PGMAT0061/MATG17 - Técnicas Computacionais em Estatística “Simulação Estocástica”

Professor responsável: Paulo Henrique Ferreira da Silva

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

12 de Dez de 2024

Método de Rejeição (MR)

O algoritmo de MR pode ser aperfeiçoado através da inclusão da função "squeezing". Considere $g_{\mathrm{I}}(x)$, $g_{\mathrm{I}}(x) \leq g(x)$ para $x \in \mathcal{D}$; $g_{\mathrm{I}}(x)$ é denominada função squeezing.

O algoritmo passa a ser:

i) Gerar x de uma distribuição com densidade proporcional a $g_{\mathrm{S}}(x)$ e u de uma distribuição $\mathrm{U}(0,1)$;

ii) Aceitar x se $u \leq \dfrac{g_{\mathrm{I}}(x)}{g_{\mathrm{S}}(x)}$;

iii) Senão, aceitar x se $u \leq \dfrac{g(x)}{g_{\mathrm{S}}(x)}$;

iv) Repetir (i)-(iii) até que o número desejado de valores x sejam aceitos.

Método de Rejeição (MR)

Exemplo: Considere $g(x)$ e $g_S(x)$ do exemplo anterior. Isto é,

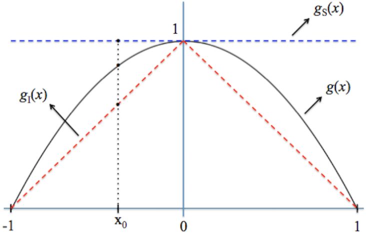
$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad g_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definimos:

$$g_I(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Procedimento:

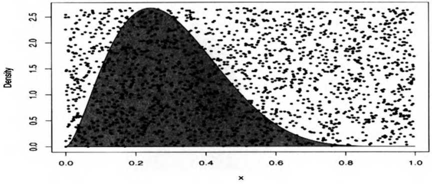
i) Gerar $x \sim \mathrm{U}(-1, 1)$ e $u \sim \mathrm{U}(0, 1)$;
ii) Aceitar x se $u \leq 1 - |x|$;
iii) Senão, aceitar x se $u < 1 - x^2$.



Método de Rejeição (MR)

- **Eficiência de MR:**

Ex.: Robert e Casella (2004, Fig. 2.3)



Uma forma de medir a eficiência de MR é através da proporção de aceitação.

$$\text{proporção de aceitação} = \frac{\#\ \text{valores aceitos}}{\#\ \text{valores gerados}}$$

em que "# valores aceitos" é obtido em uma amostra piloto.

Outra forma é através da probabilidade de aceitação.

$$\mathbb{P}(\text{“Aceitar”}) = \frac{\int_{\mathcal{D}} g(x)dx}{\int_{\mathcal{D}} g_S(x)dx}$$

Método de Rejeição (MR)

<u>Comentários sobre o MR:</u>

1) Podemos trabalhar com $g(x)$ (não necessitamos de $f(x)$);
2) É exato;
3) Pode ser difícil achar um bom envelope (que tenha boa eficiência).

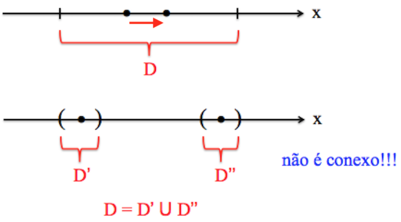
Método de Rejeição Adaptativo

1) **Método das Tangentes (MT; Gilks e Wild, 1992, Seção 2):**

Interesse: Quero gerar X cuja f.d.p. é $f(x)$ e disponho de $g(x) = c\, f(x)$.

Considere $g(x)$ uma função proporcional a uma f.d.p., $f(x)$, que atenda às restrições:

1. $g(x)$ tem um domínio $\mathcal{D}$ conexo;



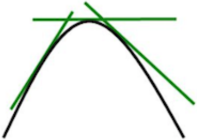
2. $g(x)$ é contínua e diferenciável para todo $x \in \mathcal{D}$;

Método de Rejeição Adaptativo - MT

3. $g(x)$ é log-côncava, ou seja, para $h(x) = \log(g(x))$, $h^{'}(x) = \dfrac{d\,h(x)}{dx}$ é monótona decrescente para x crescente em $\mathcal{D}$.

Função côncava:

Qualquer reta tangente só encontrará os valores da função em apenas um ponto. Quaisquer dois pontos da função, se traçarmos uma reta, esta reta não se interceptará à função além dos dois pontos.

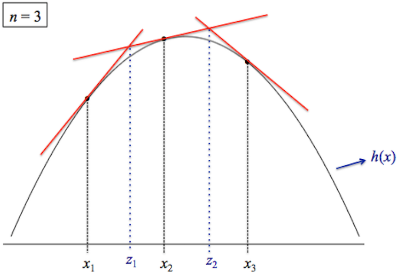


Método de Rejeição Adaptativo - MT

Considere $T_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ valores iniciais das abcissas escolhidas no domínio $\mathcal{D}$, tais que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Uma função envelope para $h(x)$ é definida pelos segmentos das tangentes a $h(x)$ nos pontos $(x_i, h(x_i))$, para $i = 1, \ldots, n$.

