em hw4 2020-15709 나승찬

1.

(a) 대우명제 $E(u_i|X_i)=0 \Rightarrow E(u_iX_i)=0$을 증명하면 충분하다.

$E(u_iX_i)$

$=E(E(u_iX_i|X_i))$ (iterated expectation)

$=E(X_iE(u_i|X_i))=E(0)=0$이므로

$E(u_iX_i)\neq 0 \Rightarrow E(u_i|X_i)\neq 0$

(b) Exogeneity Condition : $Corr(Z_i,u_i)=0$

Relevance Condition : $Corr(Z_i,X_i)\neq 0$

$Corr(X,Y)=cov(X,Y)/\sqrt{Var(X)Var(Y)}$이므로

$cov(Z_i,u_i)=0$ (Exo) / $cov(Z_i,X_i)\neq 0$ (Relevance) 도록 하는 조건을 찾으면 충분하다.

(i) Exogeneity

$cov(Z_i,u_i)=E(Z_iu_i)+E(Z_i)\overset{=0}{E(u_i)}$

$=E(u_i(X_i^2+V_i))=E(X_i^2u_i)+\overset{=0}{E(u_iV_i)}$

$=E(X_i^2u_i)=0$에서 외생성이 만족된다.

(ii) Relevance

$Cov(Z_i,X_i)=E(Z_iX_i)-E(Z_i)\overset{=0}{E(X_i)}$

$=E((X_i^2+V_i)X_i)=E(X_i^3)+E(X_iV_i)$.

이때 $\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=0$ when $f(x)$는 우함수 $\Rightarrow E(X_i^3)=0$

$\therefore E(\cancel{X_i}V_i)\neq 0$에서 Revelance가 성립한다.

(c) $cov(Y_i,Z_i)=cov(X_i^2+V_i,\beta_1X_i+u_i)$

$=\beta_1Cov(Z_i,X_i)+cov(Z_i,u_i)$

$=\beta_1cov(Z_i,X_i)$

$\therefore \beta_1=\dfrac{cov(Y_i,Z_i)}{cov(X_i,Z_i)}$

$\hat{\beta}_1=\dfrac{\widehat{cov}(Y_i,Z_i)}{\widehat{cov}(X_i,Z_i)}\xrightarrow{p}\dfrac{cov(Y_i,Z_i)}{cov(X_i,Z_i)}$

(d) Relevance가 만족된다. ~~않을 수 있다~~.

이 경우에도 ~~변하지 않~~ $\hat{\beta}_1$에 대한 (c)의 결론은 변하지 않는다.

2.

(a) $Y_i=\{Y_i(1)-Y_i(0)\}X_i+Y_i(0)$

$=E[Y_i(0)|X_i=1]+E[Y_i(1)-Y_i(0)|X_i=1]X_i+Y_i(0)+\{\{Y_i(1)-Y_i(0)\}-E[Y_i(1)-Y_i(0)|X_i=1]X_i-E[Y_i(0)|X_i=1]\}$

$\therefore \beta_0=E(Y_i(0)|X_i=1)$

$u_i=Y_i(0)-E(Y_i(0)|X_i=1)+\{Y_i(1)-Y_i(0)\}X_i-E[Y_i(1)-Y_i(0)|X_i=1]X_i$

(b) $(X_i=0)$

$E(u_i|X_i=0)=E(Y_i(0)|X_i=0)-E(Y_i(0)|X_i=1)=0$

이는 $Y_i(0)$이 $X_i=0$이든 $X_i=1$이든 conditional expectation이 서로 같아야 함을, 즉 $Y_i(0)\perp X_i$를 의미한다. 한편 아래의 $X_i=1$ case에서 $E(u_i|X_i=1)$은 항등적으로 0이고, 이는 $Y_i(1)\perp X_i$를 조건으로 부과하지 '않아도' 0이 된다는 뜻이다.

$(X_i=1)$

$E(u_i|X_i=1)=E(Y_i(0)|X_i=1)-E(Y_i(0)|X_i=1)+\{Y_i(1)-Y_i(0)\}-\{Y_i(1)-Y_i(0)\}=0.$