密码数学基础：初等数论篇

刘仁章

北京原语科技有限公司

2023 年 9 月 16 日

目录

目录

整除关系

如果整数 $a \neq 0, b$ 满足“存在整数 c，使得 $b = ac$”，则称 a 整除 b，或者 b 能被 a 整除，记做 $a|b$。整除是一种二元关系。

- 自反性（反身性)：$a|a$。
- 反对称性。如果 $a|b$ 且 $b|a$，那么 $a = \pm b$。
- 传递性。如果 $a|b$，$b|c$，那么 $a|c$。

整除是一种偏序关系（集合的包含关系，小于等于关系等)。

- $1|a$，$b|0$ 对任意的整数 a 和 $b \neq 0$ 成立。
- 如果 $a|b$ 则称 a 是 b 的一个因子，b 是 a 的一个倍数。

带余除法

对于整数 a 和 $b>0$，存在唯一的整数 q 和 r 满足 $a=bq+r$ 且 $0\le r<b$。称 a 为被除数，b 是除数，q 为商，r 为余数。

- $b|a$ 当且仅当 $r=0$。

给定了除数 b，可以将所有的整数按照除以 b 所得到的余数进行划分。这就是我们下面所说的“同余”。

同余关系

如果整数 a 和 b 除以 m 后得到的余数相同，称 a 与 b 模 m 同余，记做 $a \equiv b \mod m$。同余也是一种二元关系。

- 自反性（反身性）：$a \equiv a \mod m$。
- 对称性。如果 $a \equiv b \mod m$，那么 $b \equiv a \mod m$。
- 传递性。如果 $a \equiv b \mod m$，$b \equiv c \mod m$，那么 $a \equiv c \mod m$。

同余关系是一种等价关系。于是，可以将所有的整数按模 m 是否同余划分为一些等价类，即模 m 的完全剩余系。

模 m 的完全剩余系

令 m 为大于 0 的整数。

- $\{0, \cdots, m-1\}$ 是模 m 的最小非负剩余。
- $\{0, \pm 1 \cdots, \pm \frac{m-1}{2}\}$（$m$ 为奇数），$\{0, \pm 1 \cdots, \pm \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}\}$（$m$ 为偶数）是模 m 的最小绝对剩余。
- 模 m 的完全剩余系包含 m 个元素，两两不同余，从而任意的整数模 m 都与完全剩余系中的唯一一个元素同余。

目录

素数

如果正整数 p 有且仅有 1 和它本身两个（正）因子，则称 p 是素数。

- 素数是数论的重要研究对象。
- 如果一个正整数有多于两个（正）因子，则称其为合数。
- 2 是唯一的偶素数，1 既不是素数也不是合数。
- 任何大于 1 的整数都有素因子。
- 素数有无穷个。

素数

素数有无穷多个。

- 假定素数只有有限多个，设为 $p_1, \cdots, p_k$。
- 考虑 $Q = p_1 \cdots p_k + 1$。
- $p_i \nmid Q$。
- Q 有异于 $p_1, \cdots, p_k$ 的素因子。
- 矛盾。于是素数有无穷个。

一些特殊的数

Dirichlet 证明了，对于互素的正整数 a, b，$an + b$ 包含无穷多个素数。有没有只生成素数的表达式?

- 费马数：$F_n = 2^{2^n} + 1$。
  - 如果考虑形如 $2^N + 1$ 的素数，可以推出 $N = 2^n$：如果 N 是奇素数，那么 3 是 $2^N + 1$ 的真因子。如果 N 包含奇因子 $1 < l < N$，那么 $(2^l + 1)|(2^N + 1)$。
  - $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ 都是素数。费马猜测，F_n 都是素数。然而，欧拉证明了 $641|F_5$。实际上目前已知的费马素数只有 $F_0 \sim F_4$，不知道是否有无穷多个费马素数，也不知道 $F_n(n > 4)$ 是否都是合数。
  - 费马素数与尺规作图问题紧密相关。正 N 边形可尺规作图当且仅当 N 可以写成 2 的任意幂次与任意多不同费马素数的乘积形式。

