統計検定 (統計数理)

田淵進

November 11, 2025

第 I 部
2021 年

1,2,3

略

4

4.1, 4.2, 4.3

自明な計算から

$$\begin{aligned} V[\bar{X}] &= \sigma^2/n \\ E[(X_1 - X_2)^3] &= 0 \\ E[Y_i Y_j Y_k] &= \begin{cases} \tau & (i = j = k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

4.4

$$\begin{aligned} \sum_i^n (X_i - \bar{X})^3 &= \sum_i^n (Y_i - \bar{X})^3 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(Y_i^3 - 3Y_i^2\bar{Y} + 3Y_i\bar{Y}^2 - \bar{Y}^3 \right) \end{aligned}$$

となるので，期待値を各項で計算して

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{i}^{n}(X_i-\bar{X})^3\right] &= n\tau - 3n\cdot\frac{\tau}{n} + 3n\cdot\frac{\tau}{n^2} + n\cdot\frac{n\cdot\tau}{n^3} \\
&= \tau\left(n-3+\frac{2}{m}\right)
\end{aligned}
$$

4.5

まず，

$$
\begin{aligned}
\hat{\tau} &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(Y_i+\mu)\right)^3 \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_iY_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu\right)\right)^3 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_iY_i\right)^3 + 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_iY_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_iY_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu\right)^3
\end{aligned}
$$

この期待値を取ると

$$
\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right) + 3\mu\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \mu^3\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3
$$

となるので，求める条件は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i^3 &= \tau
\end{aligned}
$$

となる．

5

5.1

$$
\begin{aligned}
V[y] = E[(Lx - L\mu)^T(Lx - L\mu)] &= L^T V[x] L \\
&= L^T L
\end{aligned}
$$

5.2

共分散が 0 であれば良いので,

$$\mathrm{Cov}(Lx, Mx) = L^T M = O$$

が求める条件である.

5.3

5.4

一般に, L, M に対して,

$$LM^T = AMM^T$$

が成り立つような $l \times m$ 行列 A が存在するための条件を考える. 両辺を転置して

$$ML^T = MM^T A^T \tag{1}$$

となる. ここで, 一般に $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, MM^T$ が成り立つことに注意すると, $\mathrm{Im}\, ML^T \subset \mathrm{Im}\, MM^T$ となるので, 任意の $u \in \mathrm{Im}\, ML^T \subset$ に対して, $v \in \mathbb{R}^m$ を取って

$$u = (MM^T)v$$

となる v が存在する. 特に, $r = rank(M)$ として, 一次独立な $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^l$ に対して, $Mx_i = (MM^T)v_i$ となる $v_i \in \mathbb{R}^m$ が存在するので, A^T を $A^T x_i = v_i$ かつその他の空間で 0 となる写像として特徴づければ, A は常に存在することがわかる.

特に M がフルランクであれば, MM^T が可逆になるので,

$$A = (MM^T)^{-1} LM^T$$

として取ることができる.

第 II 部

2022 年

1

1.1

A, B, C がすべて独立のとき，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{9}{16}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{27}{64}$$

である．

1.2

上界は $3/4$ であり，下界は余事象を考えて $1/2$ である．よって $P(A \cap B)$ の取りうる値を I とすると，$I \subset [1/2, 3/4]$ である．逆の包含を構成的に示す．確率空間として $\Omega = [0, 1]$ に Lebesgue 測度を入れたものを考える．このとき，$r \in [0, 1/4]$ として $A = [0, 3/4], B = [r, r + 3/4]$ とおくと，$P(A) = P(B) = 3/4$ および $A \cap B = [r, 3/4]$ であり，この確率は $[1/2, 3/4]$ の範囲を動く．

よって $I = [1/2, 3/4]$

1.3

$P(A \cap B \cap C)$ の取りうる範囲を J とすると，$A = C$ の場合を考えると $J \supset I$ がわかる．また，上界は明らかに $3/4$ である．一方，下界は余事象を考えて $1/4$ であるので，$[1/4, 1/2]$ の範囲を $P(A \cap B \cap C)$ が取りうることを示す．確率空間として前問と同じ Ω, A, B を $r = 1/4$ として取ったうえで，$C = [0, p] \cup [3/4, 3/2 - p]$ $(0 \in [1/2, 3/4])$ とおくと，$P(C) = 3/4$ かつ $A \cap B \cap C = [1/4, p]$ であり，この確率は $[1/4, 1/2]$ の範囲を動く．

