{aligned} V[\Lambda] &= E[\Lambda^2] - E[\Lambda]^2 \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

となる.

3.3

X の分布は,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \int_0^\infty P(X = k \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\alpha \end{aligned}$$

と求まる。

3.4

いま、 X のモーメント母関数を考えると

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{e^t}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\alpha \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma + 1 = e^{-t}(\beta + 1)$ とおくと、

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^k \\ &= \left(\frac{\beta}{e^t\gamma}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^\alpha \end{aligned}$$

となる。 t について微分すると

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \alpha \left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^{\alpha+1} e^t \\ M''_X(t) &= \alpha \left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^{\alpha+1} e^t + \alpha(\alpha+1) \left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^{\alpha+2} e^{2t} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} E[X] &= M'_X(0) = \frac{\alpha}{\beta} \\ V[X] &= M''_X(0) - E[X]^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

を得る。

3.5

モーメント法においては、推定量は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} &= \bar{X} \\ \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2} &= \tilde{S}^2 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\bar{X}^2}{S^2 - \bar{X}} \\ \hat{\beta} &= \frac{\bar{X}}{S^2 - \bar{X}} \end{aligned}$$

を得る。特に， $S^2 > \bar{X}$ のときに推定量は正になる。

4

略

5

5.1

正規分布の再生性から,

$$D_i = Y_i - X_i \sim N(\theta, 2\sigma^2)$$

となる.

5.2

次のように取れば良い.

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \\ a_i &= \mu_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \\ b_1 &= -\theta/2 \\ b_2 &= \theta/2\end{aligned}$$

実際、このようにおくと、

$$\begin{aligned}Z_{i1} &= \mu_i + \varepsilon_{i1} \\ Z_{i2} &= \mu_i + \theta + \varepsilon_{i2}\end{aligned}$$

となる.

5.3

いま、

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{..} &:= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Z_{i1} + Z_{i2}) \\ \bar{Z}_{i..} &:= \frac{1}{2} (Z_{i1} + Z_{i2}) \\ \bar{Z}_{..j} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{ij}\end{aligned}$$

と定めると,

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n (\bar{Z}_{i\cdot} - \bar{Z}_{..})^2 \\ S_B &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Z_{ij} - \bar{Z}_{\cdot j})^2 \\ S_E &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Z_{ij} - \bar{Z}_{i\cdot} - \bar{Z}_{\cdot j} + \bar{Z}_{..})^2 \end{aligned}$$

このとき, S_A^2/σ^2 は自由度 ϕ_A の非心 χ^2 分布に従い, S_B^2/σ^2 は自由度 ϕ_B の非心 χ^2 分布に従い, S_E^2/σ^2 は自由度 ϕ_E の χ^2 分布に従う. また, このとき, S_A, S_B, S_E は独立である. よって, 仮説 $\theta = 0$ のもとでは S_B が中心 χ^2 分布に従い,

$$\frac{S_A^2 \phi_E}{S_E^2 \phi_A} \sim F(\phi_A, \phi_E)$$

となり, 仮説 $\mu_i \equiv \mu$ のもとでは S_A が中心 χ^2 分布に従い,

$$\frac{S_B^2 \phi_E}{S_E^2 \phi_B} \sim F(\phi_B, \phi_E)$$

となる

5.4

θ に関する検定において, X_1 を欠測した場合, Y_1 の値からは θ, μ_i の寄与が分離できないため, Y_1 を利用して検定を行うことはできない.

実際, S_A の定義の和の一行目が 0 となっており, 残りの $n - 1$ 個の和の形になっている.

5.5

μ_i に関する検定において, X_1 を欠測した場合でも, Y_1 と他の Y_i の値から, μ_1 の大きさに関する検定ができる.

実際, S_B の定義の和の一行目は Y_1 を含んでおり, 他の Y_i とも比較できる形になっている.

第 II 部

2023 年

1,2 は簡単なので省略. 問 1 で推定量 α の β に対する漸近相対効率を問われているが, この定義は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V[\beta]}{V[\alpha]} \quad (1)$$

のことである. ただし, n はサンプル数であり, α, β は n に依存している値で, 特に一致推定量であれば分散は 0 に収束する.

3

3.1

X は指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$) に従うので,

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる.

3.2

モーメント母関数は $t < \lambda$ の範囲で

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

となる.

