1.

(1) $Bt^r = (t-1)^r$, $(1-B)t^r = \Delta t^r = t^r - (t-1)^r$

$\Delta^2 t^r = \{t^r - (t-1)^r\} - \{(t-1)^r - (t-2)^r\}$

$= r(r-1)t^{r-2} + \cdots$ 이고, 이를 반복하면

$\Delta^k t^r = r(r-1)\cdots(r-k+1)t^{r-k} + \cdots$ 이고, 최고차항 차수는 $r-k$이므로

$\Delta^r t^r = r(r-1)\cdots 1 = r!$

(2) 이항정리를 적용.

$(1-B)^r \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} 1^{r-j} (-B)^j \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j \varepsilon_{t-j}$

(3) (1), (2)에 의해 $(1-B)^r X_t =$

$(1-B)^r \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r + \varepsilon_t\}$가 되므로

정상시계열의 선형결합이어서 정상이다.

5. (식 4.2.2.) $T_n = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}\varepsilon_t / n}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 / n^2}$

$\frac{\sigma^2}{n} W_n\left(\frac{t-1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{t-1}\varepsilon_j\right)^2 \times \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{t-1}\varepsilon_j\right)^2$이므로,

$\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 = \left(\sum_{j=1}^{t-1}\varepsilon_j\right)^2$임을 보여라.

6. (식 4.2.3.) $W_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{[ns]} \varepsilon_j,\ 0 \le s \le 1.$

$\sqrt{\frac{t}{s}}\sigma\left(W_n\left(\frac{t}{n}\right) - W_n\left(\frac{t-1}{n}\right)\right), (ns = t)$

$= \sqrt{n}\sigma\left[\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left\{\sum_{j=1}^{[t]}\varepsilon_j - \sum_{j=1}^{[t]-1}\varepsilon_j\right\}\right] = \varepsilon_t$

9. $Y_t = (1-B)X_t = (1-B)\Theta(B)\varepsilon_t$

$= \varepsilon_t + \eta_1\varepsilon_{t-1} + \eta_2\varepsilon_{t-2} + \eta_3\varepsilon_{t-3}$, 이다.

$(\eta_1 = \theta_1 - 1,\ \eta_2 = \theta_2 - \theta_1,\ \eta_3 = -\theta_2)$

- $\gamma(0) = cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t)$
  $= Var(\varepsilon_t + \eta_1\varepsilon_{t-1} + \eta_2\varepsilon_{t-2} + \eta_3\varepsilon_{t-3})$
  $= (1 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)\sigma^2$
- $\gamma(1) = cov(Y_t, Y_{t+1})$
  $= cov(\varepsilon_t + \eta_1\varepsilon_{t-1} + \eta_2\varepsilon_{t-2} + \eta_3\varepsilon_{t-3},\ \varepsilon_{t+1} + \eta_1\varepsilon_t + \eta_2\varepsilon_{t-1} + \eta_3\varepsilon_{t-2})$
  $= (\eta_1 + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3)\sigma^2$
- $\gamma(2) = cov(Y_t, Y_{t+2})$
  $= cov(\varepsilon_t + \eta_1\varepsilon_{t-1} + \eta_2\varepsilon_{t-2} + \eta_3\varepsilon_{t-3},\ \varepsilon_{t+2} + \eta_1\varepsilon_{t+1} + \eta_2\varepsilon_t + \eta_3\varepsilon_{t-1})$
  $= (\eta_2 + \eta_1\eta_3)\sigma^2$
- $\gamma(3) = cov(Y_t, Y_{t+3}) = \eta_3\sigma^2$

Timeseries_Analysis_HW4

Na SeungChan

2025-05-16

Q.07

난수 생성

```r
set.seed(42)
phi <- runif(1, -1, 1)
theta <- runif(1, -1, 1)

set.seed(1)
ARt <- arima.sim(n = 100, model = list(ar = phi))
set.seed(1)
MAt <- arima.sim(n = 100, model = list(ma = theta))
```

