CHAPITRE 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

Contents

L'objet de ce chapitre est la définition et l'étude de la convergence de séries numériques. Dans tout ce chapitre, (u_n) représente une suite numérique (réelle ou complexe). La plupart des résultats ou propriétés présentés dans cette lécon sont pour les (u_n) suites réelles. Beaucoup de ces propriétés (ou analogues) se déduisent au cas de suites complèxes lorsque ces suites de partie rélle et de partie imaginaire respectivement vérifient les mêmes propriétés du cas des (u_n) rélles.

2.1 Généralités

DÉFINITION 2.1.1 *La suite de terme général $s_m = \sum_{k=n_0}^{m} u_k$ est appelée* **suite des sommes partielles (d'indice** m**)** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus simplement notée $\sum u_n$ et on parle alors de la **série de terme général** *u_n et on note "$\sum u_n$" cette série.*

REMARQUE 2.1.1 *La série de terme général u_n est aussi notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ (i,e $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$) ou $\sum_{n\geq n_0} u_n$ si u_n n'est défini qu'à partir de n_0.*

DÉFINITIONS 2.1.1 *Une série de terme général u_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in I}$ est convergente, c'est-à-dire : $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ existe et est finie.*

Dans ce cas on appelle somme de la série $\sum u_n$ le nombre

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} s_n.$$

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on appelle reste d'indice m de la cette série, la quantité notée $r_m = s - s_m = s - \sum_{n=n_0}^{m} u_n = \sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n$.

REMARQUE 2.1.2

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ a pour somme } s &\iff \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R} \\ &\iff \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |s - s_n| < \varepsilon) \end{aligned}$$

la suite des restes $(r_m)_{m\geq n}$ converge vers 0.

DÉFINITION 2.1.2 *Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.*

Attention !

1. Il faudra ne pas confondre les notations $\sum_{n\geq n_0} u_n$ (ou $\sum u_n$) et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
2. Les notations $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ n'ont de sens que si l'on a prouvé la convergence de la série.
3. La notation $\sum_{n\geq n_0} u_n$ (ou $\sum u_n$) représente la série que celle-ci converge ou non.

REMARQUE 2.1.3 *Si le terme général d'une série u_n est sous la forme $u_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de nombres réels, alors la somme partielle est :*

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} a_k\right) + i\left(\sum_{k=n_0}^{n} b_k\right).$$

Ainsi on a : $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent simultanement.

Dans ce cas on a le résultat évident suivant :

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (a_n + ib_n) = \left(\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k\right) + i\left(\sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k\right).$$

DÉFINITION 2.1.3 *Une série $\sum u_n$ est dite de Cauchy si la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de Cauchy. Cela revient à dire que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\sum u_n$ *est de Cauchy.*
2. $\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p,q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N \implies |s_p - s_q| < \varepsilon)$.
3. $\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p,q \in \mathbb{N}, (p > q \geq N \implies |\sum\limits_{k=q+1}^{p} u_k| < \varepsilon)$.

DÉFINITIONS 2.1.2

1. *Étudier la nature d'une série numérique consiste à étudier la convergence de la suite (s_n).*
2. *On dira que deux séries sont de même nature lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.*

2.2 Convergence des séries numériques

2.2.1 Propriétés générales

PROPOSITON 2.2.1 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, on suppose que ces deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes (i.e il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on a $u_n = v_n$) alors les deux séries sont de même nature.*

Preuve. En remarquant que

$$\sum_{n=n_0}^{m} u_n = \left(\sum_{n=n_0}^{p} u_n - \sum_{n=k_0}^{p} v_n \right) + \sum_{n=k_0}^{m} v_n,$$

on obtient le résultat ; car $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{p} u_n - \sum\limits_{n=k_0}^{p} v_n \right)$ est une quantité finie (indépendante de m). ∎

COROLLAIRE 2.2.1 *On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ si on lui rajout ou on lui retranche un nombre fini de termes.*

REMARQUE 2.2.1 *La proposition 2.2.1 permet de dire que les séries sont de même nature mais en cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.*

