Esercizi geometria 2 settimana

Alessandro Rondinelli

prima settima ottobre 2024

Seconda settimana

Sono esercizi che riguardano il concetto di spazio vettoriale, sottospazio, basi e dimensione

Esercizio 1

Sia $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'indeterminata t e di grado al più 2. Sia dato il sistema di vettori (equivalentemente polinomi):

$$S := \{1 - x, 1 + x, 1 - x^2, 1 + x^2, x - x^2, x + x^2\}.$$

(i) Stabilire se S è un sistema di vettori linearmente indipendenti (equivalentemente libero).

Affinché il sistema di vettori sia linearmente indipendente, dobbiamo vericare che l'unica soluzione alla combinazione lineare di questi vettori sia la soluzione banale (cioé affinche sia verificata tutti i coefficenti scalari $a_1; a_2 ... a_n$ associati a ciascun vettore devono essere nulli).

Consideriamo quindi una combinazione lineare dei vettori in S:

$$a_1(1 - x) + a_2(1 + x) + a_3(1 - x^2) + a_4(1 + x^2) + a_5(x - x^2) + a_6(x + x^2) = 0$$

Espandendo e raccogliendo i termini con potenze simili di x, dato che $\mathbb{R}[t]_{\leq 2} = \text{span}\{1, t, t^2\}$:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (-a_1 + a_2 + a_5 + a_6)x + (-a_3 + a_4 - a_5 + a_6)x^2 = 0$$

Perché questa uguaglianza sia valida per ogni valore di x, è necessario che ciascun coefficiente sia uguale a zero:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_1 + a_2 + a_5 + a_6 = 0 \\ -a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema di tre equazioni lineari nelle sei incognite $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Per determinare se i vettori sono linearmente indipendenti, dobbiamo verificare se l'unica soluzione è quella in cui tutti i coefficienti sono uguali a zero. Senza risolvere il sistema possiamo affermare che i vettori non siano linearmente indipendenti dato che sappiamo che lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 è generato da $\{1, t, t^2\}$ e quindi avrà dimensione 3; mentre il sistema è composto da sei vettori(polinomi)... infatti questo spazio vettoriale non può avere più di 3 vettori linearmente indipendenti.

- (ii) In caso S risulti un sistema legato, estrarre da S un sottosistema S' di vettori linearmente indipendenti (equivalentemente con S' libero) che sia anche un sistema di generatori per lo spazio vettoriale V (in altri termini vogliamo estrarre da S una base S' per V).

Poiché il sistema $S = \{1-x, 1+x, 1-x^2, 1+x^2, x-x^2, x+x^2\}$ risulta essere un sistema di vettori linearmente dipendenti nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, possiamo estrarre un sottosistema $S' \subseteq S$ che sia linearmente indipendente e che generi lo spazio V, ossia una base di V.

Dato che V è lo spazio dei polinomi di grado al più 2, quindi ha dimensione 3 e una possibile base è $\{1, t, t^2\}$.

- (iii) Determinare i pesi (o coefficienti) del vettore (cioè del polinomio) $p(x) := 10 - 7x - x^2 \in V$ quando $p(x)$ si scrive come combinazione lineare dei vettori selezionati nel sottosistema (o base) S' determinato al punto (ii).

Consideriamo il polinomio $p(x) = 10 - 7x - x^2$ e scriviamolo rispetto alla base standard dei polinomi di grado al più 2, ovvero $\{1, t, t^2\}$:

$$p(x) = 10 \cdot 1 + (-7) \cdot t + (-1) \cdot t^2$$

Quindi, possiamo scrivere:

$$p(x) = 10 - 7t - t^2$$

I coefficienti del polinomio rispetto alla base standard sono:

$$\alpha_1 = 10, \quad \alpha_2 = -7, \quad \alpha_3 = -1$$

- (iv) Determinare almeno due espressioni differenti di $p(x)$ quando esso si scrive come combinazione lineare dei vettori (o polinomi) nel sistema di generatori S.