一些特殊的数

梅森数：$M_p = 2^p - 1$，p 为素数。

- 如果考虑形如 $2^N - 1$ 的素数，可以推出 N 必须为素数：如果 N 包含素因子 $2 \le l < N$，那么 $(2^l - 1)|(2^N - 1)$。
- 梅森数有一种高效的素性判定算法，称为“Lucas-Lehmer 判定法”。
- 通过梅森数找大素数（《2017 年最大的素数》，$M_{77232917}$）。目前还不知道是否存在无穷多个梅森素数。
- 梅森素数与偶完全数一一对应。
- 梅森素数可以用来做优化。如 ZUC 中就使用 M_{31}。
- $p = h2^u \pm f$，h 和 f 都很小。

算术基本定理

任何大于 1 的正整数都可以分解为素数幂的乘积。在不考虑顺序的情形下，该分解是唯一的：

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}, p_i\text{为素数}, e_i > 0$$

- 对任意的 n，要完全分解是困难的。
- 对于随机的 n，找到一个素因子相对是容易的 (如约 50% 的概率 n 是偶数，约 1/3 的概率 n 是 3 的倍数)。
- 随机选一个很大的整数，有大素因子的概率也是比较高的。

目录

最大公因子

两个不同时为 0 的整数 a, b 的最大公因子是同时整除 a, b 的最大整数，记做 (a, b)。规定 $(0, 0) = 0$。

- 如果 $(a, b) = 1$，则称 a, b 互素。
- 对于负数，定义 $(a, b) = (|a|, |b|)$。
- $(0, a) = |a|$。

最大公因子

- 如果 $(a, b) = d$，则 $(a/d, b/d) = 1$。
- $(a, b) = (a + bc, b)$。
- $(a, b) = \min\{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\}$。
- Bezout 定理：存在整数 m, n 使得 $ma + nb = (a, b)$。
    - 如果对 m, n 不加限制，则有无穷多组解 $(m_0 + kb, n_0 - ka), k = 0, 1, \cdots$。
    - 怎么求 $m_0, n_0, (a, b)$?

欧几里得算法

对于 $a \geq b > 0$,

- $r_0 = a, r_1 = b$。
- $r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2}$，$0 < r_{j+2} < r_{j+1}$，$j = 0, \cdots$。
- $r_{n+1} = 0$。
- 则 $r_n = (a, b)$。

欧几里得算法又叫辗转相除法，是第一个有记录的算法。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j ，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j ，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$， $s_0 = 1, t_0 = 0$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j ，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$， $s_0 = 1, t_0 = 0$。
- $b = r_1$， $s_1 = 0, t_1 = 1$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j ，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$， $s_0 = 1, t_0 = 0$。
- $b = r_1$， $s_1 = 0, t_1 = 1$。
- $r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2} \Rightarrow r_j - q_{j+1} r_{j+1} = r_{j+2}$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$，$s_0 = 1, t_0 = 0$。
- $b = r_1$，$s_1 = 0, t_1 = 1$。
- $r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2} \Rightarrow r_j - q_{j+1} r_{j+1} = r_{j+2}$。
- $(s_j a + t_j b) - q_{j+1}(s_{j+1} a + t_{j+1} b) = r_{j+2}$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j ，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$， $s_0 = 1, t_0 = 0$。
- $b = r_1$， $s_1 = 0, t_1 = 1$。
- $r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2} \Rightarrow r_j - q_{j+1} r_{j+1} = r_{j+2}$。
- $(s_j a + t_j b) - q_{j+1}(s_{j+1} a + t_{j+1} b) = r_{j+2}$。
- $(s_j - q_{j+1} s_{j+1}) a + (t_j - q_{j+1} t_{j+1}) b = r_{j+2}$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$，$s_0 = 1, t_0 = 0$。
- $b = r_1$，$s_1 = 0, t_1 = 1$。
- $r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2} \Rightarrow r_j - q_{j+1} r_{j+1} = r_{j+2}$。
- $(s_j a + t_j b) - q_{j+1}(s_{j+1} a + t_{j+1} b) = r_{j+2}$。
- $(s_j - q_{j+1} s_{j+1}) a + (t_j - q_{j+1} t_{j+1}) b = r_{j+2}$。
- $s_{j+2} = s_j - q_{j+1} s_{j+1}$，$t_{j+2} = t_j - q_{j+1} t_{j+1}$。