THÉORÈME 2.2.1 (DIVERGENCE GROSSIÈRE)
Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge. C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \implies \sum u_n \text{ diverge}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (s_{n+1} - s_n) \neq 0$. Ce implique que la suite (s_n) ne converge pas. ∎

PROPOSITON 2.2.2 *Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n. Si $\sum u_n$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ 0. C'est-à-dire*

$$\sum u_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Preuve. C'est la contraposée du Théorème 2.2.1 ∎

REMARQUE 2.2.2 *1. La réciproque de cette proposition est fausse, c'est-à-dire il existe des séries dont le terme général tend vers 0 mais qui divergent. Par exemple la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente (voir Proposition 2.2.6) bien qu'elle vérifie* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

PROPOSITON 2.2.3 *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes respectivement vers u et v. Alors*

1. *la série de terme général* $u_n + v_n$ *converge et sa somme est* $u + v$.
2. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la série de terme général* $\alpha \cdot u_n$ *est convergente et sa somme est* $\alpha \cdot u$.

Preuve. En exercice. ∎

PROPOSITON 2.2.4 *Toute série réelle ou complexe de Cauchy est convergente.*

Preuve. En exercice. ∎

2.2.2 Séries géométriques

DÉFINITION 2.2.1 *Une série géométrique est une série dont le terme général est de la forme* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \cdot q^n$ *avec* $a \neq 0$, $q \neq 0$ *des constantes.*

PROPRIÉTÉ 2.2.1 *Le calcul de la somme partielle d'une série géométrique est donné par la formule suivante :*

$$s_n = \begin{cases} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ \ q \neq 1 \\ a(n+1) & si\ \ q = 1. \end{cases}$$

Preuve. Le faire. ∎

PROPOSITON 2.2.5 *La série géométrique (de terme général* $a \cdot q^n$*) converge si et seulement si* $|q| < 1$. *Dans ce cas sa somme est* $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$

EXEMPLE 2.2.1 *La série de terme général* $\frac{1}{3\cdot 2^n}$ *est convergente car elle est géométrique de raison* $\frac{1}{2} < 1$. *Sa somme est* $\frac{2}{3}$.

2.2.3 Séries harmoniques

DÉFINITION 2.2.2 *Une série harmonique est une série dont le terme général est de la forme* $u_n = \frac{a}{n}$ *avec* $a \neq 0$ *(une constante).*

PROPOSITON 2.2.6 *Une série harmonique est divergente.*

Preuve.

1. Supposons que $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   Il suffit de montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de ses sommes partielles n'est pas une suite de Cauchy (et par conséquent n'admet pas de limite dans $\mathbb{R}$).
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k} \quad \text{et} \quad s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{a}{k} = s_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a}{k}.$$
   Alors
$$|s_{2n} - s_n| = |a| \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) = |a| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right).$$
   Or pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$\begin{aligned} & n+1 \leq n+k \leq 2n \\ & \frac{|a|}{2n} \leq \frac{|a|}{n+k} \leq \frac{|a|}{n+1} \\ & \frac{|a|}{2} \leq |s_{2n} - s_n| \leq \frac{|a|n}{n+1}. \end{aligned}$$
   Alors en prenant $\varepsilon = \frac{|a|}{10} > 0$, on a $|s_{2n} - s_n| > \varepsilon$. Donc la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy. Par conséquent $(s_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} s_n = l$.
   Or $(s_n)_{n\geq 1}$ est (une suite de nombres réels) strictement monotone car $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :
$$s_{n+1} - s_n = \begin{cases} \frac{a}{n+1} > 0 & \text{si } a > 0 \\ \frac{a}{n+1} < 0 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$
   On déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$.
2. Pour $a \in \mathbb{C}$, d'après la preuve ci-dessus, la série $\sum \frac{\mathscr{R}e(a)}{n}$ est divergente.