3.3

確率変数 X_W の従う密度は $g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)}$ で与えられるので, $h > 0$ に対しては

$$\begin{aligned} E[X_W] &= \int_0^\infty x \frac{e^{hx} \lambda e^{-\lambda x}}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{\lambda}{M_X(h)} \int_0^\infty x e^{-(\lambda-h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_\infty^0 e^{-(\lambda-h)x} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \cdot \frac{\lambda}{(\lambda-h)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda-h} \\ &> E[X] \end{aligned}$$

となる.

3.4

一般の確率密度 f に従う分布 X について, X_W のモーメント母関数を考えると,

$$\begin{aligned} E[e^{tX_W}] &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)} dx \\ &= \frac{1}{M_X(h)} \int_{-\infty}^\infty e^{(t+h)x} f(x) dx \\ &= \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \end{aligned}$$

ここで, t に関する r 回微分を考えると,

$$E[X^r] = \frac{M_X^{(r)}(h+0)}{M_X(h)}$$

を得る.

3.5

$h = 0$ とすると, $M_X(0) = 1$ であるので, X_W と X の分布は等しい. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{dE[X_W]}{dh} &= \frac{M_X''(h)M_X(h) - (M_X'(h))^2}{M_X(h)^2} \\ &= E[X_W^2] - E[X_W]^2 \\ &= Var(X_W) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる. よって, $h > 0$ に対して $E[X_W] > E[X]$ であり, $h < 0$ に対して $E[X_W] < E[X]$ である.

4

4.1

W が自由度 k のカイ二乗分布に従うとする。このとき、

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty t \cdot t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2+1} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= k \end{aligned}$$

であり、特に $k \geq 3$ においては

$$\begin{aligned} E[1/W] &= \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2-1} \Gamma\left(\frac{k}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{k-2} \end{aligned}$$

となる。

4.2

今、 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ であり、係数ベクトル $\beta \in \mathbb{R}^p$ 及び説明変数行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ について、線形回帰モデル

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

が与えられている。今、仮定より X のランクは p である。このとき、 X の転置行列を X^T とすると、

$$P := X(X^T X)^{-1} X^T$$

は $\mathbb{S}(X)$ への直交射影である。実際、

$$\begin{aligned} P^2 &= X(X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} X^T \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= P \\ P^T &= (X(X^T X)^{-1} X^T)^T \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T \\ &= P \end{aligned}$$

が成り立つため、直交射影である。また明らかに $\Im P \subset \Im X$ であり、任意の $v \in \Im X$ に対して、ある $c \in \mathbb{R}^p$ が存在して $v = Xc$ とかけるので、

$$\begin{aligned} Pv &= X(X^T X)^{-1} X^T v \\ &= X(X^T X)^{-1} X^T Xc \\ &= Xc \\ &= v \in \Im P \end{aligned}$$

となることから、 $\Im X = \Im P$ も成り立つ。

ここで、 $\Im X$ と $\Im X$ の直交補空間の正規直交基底をそれぞれ $\{g_1, \dots, g_p\}$, $\{g_{p+1}, \dots, g_n\}$ とする。このとき、行列

$$G := (g_1, \dots, g_n)$$

という直交行列を取ると、基底の変換によって、ある $\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathbb{R}$ を用いて

$$G^T Y = G^T X \beta + G^T \varepsilon \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + G^T \varepsilon \quad (3)$$

と表される。特に、 $G^T \varepsilon$ は再び $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うので、各成分を $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ とおくと

$$\begin{aligned} G^T \hat{Y} &= X \hat{\beta} = PY \\ &= P(X \beta + \varepsilon) \\ &= X \beta + G^T P \varepsilon \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \eta_p + \gamma_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \|Y - X \hat{\beta}\|^2 = \frac{1}{n} \|G^T Y - G^T X \hat{\beta}\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=p+1}^n \gamma_i^2 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\|X\hat{\beta} - X\beta\|^2 &= \|G^T X\hat{\beta} - G^T X\beta\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \gamma_i^2\end{aligned}$$

となる. 以上から,

$$\begin{aligned}W_1 &:= n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=p+1}^n \gamma_i^2 \\ W_2 &= \|X\hat{\beta} - X\beta\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^p \gamma_i^2\end{aligned}$$

はそれぞれ独立に, 自由度 $n-p, p$ のカイ二乗分布に従う.