欧几里得算法

很多时候，需要求出 $m, n, (a, b)$ 使得 $ma + nb = (a, b)$。

- 扩展欧几里得算法
- 核心：计算 s_j, t_j ，满足 $s_j a + t_j b = r_j$。
- $a = r_0$， $s_0 = 1, t_0 = 0$。
- $b = r_1$， $s_1 = 0, t_1 = 1$。
- $r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2}$ 。
-
-
- $s_{j+2} = s_j - q_{j+1} s_{j+1}$， $t_{j+2} = t_j - q_{j+1} t_{j+1}$。

目录

整除和同余的一些性质

- 如果 $a|b, c|d$，那么 $ac|bd$。
- 如果 $a|bc$ 且 $(a,b)=1$，那么 $a|c$。
- 如果 $a \equiv b \mod m, c \equiv d \mod m$，那么 $a \circ c \equiv b \circ d \mod m$。
- 如果 $a \equiv b \mod m, d|m$，那么 $a \equiv b \mod d$。
- 如果 $a \equiv b \mod m$，那么 $ac \equiv bc \mod mc$，从而 $ac \equiv bc \mod m$。
- 如果 $ac \equiv bc \mod m$，那么 $a \equiv b \mod \frac{m}{(c,m)}$。当 $(c,m)=1$ 时，消去律才成立。
- 如果 $a \equiv b \mod m_1, a \equiv b \mod m_2$，那么 $a \equiv b \mod \frac{m_1 m_2}{(m_1,m_2)}$，实际上 $\frac{m_1 m_2}{(m_1,m_2)}$ 就是 m_1, m_2 的最小公倍数。
- 同余性质的证明很多时候可以通过定义进行：

$$a \equiv b \mod m \iff m|(a-b) \iff a = b + mk, k \in \mathbb{Z}$$

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = 1$。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = 1$。
- $\frac{a}{(a,m)}x + \frac{m}{(a,m)}y = \frac{b}{(a,m)}$，其中 $(\frac{a}{(a,m)}, \frac{m}{(a,m)}) = 1$。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = 1$。

- $ax_0 + my_0 = 1$，$ax + my = 0$。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = 1$。

- $ax_0 + my_0 = 1$，$ax + my = 0$。
- $a(bx_0) + m(by_0) = b$，$a(m) + m(-a) = 0$。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = 1$。

- $ax_0 + my_0 = 1$，$ax + my = 0$。
- $a(bx_0) + m(by_0) = b$，$a(m) + m(-a) = 0$。
- 从而 $(bx_0 + mk, by_0 - ak), k \in \mathbb{Z}$。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m)|b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = 1$。
- $\frac{a}{(a,m)}x + \frac{m}{(a,m)}y = \frac{b}{(a,m)}$，其中 $(\frac{a}{(a,m)}, \frac{m}{(a,m)}) = 1$。
- $ax_0 + my_0 = 1$，$ax + my = 0$。
- $a(bx_0) + m(by_0) = b$，$a(m) + m(-a) = 0$。
- 从而 $(bx_0 + mk, by_0 - ak), k \in \mathbb{Z}$。