よって $J = [1/4, 3/4]$

1.4

いま，有限な確率空間として

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{\varepsilon, a, b, ab, c, ac, bc, abc\} \\
A &= \{a, ab, ac, abc\} \\
B &= \{b, ab, bc, abc\} \\
C &= \{c, ac, bc, abc\}
\end{aligned}$$

と置くことができる．このとき，条件から $P(A \cap B^c) = 3/16$ などが成り立つので，対称性から

$$
\begin{aligned}
P(\varepsilon) &= s - 1/8 \\
P(a) &= 3/16 - s \\
P(b) &= 3/16 - s \\
P(c) &= 3/16 - s \\
P(ab) &= s \\
P(bc) &= s \\
P(ac) &= s \\
P(abc) &= 9/16 - s
\end{aligned}
$$

とかける．それぞれが非負になるための条件は $1/8 \le s \le 3/16$ である．よって $P(A \cap B \cap C) = 9/16 - s$ の取りうる値は $[3/8, 7/16]$ である．

2

2.1

定義から

$$F_1(u) = P(U \leq u) = \frac{1+u}{2}$$
$$F_2(v) = P(V \leq v) = \frac{1+v}{2}$$

すなわち，$[-1, 1]$ で一様分布に従う．

2.2

(U, V) の同時密度は,

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} v = 1/4$$

となるので，(U, V) は $[-1, 1] \times [-1, 1]$ で一様分布に従い，成分ごとに独立である．

2.3

座標平面上に $u^2 + v^2 \leq 1$ となる領域を描くと，この面積の 1/4 倍が確率に等しいので，$P(U^2 + V^2 \leq 1) = \pi/4$ となる．

2.4

同様に，$|u - v| \leq 1$ の領域を考えて

$$P(|U - V| \leq 1) = \frac{3}{4}$$

である．

2.5

$U^2 - 2UV + V^2 \leq 1$ の条件のもとで，(u, v) はこの領域を一様に分布する．よって

$$\begin{aligned}
E[V] &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} v \int_{-1}^{v+1} dudv + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} v \int_{v-1}^{1} dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} v(v+2)dv + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} v(2-v)dv \\
&= 0 \\
E[V^2] &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} v^2 \int_{-1}^{v+1} dudv + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} v^2 \int_{v-1}^{1} dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} v^2(v+2)dv + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} v^2(2-v)dv \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

となる．対称性から $E[U] = 0$，$E[U^2] = 5/18$ であるので，共分散は

$$\begin{aligned}
Cov(U, V) &= E[UV] - E[U]E[V] \\
&= E[UV] \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} v \int_{-1}^{v+1} ududv + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} v \int_{v-1}^{1} ududv \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} v \cdot \frac{(v+1)^2 - 1}{2}dv + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} v \cdot \frac{1 - (v-1)^2}{2}dv \\
&= \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

よって，相関係数は $1/2$ となる．

3

3.1

X はパラメータ λ の Poisson 分布に従うので,

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \\ V[X] &= \lambda \end{aligned}$$

である.

3.2

Λ はパラメータ α, β の Gamma 分布に従うので,

$$\begin{aligned} E[\Lambda] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \\ E[\Lambda^2] &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^2 \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

ゆえ,

$$\begin{aligned} V[\Lambda] &= E[\Lambda^2] - E[\Lambda]^2 \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

となる.

3.3

X の分布は,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \int_0^\infty P(X=k \mid \Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\alpha \end{aligned}$$

と求まる．

3.4

いま，X のモーメント母関数を考えると

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{e^t}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\alpha \end{aligned}$$

ここで，$\gamma+1 = e^{-t}(\beta+1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^k \\ &= \left(\frac{\beta}{e^t\gamma}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^\alpha \end{aligned}$$

となる．t について微分すると

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \alpha\left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^{\alpha+1} e^t \\ M''_X(t) &= \alpha\left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^{\alpha+1} e^t + \alpha(\alpha+1)\left(\frac{\beta}{1+\beta-e^t}\right)^{\alpha+2} e^{2t} \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} E[X] &= M'_X(0) = \frac{\alpha}{\beta} \\ V[X] &= M''_X(0) - E[X]^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

を得る．

3.5

モーメント法においては，推定量は

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} &= \bar{X} \\ \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2} &= \tilde{S}^2 \end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\bar{X}^2}{S^2 - \bar{X}} \\ \hat{\beta} &= \frac{\bar{X}}{S^2 - \bar{X}} \end{aligned}$$

