Capítulo 6

Teoría de colas

Capítulo 6

Esta teoría

Es una herramienta de negocios debido a que muchos problemas pueden caracterizarse, como problemas de congestión llegada-partida.

Clientes

- Gente esperando líneas telefónicas desocupadas.
- Máquinas que esperan ser reparadas.
- Aviones esperando aterrizar.
- Gente esperando en una línea de pago en tiendas de víveres.

Instalaciones

- Líneas telefónicas.
- Talleres de reparación.
- Pistas de aeropuerto.
- Mostradores de pago.

Capítulo 6

Tasa variable de llegadas vrs tasa variable de servicio

Las llegadas...

- La demanda (tasa de llegada) a una central telefónica es 60 por minuto.
- Las máquinas se descomponen (o llegan a una instalación de reparación) a una tasa de 3 por semana o 15 por mes.

El servicio...

- Un sistema telefónico entre dos ciudades puede manejar 90 llamadas por minuto.
- Una instalación de reparación puede, en promedio, reparar máquinas a una tasa de 4 por día (o cuatro por ocho horas).

Capítulo 6

Tasa variable de llegadas vrs tasa variable de servicio

Las llegadas...

- Los aviones llegan (solicitan pista) entre 6.00 P.M. y 7.00 P.M. a una tasa de 1 por minuto.
- Los clientes llegan a un mostrador de pago a una tasa de 25 por hora.

El servicio...

- Una pista de aeropuerto puede manejar (aterrizar) dos aviones por minuto (o uno cada 30 segundos, ó 120 por hora)
- Un mostrador de pago puede procesar un cliente cada 4 minutos.

Capítulo 6

Costo de suministro contra costo de espera.

- Si la tasa de llegada excede a la tasa de servicio. Esto hace que se formen líneas de espera (o colas), **perdiendo** ingresos.
- Las facilidades de servicio pueden estar vacías o lo que es lo mismo "el sistema está **sobrecapacitado** ".
- **La situación ideal** es cuando las instalaciones están esperando solo temporalmente a los clientes y estos sólo esperan servicio temporalmente. **"sistema balanceado"** .

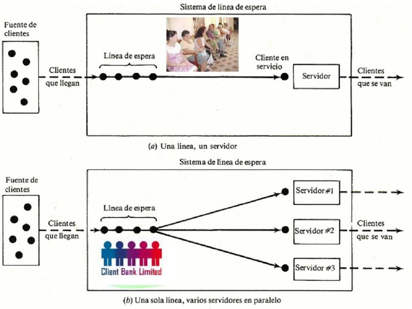
Capítulo 6

Características de un sistema de colas

- Un sistema de colas se compone de un conjunto de unidades físicas operando al unísono.
- Primero, el análisis de colas requiere entender el comportamiento del sistema prediciendo primero el comportamiento de éste.
- Posteriormente, utilizando estas predicciones, el análisis de colas comprende el estudio del balance entre los costos de los clientes que esperan el servicio y los costos de las instalaciones de servicio.

Capítulo 6

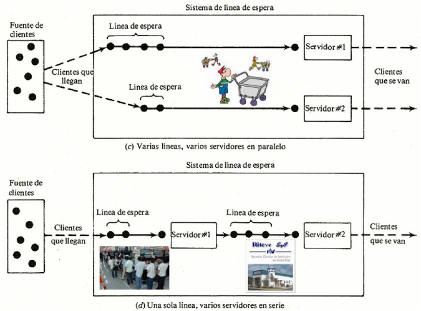
Hay una gran variedad de sistemas de colas (modelos).



Teoría de colas

Capítulo 6

Hay una gran variedad de sistemas de colas (modelos).



Teoría de colas

Capítulo 6

Sistema de colas de Poisson de un solo servidor

En un sistema de este tipo suponemos que:

Suposición 1. Llegada de clientes: Llegan de acuerdo a una distribución Poisson. Esto implica:

1. Las llegadas ocurren "aleatoriamente".
2. La probabilidad de una llegada durante un intervalo específico de tiempo permanece constante y es independiente del número de llegadas previas y de la duración del tiempo de espera.

$$P\{A = n\} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$A =$ número de clientes que llegan en un intervalo de tiempo.

$\lambda =$ tasa esperada de llegada en un intervalo de tiempo.

Capítulo 6

Suposición 2. Disciplina de la cola: es del tipo **FIFO** y ningún cliente deja el sistema antes de ser servicio.

Suposición 3. Número de servidores: 1.

Suposición 4. Distribución del servicio: Sigue una distribución exponencial negativa.

$$P\{S \leqslant t\} = 1 - e^{\frac{-t}{\mu}} \text{ (para } t \leqslant 0.)$$

$S =$ tiempo de servicio para un cliente típico.