丢番图方程

对于整数 a, b, m，考虑方程 $ax + my = b$ 的整数解。

- 当且仅当 $(a, m) | b$ 时，方程有整数解。
- 不失一般性，考虑 $ax + my = b$ 的整数解，其中 $(a, m) = d$。
- $\frac{a}{(a,m)}x + \frac{m}{(a,m)}y = \frac{b}{(a,m)}$，其中 $(\frac{a}{(a,m)}, \frac{m}{(a,m)}) = 1$。
- $ax_0 + my_0 = d$，$ax + my = 0$。
- $a((b/d)x_0) + m((b/d)y_0) = b/d$，$a(m/d) + m(-a/d) = 0$。
- 从而 $((b/d)x_0 + (m/d)k, (b/d)y_0 - (a/d)k), k \in \mathbb{Z}$。

线性同余方程

注意上面的丢番图方程中有：$x_0(\frac{a}{d}) + y_0(\frac{m}{d}) = 1$，$x = \frac{b}{d}x_0 + \frac{m}{d}k$。

线性同余方程方程 $ax \equiv b \mod m$ 可以转化为上面的丢番图方程。

- 令 $d = (a, m)$。则当且仅当 $d|b$ 时，线性同余方程有解，且其解为 $x \equiv \frac{b}{d}(\frac{a}{d})^{-1} \mod \frac{m}{d}$。（如果还写成模 m 的解呢？）
- 当 $d = (a, m) = 1$ 时，即大家熟知的 $x \equiv ba^{-1} \mod m$。

中国剩余定理

- 物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何?
- 三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百零五便得知。
- 孙子定理，秦九韶定理（《数书九章》大衍术），中国剩余定理

中国剩余定理

假设为 x，则问题为 $x \mod 3 = 2, x \mod 5 = 3, x \mod 7 = 2$

中国剩余定理

假设为 x，则问题为 $x \mod 3 = 2, x \mod 5 = 3, x \mod 7 = 2$

- 根据 $x \mod 3 = 2$ 得到 $x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$。

中国剩余定理

假设为 x，则问题为 $x \mod 3 = 2, x \mod 5 = 3, x \mod 7 = 2$

- 根据 $x \mod 3 = 2$ 得到 $x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$。
- 代入 $x \mod 5 = 3$ 得到 $3k \mod 5 = 1$，于是 $k \mod 5 = 2$。

中国剩余定理

假设为 x，则问题为 $x \mod 3 = 2, x \mod 5 = 3, x \mod 7 = 2$

- 根据 $x \mod 3 = 2$ 得到 $x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$。
- 代入 $x \mod 5 = 3$ 得到 $3k \mod 5 = 1$，于是 $k \mod 5 = 2$。
- $k = 5m + 2, m \in \mathbb{Z}$，$x = 15m + 8$。

中国剩余定理

假设为 x，则问题为 $x \mod 3 = 2, x \mod 5 = 3, x \mod 7 = 2$

- 根据 $x \mod 3 = 2$ 得到 $x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$。
- 代入 $x \mod 5 = 3$ 得到 $3k \mod 5 = 1$，于是 $k \mod 5 = 2$。
- $k = 5m + 2, m \in \mathbb{Z}$，$x = 15m + 8$。
- 代入 $x \mod 7 = 2$ 得到 $m \mod 7 = 1$。

中国剩余定理

假设为 x，则问题为 $x \mod 3 = 2, x \mod 5 = 3, x \mod 7 = 2$

- 根据 $x \mod 3 = 2$ 得到 $x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$。
- 代入 $x \mod 5 = 3$ 得到 $3k \mod 5 = 1$，于是 $k \mod 5 = 2$。
- $k = 5m + 2, m \in \mathbb{Z}$，$x = 15m + 8$。
- 代入 $x \mod 7 = 2$ 得到 $m \mod 7 = 1$。
- $m = 7n + 1, n \in \mathbb{Z}$，$x = 105n + 23, n \in \mathbb{Z}$。