D'où le résultat. ∎

2.2.4 Séries télescopiques

DÉFINITION 2.2.3 *Une série télescopique est une série dont le terme général est de la forme $u_n = \pm(v_n - v_{n+p})$ avec $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite numériques et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

PROPRIÉTÉ 2.2.2 *Le calcul de la somme partielle d'une série télescopique est donné par la formule suivante :*
$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \begin{cases} \left(\sum_{k=n_0}^{n_0+p-1} v_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{p} v_{n+k} \right), & si\ \ u_k = v_k - v_{k+p} \\ \left(\sum_{k=1}^{p} v_{n+k} \right) - \left(\sum_{k=n_0}^{n_0+p-1} v_k \right), & si\ \ u_k = v_{k+p} - v_k. \end{cases}$$

Preuve. En exercice. ∎

En particulier si $p = 1$, on a
$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \begin{cases} v_{n_0} - v_{n+1} & \text{si } u_k = v_k - v_{k+1} \\ v_{n+1} - v_{n_0} & \text{si } u_k = v_{k+1} - v_k. \end{cases}$$

REMARQUE 2.2.3 *On remarque donc que la suite $(s_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ converge.*

EXEMPLE 2.2.2 *La série de terme général $u_n = \frac{2}{n(n+2)}$ est une série télescopique convergente car $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$. Sa somme est $s = \frac{3}{2}$ car $s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.*

EXERCICE 15 *Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{2\sqrt{3}}{(n-1)(n+5)}$.*

2.3 Séries à termes positifs

Dans cette section, toutes les séries seront à termes positifs à partir d'un certain rang. On rappelle que les premières valeurs de u_n n'influencent pas la nature de la série $\sum u_n$.

2.3.1 Convergence des séries positives

DÉFINITION 2.3.1 *On dit qu'une série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est à termes positifs si*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \geq 0.$$

REMARQUE 2.3.1 *La série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang si :*

$$\exists p \in \{n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots\} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ u_n \geq 0.$$

PROPRIÉTÉ 2.3.1 (CARACTÉRISATION DE CONVERGENCE) *Soit $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs (à partir d'un certain rang) et $(s_n)_{n\geq n_0}$ la suite des sommes partielles. On a alors :*

$$\sum_{n\geq n_0} u_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n)_{n\geq n_0} \quad \text{majorée}.$$

Preuve. $\Longrightarrow$) une suite convergente est majorée.

$\Longleftarrow$) La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante. C'est donc une conséquence du théorèmes de la limite monotone. ∎

REMARQUE 2.3.2

1. *Une série à termes positifs est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.*
2. *Pour étudier la nature d'une série numérique à termes positifs, on peut comparer (soit majorer, soit minorer selon l'objectif) son terme général un à celui d'une série dont la nature est connue (ou plus facile à déterminer).*

Bon à savoir :

Pour prouver que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (pour des suites positives), une méthode efficace consiste à étudier la limite de $\frac{u_n}{v_n}$.

Si cette limite existe et appartient à $[0, 1[$ alors on a $0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$ à partir d'un certain rang.

EXERCICE 16 *Etudier la convergence des séries de terme général :*

$$u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}, \quad v_n = \frac{1}{2^n - 1}, \quad w_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot \ln n}.$$

EXERCICE 17 *Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $d(x,\mathbb{Z})$ la distance à l'entier le plus proche de x.*

1. *Calculer $d(x,\mathbb{Z})$ en utilisant la fonction partie entière.*
2. *Justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(2^n x,\mathbb{Z})}{2^n}$ est une série à termes positifs convergente.*

REMARQUE 2.3.3 (IMPORTANT) *Les critères de dominance, d'équivalence et de négligeable (des termes généraux des séries) permettent aussi d'avoir les propriétés de même nature et de convergence des séries.*

THÉORÈME 2.3.1 (RÈGLE DE COMPARAISON LOGARITHMIQUE) *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout entier $n \geq n_0$. Alors on a :*

1. *$\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ converge.*
2. *$\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ diverge.*

Preuve.

1. u_n et v_n étant strictement positifs alors
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}.$$
Ce qui implique que $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ et on obtient $0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$. Or $\sum v_n$ converge. Par conséquent $\sum u_n$ converge.
2. Elle s'obtient par contraposée.

