계량경제학 HW 2차 | 2020-15709 나승찬

Q1

(i) $60.5+4.28\times 2=69.06$이므로
$E(Y|X=2)=69.06$의 예측치이다.

(ii) OLS model에 따른 회귀직선이 $(\bar{X},\bar{Y})$를 지나므로 $\bar{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\bar{X}$이다.

$\bar{Y}=75$이므로 $\bar{X}=\frac{75-60.5}{4.28}\approx 3.3879$

따라서 TestScore 예측치 평균은 75이고,
Hours의 평균은 3.3879이다.

(iii) 인과추론을 위한 OLS model의 기본 가정은

$$\left(\begin{array}{l} E(u_i|X_i)=0 \\ E(X^4)<\infty,\ E(Y^4)<\infty \\ (X_i, Y_i)\text{는 iid} \end{array}\right)\text{이다.}$$

해당 가정의 성립 여부를 파악하기에는 정보가 부족하지만, 해당 sample이 조건 만족시 인과관계의 존재 여부를 판단 가능하다.
한편, $R^2=0.21$은 기술적으로 전체 변동 중 회귀직선에 의해 설명되는 부분이 21%라는 의미이고, 각 점추정량은 가정이 만족되는 것에 더해 등분산성까지 존재한다면 BLUE이다.
(가우스-마르코프 정리)

(iv, v) 두 문제는 본질적으로 같으므로 95% asymptotic CI를 우선 구하면 $4.28\pm 1.96\cdot 1.645$이므로
β_1의 95% 근사적 CI는 $(1.0558, 7.5042)$이다.
1이 해당 CI에 포함되지 않으므로, (iv)에서 $H_0: \beta_1=1$의 귀무가설을 기각한다.

Q2

(i) X, Y가 각각 기댓값이 μ_X, μ_Y로 존재하는 분포라 하자. (추가 가정)
그러면 $n\to\infty$일 때 $P\left(\left|\frac{\bar{Y}_n}{\bar{X}_n}-\frac{\mu_Y}{\mu_X}\right|>\varepsilon\right)=0$
이고, $\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$는 $\frac{\mu_Y}{\mu_X}$로 확률수렴한다. (by LLN)

(ii) (X_i, Y_i)의 iid 가정이 성립하고
X, Y의 2nd moment가 존재하므로
CLT 성립을 위한 전제가 성립한다.
즉 $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}}{\mu_X}-\frac{\mu_Y}{\mu_X}\right)$는 $n\to\infty$일 때
$N\left(0, Var\left(\frac{\bar{Y}}{\mu_X}\right)\right)=N\left(0, \frac{\sigma_Y^2}{n\mu_X^2}\right)$으로
분포수렴한다.