AIC 계산 : AR 데이터

```r
AR1 <- arima(ARt, order = c(1,0,0))
AR1$aic #AR(1) 적합시 AIC
```

```
## [1] 255.6853
```

```r
AR2 <- arima(ARt, order = c(1,0,1))
AR2$aic #ARMA(1) 적합시 AIC
```

```
## [1] 257.6424
```

AIC 계산 : MA 데이터

```r
MA1 <- arima(MAt, order = c(0,0,1))
MA1$aic #AR(1) 적합시 AIC
```

```
## [1] 269.1867
```

```
MA2 <- arima(MAt, order = c(1,0,1))
MA2$aic #ARMA(1) 적합시 AIC
```

```
## [1] 271.1844
```

여담으로, 이 결과는 일관성이 없다. 이론상 AIC는 불필요한 변수를 포함하지 않은 AR1과 MA1 모델에서 작아야 하지만, 실제로 자료 생성 시 계수에 따라 ARMA(1,1)을 적합했을 때 AIC가 더 작아지기도 한다.

Q.10

data load

```
df10 <- read_csv('ex_ch4_10.txt')
```

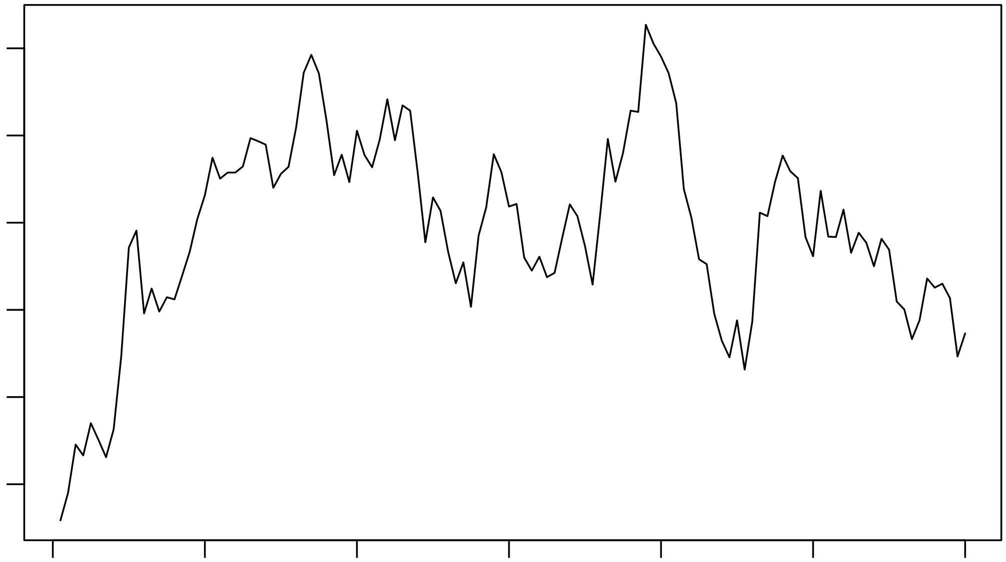
```
## Rows: 120 Columns: 1
## -- Column specification --------------------------------------------------------
## Delimiter: ","
## dbl (1): data
##
## i Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.
## i Specify the column types or set `show_col_types = FALSE` to quiet this message.
```

```
df10 <- ts(df10$data)
head(df10)
```