∎

THÉORÈME 2.3.2 (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE) *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$ avec $\ell \in]0,+\infty[$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Preuve.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \in]0,+\infty[\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},$$
$$n \geq N \Longrightarrow (\ell - \varepsilon) v_n < u_n < (\ell + \varepsilon) v_n.$$

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum (\ell+\varepsilon) v_n$. Donc $\sum u_n$ converge car $0 < u_n < (\ell+\varepsilon) v_n$.
- Si $\sum u_n$ converge alors en choisissant ε tel que $\ell - \varepsilon > 0$, on a $0 < (\ell-\varepsilon) v_n < u_n$. Donc $\sum v_n$ converge.

∎

COROLLAIRE 2.3.1 (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE) *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs (au moins à partir d'un certain rang). Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

EXEMPLE 2.3.1 *Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ sont de même nature car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+2^{-n})}{2^{-n}} = 1$.*

2.3.2 Critère de convergence de D'Alembert

PROPOSITON 2.3.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.*

1. *S'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \geq n_0$ alors la série converge.*
2. *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série diverge.*

Preuve.

1. Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda \in]0,1[$ pour tout $n \geq n_0$.
   On a $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \lambda \implies u_n \leq \lambda u_{n-1}$. Ce qui implique par réccurrence que $u_n \leq \lambda^{n-n_0} u_{n_0}$, et comme $0 < \lambda < 1$, la série géométrique $\sum \lambda_{n_0} \lambda^n$ est convergente. D'où $\sum u_n$ converge.
2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \implies u_n \leq u_{n+1}$ et comme $u_n > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$. Par conséquent $\sum u_n$ diverge.

∎

COROLLAIRE 2.3.2 (CRITÈRE DE D'ALEMBERT) *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.*

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| < \varepsilon.$$

1. Si $0 \leq \ell < 1$ alors on choisit ε tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Ainsi on a :
$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon < 1$$
   et d'après la Proposition 2.3.1, $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors on choisit ε tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \ell - \varepsilon > 1.$$
   Donc $\sum u_n$ diverge d'après la Proposition 2.3.1.

∎

EXEMPLE 2.3.2 *Soit la série $\sum\limits_{n \geq 1} n^\alpha e^{-n}$ converge car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$.*

EXERCICE 18

1. *Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.*
2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.*

2.3.3 Critère de convergence de Cauchy

PROPOSITON 2.3.2 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *S'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ alors la série diverge.*

Preuve.

1. $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda \implies u_n \leq \lambda^n$. Or comme $\lambda \in]0,1[$, la série géométrique $\sum \lambda^n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge.
2. $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1$, ainsi $\sum u_n$ diverge.

∎

COROLLAIRE 2.3.3 (CRITÈRE DE CAUCHY) *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.*

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |\sqrt[n]{u_n} - \ell| < \varepsilon.\\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies (\ell - \varepsilon) < \sqrt[n]{u_n} < (\ell + \varepsilon).\end{aligned}$$

1. Si $\ell < 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \ell + \varepsilon < 1$. Ainsi la série géométrique $\sum(\ell+\varepsilon)^n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. On a alors $u_n > (\ell - \varepsilon)^n > 1$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1$. Donc $\sum u_n$ diverge.

∎

EXERCICE 19 *Déterminer suivant les valeurs de a et b (paramètres réels) la nature de la série de terme général*

$$u_n = \left(a + \frac{1}{n^b}\right)^n, \quad a > 0,\ b \geq 0.$$

PROPOSITON 2.3.3 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}\\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \frac{\varepsilon}{2} > 0$ et on considère les $(n - n_0)$ doubles inégalitées

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_n}{u_{n-1}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2};\ \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2};\ \cdots;\ \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Une multiplication membre à membre donne

$$\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}<\frac{u_n}{u_{n_0}}<\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$$

qui implique que

$$\sqrt[n]{\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}}<\sqrt[n]{u_n}<\sqrt[n]{\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}}.$$

En posant $\alpha_n=\sqrt[n]{\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}}$ et $\beta_n=\sqrt[n]{\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}}$, on a :

