DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA – UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Prova de PGMAT0061/MATG17 – Técnicas Computacionais em Estatística – 04/02/2025
Professor: Paulo Henrique Ferreira da Silva

OBS.: Entregar até o dia 07/02/2025 (AVA Moodle).

Questão 1. Escreva um algoritmo de simulação para gerar valores:

a) da variável aleatória *X* com função massa de probabilidade dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{\theta(1-e^{\alpha})}\alpha^x T_x(\theta)}{x!}, \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

em que $T_x(\theta) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^x\theta^k}{k!}$ são os polinômios de Touchard.

A distribuição de *X*, proposta por Fredy Castellares e coautores em 2020, é denominada de distribuição *Bell-Touchard*.

Referência: Castellares F.; Lemonte, A.J.; Moreno-Arenas, G. (2020). On the two-parameter Bell–Touchard discrete distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **49**(19), 4834-4852. https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1609515

b) da variável aleatória *Y* com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta e^{\alpha-\alpha/y}\left(1-e^{\alpha-\alpha/y}\right)^{\beta-1}}{y^2}, \qquad y \in (0,1).$$

A distribuição de *Y*, chamada de *Kumaraswamy modificada*, foi proposta por Murilo Sagrillo e coautores em 2021.

Referência: Sagrillo, M.; Guerra, R.R.; Bayer, F.M. (2021). Modified Kumaraswamy distributions for double bounded hydro-environmental data. *Journal of Hydrology*, **603**(C), 127021.
https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127021

Questão 2. Use o método de Monte Carlo para estimar a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2}\int_{0}^{\infty} y\cos(\pi y)e^{-x^2y}e^{-yz}\,dz\,dy\,dx.$$

Mediante o uso do *software* R (ou Python), obtenha uma estimativa pontual e intervalar (a 98% de confiança) para o valor dessa integral.

Questão 3. Considere um experimento que é realizado em 3 etapas como segue:

Etapa 1. *Lança-se uma moeda viciada, de forma que as caras são duas vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas.*
Etapa 2. *Se sair cara, então retira-se uma bola ao acaso de uma urna contendo três bolas amarelas e duas azuis. Caso contrário, retira-se uma bola ao acaso de uma urna contendo duas bolas amarelas e quatro azuis.*
Etapa 3. *Se sair bola amarela, então gera-se um valor da distribuição Poisson com parâmetro* $\lambda = 2$ *truncada no zero. Caso contrário, gera-se da distribuição logística bivariada tipo I (Gumbel, 1961) com parâmetros de locação* $l_1 = 5$ *e* $l_2 = 7$*, e parâmetros de escala* $s_1 = 1$ *e* $s_2 = \exp(1)$*, e soma-se os valores do par obtido.*

Escreva um programa em R (ou Python) para simular 25 possíveis resultados desse experimento.

Questão 4. Seja $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$, use simulação para aproximar $\text{Corr}\left(U, \sqrt{1-U^2}\right)$.