を得る．特に，$S^2 > \bar{X}$ のときに推定量は正になる．

4

略

5

5.1

正規分布の再生性から，

$$D_i = Y_i - X_i \sim N(\theta, 2\sigma^2)$$

となる．

5.2

次のように取れば良い．

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu \\
a_i &= \mu_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i \\
b_1 &= -\theta/2 \\
b_2 &= \theta/2
\end{aligned}$$

実際，このようにおくと，

$$\begin{aligned}
Z_{i1} &= \mu_i + \varepsilon_{i1} \\
Z_{i2} &= \mu_i + \theta + \varepsilon_{i2}
\end{aligned}$$

となる．

5.3

いま，

$$\begin{aligned}
\bar{Z}_{\cdot\cdot} &:= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(Z_{i1} + Z_{i2}) \\
\bar{Z}_{i\cdot} &:= \frac{1}{2}(Z_{i1} + Z_{i2}) \\
\bar{Z}_{\cdot j} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_{ij}
\end{aligned}$$

と定めると，

$$S_A = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}(\bar{Z}_{i\cdot} - \bar{Z}_{\cdot\cdot})^2$$
$$S_B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}(Z_{ij} - \bar{Z}_{\cdot j})^2$$
$$S_E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}(Z_{ij} - \bar{Z}_{i\cdot} - \bar{Z}_{\cdot j} + \bar{Z}_{\cdot\cdot})^2$$

このとき，S_A^2/σ^2 は自由度 ϕ_A の非心 χ^2 分布に従い，$S_B^2\sigma^2$ は自由度 ϕ_B の非心 χ^2 分布に従い，S_E^2/σ^2 は自由度 ϕ_E の χ^2 分布に従う．また，このとき，S_A, S_B, S_E は独立である．よって，仮説 $\theta = 0$ のもとでは S_B が中心 χ^2 分布に従い，

$$\frac{S_A^2\phi_E}{S_E^2\phi_A} \sim F(\phi_A, \phi_E)$$

となり，仮説 $\mu_i \equiv \mu$ のもとでは S_A が中心 χ^2 分布に従い，

$$\frac{S_B^2\phi_E}{S_E^2\phi_B} \sim F(\phi_B, \phi_E)$$

となる

5.4

θ に関する検定において，X_1 を欠測した場合，Y_1 の値からは θ, μ_i の寄与が分離できないため，Y_1 を利用して検定を行うことはできない．

実際，S_A の定義の和の一行目が 0 となっており，残りの $n-1$ 個の和の形になっている．

5.5

μ_i に関する検定において，X_1 を欠測した場合でも，Y_1 と他の Y_i の値から，μ_1 の大きさに関する検定ができる．

実際，S_B の定義の和の一行目は Y_1 を含んでおり，他の Y_i とも比較できる形になっている．

第 III 部
2023 年

1,2 は簡単なので省略．問 1 で推定量 α の β に対する漸近相対効率を問われているが，この定義は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V[\beta]}{V[\alpha]} \tag{2}$$

のことである．ただし，n はサンプル数であり，α, β は n に依存している値で，特に一致推定量であれば分散は 0 に収束する．

3

3.1

X は指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ に従うので，

$$\begin{aligned}
E[X] &= \lambda\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

となる．

3.2

モーメント母関数は $t < \lambda$ の範囲で

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}
\end{aligned}$$

となる．

3.3

確率変数 X_W の従う密度は $g(x) = \frac{e^{hx}f(x)}{M_X(h)}$ で与えられるので，$h > 0$ に対しては

$$
\begin{aligned}
E[X_W] &= \int_0^\infty x \frac{e^{hx}\lambda e^{-\lambda x}}{M_X(h)} dx \\
&= \frac{\lambda}{M_X(h)} \int_0^\infty x e^{-(\lambda-h)x} dx \\
&= \frac{1}{M_X(h)} \int_\infty^0 e^{-(\lambda-h)x} dx \\
&= \frac{1}{M_X(h)} \cdot \frac{\lambda}{(\lambda-h)^2} \\
&= \frac{1}{\lambda-h} \\
&> E[X]
\end{aligned}
$$