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Longrightarrow \exists N_1\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\geq N_1,\ \alpha_n>\ell-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\ell-\varepsilon;$$
$$\left(\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)\Longrightarrow \exists N_2\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\geq N_2,\ \beta_n<\ell+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\ell+\varepsilon.$$

Alors pour tout $n\geq\max\{n_0,N_1,N_2\}$ on a :

$$\ell-\varepsilon<\alpha_n<\sqrt[n]{u_n}<\beta_n<\ell+\varepsilon.$$

Ce qui exprime bien que $\left|\sqrt[n]{u_n}-\ell\right|<\varepsilon$ pour tout $n\geq\max\{n_0,N_1,N_2\}$. D'où le résultat. ∎

REMARQUE 2.3.4 *La Proposition 2.3.3 n'est pas réciproque.*

En effet, soit la série de terme général défini par : $u_{2n}=2$ et $u_{2n+1}=3$. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=1\quad car\quad \sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}2^{\frac{1}{n}} & si\ n\ est\ pair\\ 3^{\frac{1}{n}} & si\ n\ est\ impair.\end{cases}$$

Par contre

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\ n'existe\ pas\ \ car\ \ \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{3}{2} & si\ n\ est\ pair\\ \frac{2}{3} & si\ n\ est\ impair.\end{cases}$$

Une meilleur autre remarque est que : **le critère de d'Alembert échoue parfois la où le critère de Cauchy réussit**.

EXEMPLE 2.3.3 *Soit la série $\sum u_n$ de terme général*

$$u_n=\begin{cases}\frac{2^k}{3^k} & si\ \ n=2k,\\ \frac{2^k}{3^{k+1}} & si\ \ n=2k+1.\end{cases}\qquad On\ a:\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{3} & si\ n\ est\ pair,\\ 2 & si\ n\ est\ impair.\end{cases}$$

Ainsi le critère de d'Alembert ne s'applique pas. Par contre,

$$\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{3}} & si\ \ n=2k,\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[n]{\frac{1}{3}} & si\ \ n=2k+1,\end{cases}\qquad c'est\text{-}à\text{-}dire\qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1,$$

la série converge d'après le critère de Cauchy.

EXERCICE 20 *1. Soit $u_n=\frac{n!}{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}$.*

(a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

(b) Déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2. Prouver que la série $\sum\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$ est dvergente.

2.3.4 Critère de convergence de Kummer

PROPOSITON 2.3.4 (CRITÈRE DE KUMMER)
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. *S'il existe $\lambda > 0$ tel que $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > \lambda$ alors la série converge.*
2. *Si $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq \lambda$ alors la série diverge.*

Preuve. En exercice. ∎

COROLLAIRE 2.3.4 (CRITÈRE DE RAABB) *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.*

1. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell\\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left|n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \ell\right| < \varepsilon\\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \ell - \varepsilon < n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < \ell + \varepsilon.
\end{aligned}$$

1. Si $\ell > 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$ et on pose $\lambda = \ell - \varepsilon$. Ainsi on a $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \lambda$ et d'après le critère de Kummer la série converge.
2. Si $\ell < 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$ et on pose $\lambda = \ell + \varepsilon$. Ainsi on a $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < \lambda$ et d'après le critère de Kummer la série diverge.

∎

2.4 Comparaison de Série et Intégrale

Cette méthode ne s'applique que lorsque la série est de la forme $\sum f(n)$ avec

$$f \begin{cases} \text{continue par morceaux} \\ \text{positive} & \text{sur } [n_0, +\infty[. \\ \text{décroissante} \end{cases}$$

PROPOSITON 2.4.1 *Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$, ($n_0 \in \mathbb{N}$). Alors on a*

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(x)dx.$$

Preuve. f étant fonction continue par morceaux, positive et décroissante on a

$$\begin{cases} f(x) \leq f(k), & \forall x \in [k, k+1] \\ f(k) \leq f(x), & \forall x \in [k-1, k] \end{cases} \implies \begin{cases} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \\ f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx. \end{cases}$$