Scriviamo il polinomio $p(x) = 10 - 7x - x^2$ come combinazione lineare dei vettori in $S = \{1 - x, 1 + x, 1 - x^2, 1 + x^2, x - x^2, x + x^2\}$:

$$p(x) = a_1(1-x) + a_2(1+x) + a_3(1-x^2) + a_4(1+x^2) + a_5(x-x^2) + a_6(x+x^2)$$

Espandiamo e raccogliamo i termini con potenze simili di x:

$$p(x) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (-a_1 + a_2 + a_5 + a_6)x + (-a_3 + a_4 - a_5 + a_6)x^2$$

Confrontando con $p(x) = 10 - 7x - x^2$, otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 \\ -a_1 + a_2 + a_5 + a_6 = -7 \\ -a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = -1 \end{cases}$$

Prima Soluzione: Poniamo $a_3 = 0$, $a_5 = 0$. Risolvendo il sistema otteniamo:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -1$$

Quindi:

$$p(x) = 2(1-x) + 9(1+x) - 1(x+x^2)$$

che svolgendolo diventa

$$p(x) = 11 + 6x - x^2$$

Seconda Soluzione: Poniamo $a_4 = 0$, $a_6 = 0$. Risolvendo il sistema otteniamo:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 2, \quad a_6 = 0$$

Quindi:

$$p(x) = 1(1-x) + 10(1+x) + 1(1-x^2) + 2(x-x^2)$$

che svolgendolo diventa

$$p(x) = 12 + 11x - 3x^2$$

La cosa importante è capire che le possibili combinazioni dato che i 6 vettori sono linearmente dipendenti sono infinite

Esercizio 2

Sia come sopra $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'indeterminata t e di grado al più 2. Si consideri il sottoinsieme W di V definito da:

$$W := \{p(t) \in V \mid p(2) = 0\} \subset V$$

- **(i) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale proprio e non-banale di V.**

Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale proprio e non-banale di V, dobbiamo mostrare che W soddisfa le proprietà di un sottospazio vettoriale e che non coincide con V o con lo spazio contenente solo il vettore nullo.

Definizione degli spazi V e W:

- $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$: è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti reali. Gli elementi di V sono del tipo $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, con $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.
- $W := \{p(t) \in V \mid p(2) = 0\} \subset V$: è il sottoinsieme dei polinomi di V che si annullano in $t = 2$.

Dobbiamo dimostrare che W è un sottospazio vettoriale: Per verificare che W è un sottospazio vettoriale di V, dobbiamo verificare tre proprietà:

1. **Chiusura rispetto all'addizione**:
   Siano $p_1(t), p_2(t) \in W$, quindi $p_1(2) = 0$ e $p_2(2) = 0$. Consideriamo la somma $p_3(t) = p_1(t) + p_2(t)$. Abbiamo:

   $$p_3(2) = p_1(2) + p_2(2) = 0 + 0 = 0$$

   Quindi $p_3(t) \in W$, e W è chiuso rispetto all'addizione.

2. **Chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare**:
   Sia $p(t) \in W$ e $c \in \mathbb{R}$. Consideriamo il polinomio $q(t) = c \cdot p(t)$. Allora:

   $$q(2) = c \cdot p(2) = c \cdot 0 = 0$$

   Quindi $q(t) \in W$, e W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

3. **Contiene il vettore nullo**:
   Il polinomio nullo $p(t) = 0$ appartiene a W, poiché $p(2) = 0$. Quindi W contiene il vettore nullo.

Queste tre proprietà dimostrano che W è un sottospazio vettoriale di V.

W non contiene solo il polinomio nullo,oò fatto che p(2)=0 non significa che il polinomio sia identicamente nullo ovunque, ma solo che ha una radice in t=2. Ad esempio, il polinomio $p(t) = (t-2) \in W$ si annulla quando t=2 ma non è nullo in tutti i punti poiché assume valori diversi da zero per altri valori di t. Questo dimostra che W non contiene solo il polinomio nullo, ma anche altri polinomi con un certo grado purché soddisfino la condizione p(2)=0 come anche $p(t) = t^2 - 4t + 4$.