As abcissas dos pontos de intersecção dos segmentos que formam o envelope para $h(x)$ são dadas por:

$$z_i = \frac{h(x_{i+1}) - h(x_i) - x_{i+1}h^{'}(x_{i+1}) + x_i h^{'}(x_i)}{h^{'}(x_i) - h^{'}(x_{i+1})}, \quad \text{para} \;\; i = 1, \ldots, n-1$$



A função envelope para $h(x)$ é dada por:

$$u_n(x) = h(x_i) + (x - x_i)h'(x_i), \quad \text{para } x \in [z_{i-1}, z_i] \text{ e } i = 1, \ldots, n$$

em que z_0 é o limite inferior de $\mathcal{D}$ (ou $-\infty$ se $\mathcal{D}$ não for limitado inferiormente) e z_n é o limite superior de $\mathcal{D}$ (ou ∞ se $\mathcal{D}$ não for limitado superiormente).

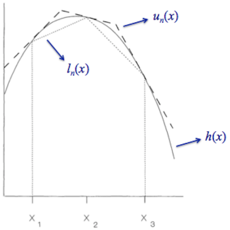
A função envelope para $g(x)$ é dada por: $g_S(x) = e^{u_n(x)}$.

A função "squeezing" para $h(x)$ é definida pela sequência de segmentos de retas, cordas, que interceptam $h(x)$ nos pontos $(x_i, h(x_i))$.

$$l_n(x) = \frac{(x_{i+1} - x)h(x_i) + (x - x_i)h(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}, \quad \text{para } x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ e } i = 1, \ldots, n-1$$

OBS.: Para $x < x_1$ ou $x > x_n$, definimos: $l_n(x) = -\infty$.

Para $g(x)$, a função "squeezing" é dada por: $g_l(x) = e^{l_n(x)}$.



Método de Rejeição Adaptativo - MT

Algoritmo - MT:

i) Escolher $T_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

ii) Calcular $g_I(x)$ e $g_S(x)$ como descrito anteriormente;

iii) Gerar x^* com f.d.p. proporcional a $g_S(x)$ e $u \sim U(0,1)$;

iv) Aceitar x^* se $u \leq \dfrac{g_I(x^*)}{g_S(x^*)} = \exp\{l_n(x^*) - u_n(x^*)\}$;

v) Senão, aceitar x^* se $u \leq \dfrac{g(x^*)}{g_S(x^*)} = \exp\{h(x^*) - u_n(x^*)\}$;

vi) Em caso de rejeição, incluir x^* em T_n e retornar a (ii);
"Atualização": $T_{n+1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, com $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1}$

vii) Repetir (ii)-(vi) até que a quantidade de valores gerados seja igual ao número desejado.

Seleção dos pontos iniciais:

1. Se $\mathcal{D}$ é não limitado à esquerda, x_1 deve ser tal que $h'(x_1) > 0$;
2. Se $\mathcal{D}$ é não limitado à direita, x_n deve ser tal que $h'(x_n) < 0$.

2) **Método das Secantes (MS; Gilks, Best e Tan, 1995, Seção 3.2):**

Considere $g(x)$ uma função proporcional a uma f.d.p. log-côncava, ou seja,

$$\log(g(a)) - 2\log(g(b)) + \log(g(c)) < 0$$

$\forall\, a, b, c \in \mathcal{D}$ (domínio) e $a < b < c$.

Considere os valores iniciais $T_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ escolhidos em $\mathcal{D}$, tais que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. A função envelope para $h(x) = \log(g(x))$ é definida como sendo a sequência de segmentos de retas, dadas por:

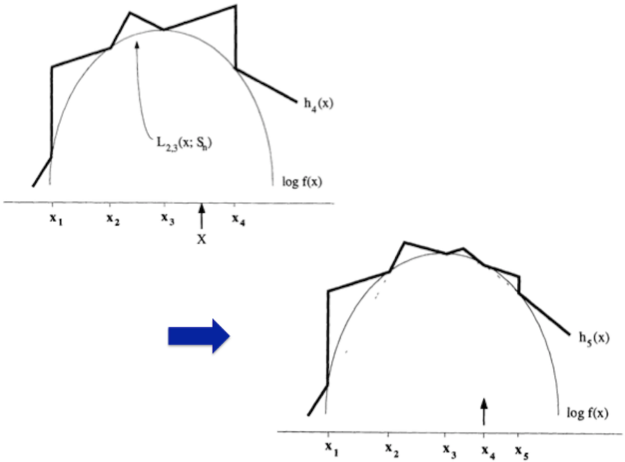
$$u_n(x) = \min\{L_{i-1,i}(x), L_{i+1,i+2}(x)\}, \quad \text{para } x_i \leq x < x_{i+1}$$

em que $L_{i,j}(x)$ é a linha que passa pelos pontos $(x_i, h(x_i))$ e $\left(x_j, h(x_j)\right)$, para $1 \leq i < j \leq n$.

OBS.: Na expressão acima, quando b não está definido, $\min\{a, b\} = \min\{b, a\} = a$.

Método de Rejeição Adaptativo - MS

Exemplo: $n = 4$



Método de Rejeição Adaptativo - MS

Montada a função envelope $u_n(x)$ e a função "squeezing" $l_n(x) = L_{i,i+1}(x)$ para $x_i \leq x < x_{i+1}$, aplicamos o algoritmo MT.

A geração do algoritmo MS é feita através do método da inversa da f.d.a. (como no caso do MT).

OBS.: MS não necessita do cálculo de derivadas.

Seleção dos pontos iniciais:

1. Se $\mathcal{D}$ é não limitado à esquerda, x_1 deve ser tal que $L_{1,2}(x)$ tem inclinação positiva;
2. Se $\mathcal{D}$ é não limitado à direita, x_n deve ser tal que $L_{n-1,n}(x)$ tem inclinação negativa.

Método de Rejeição Adaptativo - MS

Comentários:

1. MS é exato;
2. MS não necessita de $h^{'}(x)$;
3. Embora ambos, MT e MS, exigem log-concavidade, o MS não exige continuidade nas derivadas $h^{'}(x)$.