となる．

3.4

一般の確率密度 f に従う分布 X について，X_W のモーメント母関数を考えると，

$$
\begin{aligned}
E[e^{tX_W}] &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{e^{hx}f(x)}{M_X(h)} dx \\
&= \frac{1}{M_X(h)} \int_{-\infty}^\infty e^{(t+h)x} f(x) dx \\
&= \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}
\end{aligned}
$$

ここで，t に関する r 回微分を考えると，

$$
E[X^r] = \frac{M_X^{(r)}(h+0)}{M_X(h)}
$$

を得る．

3.5

$h = 0$ とすると，$M_X(0) = 1$ であるので，X_W と X の分布は等しい．ここで，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E[X_W]}{\mathrm{d}h} &= \frac{M_X''(h)M_X(h) - (M_X'(h))^2}{M_X(h)^2} \\
&= E[X_W^2] - E[X_W]^2 \\
&= Var(X_W) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

となる．よって，$h > 0$ に対して $E[X_W] > E[X]$ であり，$h < 0$ に対して $E[X_W] < E[X]$ である．

4

4.1

W が自由度 k のカイ二乗分布に従うとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
E[W] &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty t \cdot t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\
&= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2+1} \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \\
&= k
\end{aligned}
$$

であり，特に $k \geq 3$ においては

$$
\begin{aligned}
E[1/W] &= \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} t^{k/2-1} e^{-t/2} dt \\
&= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2-1} \Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right) \\
&= \frac{1}{k-2}
\end{aligned}
$$

となる．

4.2

今，$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ であり，係数ベクトル $\beta \in \mathbb{R}^p$ 及び説明変数行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ について，線形回帰モデル

$$
Y = X\beta + \varepsilon
$$

が与えられている．今，仮定より X のランクは p である．このとき，X の転置行列を X とすると，

$$
P \coloneqq X\left(X^T X\right)^{-1} X^T
$$

は $\mathrm{Im}(X)$ への直交射影である．実際，

$$
\begin{aligned}
P^2 &= X\left(X^T X\right)^{-1} X^T X \left(X^T X\right)^{-1} X^T \\
&= X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \\
&= P \\
P^T &= \left(X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right)^T \\
&= X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \\
&= P
\end{aligned}
$$

が成り立つため，直交射影である．また明らかに $\mathrm{Im}\,P \subset \mathrm{Im}\,X$ であり，任意の $v \in \mathrm{Im}\,X$ に対して，ある $c \in \mathbb{R}^p$ が存在して $v = Xc$ とかけるので，

$$\begin{aligned} Pv &= X\left(X^TX\right)^{-1}X^Tv \\ &= X\left(X^TX\right)^{-1}X^TXc \\ &= Xc \\ &= v \in \mathrm{Im}\,P \end{aligned}$$

となることから，$\mathrm{Im}\,X = \mathrm{Im}\,P$ も成り立つ．

ここで，$\mathrm{Im}\,X$ と $\mathrm{Im}\,X$ の直交補空間の正規直交基底をそれぞれ $\{g_1, \cdots, g_p\}$，$\{g_{p+1}, \cdots, g_n\}$ とする．このとき，行列

$$G \coloneqq (g_1, \cdots, g_n)$$

という直交行列を取ると，基底の変換によって，ある $\eta_1, \ldots, \eta_p \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{aligned} G^TY &= G^TX\beta + G^T\varepsilon && (3) \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + G^T\varepsilon && (4) \end{aligned}$$

と表される．特に，$G^T\varepsilon$ は再び $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うので，各成分を $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ とおくと

$$\begin{aligned} G^T\hat{Y} = X\hat{\beta} &= PY \\ &= P(X\beta + \varepsilon) \\ &= X\beta + G^TP\varepsilon \\ &= \begin{pmatrix} \eta_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \eta_p + \gamma_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\left\|Y - X\hat{\beta}\right\|^2 &= \frac{1}{n}\left\|G^TY - G^TX\hat{\beta}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=p+1}^{n}\gamma_i^2 \end{aligned}$$

であり，

$$\left\|X\hat{\beta} - X\beta\right\|^2 = \left\|G^T X\hat{\beta} - G^T X\beta\right\|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \gamma_i^2$$

となる．以上から，

$$W_1 := n\hat{\sigma^2}/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=p+1}^{n} \gamma_i^2$$
$$W_2 = \left\|X\hat{\beta} - X\beta\right\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{p} \gamma_i^2$$

