PGMAT0061/MATG17 - Técnicas Computacionais em Estatística “Simulação Estocástica”

Professor responsável: Paulo Henrique Ferreira da Silva

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

05 de Dez de 2024

Distribuições Multivariadas

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^\top \quad \rightarrow \quad \text{f.d.p.: } f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

Como gerar $\boldsymbol{X}$?

Método da decomposição:

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \cdot \cdots \cdot f_{X_p|\boldsymbol{X}_{-p}}(x_p|x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$$

<u>Algoritmo:</u>

1) Gerar x_1 de $f_{X_1}(x_1)$;
2) Gerar x_2 de $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$;

   $\vdots$

p) Gerar x_p de $f_{X_p|\boldsymbol{X}_{-p}}(x_p|x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$.

Distribuições Multivariadas

Exercício: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, em que:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\top \qquad \text{e} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Construir um gerador para $\boldsymbol{X}$.

Métodos para Distribuições Multivariadas Específicas

O caso da distribuição Normal multivariada:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^\top \sim \mathrm{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \text{com:}$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^\top,$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \mathrm{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}, \quad \text{em que: } \mathrm{A}\mathrm{A}^\top = \Sigma \text{ e } \boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}_p(\mathbf{0}, \mathrm{I}_p).$$

Prova:

1. $\boldsymbol{X} \sim$ Normal, pois é uma combinação linear de Normais;
2. $\mathbb{E}[\boldsymbol{X}] = \mathbb{E}[\mathrm{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}] = \mathbb{E}[\mathrm{A}\boldsymbol{Z}] + \boldsymbol{\mu} = \mathrm{A}\,\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] + \boldsymbol{\mu} = \mathrm{A}\,\mathbf{0} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$,
   $\mathbb{V}\mathrm{ar}[\boldsymbol{X}] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathrm{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathrm{A}\boldsymbol{Z}] = \mathrm{A}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\boldsymbol{Z}]\,\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}\,\mathrm{I}_p\,\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top = \Sigma$.

Métodos para Distribuições Multivariadas Específicas

<u>Leitura recomendada:</u> Capítulo 6 do livro do Sheldon M. Ross (2023, 6ª ed.).

No R:

- *rmvnorm*(·, method=c("eigen","svd","chol")) do pacote `mvtnorm`;
- *mvrnorm*(·) do pacote `MASS`;
- *rmnorm*(·) do pacote `mnormt`;
- ...