$\mu =$ tasa de servicio esperado .

Capítulo 6

Grafico de una función de Poisson.

Expr $a = slider([1.10]);$

Color 2; Expr $y = [e \sim (-a) * a \sim x]/[x!], x > 0, x < 10;$

Capítulo 6

¿Puede un Solo Servidor Manejar la Demanda?

Si denotamos por $U = \lambda/\mu$ al factor de utilización del servidor, tenemos:

- Si $\lambda > \mu$, esto es, $U > 1$, esperaríamos que el sistema estuviera **sobrecongestionado** la mayoría de las veces.
- Si $\lambda < \mu$, esto es, $U < 1$, esperaríamos que el sistema **no** estuviera **congestionado**, la mayoría de las veces.

La probabilidad de que haya n clientes en el sistema se determina con la fórmula:

$$P_n = (1 - U) \cdot U^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Capítulo 6

Algunas Estadísticas importantes.

$E(N) =$ valor esperado (o promedio) de clientes en el sistema.

$E(W) =$ tiempo medio para ser atendido (tiempo de cola).

$E(L) =$ longitud esperada de la línea de espera (no incluye los clientes en servicio).

$E(T) =$ tiempo promedio se gasta en el sistema.

$$E(N) = \frac{U}{1-U} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$E(W) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$E(L) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Capítulo 6

Ejemplos del 6.1 al 6.5

Suponga que la tasa esperada de llegada es de 3 clientes por minuto, $\lambda = 3$.

Pregunta 1. ¿Cuál es el tiempo esperado entre llegadas, de los clientes individuales?

Pregunta 2. Supongamos que el servicio puede realizarse a una tasa esperada de $\mu = 4$ por minuto. ¿Cuál es el tiempo esperado entre dos servicios consecutivos?

Capítulo 6

Ejemplos del 6.1 al 6.5

Pregunta 3. Si la tasa de llegada es $\lambda = 30$ por hora y la tasa promedio de servicio es 40 por hora,

- ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega no tenga que esperar servicio?.
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya 0, 1, 2, 3, y 4 clientes en el sistema (en la cola y siendo servidos)?

Pregunta 4. Si $\lambda = 30$ por hora y $\mu = 40$ por hora, ¿$E(N)$, $E(L)$, $E(W)$ y $E(T)$?

Capítulo 6

Ejemplo 6.6.

La Nebraska Steak House se enfrenta al problema de determinar el número de meseros que debe utilizar en las horas pico. La Gerencia ha observado que el tiempo entre llegadas de los clientes es de cuatro minutos y el tiempo promedio para recibir y procesar un pedido es de 2 minutos. También ha observado que el patrón del número de llegadas sigue la distribución de Poisson y que los tiempos de servicio (o tiempo de procesamiento de un pedido) siguen una distribución exponencial negativa.

Capítulo 6

Ejemplo 6.6.

¿Cuál es la utilización actual de la capacidad de servicio existente?
¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega sea servido inmediatamente?
¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega encuentre una línea de espera de longitud "n" , n= 1, 2,...
¿Cuál es el número esperado de clientes en el sistema?
¿Cuál es la longitud esperada o promedio de la cola?
¿Cuál es el tiempo promedio que un cliente debe esperar en el sistema?
¿Cuál es el tiempo promedio de espera que un cliente gasta en la cola?

Capítulo 6

Ejemplo 6.7. ¿Quién es el mejor servidor?

La gerencia tiene que decidir a quién contrata entre dos mecánicos, X o Y. La frecuencia de daños en las máquinas en la planta se sabe que obedece a una distribución Poisson con una tasa $A = 1$ máquina por hora. La compañía pierde ingresos por máquinas paradas a razón de \$25 por hora. El mecánico X pide \$20 por hora y el mecánico Y pide \$ 12 por hora. Se sabe que X es capaz de reparar las máquinas a una tasa de 1.8 máquinas por hora y Y es capaz de repararlas a una tasa de 1.2 máquinas por hora.

Capítulo 6

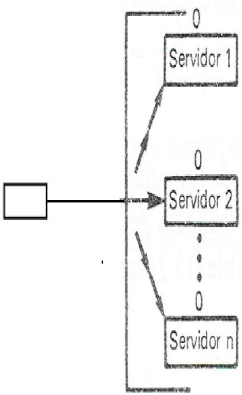
Ejemplo 6.7. ¿Quién es el mejor servidor?

1. ¿Cuál mecánico X o Y debe contratarse?
2. A cuánto debe, el mecánico Y, aumentar su velocidad de atención para equiparar los costos con el mecánico X
3. Si mantenemos las tasas originales de atención de los mecánicos X y Y, cuál deber ser la tasa de llegada para que se igualen los costos.