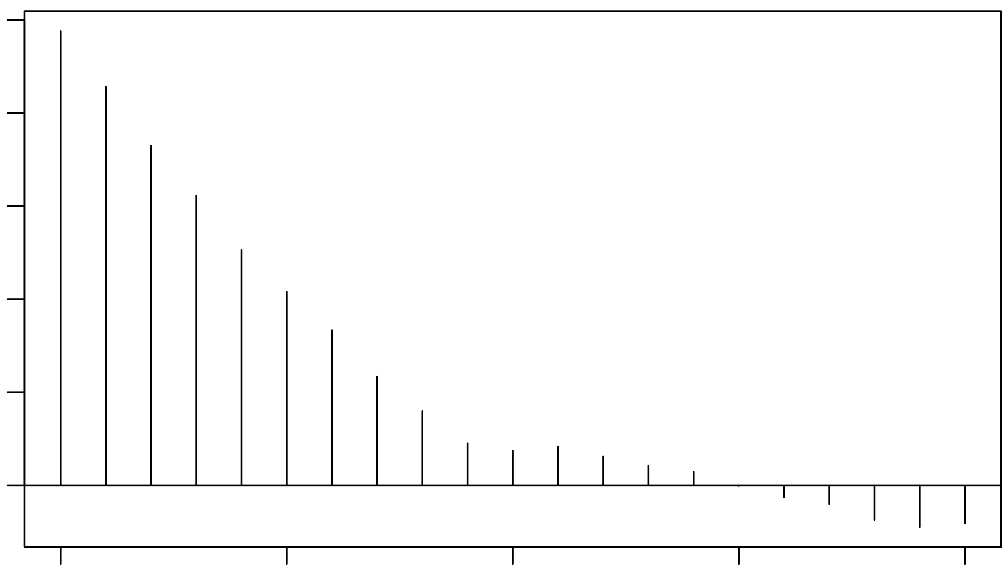
```
## Time Series:
## Start = 1
## End = 6
## Frequency = 1
## [1] -30.83 -30.20 -29.09 -29.34 -28.60 -28.98
```

(1)

```
plot(df10)
```



```r
acf.df10 = acf(x = df10, type = "covariance")
```



시계열도와 SACF를 통해 비정상성을 의심하는 정도는 가능하지만, 정상시계열일 가능성을 배제할 수 없다. 추가적인 단위근검정이 필요해 보인다.

(2)

```r
adf.test(df10, alternative = 'stationary')
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  df10
```

```
## Dickey-Fuller = -3.0271, Lag order = 4, p-value = 0.15
## alternative hypothesis: stationary
```

해당 시계열이 정상시계열이라고 하기 어렵다.

(3)

```r
adf.test(diff(df10))
```

```
## Warning in adf.test(diff(df10)): p-value smaller than printed p-value
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  diff(df10)
## Dickey-Fuller = -5.4477, Lag order = 4, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

1회 차분함으로써 정상시계열이 될 수 있다.

```r
auto.arima(df10, d = 1, trace = TRUE)
```

```
##
##  ARIMA(2,1,2) with drift         : Inf
##  ARIMA(0,1,0) with drift         : 312.1437
##  ARIMA(1,1,0) with drift         : 313.4298
##  ARIMA(0,1,1) with drift         : 313.3855
##  ARIMA(0,1,0)                    : 310.2727
##  ARIMA(1,1,1) with drift         : Inf
##
##  Best model: ARIMA(0,1,0)
```

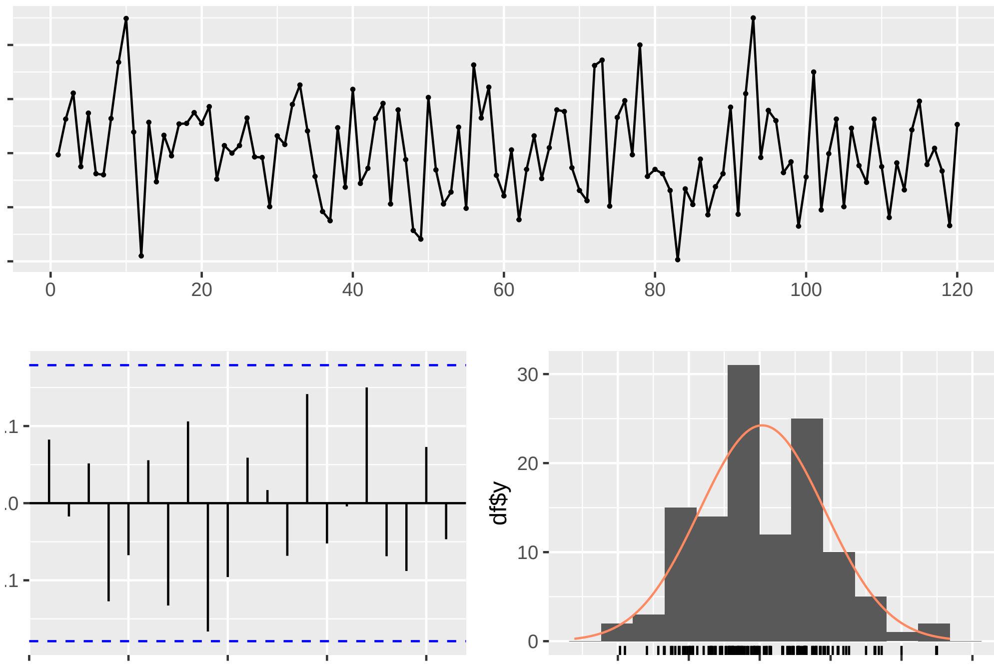
```
## Series: df10
## ARIMA(0,1,0)
##
## sigma^2 = 0.7807:  log likelihood = -154.12
## AIC=310.24   AICc=310.27   BIC=313.02
```

