PGMAT0061/MATG17 - Técnicas Computacionais em Estatística "Simulação Estocástica"

Professor responsável: Paulo Henrique Ferreira da Silva

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

19 de Novembro de 2024

Geradores Acoplados (ou Híbridos)

- Combinação de geradores;
- **Exemplo:**

$$x_i = (a_1\, x_{i-1} + c_1) \bmod m_1$$

$$y_i = (a_2\, y_{i-1} + c_2) \bmod m_2$$

$$z_i = (a_3\, z_{i-1} + c_3) \bmod m_3$$

Geradores Acoplados (ou Híbridos)

- Combinação de geradores;

- **Exemplo:**

$$x_i = (a_1\, x_{i-1} + c_1) \bmod m_1$$

salto *

$$y_i = (a_2\, y_{i-1} + c_2) \bmod m_2$$

salto *

$$z_i = (a_3\, z_{i-1} + c_3) \bmod m_3$$

* em um determinado momento.

Geradores Acoplados (ou Híbridos)

- **Consequência:** período maior do que em cada gerador componente.

$\Longrightarrow$ nem sempre!!!

Geradores Acoplados (ou Híbridos)

- **Exemplos:**
  - ✓ Super-Duper (Marsaglia, 1970s);
  - ✓ Wichmann-Hill (Wichmann e Hill, 1982 e errata, 1984);
  - ✓ KISS (Marsaglia, 1995);
  - ✓ L'Ecuyer (L'Ecuyer, 1988);
  - ✓ Etc.

Geradores Acoplados (ou Híbridos)

Gerador de Wichmann-Hill:

- É fácil de programar e possui boas propriedades de aleatoriedade;
- O gerador é:

$$x_i = (171\, x_{i-1}) \bmod 30269$$

$$y_i = (172\, y_{i-1}) \bmod 30307$$

$$z_i = (170\, z_{i-1}) \bmod 30323$$

e

$$u_i = \left(\frac{x_i}{30269} + \frac{y_i}{30307} + \frac{z_i}{30323}\right) \bmod 1$$

- Semente: (x_0, y_0, z_0);
- O gerador produz diretamente números u_i no intervalo $(0, 1)$.
- O período é da ordem de 10^{12}.

Geradores Acoplados (ou Híbridos)

Observações:

- Zeisel (1986) mostrou que o gerador Wichmann-Hill é igual a um gerador congruente multiplicativo único com módulo de 27.817.185.604.309.
- De Matteis e Pagnutti (1993) estudaram as autocorrelações de ordem superior em sequências do gerador Wichmann/Hill e descobriram que elas se comparavam favoravelmente com aquelas de outros bons geradores.
- Isto, juntamente com a facilidade de implementação, torna o gerador Wichmann/Hill útil para aplicações comuns.

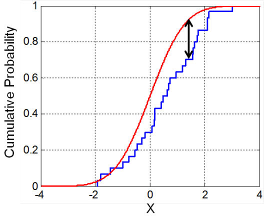
Testes de Uniformidade

$$H_0 : U_1, \ldots, U_n \text{ são iid U}(0, 1)$$

- Teste Qui-quadrado (Pearson, 1900):

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \overset{a}{\sim} \chi^2_{k-1} \qquad \text{sob } H_0$$

- Teste de Kolmogorov-Smirnov (Kolmogorov, 1933; Smirnov, 1936):



$$D_n = \sup_{0 \le u \le 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[0,u]}(x_i) - u \right|$$

- **Exemplo:** Robert e Casella (2010, p.43):

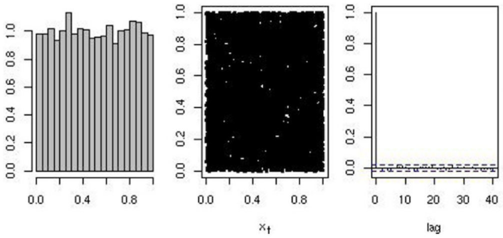


Fig. 2.1. Histogram *(left)*, pairwise plot *(center)*, and estimated autocorrelation function *(right)* of a sequence of 10^4 uniform random numbers generated by runif.