Inoltre W non coincide con tutto lo spazio V, perché ci sono polinomi in V che non si annullano in $t = 2$, come ad esempio il polinomio $p(t) = 1$. Di conseguenza, W è un sottospazio proprio di V.

- **(ii)Determinare un sistema di generatori S che sia anche libero per il sottospazio vettoriale W , cioe' che sia una base per W (in altri termini W = Span(S) dove S libero).**

er determinare un sistema di generatori che sia anche una base del sottospazio vettoriale W, dobbiamo prima capire meglio la struttura di W.

Definizione degli spazi V e W

- Lo spazio $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2, quindi ogni polinomio in V è del tipo:

  $$p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0, \quad \text{con } a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

  Questo significa che la dimensione di V è 3.

- Il sottospazio W è definito come l'insieme dei polinomi in V che si annullano in $t = 2$, cioè:

  $$W = \{p(t) \in V \mid p(2) = 0\}.$$

  Per trovare una base di W, dobbiamo determinare i polinomi che appartengono a V e che soddisfano la condizione $p(2) = 0$.

La condizione $p(2) = 0$ impone una relazione sui coefficienti di un polinomio generico di V:

$$p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$p(2) = a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0$$

Questa equazione rappresenta una relazione lineare tra i coefficienti a_2, a_1, a_0. Ciò significa che W è un sottospazio di dimensione 2, poiché una relazione lineare tra tre coefficienti implica un vincolo e riduce di 1 la dimensione. Inizialmente

V ha 3 gradi di libertà (uno per ciascun coefficiente a_2, a_1, a_0). Questa relazione $4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0$ riduce i gradi di libertà a 2 perché possiamo esprime uno dei coefficienti in funzione degli altri 2. Ad esempio, possiamo in questo caso scrivere $a_0 = -4a_2 - 2a_1$.

Per determinare una base, cerchiamo due polinomi linearmente indipendenti che soddisfano $p(2) = 0$. Una strategia consiste nel risolvere la relazione $4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0$ per trovare due polinomi linearmente indipendenti.

Consideriamo due polinomi generici di V che soddisfano la condizione di annullarsi in $t = 2$. Riscriviamo la relazione $4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0$ in termini di uno dei coefficienti:

$$a_0 = -4a_2 - 2a_1$$

Quindi, un polinomio generico in W è della forma:

$$p(t) = a_2t^2 + a_1t + (-4a_2 - 2a_1)$$

$$p(t) = a_2(t^2 - 4) + a_1(t - 2)$$

Questo suggerisce che i polinomi t^2-4 e $t-2$ formano un insieme di generatori per W. Verifichiamo ora che siano linearmente indipendenti.

$t^2 - 4$ e $t - 2$ sono chiaramente linearmente indipendenti, poiché il primo è di grado 2 e il secondo di grado 1.

Un sistema di generatori libero (cioè una base) per il sottospazio W è dato da:

$$S = \{t^2 - 4, t - 2\}$$

Questo significa che:

$$W = \text{Span}(S)$$

e S è linearmente indipendente, quindi costituisce una base per W. La dimensione di W è 2.

- **(iii) Estendere il sistema di vettori S determinato al punto (ii) ad un sistema B libero e di generatori per lo spazio vettoriale V (cioe' estendere S ad una base per tutto V).**

Il problema richiede di estendere il sistema di vettori S determinato in precedenza a una base B per lo spazio vettoriale V. Ricordiamo che:

- $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2, con dimensione $\dim(V) = 3$.
- W è il sottospazio di dimensione 2 costituito dai polinomi che si annullano in $t = 2$, e $S = \{t^2 - 4, t - 2\}$ è una base per W.

Per estendere la base S di W a una base di tutto lo spazio V, dobbiamo aggiungere un vettore che sia linearmente indipendente rispetto ai vettori in S e che completi la dimensione di V. Dal momento che $\dim(W) = 2$ e $\dim(V) = 3$, abbiamo bisogno di un ulteriore vettore per arrivare a una dimensione complessiva di 3.