C'est-à-dire que $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx$. Or

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \left(\int_k^{k+1} f(x)dx \right) = \int_{n_0+1}^{n_0+2} f(x)dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_{n_0+1}^{n+1} f(x)dx$$
$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} f(x)dx \right) = \int_{n_0}^{n_0+1} f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx = \int_{n_0}^{n} f(x)dx.$$

D'où le résulat ∎

THÉORÈME 2.4.1 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue (ou continue par morceaux), décroissante et à valeurs positive. On pose $u^n = f(n)$ pour tout $n \geq 1$. Alors*

$$\sum u_n \quad converge \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \quad converge.$$

Preuve. Elle vient de la Proposition 2.4.1. ∎

PROPOSITON 2.4.2 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et à valeurs positive. Alors la suite*

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx,$$

converge.

Preuve. On pourra vérifier que w_n est décroissante et minorée. ∎

COROLLAIRE 2.4.1 (CONSTANTE D'EULER)
Il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \; n \to +\infty.$$

Le réel γ est appelé **constante d'Euler**.

Preuve. C'est une application de la Proposition 2.4.2 à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. ∎
On a : $\gamma \simeq 0.577215665$.

2.5 Séries de Riemann

DÉFINITION 2.5.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; u_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les séries de Riemann sont donc des séries à termes positifs.

REMARQUE 2.5.1 *Il faut noter que si $\alpha \leq 0$ alors la série de Riemann ($\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$) diverge.*

En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & si\ \ \alpha < 0, \\ 1, & si\ \ \alpha = 0, \\ 0, & si\ \ \alpha > 0. \end{cases}$$

La condition nécéssaire de convergence n'est pas remplie lorsque $\alpha \leq 0$.

PROPOSITON 2.5.1 *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. Considérons la fonction $f_\alpha : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.
f_α est une fonction positive, continue et décroissante (car $f_\alpha(t) = -\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}$) sur $[1,+\infty[$. Ainsi $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$.
Par ailleurs

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_1^x f_\alpha(t)dt \right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha}-1\right), & \text{si}\ \ \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x, & \text{si}\ \ \alpha = 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{si}\ \ \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{si}\ \ \alpha > 1. \end{cases}$$

D'où le résultat. ∎

PROPOSITON 2.5.2 (RÈGLE DE RIEMANN)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. *S'il existe deux constantes $\alpha > 1$ et $M \geq 0$ telles que $0 \leq n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$ (où n_0 est un certain rang) alors la série $\sum u_n$ converge.*
   En particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ pour un certain $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit minorée par une constante $m > 0$ (c'est-à-dire il existe $\alpha \leq 1$ et il existe $m > 0$ telle que $n^\alpha u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$ ou (à partir d'un certain rang n_0), alors la série $\sum u_n$ est divergente.*
   En particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ pour un certain $\alpha \leq 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve.

1. Par hypothèse $0 \leq n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $0 \leq u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$. Par ailleurs la série $\sum \frac{M}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$. D'où la convergence de $\sum u_n$ lorsque $\alpha > 1$.
2. L'hypothèse ici est : $\alpha \leq 1$ et $n^\alpha u_n > m > 1$. Alors $u_n > \frac{m}{n^\alpha}$. Or la série $\sum \frac{m}{n^\alpha}$ est divergente pour $\alpha \leq 1$. Donc $\sum u_n$ diverge.

∎

COROLLAIRE 2.5.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$ avec $\ell \in]0,+\infty[$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.*

Preuve.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |n^\alpha u_n - \ell| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \ell - \varepsilon < n^\alpha u_n < \ell + \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{\ell - \varepsilon}{n^\alpha} < u_n < \frac{\ell+\varepsilon}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

En choisissant ε tel que $\ell - \varepsilon > 0$, on a le résultat. ∎

2.6 Séries de Bertrand

DÉFINITION 2.6.1 *On appelle série de Bertrand toute série $\sum u_n$ dont le terme général est défini pour tout entier $n \geq 2$ par :*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

PROPOSITON 2.6.1 *La série de Bertrand, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, converge si et seulement si $(\alpha > 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R})$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.*