Capítulo 6

Línea de espera con varios servidores

- Cada paciente se forma en una sola línea y que cuando llega a la cabeza de ella, entra al primer cuarto de servicio que esté disponible.
- Este tipo de sistema no debe ser confundido con aquéllos en los que se forma una línea de espera frente a cada servidor, como en las tiendas de autoservicio.



Capítulo 6

Ejemplo 6.8.

Suponga que en un banco hay dos cajeros que atienden a sus clientes mediante una fila única. Suponga que las llegadas siguen una distribución de Poisson con $\lambda = 0.20$ clientes por minuto y que los tiempos de servicio (o tiempo de atención) siguen una distribución exponencial negativa con $\mu = 0.125$ por minuto por cajero. Halle la probabilidad de que no hayan clientes en la fila, la utilidad del sistema, la longitud promedio de la fila, el tiempo promedio de espera en la fila, el tiempo promedio de estadía en el sistema y las probabilidades de estado estacionario de que 0, 1 o 2 servidores estén ocupados.
¿Cuál debería ser la velocidad de atención de los servidores para lograr que el tiempo de estadía en el sistema sea 15 minutos?

Capítulo 6

Fórmulas Importantes.

1. Tasa de utilización para múltiples servidores.

$$U = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$$

2. $P_0 =$ Probabilidad de que el sistema se encuentre vacío

$$= \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s \cdot \mu}} \right) \right]^{-1}$$

3. $P =$ Probabilidad de que el sistema de colas en el modelo de *Poisson* de múltiples servidores esté ocupado i.e todos los servidores poseen clientes. $(n \geqslant s)$

$$= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \cdot \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}$$

Frame Title

Fórmulas Importantes.

4. $P_n =$ probabilidad de que existan n clientes en el sistema de colas.

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! \cdot s^{n-s}} P_0 & \text{si } n > s \\ \\ \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 & \text{si } n \leqslant s \end{cases}$$

Frame Title

Fórmulas Importantes.

5. $E(L) = P_0 \left[\dfrac{\lambda^{s+1}}{\mu^{s-1}(s-1)!(\mu s - \lambda)^2} \right]$
6. $E(N) = E(L) + \dfrac{\lambda}{\mu}$
7. $E(W) = \dfrac{E(L)}{\lambda}$
8. $E(T) = E(W) + \dfrac{1}{\mu}$

Capítulo 6

Ejercicios propuestos

	Clientes	Servidores
Una caseta de peaje en una carretera interestatal.		
Un servicio de ambulancias.		
Un muelle de descargue de barcos.		
Un equipo secretarial de mecanógrafas.		

Capítulo 6

Ejercicios propuestos

Una tripulación de una línea de vuelo de la fuerza aérea estima durante un período de alerta que pueden prestar servicio aéreo a la tasa de un avión cada 6 minutos. Durante un período de alerta de 24 horas se estima que cada hora aterrizarán siete aviones. La tripulación opera come un equipo simultáneamente en cada avión. Suponga aterrizajes de Poisson y una tasa de servicio exponencial.

Capítulo 6

Ejercicio propuesto continuación

Encuentre:

1. Utilización de cada una de las tripulaciones de la línea de vuelo.
2. Número promedio de aviones que esperan servicio.
3. Tiempo promedio que un avión está esperando servicio.
4. El tiempo total que un avión gasta en el sistema.

Capítulo 6

Ejercicios propuestos

Un centro de recepción de emergencia de un hospital de una gran ciudad tiene una tasa esperada de llegada de cinco casos por hora (Poisson). La estadística pasada muestra que los tiempos de servicio son en promedio de seis por hora (exponencial).

Capítulo 6

Ejercicio propuesto continuación

Encuentre:

1. ¿Cuántos casos están esperando, en promedio, la atención de un médico?.
2. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera en el centro hasta que un médico atiende una llegada?.
3. ¿Cuál es el número promedio de casos que se tratan?.

Capítulo 6

Ejercicios propuestos

Durante la hora "pico" entre 7 A.M. y 8:30 A.M., la llegada de clientes a un restaurante de autoservicio se puede caracterizar por una distribución de Poisson, en donde la tasa promedia de llegada es de cinco clientes por períodos de 6 minutos. Si el tiempo promedio de servicio es 0.5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de cuatro clientes estén esperando?

Capítulo 6

Ejercicios propuestos

FNCB de Harrisburgh planea operar una sucursal bancaria para servicio de automovilistas (de un solo servidor) en un centro comercial suburbano. Las estadísticas indican que los clientes llegan en promedio a una tasa de 20 por hora (Poisson). También, se estima que se necesitan en promedio 2 minutos para atender un cliente (exponencial).

1. ¿Qué fracción de tiempo estará vacía la sucursal?
2. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera de un cliente?