Result 6.2. (Independent t-tests)

(1) 표본평균 $\bar{X}_1 \sim N_p(\mu_1, \frac{\Sigma}{n_1})$, $\bar{X}_2 \sim N_p(\mu_2, \frac{\Sigma}{n_2})$이다.

$X_{1i} \perp X_{2j}$이므로 $\bar{X}_1 \perp \bar{X}_2$, $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N_p(\mu_1 - \mu_2, \Sigma(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}))$.

한편, $(n_1-1)S_1 \sim Wishart_p(n_1-1, \Sigma)$, $(n_2-1)S_2 \sim Wishart_p(n_2-1, \Sigma)$.

(2) $(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2 \sim Wishart_p(n_1+n_2-2, \Sigma)$이다.

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N_p(\mu_1 - \mu_2, \Sigma(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}))$이고, $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \perp \{(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2\}$.

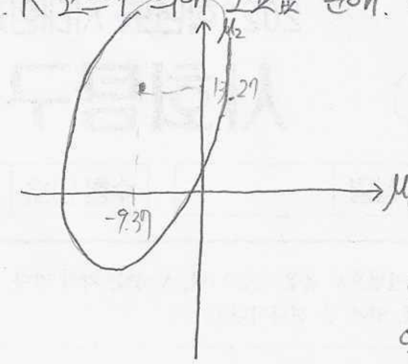
따라서 이를 통해 계산한 Hotelling's T^2는

$T^2 = \{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\}^T (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})^{-1} S_p^{-1} \{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\}$,

$S_p = \frac{(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2}{n_1+n_2-2}$에서 $T^2 \sim \frac{(n_1+n_2-2)p}{n_1+n_2-p-1} F_{p, n_1+n_2-p-1}$이다.

Result 6.3.

6.1 R 코드에 의해 고유값 분해. 타원은 다음과 같다.



데이터 타원이 (0,0)을 포함하지 않으므로 귀무가설을 기각하며, 이는 e.g. 6.1의 결과와 일관된다.

6.2. R 코드 참고

6.3. R 코드 참고

6.4. R 코드 참고

6.5. R 코드 참고

6.6. $X_2 := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\tilde{X}_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(a) $X_3 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\tilde{X}_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$S_2 = \frac{1}{2} \tilde{X}_2^T \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$ $S_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4/3 \\ -4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

$S_{pooled} = \frac{1}{5}(2S_2 + 3S_3) = \begin{pmatrix} 8/5 & -7/5 \\ -7/5 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $T^2 = (2-3 \;\; 4-2)\left(\frac{7}{12} S_{pooled}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \frac{120}{31} < 45.$

R 코드에서의 45보다 적으므로 H_0 기각.

(c) $\mu_{21} - \mu_{31} \in (2-3) \pm 6.480741 \approx (-7.48, 5.48)$

$\mu_{22} - \mu_{32} \in (4-2) \pm 7.245688 \approx (-5.76, 9.24)$

6.7. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$의 가설검정 시행시 검정통계량 $16 > 6$ = 임계값이므로 귀무가설 기각.

선형결합: $S_p^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \begin{pmatrix} 0.0017 \\ 0.0026 \end{pmatrix}$

6.13.

(a) (1st variable)

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ = mean + F1 eff + F2 eff + err

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{mean}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{F1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}}_{F2}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$SS_{tot} = 220$ $\quad SS_{F2} = 90$

$SS_{mean} = 12$ $\quad SS_{Res} = 14$

$SS_{F1} = 104$

(2nd variable)

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 12 & 6 \\ 8 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \overset{\text{mean}}{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}} + \overset{F1}{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{F2} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{err}}$$

$SS_{tot} = 440$ $\quad SS_{F2} = 54$

$SS_{mean} = 108$ $\quad SS_{Res} = 30$

$SS_{F1} = 248$

6.14.

(a) (1st variable)

$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 8 & 16 \\ 1 & 5 & & \end{pmatrix}$