La base $S = \{t^2 - 4, t - 2\}$ è costituita da polinomi di grado 2 e 1 rispettivamente, entrambi si annullano in $t = 2$. Per trovare un vettore aggiuntivo che sia linearmente indipendente da questi, possiamo scegliere un polinomio che non si annulli in $t = 2$. Una scelta naturale è il polinomio costante 1, poiché è chiaramente indipendente rispetto ai polinomi $t^2 - 4$ e $t - 2$.

Quindi consideriamo il sistema:

$$B = \{t^2 - 4, t - 2, 1\}$$

Dobbiamo verificare che i vettori in B siano linearmente indipendenti. Consideriamo una combinazione lineare dei vettori in B uguale al polinomio nullo:

$$a(t^2 - 4) + b(t - 2) + c \cdot 1 = 0$$

$$at^2 + bt + (-4a - 2b + c) = 0$$

Affinché questa combinazione sia identicamente nulla, devono valere le seguenti condizioni:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad -4a - 2b + c = 0 \implies c = 0$$

Poiché l'unica soluzione è $a = b = c = 0$, i polinomi in B sono linearmente indipendenti.

Il sistema $B = \{t^2 - 4, t - 2, 1\}$ è una base per lo spazio vettoriale V, poiché è costituito da tre vettori linearmente indipendenti che generano V. Quindi, abbiamo esteso la base S di W a una base di tutto lo spazio V.

- **Scrivere il polinomio $x \in V \setminus W$ come combinazione lineare dei vettori (o polinomi) nella base B trovato al punto (iii), indicando i pesi della combinazione lineare trovata.**

Per scrivere un polinomio $x \in V \setminus W$ come combinazione lineare dei vettori della base B trovata al punto precedente, dobbiamo prima scegliere un polinomio che appartenga allo spazio vettoriale V, ma non al sottospazio W.

La base B trovata per lo spazio vettoriale V è data da:

$$B = \{t^2 - 4, t - 2, 1\}$$

Consideriamo un polinomio $x \in V \setminus W$, per esempio:

$$x(t) = t^2 + t + 1$$

Ora vogliamo scrivere il polinomio $x(t) = t^2 + t + 1$ come combinazione lineare degli elementi della base B:

$$x(t) = a(t^2 - 4) + b(t - 2) + c \cdot 1$$

Sviluppiamo la combinazione lineare per determinare i coefficienti a, b, c:

$$x(t) = a(t^2 - 4) + b(t - 2) + c$$

$$= at^2 - 4a + bt - 2b + c = act^2 + bt + c - 2b - 4a$$

Ora confrontiamo questo polinomio con $x(t) = t^2 + t + 1$ e determiniamo i coefficienti a, b, c uguagliando i termini con lo stesso grado:

- **Termine di grado 2**: $at^2 = t^2 \implies a = 1$
- **Termine di grado 1**: $bt = t \implies b = 1$
- **Termine costante**: $c - 2b - 4a = 1$

$$-4(1) - 2(1) + c = 1$$

$$-4 - 2 + c = 1 \implies c = 7$$

Il polinomio $x(t) = t^2 + t + 1$ può essere scritto come combinazione lineare degli elementi della base B con i seguenti pesi:

$$x(t) = 1 \cdot (t^2 - 4) + 1 \cdot (t - 2) + 7 \cdot 1$$

Quindi:

$$x(t) = (t^2 - 4) + (t - 2) + 7$$

I pesi della combinazione lineare sono $a = 1$, $b = 1$, e $c = 7$.

Esercizio 3

Lo spazio vettoriale $V = M(2, 2)$ delle matrici 2×2 ha dimensione 4. Ogni matrice 2×2 può essere scritta come una combinazione lineare di 4 matrici elementari:

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \mid a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi la dimensione di V è 4, poiché le componenti della matrice possono variare indipendentemente.

Passiamo ora al sottospazio U_1, definito come:

$$U_1 := \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in V \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\}$$

Questo significa che il sottospazio U_1 contiene tutte le matrici 2×2 per cui gli elementi fuori dalla diagonale sono uguali, ovvero di forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Per determinare una base per U_1, scriviamo una matrice generica di U_1 come combinazione lineare di matrici elementari:

$$A = a_{1,1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{1,2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{2,2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi una base per U_1 è data dalle seguenti tre matrici:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Il sottospazio U_1 ha dimensione 3, poiché ci sono tre matrici linearmente indipendenti che lo generano.

