# 수리통계 II HW1 2020-15709 나승찬

1.1. 우선 $\mu$의 MME $\hat{m}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\mu}$

또한, $Var(X_1) = \sigma^2 = E(X_1^2) - \{E(X_1)\}^2$

이므로 $\hat{\sigma}^{2\,MME} = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2$ 이다.

이제 $E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{1}{\sigma^3}E[X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3]$

$= \frac{1}{\sigma^3}(m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3)$ 이므로

- 왜도의 MME $\hat{\rho}_3^{MME} = \dfrac{\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3}{(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 - 3\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{X_i^3 - 3X_i^2\bar{X} + 3X_i\bar{X}^2 - \bar{X}^3\}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

한편, $E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = \dfrac{E[X^4 - 4\mu X^3 + 6\mu^2 X^2 - 4\mu^3 X + \mu^4]}{\sigma^4}$

- 첨예도의 MME $\hat{\rho}_4^{MME} = \frac{1}{\sigma^4}(\hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_1^2\hat{m}_2 - 3\hat{m}_1^4) - 3$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{X_i^4 - 4X_i^3\bar{X} + 6X_i^2\bar{X}^2 - 4X_i\bar{X}^3 + \bar{X}^4\}}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right\}^2} - 3$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)^2} - 3$$

1.2. 감마분포 $Gamma(\alpha, \beta)$를 따르는 확률변수 $X_1$에 대해 $pdf_{X_1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} I_{(0,\infty)}(x)$

이고 $EX_1 = \alpha\beta$, $Var(X_1) = \alpha\beta^2$ 이다.

(a) $EX_1 = 2\alpha$이므로 $\alpha = \frac{m_1}{2}$이다.

따라서 $\hat{\alpha}^{MME} = \frac{\hat{m}_1}{2} = \frac{\bar{X}}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(b) $EX_1 = 2\beta$이므로 $\beta = \frac{m_1}{2}$이다.

즉 $\hat{\beta}^{MME} = \frac{\hat{m}_1}{2} = \frac{\bar{X}}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(c) $EX_1 = \alpha\beta$, $Var(X_1) = \alpha\beta^2$이므로

$EX_1^2 = (EX_1)^2 + Var(X_1) = (\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$

즉 $m_1 = \alpha\beta$, $m_2 = \alpha\beta^2(\alpha+1) = m_1^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$이다.

$m_2$에 대한 식을 $\alpha$에 대해 정리하면

$\alpha = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}$이고, 이를 $m_1 = \alpha\beta$에 대입해 정리하면

$\beta = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}$이다.

따라서 $m_1, m_2$의 함수인 $\alpha, \beta$의 적률이용추정량은

$$\hat{\alpha}^{MME} = \frac{(\bar{X})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}^{MME} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

## 1.3.

우선 $E_\alpha(\log X_1) = \int_0^\infty \log x \cdot \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \cdot I_{(0,\infty)}(x)\,dx$
에서 $x^\alpha = z$로 치환적분하면 $\alpha x^{\alpha-1}dx = dz$이고
$\log x = \frac{1}{\alpha}\log z$이므로 $\int_0^\infty \log x\cdot \alpha x^{\alpha-1}e^{-x^\alpha}dx$
$=\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\log z\cdot e^{-z}dz$이다.

다음으로, $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}dx$이고 로그감마함수 $\Psi(\alpha)$
의 일차도함수를 구하면 $\frac{d}{d\alpha}\log\Gamma(\alpha) = \frac{\frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$
에서 $\frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\right)dx$ (라이프니츠 정리)
$=\int_0^\infty (\log x)\cdot e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}dx$이다.
$\alpha=1$을 대입하면 $\Gamma(\alpha)=1$, $\frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha)\Big|_{\alpha=1} =$
$\int_0^\infty (\log x)\cdot e^{-x}dx$이다. 즉 $E_\alpha(\log X_1)$의 값은
$\frac{d}{d\alpha}\Psi(\alpha)\Big|_{\alpha=1}$의 값을 계산하여 구할 수 있고, 그
관계식은 $E_\alpha(\log X_1)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty(\log z)e^{-z}dz = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\Psi(\alpha)\Big|_{\alpha=1}$이다.
(이 값은 약 $-0.577$로 알려져 있음.)
이제 $\hat\alpha^{MME}$를 구하자. $\alpha = -\frac{0.577}{E_\alpha(\log X_1)}$임을 앞의
과정에 의해 확인했으므로 $\log X_i$의 적률의 함수로
이루어진 $\alpha$의 MME $\hat\alpha^{MME} = -\frac{0.577}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i}$이다.