Preuve. En exercice. ∎

EXERCICE 21 *Prouver que le critère de d'Alembert ne s'applique pas aux séries de Riemann et aux séries de Bertrand.*

2.7 Séries à termes quelconques

2.7.1 Séries Absolument convergentes

DÉFINITION 2.7.1 *Une série $\sum u_n$ (à termes quelconque) est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

REMARQUE 2.7.1 *Il est clair que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.*

EXEMPLE 2.7.1

1. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^3}$ est absolument convergente.*
2. *Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.*

PROPOSITON 2.7.1 *Toute série absolument convergente est convergente. Autrement dit*

$$\sum |u_n| \quad \textit{convergente} \quad \Longrightarrow \sum u_n \quad \textit{convergente}.$$

Preuve. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

1. Si u_n est réel, en posant $a_n = \max\{u_n, 0\}$ et $b_n = \max\{-u_n, 0\}$ on a $u_n = a_n + b_n$. Par ailleurs $a_n \leq |u_n|$ et $b_n \leq |u_n|$, donc les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent car la série $\sum |u_n|$ converge. Par suite $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.
2. Si u_n est complexe, on pose $a_n = \mathscr{R}e(u_n)$ et $b_n = \mathscr{I}m(u_n)$. Ainsi on a $u_n = a_n + \imath b_n$ et $a_n \leq |u_n|$ et $b_n \leq |u_n|$, donc les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent car la série $\sum |u_n|$ converge. Par suite $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

∎

REMARQUE 2.7.2 *La réciproque de la Proposition ci-dessus est fausse.*

EXEMPLE 2.7.2 *La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & si \;\; n = 2k, \\ \frac{-1}{k+1}, & si \;\; n = 2k+1, \end{cases}$ est convergente mais ne converge pas absolument.*

En effet, la suite (S_n) des sommes partielles de la série tend vers 0 car
$S_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & si \;\; n = 2k, \\ 0, & si \;\; n = 2k+1. \end{cases}$
D'autre part $|u_n| = \frac{1}{k+1}$, mais la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ ne converge pas.

DÉFINITION 2.7.2 *On dit qu'une série est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.*

La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ de l'exemple précédent est semi-convergente.

THÉORÈME 2.7.1 *Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors pour toute bijection $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ on a :*

1. *$\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente.*
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Preuve. En exercice. ∎

2.7.2 Critère d'Abel

THÉORÈME 2.7.2 (CRITÈRE D'ABEL) *Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,
2. *La série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge,*
3. *Les sommes partielles de la suite (b_n) sont bornées :*
$$\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} b_n\right| \leq M.$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Preuve. Pour tout $n\leq 0$, posons $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_n$. Par hypothèse, la suite (B_n) est bornée. Nous écrivons les sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_n &= a_0B_0 + a_1(B_1-B_0)+\cdots+a_n(B_n-B_{n-1}) \\ &= B_0(a_0-a_1)+B_1(a_1-a_2)+\cdots+B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+B_na_n. \end{aligned}$$

Comme (B_n) est bornée, et (a_n) tend vers 0, le terme B_na_n tend vers 0. Nous allons montrer que la série $\sum B_n(a_n-a_{n+1})$ est absolument convergente. En effet, $|B_n(a_n-a_{n+1})|\leq M\,|a_n-a_{n+1}|$ car (B_n) est bornée, et comme $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge (par hypothèse) alors la série $\sum B_n(a_n-a_{n+1})$ est absolument convergente. Par conséquent la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ converge. D'où la série converge ∎

COROLLAIRE 2.7.1 *Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que :*

1. *La suite (a_n) est une suite décroissante de réels positifs, et tend vers* 0.
2. *Les sommes partielles de la suite (b_n) sont bornées :*
$$\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n_0}^{n} b_k\right| \leq M.$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Preuve. Similaire à celle du Théorème précédent. ∎

COROLLAIRE 2.7.2 *Soit θ un réel tel que $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ et soit (a_n) est une suite décroissante de réels positifs, et tendant vers* 0 *à l'infini. Les séries suivantes sont convergentes :*

$$\sum a_n \exp(in\theta), \quad \sum a_n \sin(n\theta), \quad et \quad \sum a_n \cos(n\theta).$$