Códigos R:

```
> Nsim=10^4              #number of random numbers
> x=runif(Nsim)
> x1=x[-Nsim]            #vectors to plot
> x2=x[-1]               #adjacent pairs
> par(mfrow=c(1,3))
> hist(x)
> plot(x1,x2)
> acf(x)
```

1) **Método da inversa da f.d.a.** (ou **método da transformação inversa**):

- Geral;
- Muito útil;
- Mais fácil e mais rápido de ser implementado;
- Exato;
- Utiliza resultados da teoria da probabilidade;
- Não pode ser aplicado para gerar das distribuições Normal e Gama, por exemplo.

Distribuições Univariadas

Proposição:

Seja U uma variável aleatória (v.a.) $U(0,1)$. Para qualquer função de distribuição acumulada (f.d.a.) contínua F, a v.a. X definida por

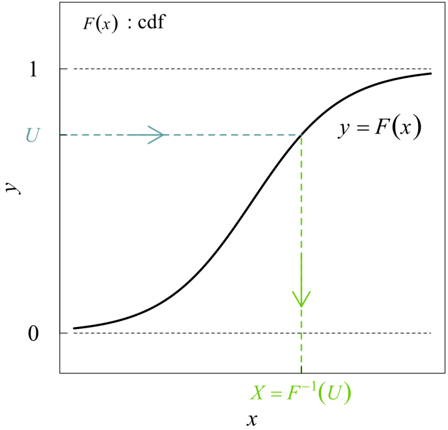
$$X = F^{-1}(U)$$

tem distribuição F. [$F^{-1}(u)$ é definido como aquele valor x tal que $F(x) = u$.]

Prova: Seja F_X a f.d.a. de $X = F^{-1}(U)$. Então,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(F^{-1}(U) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(F\left(F^{-1}(U)\right) \leq F(x)\right) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Distribuições Univariadas



Distribuições Univariadas

Exemplo: (*Distribuição Exponencial*). Gerar uma realização da v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\text{f.d.a.}: \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Se tomarmos $x = F_X^{-1}(u)$, então:

$$u = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \implies e^{-\lambda x} = 1 - u \implies -\lambda x = \log(1-u)$$
$$\implies x = -\frac{\log(1-u)}{\lambda} = F_X^{-1}(u)$$

Obs.: Se $U \sim \text{U}(0,1)$, então: $1 - U \sim \text{U}(0,1)$. Logo,

$$X = -\frac{\log(U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Algoritmo: Geração da distribuição $\text{Exp}(\lambda)$.

1. Gerar $U \sim \text{U}(0,1)$;
2. Calcular $X = F_X^{-1}(U) = -\dfrac{\log(U)}{\lambda}$;
3. Retornar X.

Distribuições Univariadas

Obs.: Se $X_j = -\log(U_j) \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(1)$, então:

1. $Y = 2\sum_{j=1}^{\nu} X_j \sim \chi^2_{2\nu}$, para $\nu \in \mathbb{N}^*$
2. $Y = \beta\sum_{j=1}^{\alpha} X_j \sim \text{G}(\alpha, \beta)$, para $\alpha \in \mathbb{N}^*$
3. $Y = \dfrac{\sum_{j=1}^{a} X_j}{\sum_{j=1}^{a+b} X_j} \sim \text{B}(a, b)$, para $a, b \in \mathbb{N}^*$

Exercício 1: Utilize o método da transformação inversa para gerar variáveis aleatórias seguindo as seguintes distribuições de probabilidade:

a) $\mathrm{U}(a, b)$;

b) Logística(μ, s);

c) Cauchy(x_0, γ).

Distribuições Univariadas

Outras distribuições que podem ser geradas pelo método da transformação inversa:

- Beta$(a, 1)$;
- Beta$(1, b)$;
- Pareto(a, b);
- Weibull(a, b);
- Etc.