Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Lista 1 de Exercícios de PGMAT0061

1) Escreva um programa em R para implementar o gerador RANDU, outrora popular em máquinas IBM, e baseado na recursão:

$$x_n = 65539 x_{n-1} \bmod 2^{31}.$$

2) Com $x_1 = 23, x_2 = 66$ e:

$$x_n = 3x_{n-1} + 5x_{n-2} \bmod 100,\ n \geq 3,$$

encontre os 14 primeiros valores da sequência $u_n = x_n/100,\ n \geq 1$ (*text's random number sequence*).

3) Escreva um programa em R para gerar *n* valores da função massa de probabilidade:

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{3},\ p_2 = P(X = 2) = \frac{2}{3}.$$

a) Considere *n* = 100, rode o programa, e determine a proporção de valores que são iguais a 1.

b) Repita (a) para *n* = 1000.

c) Repita (b) para *n* = 10000.

4) Mostre que se $U \sim Uniforme(0,1)$, então:

a) $1 - U \sim Uniforme(0,1)$.

b) $-\frac{1}{\lambda}\log(U) \sim Exp(\lambda)$.

5) Escreva um algoritmo de simulação para gerar valores da variável aleatória *X* que tem densidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2b}\exp\left\{-\frac{|x-a|}{b}\right\},\ \ -\infty < x < \infty.$$

A distribuição de *X* é denominada de Laplace, i.e. $X \sim Laplace(a, b)$.

6) Um time de futebol irá disputar 19 partidas em um torneio de classificação.

a) Supondo que é esperado o seguinte desempenho em cada jogo: 50% de chance de vitória, 30% de empate e 20% de derrota, simule sua possível campanha usando o *software* R.

b) Para a situação descrita em (a), simule 15 possíveis campanhas para o time, e estude a variável X = *número de pontos obtidos* (vitória = 3, empate = 1 e derrota = 0). Use novamente o *software* R.

7) Mostre como gerar uma variável aleatória cuja função de distribuição é:

$$F(x) = \frac{x^2+x}{2},\ 0 \leq x \leq 1,$$

usando:

a) o método da transformação inversa.

b) o método da rejeição.

Qual método você acha que é o melhor para este exemplo? Explique brevemente sua resposta.

8) Dê um algoritmo que gera uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = 30(x^2 - 2x^3 + x^4), 0 \leq x \leq 1.$$

Discuta sobre a eficiência desta aproximação.

9) A distribuição Weibull é frequentemente utilizada em estudos de confiabilidade. Se $X \sim Exp(1)$, então $Y = X^{1/\alpha}$ tem distribuição Weibull com parâmetros α e 1. Escreva um algoritmo para gerar valores desta distribuição.

10) Mostre que, se U_1 e U_2 são independentes e identicamente distribuídas da $Uniforme(0,1)$, então as variáveis aleatórias:

$$X_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

$$X_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$

são independentes e identicamente distribuídas $Normal(0,1)$.

11) Verifique, usando o *software* R, que a seguinte versão do algoritmo Box-Muller produz uma variável aleatória $Normal(0,1)$ e compare seu tempo de execução com o da versão original (vista em sala de aula):

Algoritmo Box-Muller:

i) Gerar $Y_1, Y_2 \sim Exp(1)$*;*

ii) Se $Y_2 > (1 - Y_1)^2/2$, *então gerar* $U \sim Uniforme(0,1)$ *e fazer:*

$$X = \begin{cases} Y_1 \; se \; U \leq 0.5 \\ -Y_1 \; se \; U > 0.5 \end{cases}$$

12) Dê um algoritmo para gerar variáveis aleatórias X_1, X_2, X_3 tendo uma distribuição normal multivariada com médias $E(X_i) = i, i = 1, 2, 3$, e matriz de covariâncias:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Escreva também um programa em R e gere *n* = 100 valores desta distribuição.