```r
model <- arima(df10, order = c(0,1,0))
```

ARIMA(0, 1, 0)을 채택하였다. 차분을 한 번 하는 랜덤워크이다.

(4)

```r
checkresiduals(model)
```




```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(0,1,0)
## Q* = 12.852, df = 10, p-value = 0.2321
##
## Model df: 0.   Total lags used: 10
```

```
arima(df10, order = c(1,1,0))
```

```
##
## Call:
## arima(x = df10, order = c(1, 1, 0))
##
## Coefficients:
##          ar1
##       0.0839
## s.e.  0.0913
##
## sigma^2 estimated as 0.7751:  log likelihood = -153.7,  aic = 311.4
```

```
arima(df10, order = c(0,1,1))
```

```
##
## Call:
## arima(x = df10, order = c(0, 1, 1))
##
## Coefficients:
##          ma1
##       0.0889
```

```
## s.e.  0.0947
##
## sigma^2 estimated as 0.7748:  log likelihood = -153.68,  aic = 311.35
```

잔차분석 및 과적합 진단 결과 ARIMA(1, 1, 0)과 ARIMA(0, 1, 1) 모두 계수가 낮아 유의성을 말하기 어렵다. 잔차의 형태 역시 적절하다.

Q.13

data load

```
gld <- read_csv('ex_ch4_13_gold.csv')
```

```
## Rows: 474 Columns: 2
## -- Column specification --------------------------------------------------------
## Delimiter: ","
## num  (1): price
## date (1): date
##
## i Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.
## i Specify the column types or set `show_col_types = FALSE` to quiet this message.
```

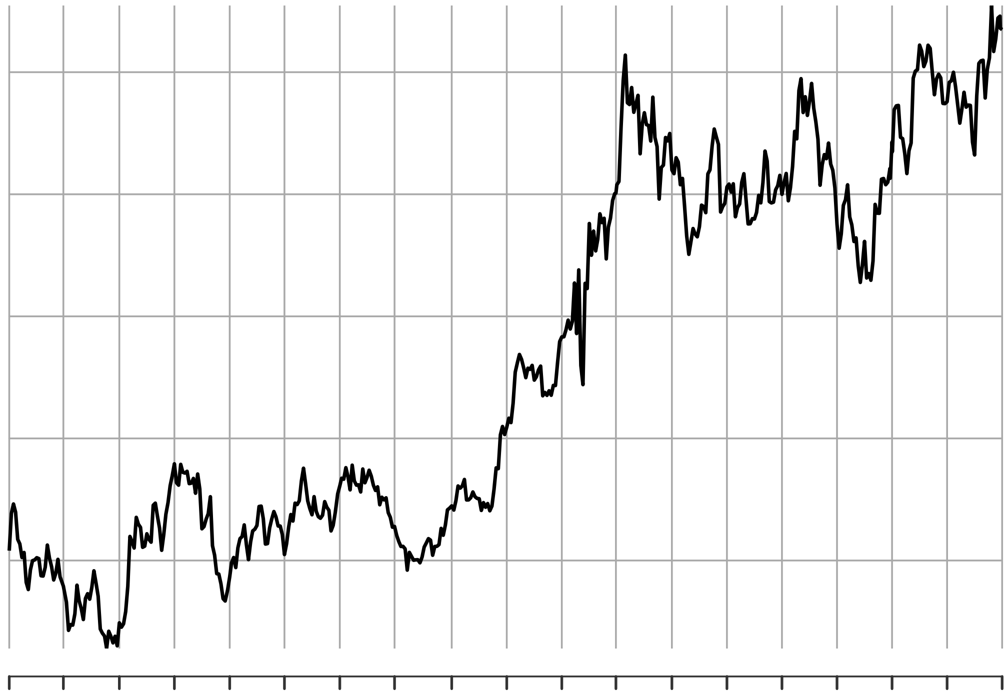
```
gld$date <- as_date(gld$date)
gld
```