## 1.4.

(a)

(MME) $E(X_1)=\int_0^\theta \frac{3}{\theta^3}x^3dx = \left[\frac{3}{4\theta^3}x^4\right]_0^\theta = \frac{3}{4}\theta = m_1$

$\theta = \frac{4}{3} m_1$으로 표현되므로 $\theta$의 적률이용추정량
$\hat\theta^{MME} = \frac{4}{3}\bar X = \frac{4}{3}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(MLE) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{3^n}{\theta^{3n}}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right) I_{[0,\theta]}(x)$

(지표함수를 $\theta$로 표현) $=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)\frac{3^n}{\theta^{3n}}I_{(x_{(n)},\infty)}(\theta)$

$l(\theta)=\log L(\theta) = n\log 3 + 2\sum x_i - 3n\log\theta$ $(\theta > x_{(n)})$
이고, $\dot l(\theta) = -\frac{3n}{\theta}<0$이므로 $\theta = x_{(n)}$을 살펴보자.
이때 $l$이 감소하는($\dot l<0$) 연속함수이므로 $\theta\in[x_{(n)},\infty)$
에서 $l(\theta)$가 최대가 되는 $\theta$는 $x_{(n)}$이다.
$\therefore \hat\theta^{MLE}=X_{(n)}$

(b)

(MME) $E(X_1)=\int_\theta^\infty 2\theta^2 x^{-2}dx = \left[-\frac{2\theta^2}{x}\right]_\theta^\infty = 2\theta = m_1$

$\theta=\frac{m_1}{2}$이므로 $\hat\theta^{MME}=\frac{\bar X}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(MLE) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} 2\theta^2 x_i^{-3} I_{[\theta,\infty)}(x)$
$= 2^n\theta^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^3}\right) I_{(0,x_{(1)}]}(\theta)$이다.

$\dot L(\theta) = 2n\cdot 2^n\cdot\theta^{2n-1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3}\right) > 0$ $(0<\theta<x_{(1)})$
이므로 open interval에서 극값이 없고 증가하는 연속함수,
$\theta=x_{(1)}$을 살펴보면 된다.
$\therefore \hat\theta^{MLE}=X_{(1)}$

2. $X_1 \sim Beta(\alpha, 1) \Rightarrow pdf_{X_1}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)} x^{\alpha-1}(1-x)^{1-1} I_{(0,1)}(x) = \alpha x^{\alpha-1} I_{(0,1)}(x)$

(a) $m_1 = E(X_1) = \int_0^1 x \cdot pdf_{X_1}(x)dx = \int_0^1 \alpha x^{\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha+1}$

$\therefore \alpha = \frac{m_1}{1-m_1}$ 이고, $\hat{\alpha}^{MME} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

(b) CLT에 의해 $\overline{X}$와 $m_1 = E(X_1)$에 대해 다음이 성립한다.

$\sqrt{n}(\overline{X} - m_1) \xrightarrow{d} N(0, Var(X_1))$ - (i)

이때 $E(X_1^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \alpha x^{\alpha-1} dx = \frac{\alpha}{\alpha+2}$

$Var(X_1) = E(X_1^2) - \{E(X_1)\}^2 = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$

이때 $g(x) := \frac{x}{1-x}$로 두면 $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 이고(미분가능)

$g'(m_1) > 0$이다. 따라서 (i)에 delta method를 적용하면

$\sqrt{n}(g(\overline{X}) - g(m_1)) \xrightarrow{d} g'(m_1) N\left(0, \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}\right)$

이고, 이를 정리하면

$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} - \frac{m_1}{1-m_1}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)(1-m_1)^2}\right)$

$\sqrt{n}(\hat{\alpha}^{MME} - \alpha) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha}{\alpha+2}\right)$

(c) $\hat{\alpha}$의 $100(1-b)\%$ $(b \in (0,1))$ 신뢰구간을 구하자.

(b)의 결과에 따라 $\hat{\alpha}^{MME}$의 극한분포가 정규분포이므로

$z_{\frac{b}{2}}, z_{1-\frac{b}{2}}$를 활용. CI의 양 끝점은

$\left(\hat{\alpha}^{MME} + z_{1-\frac{b}{2}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{n(\alpha+2)}}, \hat{\alpha}^{MME} + z_{\frac{b}{2}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{n(\alpha+2)}}\right)$

가 된다.