中国剩余定理

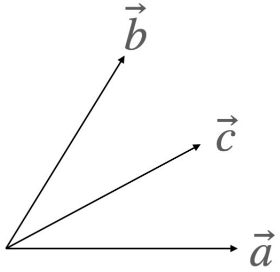
令 $m_1, \cdots, m_r$ 为两两互素的整数。则同余方程组

$$x \equiv a_i \mod m_i (1 \leq i \leq r)$$

在模 $M = m_1 \cdots m_r$ 意义下有唯一解。

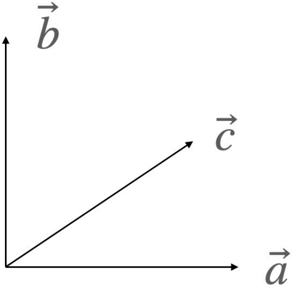
- 令 $M_i = \frac{M}{m_i}, u_i \equiv M_i^{-1} \mod m_i$，则 $x \equiv a_1(u_1 M_1) + \cdots + a_r(u_r M_r) \mod M$。
- 前例中，$u_1 M_1 = 70$，$u_2 M_2 = 21$，$u_3 M_3 = 15$，$M = 105$。

向量在一组基下的表示



$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}?$$

向量在一组基下的表示



$$\vec{c} = \frac{\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}\vec{a} + \frac{\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}\vec{b}$$

中国剩余定理

将整数 x 表示为向量

$$(x \mod m_1, \cdots, x \mod m_r) = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$$

关键找到一组“标准正交”基。

- 如果知道了 $\vec{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ 对应的整数，那么根据 $(a_1, \cdots, a_r) = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_r\vec{e}_r$，很容易求出 x。

中国剩余定理

实际上 $\vec{e}_i$ 对应的整数就是 $u_iM_i \mod M$。

- $\vec{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ 对应的整数 U_i 能被其他 $r-1$ 个模整除，从而也可以被它们的最小公倍数整除。
- 若干个两两互素的整数，其最小公倍数就是它们的乘积。于是 $U_i \equiv 0 \mod M_i$，假定 $U_i = kM_i, k \in \mathbb{Z}$。
- 根据 $U_i \mod m_i = 1$，知道 $kM_i \equiv 1 \mod m_i$，于是 $k \equiv u_i \mod m_i$。

中国剩余定理

- “正交”？独立性！
- 如果 m_i 不互素，会怎么样?
- 可能无解。
- 当有解的时候，在模 $m_1 \cdots m_r$ 的意义下有多个解。但是在模 $(m_1, \cdots, m_r)$ （最小公倍数）意义下是唯一的。

中国剩余定理

如果 m_i 不互素，如何计算?

- $x \equiv a_1 \mod m_1, x \equiv a_2 \mod m_2$ 有解当且仅当 $(m_1, m_2) | (a_1 - a_2)$。
- 当方程组有解时候，解在模 $[m_1, m_2]$（最小公倍数）意义下是唯一的。
- 将 $x = a_1 + k_1 m$ 代入到第二个式子中，用前述的解线性同余方程的方式求解。
- 课后习题中还给出了两个算法，有兴趣的可以了解一下。

高次同余方程的求解，将放在后面的内容中介绍。

一些特殊的同余式

- Fermat 小定理：对素数 p 和任意不被 p 整除的 a，$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ 成立。
- 欧拉定理：$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$，其中 $(a, m) = 1$，$\varphi(m)$（欧拉 phi 函数，欧拉 totient 函数）是指 $\{1, 2, \cdots, m-1\}$ 中与 m 互素的元素个数（实际上也就是模 m 可逆的元素个数)。
- Wilson 定理：若 p 是素数，$(p-1)! \equiv -1 \mod p$。其逆命题也成立。

欧拉函数 $\varphi(m)$

- 积（乘）性函数：$(m,n)=1$，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。
- 如果 $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$，
  $\varphi(n)=\varphi(p_1^{a_1})\cdots\varphi(p_r^{a_r})=n(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$。
- $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$。

