

統計検定 (社会科学)

田淵進

November 6, 2025

第 I 部

2023 年

1

略

2

2.1

2.2

一般に、価格および数量ラスパイレス指数はそれぞれ

$$P_L = \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{0i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \times 100$$
$$Q_L = \frac{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \times 100$$

で与えられ、パーシェ指数はそれぞれ

$$P_P = \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}} \times 100$$
$$Q_P = \frac{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}} \times 100$$

で与えられる。よって表 1 からの計算によって、ラスパイレス価格指数は

$$P_L = \frac{10363 \times 43.12 + 2272 \times 118.17}{10363 \times 44.74 + 2272 \times 119.86} \times 100$$
$$= 0.9718 \times 100 = 97.18$$

となる。

2.3

前問の定義から

$$\begin{aligned}P_L &= \bar{x} \\ Q_L &= \bar{y}\end{aligned}$$

である.

2.4

いま,

$$\begin{aligned}s_{xy} &= \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n w_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n w_i y_i + \bar{x} \bar{y} \sum_{i=1}^n w_i \\ &= \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i - P_L Q_L\end{aligned}$$

とかける. ここで,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n w_i x_i y_i &= \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \\ &= \frac{\sum_i^n p_{1i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}} \times \frac{\sum_i^n p_{0i} n_{1i}}{\sum_i^n p_{0i} n_{0i}} \\ &= P_P Q_L\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}s_{xy} &= P_P Q_L - P_L Q_L \\ &= Q_L (P_P - P_L)\end{aligned}$$

と示される.

2.5

P_L と Q_L の大小関係は s_{xy} の符号と等しい. 一般的に, 価格と数量の間には負の相関がある場合が多いため, P_P は P_L より大きくなる傾向がある.

3

3.1

$t = 1, T$ のみのデータを使った場合, モデルの LSE は

$$Y_t = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}X_t + \epsilon_t \quad (t = 1, T)$$

を満たすので,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \frac{Y_T - Y_1}{X_T - X_1} \\ \tilde{\alpha} &= \frac{1}{2}(Y_1 + Y_T) - \tilde{\beta}\frac{1}{2}(X_1 + X_T) = \frac{X_1}{X_T - X_1}Y_1 - \frac{X_T}{X_T - X_1}Y_T\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}V[\tilde{\alpha}] &= \frac{X_1^2 + X_T^2}{(X_T - X_1)^2}\sigma^2 \\ V[\tilde{\beta}] &= \frac{2}{(X_T - X_1)^2}\sigma^2\end{aligned}$$

である.

3.2

いま, $m = (X_1 + X_T)/2$ とおいて

$$\sum_{t=1}^T (X - \bar{X})^2 = \frac{(X_T - X_1)^2}{2} + 2(\bar{X} - m)^2 + \sum_{t=2}^{T-1} (X_t - \bar{X})^2$$

と変形できるので, 条件は

$$\begin{aligned}\bar{X} &= m \\ X_2 &= \cdots = X_{T-1} = m\end{aligned}$$

である.

3.3

前問の値を用いて,

$$\begin{aligned}V[\tilde{Y}_{T+1}] &= V[\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}X_{T+1}] \\ &= V\left[\frac{X_{T+1} - X_T}{X_T - X_1}Y_1 + \frac{X_{T+1} - X_1}{X_T - X_1}Y_T\right] \\ &= \frac{(X_{T+1} - X_T)^2 + (X_1 - X_{T+1})^2}{(X_T - X_1)^2}\sigma^2\end{aligned}$$

3.4

モデルが正しいと仮定したとき，3点で測る際に最も $V[\tilde{\beta}]$ を小さくするには， X_c を X_1 または X_T と同じ値にするのが合理的である．

一方，単回帰であるかどうかを検証するためには，直線からのズレが大きくなる可能性が大きい $X_c = (X_1 + X_T)/2$ が適当である．

4

4.1

4.2

t 期と $t-4$ 期の関係を見て, A, B, C がそれぞれ $a = 0.8, 0, -0.8$ である事がわかる.

4.3

AR モデルを MA モデルとして表現すると,

$$\begin{aligned} y_t &= ay_{t-4} + v_t \\ &= a(ay_{t-8} + v_{t-4}) + v_t \\ &= v_t + av_{t-4} + a^2v_{t-8} + a^3v_{t-12} + \cdots \end{aligned}$$

となる. あるいは, 恒等作用素を I , ラグ作用素を L とおくと, $|a| < 1$ のもとで $I - L^4$ は可逆であり,

$$\begin{aligned} y_t &= (I - aL^4)^{-1}v_t \\ &= (I + aL^4 + a^2L^8 + \cdots)v_t \end{aligned}$$

として, 同じ結果を得る.