Preuve. C'est une application du critère d'Abel avec :

1. $b_n = \exp(in\theta)$.
   Vérifions que les sommes partielles de la suite $(e^{in\theta})$ sont bornées. Il faut noter que $(e^{in\theta})$ est une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$ (par hypothèse). Ainsi
   $$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{\left|1-e^{i\theta}\right|}.$$
2. La convergence des séries $\sum a_n \sin(n\theta)$ et $\sum a_n \cos(n\theta)$ est une conséquence de la convergence de $\sum a_n \exp(in\theta)$.

∎

Attention ! Il n'est pas possible de remplacer (a_n) par un équivalent dans le Théorème 2.7.2 ou le Corollaire 2.7.1, car la dcroissance n'est pas conservée par équivalence.

EXERCICE 22 *Soit α et θ deux nombres réels tel que $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$:*

1. *converge absolument pour tout $\alpha > 1$.*
2. *est semi-convergente pour tout $\alpha \in]0,1]$.*

2.7.3 Séries Alternées

Un cas particulier des séries dont le terme général est de la forme $u_n = a_n b_n$ avec $a_n > 0$ fréquemment rencontré est celui où $b_n = (-1)^n$. On parle de série alternée.

DÉFINITION 2.7.3 *On appelle série alternée toute série $\sum u_n$ vérifiant la relation*

$$u_n \cdot u_{n+1} \leq 0, \quad \textit{pour tout } n.$$

Le terme général d'une série alternée $\sum u_n$ peut-être noté sous la forme :

$$u_n = (-1)^n v_n \quad ou \quad u_n = (-1)^{n+1} v_n, \quad avec\ v_n \geq 0,\ \forall n.$$

On note souvent une série alternée est notée : $\sum(-1)^n |u_n|$.

THÉORÈME 2.7.3 (CRITÈRE DE LEIBNIZ)
Soit $\sum u_n$ une série alternée. On suppose que :

1. *La suite $|u_n|$ est décroissante.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Preuve. En exercice. ∎

EXEMPLE 2.7.3 *La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Donc semi-convergente.*

2.8 Complements : sommes de séries convergentes

Nous donnons ici certaines sommes, de séries convergentes, dont la plupart peuvent être obtenues sur $\mathbb{R}$ par les formules de Taylor.

PROPOSITON 2.8.1 (ADMISE) *La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est converge (absolument) et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

PROPOSITON 2.8.2 *Soit $|x| < 1$. Les séries $\sum nx^n$ et $\sum n^2x^n$ converge absolument et on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

Preuve. En exercice. ∎

THÉORÈME 2.8.1 (FORMULE DU BINÔME GÉNÉRALISÉE)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$. La série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = (1+x)^\alpha.$$

En particulier, pour $\alpha = -(r+1)$ avec $r \in \mathbb{N}$,

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n)}{n!}x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

ou encore :

COROLLAIRE 2.8.1 (FORMULE DU BINÔME NÉGATIF)
Soit $r \in \mathbb{N}$. Pour tout $|x| < 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{r+n}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

En multipliant cette égalité par $r!$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

PROPOSITON 2.8.3 (SÉRIES EXPONENTIELLES)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^{n+k}}{n!}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n+k}}{n!} = z^k e^z.$$

PROPOSITON 2.8.4 (SÉRIES LOGARITHMIQUES)
Pour tout $x \in]-1,1]$, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \ln(1+x).$$

On parle du développement en série de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

EXEMPLE 2.8.1 *Le développement en série de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est*

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

EXERCICE 23

1. *Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ est développable en série sur $]-1,1[$ puis donner ce développement en série.*
2. *En déduire celui de la fonction $x \mapsto -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. Cette fonction est appelée* **dilogarithme** *et est notée $Li2$ (c'est-à-dire $Li2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$).*

2.9 Exercices du Chapitre 2

Les exercices seront donnés dans les **fiches** 5 **et** 6 **de TD**.