目录

阶

- 对于 $(a,n)=1$，a 模 n 的阶是满足 $a^k \equiv 1 \mod n$ 的最小正整数 k，记做 $\mathsf{ord}_n(a)$。当 $(a,n)\neq 1$ 时，不存在整数 k，使得 $a^k \equiv 1 \mod n$。
- 因此，这里考虑的是与 n 互素的那些剩余类，也称模 n 的一个约化剩余系，其中包含 $\varphi(n)$ 个元素，常常记做 $\mathbb{Z}_n^*$。
- 由欧拉定理：$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$，$(a,n)=1$，$\mathsf{ord}_n(a)|\varphi(n)$。即 a 的阶是 $\varphi(n)$ 的一个因子。
- $a^i \equiv a^j \mod n \iff i \equiv j \mod \mathsf{ord}_n(a)$。

原根

a 的阶是 $\varphi(n)$ 的一个因子。如果 $\text{ord}_n(a)=\varphi(n)$，则称 a 是模 n 的一个（本）原根。换句话说，当模 n 的约化剩余系可以由一个元素通过乘法生成时候（乘法循环群），原根就是这个生成元。

- $(r,n)=1$，r 是模 n 的一个原根，当且仅当 $r,\cdots,r^{\varphi(n)}$ 形成模 n 的一个约化剩余系。
- $\text{ord}_n(a^t)=\frac{\text{ord}_n(a)}{(t,\text{ord}_n(a))}$。
- r 是模 n 的原根，即 $\text{ord}_n(r)=\varphi(n)$。那么 r^u 也是原根，当且仅当 $(u,\varphi(n))=1$。于是，如果模 n 有原根 r，那么模 n 有 $\varphi(\varphi(n))$ 个不同的原根。

原根

哪些模 n 有原根?

- 模 n 有原根当且仅当 $n = 2, 4, p^t, 2p^t$，其中 p 是奇素数。

原根

哪些模 n 有原根?

- 模 n 有原根当且仅当 $n=2,4,p^t,2p^t$，其中 p 是奇素数。
- 对上述的 n, 其分解是明显的。如果知道 $\varphi(n)$ 的分解，则原根的判定是简单的。

原根

哪些模 n 有原根?

- 模 n 有原根当且仅当 $n = 2, 4, p^t, 2p^t$，其中 p 是奇素数。
- 对上述的 n, 其分解是明显的。如果知道 $\varphi(n)$ 的分解，则原根的判定是简单的。
- 对 $n = p^t, 2p^t$，r 是模 n 的原根当且仅当对任意的素数 $q|\varphi(n)$，$r^{\frac{\varphi(n)}{q}} \not\equiv 1 \mod n$。

原根

哪些模 n 有原根?

- 模 n 有原根当且仅当 $n = 2, 4, p^t, 2p^t$，其中 p 是奇素数。
- 对上述的 n, 其分解是明显的。如果知道 $\varphi(n)$ 的分解，则原根的判定是简单的。
- 对 $n = p^t, 2p^t$， r 是模 n 的原根当且仅当对任意的素数 $q|\varphi(n)$, $r^{\frac{\varphi(n)}{q}} \neq 1 \mod n$。
- 1 和 3 分别是模 2 和 4 的原根。

原根

- 如果 r 是模奇素数 p 的原根，那么 r 或 $r+p$ 中必有模 p^2 的原根。

原根

- 如果 r 是模奇素数 p 的原根，那么 r 或 $r+p$ 中必有模 p^2 的原根。
- 如果 r 是模 p^2 的原根，p 为奇素数，那么，r 也是模 p^k 的原根，$k \geq 3$。