また, 条件より y_t は定常であるので, $\mu := E[y_t]$ とおくと, $\mu = a\mu$ すなわち $\mu = 0$ であり, $\psi := V[y_t]$ とすると,

$$\begin{aligned} \psi &= a^2\psi + \sigma^2 \\ \psi &= \frac{\sigma^2}{1 - a^2} \end{aligned}$$

となる. また, 共分散は

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i v_{t-4i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i v_{t-k-4i}\right)\right] \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i+k/4}\sigma^2 & (k \in 4\mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{a^{k/4}\sigma^2}{1-a^2} & (k \in 4\mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

であるので, 自己相関係数は,

$$\begin{aligned} \rho_k &= \text{Cov}(y_t, y_{t-k})/\psi \\ &= \begin{cases} a^{k/4} & (k \in 4\mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

4.4

自己回帰モデルにおける SLE は, $t = 5, \dots, T$ までの $T - 4$ 個の関係式

$$y_t = ay_{t-4} + v_t$$

から, 平方和 $\sum_{t=5}^T (y_t - ay_{t-4})^2$ を最小化する値として求められる. これは通常の単回帰と同じで, SLE として

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=5}^T y_t y_{t-4}}{\sum_{t=5}^T y_{t-4}^2}$$

が求まる. このとき, 残差の自由度は $T - 5$ になるので, 最小化された平方和から計算される分散 σ^2 の推定量としては,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T - 5} \sum_{t=4}^T (y_t - \hat{\alpha} y_{t-4})^2$$

と取れる. このとき, 分母にも確率項があり, 一般に推定量が不偏とは限らない.

一方で, 大数の法則より^{*1},

$$\frac{1}{T - 4} \sum_{t=5}^T v_t y_{t-4} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{T - 4} \sum_{t=5}^T y_{t-4} y_{t-4} \rightarrow a$$

が成り立ち, 連続写像定理から $\hat{\alpha}$ は a に確率収束する.

同様に, $e_t := y_t - \hat{\alpha} y_{t-4} = v_t + (a - \hat{\alpha}) y_{t-4}$ として大数の法則を用いることで, 一致推定量であることが示される.

4.5

$k = 4(n - 1) + i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ とおくと,

$$\hat{y}_{T+k} = \hat{a}^n y_{T-4+i}$$

と推定できる. このときの予測誤差は

$$y_{T+k} - \hat{y}_{T+k} = (a^n - \hat{a}^n) y_{T-4+i} + \sum_{j=0}^n a^j v_{T+k-4j}$$

となる.

^{*1} 大数の法則がちゃんと使えることを示すのはむずい気がする

5

5.1

分布の再生成より, $D \sim N(0, 2\sigma^2)$ となるので,

$$\begin{aligned} E[D] &= 0 \\ V[D] &= 2\sigma_X^2 = 72 \\ P(D \leq -4) &= P(Z \leq -4/\sqrt{72}) \approx 0.32 \end{aligned}$$

となる. ここで, Z は標準正規分布に従う確率変数とする.

5.2

条件より, $Y | X \sim N(\alpha + \beta X, \sigma^2)$ となるので, $\beta = 3/4, \alpha = 120 - 120\beta$ を用いて

$$\begin{aligned} E[Y | X = 132] &= \alpha + 132\beta \\ &= 129 \end{aligned}$$

となり, $V[Y | X = 132] = \sigma^2 = \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2/\sigma_X^2 = 63$ である.

ここで, 平均への回帰効果とは, 母平均が同じであるとすれば, 一回目で 132 を記録しても, 2 回目の測定値の期待値は 132 よりも小さい値になることを指しており, 平均への回帰分は 3mmHg とみなされる.

5.3

Tower Property などから,

$$\begin{aligned} E[(X - \mu)^2] &= E[E[(X - \mu)^2 | \theta]] \\ &= E[E[(X - \theta)^2 + (\theta - \mu)^2 + 2(X - \mu)(X - \theta) | \theta]] \\ &= \psi^2 + \tau^2 \end{aligned}$$

と計算できる. 同様に $V[Y] = \psi^2 + \tau^2$ であり, $\text{Cov}(X, Y) = \tau^2$ と計算できる. これに $\psi^2 + \tau^2 = 144, \tau^2 = 3(\psi^2 + \tau^2)/4$ を代入して,

$$\begin{aligned} \tau^2 &= 108 \\ \psi^2 &= 36 \end{aligned}$$

を得る.

5.4

条件から、 θ と ε はそれぞれ独立に正規分布に従うので、

$$\begin{pmatrix} \theta \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

となる．特に共分散行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \psi^2 & \psi^2 \\ \psi^2 & \psi^2 \end{pmatrix}$$

である．このとき、 $\theta \mid X$ の分布は、 $X = 132$ とすると

$$\begin{aligned} E[\theta \mid X] &= \mu + \frac{\text{Cov}(\theta, X)}{V[X]}(X - \mu) \\ &= 129 \\ V[\theta \mid X] &= V[\theta] - \frac{\text{Cov}(\theta, X)^2}{V[X]} \\ &= 27 \end{aligned}$$

に従う正規分布となる．

5.5

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は互いに独立であるので、 $\theta + \varepsilon_1 \mid X$ の分布は $N(129, 63)$ となる．よって、

$$P(Y \leq 128 \mid X = 132) = P(Z \leq -1/\sqrt{63}) \approx 0.45$$

となる．ここで Z は標準正規分布に従う確率変数とする．