```
## # A tibble: 474 x 2
##    date       price
##    <date>     <dbl>
##  1 2015-01-04 1216.
##  2 2015-01-11 1277.
##  3 2015-01-18 1293.
##  4 2015-01-25 1279.
##  5 2015-02-01 1235.
##  6 2015-02-08 1227.
##  7 2015-02-15 1205.
##  8 2015-02-22 1213.
##  9 2015-03-01 1164.
## 10 2015-03-08 1152.
## # i 464 more rows
```

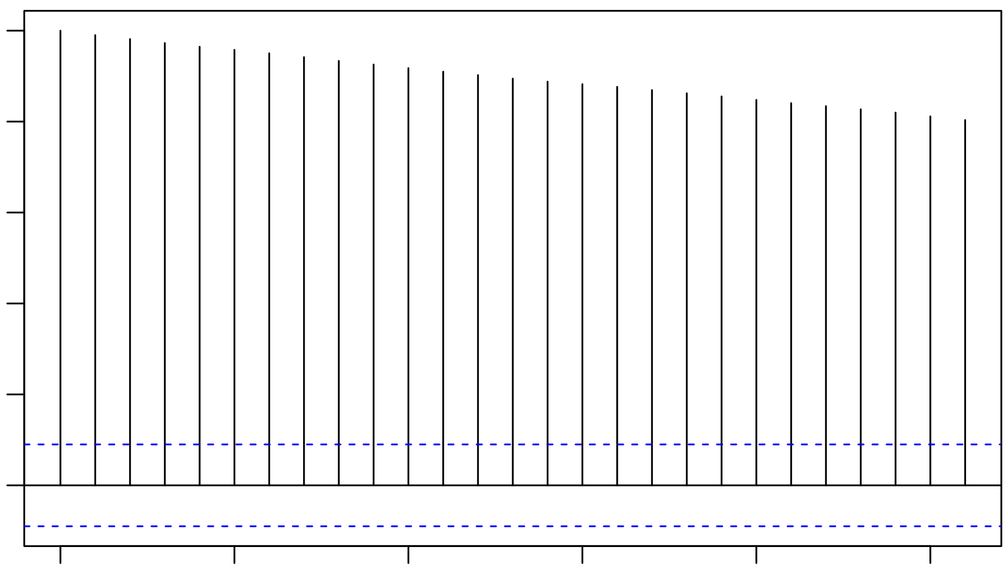
```
gold <- xts(gld$price, order.by = gld$date, col.names = 'price')
```

(1)