原根

- 如果 r 是模奇素数 p 的原根，那么 r 或 $r+p$ 中必有模 p^2 的原根。
- 如果 r 是模 p^2 的原根，p 为奇素数，那么，r 也是模 p^k 的原根，$k \geq 3$。
- 如果 r 是模 p^t 的原根，p 为奇素数，那么，$r+p^t, r$ 中为奇数的那个也是模 $2p^t$ 的原根。

原根

- 如果 r 是模奇素数 p 的原根，那么 r 或 $r+p$ 中必有模 p^2 的原根。
- 如果 r 是模 p^2 的原根，p 为奇素数，那么，r 也是模 p^k 的原根，$k \geq 3$。
- 如果 r 是模 p^t 的原根，p 为奇素数，那么，$r+p^t, r$ 中为奇数的那个也是模 $2p^t$ 的原根。
- $\mathbb{Z}_{p^t}^*$ 是模 p^t 的约化剩余系，由所有小于 p^t 且不能被 p 整除的正整数组成，其有原根。后面会证明有限域 $\mathbb{F}_{p^t}$ 中也有原根。两者的结构完全不同，千万不可混淆。

$\mathbb{Z}^*_{2^k}$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}^*_{2^k} = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$，$k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$，$k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。
- （数学归纳法）当 $k = 3$ 时，显然 $a^2 \equiv 1 \mod 8$，$\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2} = 2$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$，$k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。
- (数学归纳法) 当 $k = 3$ 时，显然 $a^2 \equiv 1 \mod 8$，$\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2} = 2$。
- 假设结论对 k_0 成立，即 $a^{\varphi(2^{k_0})/2} = a^{2^{k_0-2}} \equiv 1 \mod 2^{k_0}$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$，$k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。
- (数学归纳法）当 $k = 3$ 时，显然 $a^2 \equiv 1 \mod 8$，$\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2} = 2$。
- 假设结论对 k_0 成立，即 $a^{\varphi(2^{k_0})/2} = a^{2^{k_0-2}} \equiv 1 \mod 2^{k_0}$。
- 令 $a^{2^{k_0-2}} = 1 + d2^{k_0}$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。
- （数学归纳法）当 $k = 3$ 时，显然 $a^2 \equiv 1 \mod 8$，$\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2} = 2$。
- 假设结论对 k_0 成立，即 $a^{\varphi(2^{k_0})/2} = a^{2^{k_0-2}} \equiv 1 \mod 2^{k_0}$。
- 令 $a^{2^{k_0-2}} = 1 + d2^{k_0}$。
- 两边平方得到，$a^{2^{k_0-1}} = 1 + d2^{k_0+1} + d^2 2^{2k_0}$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$，$k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。
- (数学归纳法) 当 $k = 3$ 时，显然 $a^2 \equiv 1 \mod 8$，$\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2} = 2$。
- 假设结论对 k_0 成立，即 $a^{\varphi(2^{k_0})/2} = a^{2^{k_0-2}} \equiv 1 \mod 2^{k_0}$。
- 令 $a^{2^{k_0-2}} = 1 + d2^{k_0}$。
- 两边平方得到，$a^{2^{k_0-1}} = 1 + d2^{k_0+1} + d^2 2^{2k_0}$。
- 于是 $a^{\varphi(2^{k_0+1})/2} = a^{2^{k_0-1}} \equiv 1 \mod 2^{k_0+1}$，即结论对 $k_0 + 1$ 也成立。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$，$k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 对于奇数 a 和整数 $k \geq 3$，$a^{\varphi(2^k)/2} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$。
- (数学归纳法) 当 $k = 3$ 时，显然 $a^2 \equiv 1 \mod 8$，$\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2} = 2$。
- 假设结论对 k_0 成立，即 $a^{\varphi(2^{k_0})/2} = a^{2^{k_0-2}} \equiv 1 \mod 2^{k_0}$。
- 令 $a^{2^{k_0-2}} = 1 + d2^{k_0}$。
- 两边平方得到，$a^{2^{k_0-1}} = 1 + d2^{k_0+1} + d^2 2^{2k_0}$。
- 于是 $a^{\varphi(2^{k_0+1})/2} = a^{2^{k_0-1}} \equiv 1 \mod 2^{k_0+1}$，即结论对 $k_0 + 1$ 也成立。
- 从而模 $2^k (k \geq 3)$ 没有原根。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 但是模 $2^k (k \geq 3)$ 总存在阶为 $\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2}$ 的元素。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 但是模 $2^k(k \geq 3)$ 总存在阶为 $\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2}$ 的元素。
- 由于 3 是模 4 的原根，根据之前的定理，猜测 5 可能是这样的元素。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 但是模 $2^k (k \geq 3)$ 总存在阶为 $\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2}$ 的元素。
- 由于 3 是模 4 的原根，根据之前的定理，猜测 5 可能是这样的元素。
- 只需要证明 $5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \mod 2^{2^k}$ 。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 但是模 $2^k (k \geq 3)$ 总存在阶为 $\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2}$ 的元素。
- 由于 3 是模 4 的原根，根据之前的定理，猜测 5 可能是这样的元素。
- 只需要证明 $5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \mod 2^{2^k}$ 。
- 实际上可以通过数学归纳法证明 $5^{2^{k-3}} \equiv 1 + 2^{k-1} \mod 2^k$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- 但是模 $2^k (k \geq 3)$ 总存在阶为 $\varphi(2^k)/2 = 2^{k-2}$ 的元素。
- 由于 3 是模 4 的原根，根据之前的定理，猜测 5 可能是这样的元素。
- 只需要证明 $5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \mod 2^{2^k}$。
- 实际上可以通过数学归纳法证明 $5^{2^{k-3}} \equiv 1 + 2^{k-1} \mod 2^k$。
- 于是 $\mathrm{ord}_{2^k}(5) = 2^{k-2}$， $k \geq 3$。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- $\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\} = \{-1, 1\} \times \{5, 5^2, \cdots, 5^{2^{k-2}}\}$。
- 即任何一个小于 2^k 的奇数都可以写成 $(-1)^a 5^b \mod 2^k$ 的形式。

