4.13.

(a) $Z := (Z_1, Z_2, Z_3) = (X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})$으로 두자.

$pdf_Z(z_1, z_2, z_3) = 3! \cdot 8 z_1 z_2 z_3 I\{0<z_1<z_2<z_3<1\}$

이제 다음과 같은 변환 u는 1-to-1이고

$$u : \begin{cases} Y_1 = Z_1/Z_2 \\ Y_2 = Z_2/Z_3 \\ Y_3 = Z_3 \end{cases} \quad u^{-1} : \begin{cases} Z_1 = Y_1 Y_2 Y_3 \\ Z_2 = Y_2 Y_3 \\ Z_3 = Y_3 \end{cases}$$

$$|\det(J_{u^{-1}})| = \left| \det \begin{pmatrix} y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_1 y_2 \\ 0 & y_3 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = y_2 y_3^2$$

$\therefore pdf_Y(y_1, y_2, y_3) = 48 y_1 y_2^3 y_3^5 I\{0<y_1, y_2, y_3<1\}$

이고 이는 Y_1, Y_2, Y_3 각각의 함수로 분리되므로 Y_1, Y_2, Y_3은 서로 독립이다.

(b) $E(X_{(2)}|X_{(3)}) = E(Z_2|Z_3) = E\left(Z_3 \times \frac{Z_2}{Z_3} \middle| Z_3\right)$

$= E(Y_2|Y_3)E(Y_3) = E(Y_2) Z_3$

$E(Y_2) = \int_0^1 4 y_2^4 \, dy_2 = \frac{4}{5}$. $E(X_{(2)}|X_{(3)}) = \frac{4}{5} X_{(3)}$

4.15. $(U_{(r)} > p) = (\{\#\text{ of } U_i \le p\} \le r-1)$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} I_{(0,p]}(U_j) \le r-1\right)$

$pdf_{U_{(r)}}(u_{(r)}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u_{(r)}^{r-1} (1-u_{(r)})^{n-1}$ 이므로 $(0<u_{(r)}<1)$

$P(U_{(r)} > p) = \int_p^1 pdf_{U_{(r)}}(u_{(r)}) \, du_{(r)}$

$= P\left(\sum_{j=1}^{n} I_{(0,p]}(U_j) \le r-1\right)$은 이항분포 $X \sim (n, p)$에서 0회 이상 $(r-1)$회 이하 성공할 확률이므로 그 값은 $\sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(0<p<1)$이다.

4.16. $u : \begin{cases} X = U_{(1)} \\ Y = U_{(n)} - U_{(1)} \end{cases} \Leftrightarrow u^{-1} : \begin{cases} U_{(1)} = X \\ U_{(n)} = X+Y \end{cases}$ 는

1-to-1 함수이고 $J_{u^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

$pdf_{U_{(1)}, U_{(n)}}(u_1, u_n) = \frac{n!}{(n-2)!} (u_n - u_1)^{n-2} (0<u_1<u_n$

$pdf_{X,Y}(x, y) = n(n-1) y^{n-2} \cdot 1 \cdot I\{0<x, y<1, x+y<1$

3.21.

(a) $U(0, 1-r_m-r_k)$에서 뽑은 n개의 표본에 가초하

순서통계량을 $W_1 < W_2 < \cdots < W_n$, $W_0 = 0$, $W_{n+1} = 1$

이라 하자.

이제 $V_i = \begin{cases} 0 & (i=0) \\ W_i & (1 \le i \le m-1) \\ W_i + r_m & (m \le i \le k-1) \\ W_i + r_m + r_k & (k \le i \le n) \\ 1 & (i=n+1) \end{cases}$ 로 정의하자. 그러

$(Y_m \ge r_m, Y_k \ge r_k) = (0 < V_1 < \cdots < V_n < 1)$

$= (0 < W_1 < \cdots < W_{m-1} < W_m + r_m < \cdots < W_{k-1} + r_m < W_k + r_m + r_k < \cdots$

$W_n + r_k + r_m < 1)$이므로 $(0, 1-r_m-r_k)$에 uniform distribution에서의 모든 분포가 포함되는 사건이다.

$\therefore P(Y_m \ge r_m, Y_k \ge r_k) = (1 - r_m - r_k)^n$이다.

(b) (a)와 같은 방식으로 확장한다. 즉 해당 사건은 $(0, 1-r_1-r_2-\cdots-r_n-r_{n+1})$의 구간에서 $U(0,1)$에서의 n개의 표본을 뽑을 확률이므로

$P(Y_1 \ge r_1, \cdots, Y_{n+1} \ge r_{n+1}) = (1 - r_1 - \cdots - r_n - r_{n+1})$

(c) $P(D_i \le r) = P(\min\{Y_i\} \le r) = 1 - P(\min\{Y_i$

이때 $P(\min\{Y_i\} > r) = P(Y_1 \ge r, \cdots, Y_{n+1} \ge r_{n+1})$

$= (1-(n+1)r)^n$이므로 $F_{D_i}(r) = 1 - (1-(n+1)r$

$pdf_{D_i}(r) = \frac{d}{dr} F_{D_i}(r) = n(n+1)(1-(n+1)r)^{n-1}$

$(0<r<1)$

수리통계 I HW7

2020-15709 나승찬

2.

