PGMAT0061/MATG17 - Técnicas Computacionais em Estatística "Simulação Estocástica"

Professor responsável: Paulo Henrique Ferreira da Silva

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

09 de Janeiro de 2024

Método de Monte Carlo

- Anos 40;

Método de Monte Carlo

- Cassino em Mônaco;

- <u>Referência:</u> Tanner (1996).

Integração numérica via simulação

- Integral simples:

Considere a integral definida por: $\theta = \int_0^1 h(x)dx$.

Podemos expressar θ por:

$$\theta = \mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int_0^1 h(x)dx, \qquad \text{para } \; X \sim \mathrm{U}(0,1)$$

Como sabemos, a média amostral é estimador da esperança matemática da função $h(X)$, $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$, em que X é v.a. com distribuição $\mathrm{U}(0,1)$.

Assim, podemos simular "m" valores da v.a. X e aproximar o valor da integral através da média amostral. Isto é,

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h(x_i)$$

Utilizando as propriedades do estimador $\widehat{\theta}$ (não viesado, consistente, mínima variância), temos que $\widehat{\theta}$ é uma forma ótima de aproximar θ, e à medida que m cresce, $\widehat{\theta}$ converge para θ.

Método de Monte Carlo

Algoritmo:

1. Gerar uma amostra de tamanho m de X: x_i, $i = 1, \ldots, m$;
2. Calcular $h(x_i)$;
3. Aproximar a integral por $\widehat{\theta} = \dfrac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h(x_i)$.

Exercício: Calcule a integral $\int_0^1 x^3 dx$ usando Monte Carlo e compare com o resultado exato (analítico).

Generalização:

$$\theta = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \int_a^b h(x) f(x)dx \quad \left(= \mathbb{E}\left[h(X)\right], \ \text{para } X \sim f(x) \right)$$

OBS.: Escolhemos uma $f(x)$ balizada por $[a, b]$. $\Longrightarrow$ ex.: $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

Método de Monte Carlo

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \int_a^b g(x)dx \\
&= (b-a)\int_a^b g(x)\cdot\frac{1}{b-a}dx \\
&= (b-a)\,\mathbb{E}\left[g(X)\right], \quad \text{em que } \; X \sim \mathrm{U}(a,b)
\end{aligned}
$$

ou:

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b (b-a)g(x)\cdot\frac{1}{b-a}dx \\
&= \int_a^b h(x)\cdot\frac{1}{b-a}dx \\
&= \mathbb{E}\left[h(X)\right], \quad \text{em que } \; X \sim \mathrm{U}(a,b)
\end{aligned}
$$

Método de Monte Carlo

Comentário: Fazer substituições (mudança de variáveis) a fim de obter $a = 0$ e $b = 1$.

Por exemplo:

- $y = \dfrac{x-a}{b-a}$ se $\int_a^b g(x)dx$
- $y = \dfrac{1}{x+1}$ se $\int_0^\infty g(x)dx$

$\Longrightarrow$ ver Ross (2023, p.41)

Método de Monte Carlo

- Integral múltipla:

Seja

$$\begin{aligned}\theta &= \int \cdots \int g(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k \\ &= \int \cdots \int \frac{g(x_1, \ldots, x_k)}{f(x_1, \ldots, x_k)} f(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k \\ &= \int \cdots \int h(x_1, \ldots, x_k) f(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k \quad \left(= \mathbb{E}\left[h(X_1, \ldots, X_k)\right] \right)\end{aligned}$$

Visto que $h(x_{1i}, \ldots, x_{ki})$, $i = 1, \ldots, m$, são v.a.'s i.i.d. com média θ, então estimamos θ por:

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h(x_{1i}, \ldots, x_{ki})$$

Algoritmo:

1. Gerar uma amostra $\#m$ de $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$;
2. Calcular $h(x_{1i}, \ldots, x_{ki})$;
3. Aproximar a integral por $\widehat{\theta} = \dfrac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h(x_{1i}, \ldots, x_{ki})$.

Precisão do método:

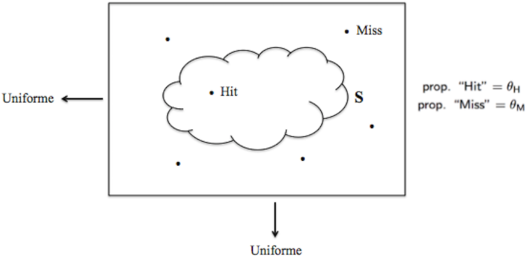
O erro padrão é um indicador da precisão do método. Para obtê-la, precisamos da variância da variável X. Utilizamos, portanto, o estimador usual:

$$s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \left(h(x_i) - \widehat{\theta} \right)^2$$

A precisão pode ser expressa na forma de um intervalo de confiança (IC):

$$\text{IC}\,[\theta; 95\%] = \widehat{\theta} \pm 1{,}96 \frac{s}{\sqrt{m}}$$

“Hit-or-miss” (Acerta ou Erra)



$$\Longrightarrow \quad \text{Área desejada } (\theta): \quad \theta_H \times \text{Área Total } (A)$$

Aproximamos a área da figura da seguinte maneira: enquadramos a mesma em um retângulo, geramos uniformes (independentes) em cada eixo, contando o número de vezes que o ponto gerado está dentro da figura (**S**). A área da figura, θ, é aproximada por $\widehat{\theta}$.

$$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_H \times A$$

em que:

$$\widehat{\theta}_H = \frac{\#\,\text{pontos dentro da figura}}{\#\,\text{pontos gerados}}$$

A precisão do método é determinada através da distribuição de Bernoulli.