```
plot(gold)
```



```r
acf(gold)
```



```r
adf.test(x = gold, alternative = "stationary")
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  gold
## Dickey-Fuller = -2.8001, Lag order = 7, p-value = 0.2396
## alternative hypothesis: stationary
```

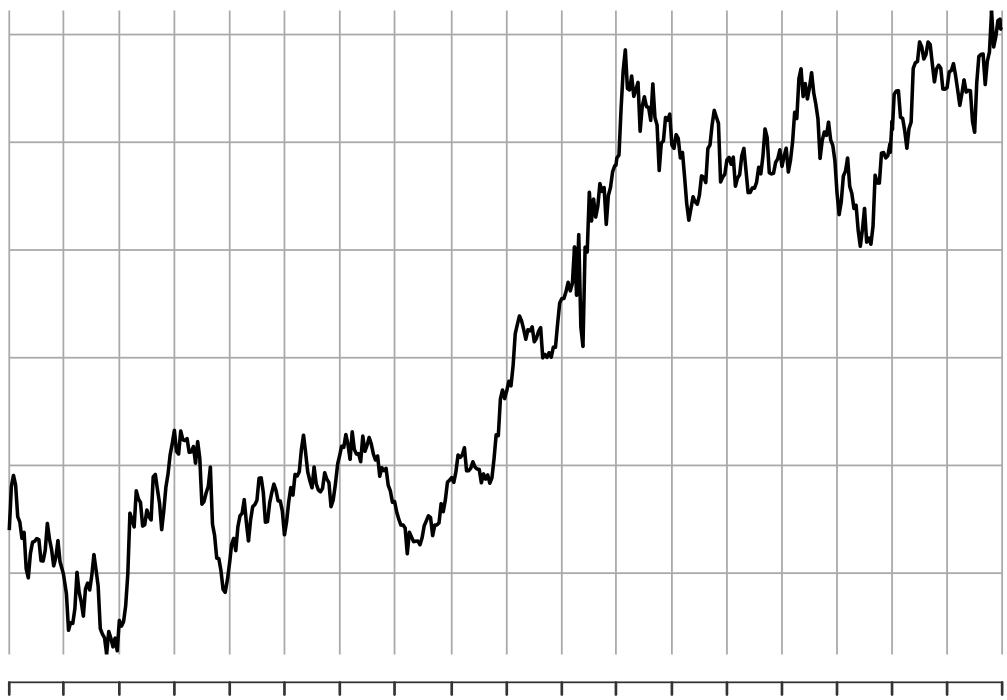
plot상 증가 추세가 있고, ACF가 빠르게 감소하지 않으며, ADF test를 통해서도 대립가설인 정상시계열을 기각할 수 없다. 정상시계열이라고 보기 어렵고, 차분과 로그변환을 통해 정상시계열로 만드는 것을 고려할 수 있다.

(2)~(3)

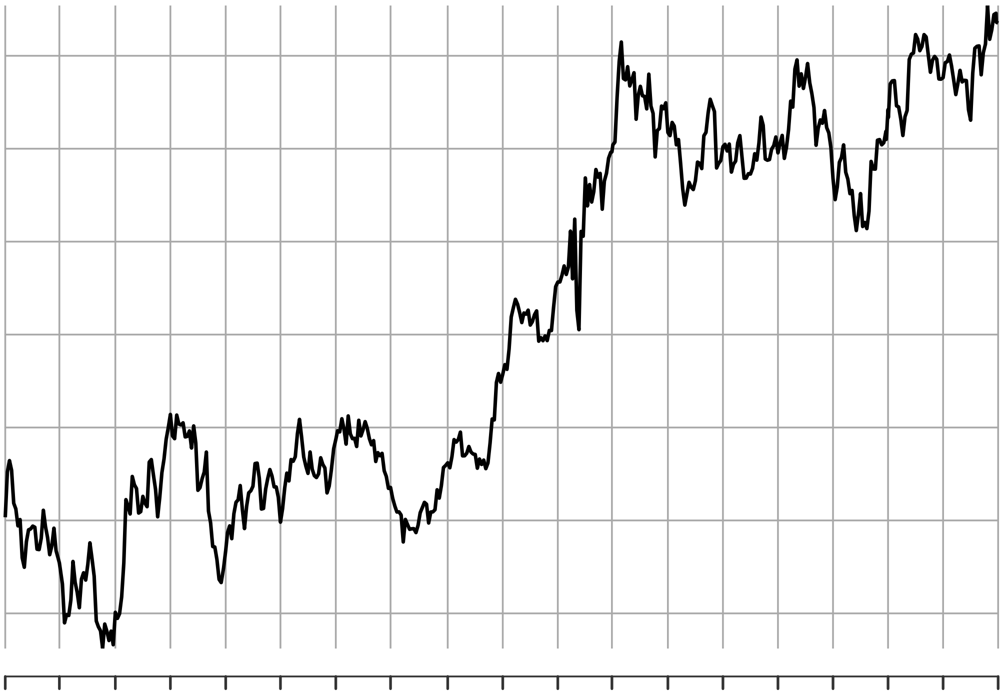
차분 필요. unit root test를 통해 차분의 차수를 구한다.

여러 변환을 고려해 볼 때, 로그를 씌운 가격 데이터를 차분함으로써 분산이 일정하지는 않지만 정상시계열과 유사한 모습을 볼 수 있다. 이와 같은 데이터를 통해 auto.arima를 수행한다.