はそれぞれ独立に，自由度 $n-p$，p のカイ二乗分布に従う．

4.3

前問と同じ記号を用いて，$G^T\varepsilon' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')^T$ とおく．このとき，

$$Z - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \gamma_1' - \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p' - \gamma_p \\ \gamma_{p+1}' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$E\left[\left\|Z - \hat{Y}\right\| \,\middle|\, Y\right] = E\left[\sum_{i=1}^{p}(\gamma_i' - \gamma_i)^2 + \sum_{i=p+1}^{n} \gamma_i'^2 \mid \,\middle|\, Y\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{p} E\left[(\gamma_i' - \gamma_i)^2 \,\middle|\, Y\right] + \sum_{i=p+1}^{n} E\big[\gamma_i'^2\big]$$
$$= n\sigma^2 + W_2\sigma^2$$

となる．

4.4

　各値がどのような確率変数かはわかっているので，計算すると

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{\Delta(Z)-\Delta(Y)}{\hat{\sigma^2}}\right] &= E\left[\frac{n\sigma^2+W_2\sigma^2-W_1\sigma^1}{\sigma^2 W_1/n}\right] \\
&= \frac{n(n+p)}{n-p-2}-n \\
&= \frac{2n(p+1)}{n-p-2}
\end{aligned}
$$

であり，極限は

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{2n(p+1)}{n-p-2}=2(p+1)
$$

5

5.1

各 U_i は有限母集団 $\{z_1, \dots, z_n\}$ からの非復元抽出であるので，$E[U_i] = \bar{z}$ であり，$V[U_i] = \sigma_N^2$ である．よって，

$$E[\bar{U}] = \bar{z}$$

であり，有限母集団修正を考慮すると，

$$V[\bar{U}] = \frac{\sigma_N^2}{m} \frac{N-m}{N-1}$$

となる．

5.2

いま，$m\bar{U} + n\bar{V} = (m+n)\bar{z}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} D &= \bar{U} - \bar{V} \\ &= \bar{U} - \frac{(m+n)\bar{z} - m\bar{U}}{n} \\ &= \frac{m+n}{n}\left(\bar{U} - \bar{z}\right) \end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} (N-2)\tilde{S}^2 = \sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{U})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{V})^2 &= \sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{z})^2 - m(\bar{U} - \bar{z})^2 - n(\bar{V} - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{z})^2 - \frac{mn}{m+n}(\bar{U} - \bar{V})^2 \\ &= N\sigma_N^2 - \frac{mn}{m+n}D^2 \end{aligned}$$

となり，

$$N\sigma_N^2 - (N-2)\tilde{S}^2 = \frac{mn}{m+n}D^2$$

を得る．

5.3

いま,

$$\begin{aligned} E[D] &= 0 \\ V[D] &= \left(\frac{m+n}{n}\right)^2 V[\bar{U}] \\ &= \frac{(m+n)^2}{n^2} \cdot \frac{\sigma_N^2}{m} \cdot \frac{N-m}{N-1} \\ &= \frac{(m+n)^2}{(m+n-1)mn}\sigma_N^2 \end{aligned}$$

5.4

2. の結果と 3. の途中式より

$$\frac{D-E[D]}{\sqrt{V[D]}} = \frac{U-E[U]}{\sqrt{V[U]}}$$

が成り立ち，右辺は近似的に標準正規分布に従うので，左辺も近似的に標準正規分布に従う．

5.5

いま,

$$\begin{aligned} \tilde{T}^2 &= \frac{D^2}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\tilde{S}^2} \\ &= \frac{mn}{N} \cdot \frac{D^2}{\tilde{S}^2} \end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \tilde{W}^2 &= \frac{D^2}{V[D]} \\ &= \frac{D^2(N-1)mn}{N^2\sigma_N^2} \\ &= \frac{D^2(N-1)mn}{N(N-2)\tilde{S}^2 + mnD^2} \\ &= \frac{(N-1)mn}{N(N-2)\frac{\tilde{S}^2}{D^2} + mn} \\ &= \frac{(N-1)mn}{(N-2)\cdot\frac{mn}{\tilde{T}^2} + mn} \\ &= \frac{N-1}{N-2+\tilde{T}^2}\tilde{T}^2 \end{aligned}$$

よって，両辺の平方根を取れば良い．ここで，$\tilde{W}$ は近似的に標準正規分布に従うので，検定が可能である．また，関数 g は単調増加であるため，T を用いても同様の検定ができる．