---

(c) of (3)

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$의 limiting distribution이 정규분포이므로 $100(1-b)\%$ $(b \in (0,1))$ 신뢰구간을 구하라.

($\hat{\theta}_1^{MME}$) CI의 양 끝점은

$\left(\hat{\theta}_1^{MME} + z_{1-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{15}(\theta_2-\theta_1)^2}, \hat{\theta}_1^{MME} + z_{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15n}(\theta_2-\theta_1)^2}\right)$

($\hat{\theta}_2^{MME}$) CI의 양 끝점은

$\left(\hat{\theta}_2^{MME} + z_{1-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2}{15n}}, \hat{\theta}_2^{MME} + z_{\frac{b}{2}} \sqrt{\frac{8\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2}{15n}}\right)$

3.

(a) $EX_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{x\,dx}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, $EX_1^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{x^2 dx}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2}{3}$

$\therefore m_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \Leftrightarrow 2m_1 = \theta_1 + \theta_2$

$3m_2 = \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2 = (\theta_1+\theta_2)^2 - \theta_1\theta_2$

$\Leftrightarrow \theta_1\theta_2 = 4m_1^2 - 3m_2 = m_1^2 - 3\gamma^2$.

이차방정식의 근과 계수의 관계와 $\theta_1 < \theta_2$에 의해

$\theta_1 = m_1 - \sqrt{3}\gamma$, $\theta_2 = m_1 + \sqrt{3}\gamma$ 이다.

$\gamma = \sqrt{m_2 - m_1^2}$ 이므로 이를 $m_1, m_2$에 관해 정리하면

$\theta_1 = m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}$, $\theta_2 = m_1 + \sqrt{3(m_2 + m_1^2)}$

$\hat{\theta}_1^{MME} = \overline{X} - \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$, $\hat{\theta}_2^{MME} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

(b) $g_1(m_1, m_2) := m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}$, $g_2(m_1, m_2) := m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}$

으로 두면 $g_1, g_2$는 모두 $C_1$-함수이고 $m_4$가 존재(아래 참고)하므로 교재의 정리 6.1.2를 적용할 수 있다.

$$\dot{g}_1(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3m_1}{\sqrt{3(m_2 - m_1^2)}} \\ \frac{-3}{2\sqrt{3m_2 - 3m_1^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3\mu}{\sqrt{3}\gamma} \\ -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{3(\theta_2+\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \\ \frac{-3}{\theta_2 - \theta_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\begin{pmatrix} 2(\theta_1 + 2\theta_2) \\ -3 \end{pmatrix}$$

이때 $m_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{x^3 dx}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{\theta_1^3 + \theta_1^2\theta_2 + \theta_1\theta_2^2 + \theta_2^3}{4}$, $m_4 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{x^4 dx}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{\theta_1^4 + \theta_1^3\theta_2 + \theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1\theta_2^3 + \theta_2^4}{5}$

이므로

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m_2 - m_1^2 & m_3 - m_1 m_2 \\ m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12} & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2(\theta_2 + \theta_1)}{12} \\ \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2(\theta_2 + \theta_1)}{12} & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2(4\theta_1^2 + 7\theta_1\theta_2 + 4\theta_2^2)}{45} \end{pmatrix}$$ 이므로 정리하면

$(\dot{g}_1(m_1, m_2))^T \Sigma (\dot{g}_1(m_1, m_2)) = \frac{2}{15}(\theta_2 - \theta_1)^2$

같은 방식으로 $(\dot{g}_2(m_1, m_2))^T \Sigma (\dot{g}_2(m_1, m_2))$를 계산하면

그 값은 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2(2\theta_1 + \theta_2) \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\theta_2+\theta_1}{4} \\ \frac{\theta_2+\theta_1}{4} & \frac{4\theta_1^2 + 7\theta_1\theta_2 + 4\theta_2^2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2(2\theta_1 + \theta_2) \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{2}{15}(4a^2 - 2ab + b^2)$ 이다.

$\therefore \hat{\theta}_1^{MME}: \sqrt{n}(\hat{\theta}_1^{MME} - \theta_1) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2}{15}(\theta_2 - \theta_1)^2\right)$

$\hat{\theta}_2^{MME}: \sqrt{n}(\hat{\theta}_2^{MME} - \theta_2) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2}{15}(4\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2)\right)$