```
plot(BoxCox(x = gold, lambda = 0.2), type = "l")
```



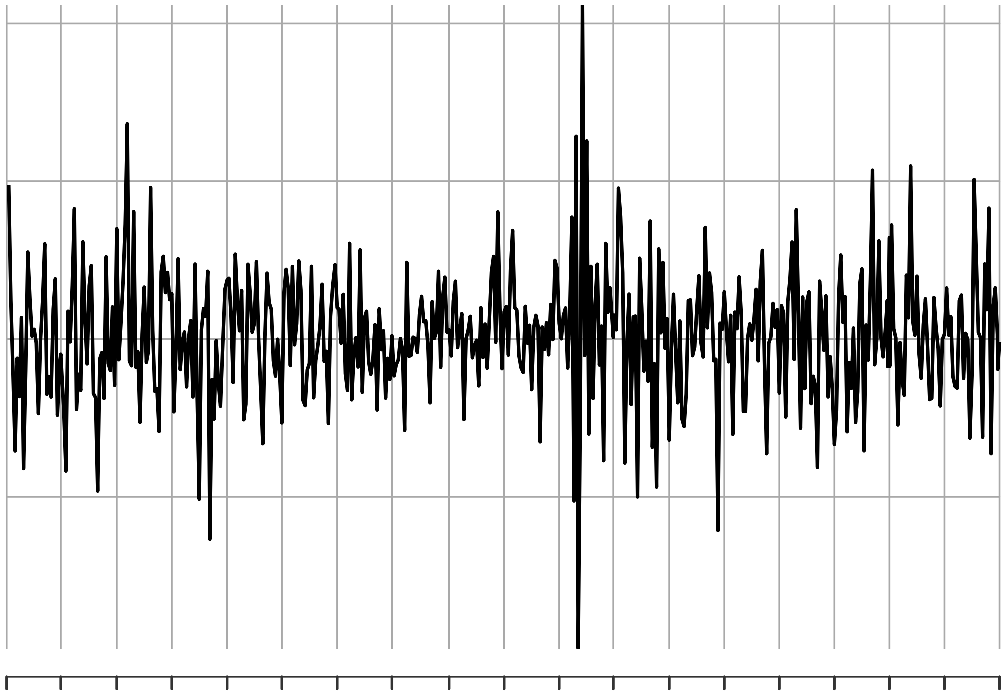
```
plot(log(gold), type = "l" )
```



```r
adf.test(x = log(gold),
       alternative = "stationary")
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  log(gold)
## Dickey-Fuller = -2.8532, Lag order = 7, p-value = 0.2171
## alternative hypothesis: stationary
```