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- $\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\} = \{-1, 1\} \times \{5, 5^2, \cdots, 5^{2^{k-2}}\}$。
- 即任何一个小于 2^k 的奇数都可以写成 $(-1)^a 5^b \mod 2^k$ 的形式。
- SEAL 中用的是几?

$\mathbb{Z}_{2^k}^*$, $k \geq 3$ 的结构

$\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}$。

- $\mathbb{Z}_{2^k}^* = \{1, 3, \cdots, 2^k - 1\} = \{-1, 1\} \times \{5, 5^2, \cdots, 5^{2^{k-2}}\}$。
- 即任何一个小于 2^k 的奇数都可以写成 $(-1)^a 5^b \mod 2^k$ 的形式。
- SEAL 中用的是几?
- 答案是 3。请在课后的习题中证明 3 也具有上面的性质。

原根

设 p 是奇素数，利用模 p 的原根 g 的存在性，我们可以证明

$$S_n = \sum_{j=0}^{p-1} j^n \mod p \equiv \begin{cases} -1 & (p-1) \mid n \\ 0 & (p-1) \nmid n \end{cases}$$

- 进一步地，如果 $p-1 = 2^k r$，那么模 p 存在 2^k 次单位根 g^r。
- $u = g^r$ 也存在上述类似地指数和 (请仿照 FFT 的形式，猜测 u 满足哪些性质，并证明之)。
- 快速数论变换（NTT）的理论基础。

“模”：数学 v.s. 英语

数学中有很多“模”相关的词，对应的英语表达却有所不同，你能区分吗?

- modular
- module
- moduli
- modulus
- modulo
- mod.
- 模运算、模格、模数、模空间、模形式……

课后题

习题及课件：https://github.com/primihub/crypto-learning

谢谢