Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Lista 2 de Exercícios de PGMAT0061

1. Seja X uma variável aleatória exponencial com média 1. Dê um algoritmo eficiente para simular uma variável aleatória cuja distribuição é a distribuição condicional de X dado que $X < 0{,}05$. Ou seja, sua função de densidade é:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-0{,}05}}\ , \quad 0 < x < 0{,}05.$$

Gere 1000 valores dessa distribuição condicional e use-os para estimar $E\ [X \mid X < 0{,}05]$. Então, determine o valor exato de $E\ [X \mid X < 0{,}05]$.

2. Use simulação para aproximar as seguintes integrais. Compare sua estimativa com a resposta exata, se conhecida.

a) $\int_0^1 exp\ \{e^x\}\ dx$

b) $\int_{-2}^{2} e^{x+x^2}\ dx$

c) $\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}\ dx$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$

e) $\int_0^\infty \int_0^x e^{-(x+y)}\ dy\ dx$

3. Use simulação para aproximar $Cov(U, e^U)$, em que U é uniforme em (0,1). Compare sua aproximação com a resposta exata.

4. Considere a integral:

$$\int_0^\infty x^2\ sen(\pi x)\ exp\{-\tfrac{x}{2}\}dx.$$

a) Use o método de Monte Carlo ordinário (*crude Monte Carlo method*) para estimar a integral.

b) Obtenha um intervalo de confiança aproximado a 95% para o valor da integral baseado no método utilizado em (a).

5. Escreva um algoritmo para calcular a média da distribuição exponencial com parâmetro 1, usando o método de Monte Carlo. Como podemos calcular probabilidades dessa distribuição usando tal método?

6. Considere o modelo Poisson-exponencial, proposto por Cancho *et al.* (2011), cuja função de densidade é dada por:

$$f(y \mid \theta, \lambda) = \frac{\theta\lambda e^{-\lambda y - \theta e^{-\lambda y}}}{1 - e^{-\theta}}, \quad y \geq 0, \ \theta > 0, \ \lambda > 0.$$

Gere uma amostra aleatória de tamanho n dessa distribuição (fixe valores para n, θ e λ). Construa intervalos de 95% de confiança assintóticos (i.e. usando a distribuição normal) para os parâmetros θ e λ do modelo acima. Para isso, use a função *optim*(.) do *software* R, bem como a matriz hessiana aproximada resultante da aplicação do método Quase-Newton BFGS (ou L-BFGS-B). Ou seja, use os argumentos "method = BFGS" e "hessian = TRUE" dessa função.

Referência

Cancho, V.G.; Louzada-Neto, F.; Barriga, G.D.C. (2011). The Poisson-exponential lifetime distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(1), 677-686.