```r
plot(diff(log(gold)), type = "l")
```



```r
adf.test(x = na.omit(diff(log(gold))),
         alternative = "stationary")
```

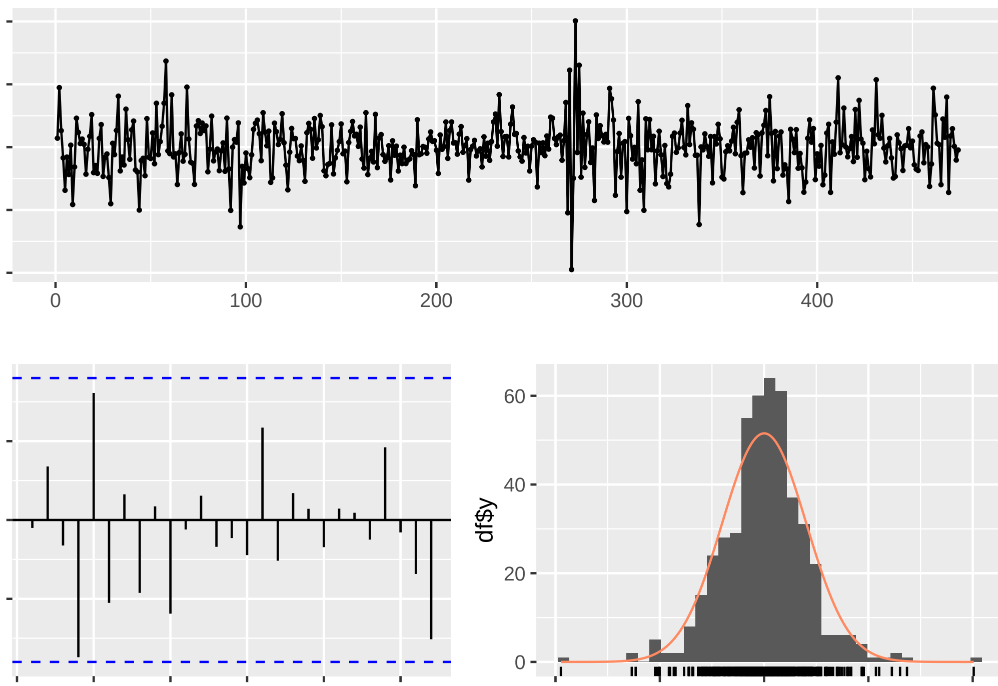
```
## Warning in adf.test(x = na.omit(diff(log(gold))), alternative = "stationary"):
## p-value smaller than printed p-value
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  na.omit(diff(log(gold)))
## Dickey-Fuller = -7.8164, Lag order = 7, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

```r
model <- auto.arima(log(gold))
model
```

```
## Series: log(gold)
## ARIMA(2,1,2) with drift
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ma1     ma2   drift
##       1.5455  -0.8529  -1.5996  0.8825  0.0011
## s.e.  0.2198   0.1350   0.2175  0.1566  0.0009
##
## sigma^2 = 0.0004113:  log likelihood = 1175.16
## AIC=-2338.32   AICc=-2338.14   BIC=-2313.37
```

```
checkresiduals(model)
```




```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(2,1,2) with drift
## Q* = 11.692, df = 6, p-value = 0.06921
##
## Model df: 4.   Total lags used: 10
```

```
arima(log(gold), order = c(3,1,2))
```

```
##
## Call:
## arima(x = log(gold), order = c(3, 1, 2))
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ar3      ma1     ma2
##       0.6261  -0.4344  -0.0992  -0.6791  0.4598
## s.e.  0.4168   0.2741   0.0529   0.4192  0.2799
##
## sigma^2 estimated as 0.0004082:  log likelihood = 1174.42,  aic = -2336.84
```

```
arima(log(gold), order = c(2,1,3))
```

```
##
## Call:
## arima(x = log(gold), order = c(2, 1, 3))
```

```
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ma1     ma2      ma3
##       0.6310  -0.5129  -0.6846  0.5404  -0.1050
## s.e.  0.5547   0.3728   0.5526  0.3771   0.0556
##
## sigma^2 estimated as 0.0004081:  log likelihood = 1174.49,  aic = -2336.98
```

해당 자료에 대해 로그변환 후 차분 후 시계열을 만들어냄으로써 ARIMA 모델을 적합한다. ln(price) ~ ARIMA(2, 1, 2) 모델을 적합하였으며, 그 적절성을 잔차를 통해 검증하고 한 단계 큰 모델을 통해 확인하였다. 한 단계 큰 모델들을 검토함으로써 해당 모델의 적합성을 확인하였으나, 분산이 안정되지 않은 점 아쉽다.