4.3

前問と同じ記号を用いて, $G^T \varepsilon' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)^T$ とおく. このとき,

$$Z - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 - \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma'_p - \gamma_p \\ \gamma'_{p+1} \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}E[\|Z - \hat{Y}\| | Y] &= E\left[\sum_{i=1}^p (\gamma'_i - \gamma_i)^2 + \sum_{i=p+1}^n \gamma'^2_i | Y\right] \\ &= \sum_{i=1}^p E[(\gamma'_i - \gamma_i)^2 | Y] + \sum_{i=p+1}^n E[\gamma'^2_i] \\ &= n\sigma^2 + W_2\sigma^2\end{aligned}$$

となる.

4.4

各値がどのような確率変数かはわかっているので、計算すると

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\Delta(Z) - \Delta(Y)}{\hat{\sigma}^2}\right] &= E\left[\frac{n\sigma^2 + W_2\sigma^2 - W_1\sigma^1}{\sigma^2 W_1/n}\right] \\ &= \frac{n(n+p)}{n-p-2} - n \\ &= \frac{2n(p+1)}{n-p-2} \end{aligned}$$

であり、極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(p+1)}{n-p-2} = 2(p+1)$$

5

5.1

各 U_i は有限母集団 $\{z_1, \dots, z_n\}$ からの非復元抽出であるので, $E[U_i] = \bar{z}$ であり, $V[U_i] = \sigma_N^2$ である. よって,

$$E[\bar{U}] = \bar{z}$$

であり, 有限母集団修正を考慮すると,

$$V[\bar{U}] = \frac{\sigma_N^2}{m} \frac{N-m}{N-1}$$

となる.

5.2

いま, $m\bar{U} + n\bar{V} = (m+n)\bar{z}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} D &= \bar{U} - \bar{V} \\ &= \bar{U} - \frac{(m+n)\bar{z} - m\bar{U}}{n} \\ &= \frac{m+n}{n} (\bar{U} - \bar{z}) \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} (N-2)\tilde{S}^2 &= \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{U})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{V})^2 = \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{z})^2 - m(\bar{U} - \bar{z})^2 - n(\bar{V} - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{z})^2 - \frac{mn}{m+n} (\bar{U} - \bar{V})^2 \\ &= N\sigma_N^2 - \frac{mn}{m+n} D^2 \end{aligned}$$

となり,

$$N\sigma_N^2 - (N-2)\tilde{S}^2 = \frac{mn}{m+n} D^2$$

を得る.

5.3

いま,

$$\begin{aligned}
 E[D] &= 0 \\
 V[D] &= \left(\frac{m+n}{n} \right)^2 V[\bar{U}] \\
 &= \frac{(m+n)^2}{n^2} \cdot \frac{\sigma_N^2}{m} \cdot \frac{N-m}{N-1} \\
 &= \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)mn} \sigma_N^2
 \end{aligned}$$

5.4

2. の結果と 3. の途中式より

$$\frac{D - E[D]}{\sqrt{V[D]}} = \frac{U - E[U]}{\sqrt{V[\bar{U}]}}$$

が成り立ち, 右辺は近似的に標準正規分布に従うので, 左辺も近似的に標準正規分布に従う.

5.5

いま,

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^2 &= \frac{D^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\tilde{S}^2} \\
 &= \frac{mn}{N} \cdot \frac{D^2}{\tilde{S}^2}
 \end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}^2 &= \frac{D^2}{V[D]} \\
 &= \frac{D^2(N-1)mn}{N^2\sigma_N^2} \\
 &= \frac{D^2(N-1)mn}{N(N-2)\tilde{S}^2 + mnD^2} \\
 &= \frac{(N-1)mn}{N(N-2)\frac{\tilde{S}^2}{D^2} + mn} \\
 &= \frac{(N-1)mn}{(N-2) \cdot \frac{mn}{\tilde{T}^2} + mn} \\
 &= \frac{N-1}{N-2+\tilde{T}^2} \tilde{T}^2
 \end{aligned}$$

よって、両辺の平方根を取れば良い。ここで、 \tilde{W} は近似的に標準正規分布に従うので、検定が可能である。また、関数 g は単調増加であるため、 T を用いても同様の検定ができる。