(a) 우선 $N=0$인 경우 $Y|(N=0)=0$

이제 $N\geq 1$인 경우 $(\max\{0, X_1, \cdots, X_N\}\leq y)$
$=(X_1\leq y, X_2\leq y, \cdots, X_N\leq y)$이므로

$$F_{Y|N}(y)=P(\max\{0, X_1, \cdots, X_N\}\leq y)$$
$$=P(X_1\leq y, \cdots, X_N\leq y)$$
$$=\prod_{i=1}^{N}P(X_i\leq y)=\{P(X_1\leq y)\}^N$$
$$=(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})^N \quad (\text{단, } 0<y)$$

$$pdf_{Y|N}(y|N=n)=\frac{d}{dy}(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})^n I\{0<y, n\in\mathbb{N}\}$$
$$=\frac{n}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})^{n-1}I\{0<y, n\in\mathbb{N}\} \text{ and}$$
$$P((Y|N=0)=0)=1$$

(b) $pdf_N(n)=\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\quad (n\geq 0)$

(i) $n\geq 1$에서 $pdf_{Y,N}(y,n)=\dfrac{\lambda^{n-1}e^{-(\lambda+\frac{y}{\lambda})}}{(n-1)!}(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})^{n-1}I\left\{\begin{smallmatrix}y>0,\\ n\in\mathbb{N}\end{smallmatrix}\right\}$

$pdf_Y(y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}e^{-(\lambda+\frac{y}{\lambda})}}{(n-1)!}(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})^{n-1}I\{y>0\}$에서

포아송분포의 합에 의해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{\lambda(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})\}^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})}=1$이므로

$pdf_Y(y)=e^{\lambda(1-e^{-\frac{y}{\lambda}})-\lambda-\frac{y}{\lambda}}I\{y>0\}=e^{-\frac{y}{\lambda}-\lambda e^{-\frac{y}{\lambda}}}I\{y>0\}\ (n\geq 1)$

(ii) $P(Y=y|N=0)=I\{y=0\}$

$P(N=0)=\frac{1}{e}$

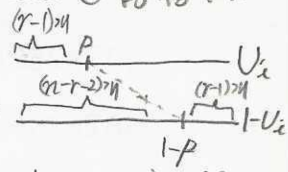
$P(Y=y, N=0)=\frac{1}{e}I\{y=0\}$

(i), (ii)에 의해

$$pdf_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{e} & (y=0)\\ e^{-\frac{y}{\lambda}-\lambda e^{-\frac{y}{\lambda}}} & (y>0)\end{cases}$$

(4.21) 우선 $U_{(i)}=V_i$이다. 즉 V_i가 ith 순서통계량이다.

(a) $\{U_i\}$에서의 rth 순서통계량이 $p\in(0,1)$의 값이라 가정하자. 그러면



$1-\{U_i\}$의 관점에서는 해당 값으로부터 나온 $(1-p)$가 $(n-r+1)$th 순서통계량의 값이다.

즉 $U_{(r)}$에 대해 $F_{U_{(r)}}(p)=F_{V_r}(p)=P(V_r\leq p)$
$=P(1-V_{n-r+1}\geq 1-p)=P(1-V_{n-r+1}<p)=F_{V_{n-r+1}}(p)$
이므로 $U_{(r)}\overset{d}{=}1-U_{(n-r+1)},\ 1\leq r\leq n$

이제 $-\log$를 씌우면 $-\log(U_{(r)})\overset{d}{=}-\log(1-U_{(n-r+1)})$

(b) 정리 4.3.4에 의해 연속형 모집단 $\{U_i\}$와 그 분포 $F(x)=xI\{0<x<1\}$로 두면 $h(y)=1-e^{-y}\ (y>0)$에 대해 $(Z_i\overset{iid}{\sim}Exp(1))$

$V_{n-r+1}\overset{d}{=}1-e^{-(\frac{Z_1}{n}+\cdots+\frac{Z_{n-r+1}}{r})}$이고 (a)와 합치면

$U_{(r)}=V_r\overset{d}{=}1-e^{-(\frac{Z_1}{n}+\cdots+\frac{Z_{n-r+1}}{r})}\quad(1\leq r\leq n)$이다.

$(-\log U_{(r)})_{1\leq r\leq n}\overset{d}{=}\left(\frac{Z_1}{n}+\cdots+\frac{Z_{n-r+1}}{r}\right)\quad(1\leq r\leq n)$

(c) (b)에서 $-\log(U_{(r+1)})\overset{d}{=}\left(\frac{Z_1}{n}+\cdots+\frac{Z_{n-r}}{r+1}\right)$

$-\log V_r-(-\log V_{r+1})\overset{d}{=}\left(\frac{Z_1}{n}+\cdots+\frac{Z_{n-r+1}}{r}\right)-\left(\frac{Z_1}{n}+\cdots+\frac{Z_{n-r}}{r+1}\right)$

$\Leftrightarrow -\log\frac{V_r}{V_{r+1}}\overset{d}{=}\frac{Z_{n-r+1}}{r}\Leftrightarrow -\log\left(\frac{V_r}{V_{r+1}}\right)^r=Z_{n-r+1}$

$\therefore \left(-\log\left(\frac{U_{(r)}}{U_{(r+1)}}\right)^r\right)_{1\leq r\leq n}\overset{d}{=}(Z_{n-r+1})_{1\leq r\leq n}$

(d) 정리 4.3.3 (a)에 의해 $Exp(1)$의 cdf

$F_Z(z)=1-e^{-z}$이므로

$F_Z(Z_{n-r+1})=1-e^{-Z_{n-r+1}}\overset{d}{=}1-e^{-(-\log(\frac{V_r}{V_{r+1}})^r)}\sim U(0,1)$

$1-e^{(-\log(\frac{V_r}{V_{r+1}})^r)}\overset{d}{=}U(0,1)$이므로 $U(0,1)\overset{d}{=}1-U(0,1)$에서

$\left(\frac{V_r}{V_{r+1}}\right)^r\sim U(0,1),\ \left(\frac{U_{(r)}}{U_{(r+1)}}\right)^r\sim U(0,1),\ 1\leq r\leq n$