In conclusione, la base S per il sottospazio U_1 contiene 3 matrici.

- Dato il vettore (equivalentemente la matrice)

  $$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in V$$

  verifichiamo se $A \in U_1$.

$$U_1 := \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in V \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\}$$

La matrice A è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Confrontiamo gli elementi fuori dalla diagonale:

- L'elemento $a_{1,2} = 2$
- L'elemento $a_{2,1} = 2$

Poiché $a_{1,2} = a_{2,1}$, la matrice A soddisfa la condizione di appartenenza al sottospazio U_1.

Quindi possiamo concludere che:

$$A \in U_1$$

- (iii)

Scriviamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori del sottospazio U_1, che ha come base il sistema di vettori:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Chiamiamo questi vettori:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare i coefficienti c_1, c_2, c_3 tali che:

$$A = c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3$$

Espandiamo questa combinazione lineare:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Sappiamo che:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Per ottenere i coefficienti, eguagliamo i termini corrispondenti:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi, la matrice A può essere scritta come:

$$A = 1 \cdot B_1 + 2 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Quante scritture sono possibili?

Poiché S è una base per il sottospazio U_1 e la dimensione di U_1 è 3, la scrittura della matrice A come combinazione lineare rispetto ai vettori della base S è unica. Questo è garantito dal fatto che una base di uno spazio vettoriale genera una rappresentazione univoca per ogni vettore appartenente a quello spazio.

Pertanto, esiste **una sola scrittura** possibile di A rispetto al sistema di vettori S.

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ siano assegnati i seguenti vettori: $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, -1, 3)$. Si consideri inoltre il vettore $w = (1, 0, 2)$.

- **(i) Scrivere le componenti del vettore arbitrario appartenente a** $W := \mathbf{Span}(w) \subset \mathbb{R}^3$

Il sottospazio W è definito come lo span del vettore w nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$. In altre parole:

$$W := \text{Span}(w) \subset \mathbb{R}^3$$

dove $w = (1, 0, 2)$.

Poiché W è generato dal vettore w, i vettori in W sono tutti multipli scalari di w. Questo significa che un vettore arbitrario $v \in W$ può essere scritto come:

$$v = k \cdot w$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è uno scalare arbitrario. Utilizzando il vettore $w = (1, 0, 2)$, otteniamo:

$$v = k \cdot (1, 0, 2) = (k \cdot 1, k \cdot 0, k \cdot 2) = (k, 0, 2k)$$

Le componenti di un vettore arbitrario appartenente a W sono:

$$(k, 0, 2k), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

Questo significa che qualsiasi vettore in W ha la forma $(k, 0, 2k)$, dove k è uno scalare reale.

- **(ii)Verificare che**

$$S := \{v_1, v_2, v_3\}$$

è una base per $\mathbb{R}^3$

Per verificare che i vettori v_1, v_2, v_3 rappresentino una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dobbiamo dimostrare che:

1. Sono linearmente indipendenti.
2. Generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$.

I vettori sono:

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, -1, 3)$$

Per verificare l'indipendenza lineare e che i vettori generino lo spazio, possiamo calcolare il determinante della matrice formata dai vettori v_1, v_2, v_3 come colonne. Se il determinante è diverso da zero, i vettori sono linearmente indipendenti e formano una base per $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo la matrice A utilizzando v_1, v_2, v_3 come colonne:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Calcoliamo il determinante tramite lo sviluppo di Laplace per la prima colonna:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0)$$

$$= -(3 + 1) - (1) = -4 - 1 = -5$$

Il determinante è -5, che è diverso da zero. Questo significa che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e quindi rappresentano una base per $\mathbb{R}^3$.

- **(iii) Scrivere il vettore w come combinazione lineare dei vettori della base S**

Per scrivere il vettore w come combinazione lineare dei vettori della base $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, dobbiamo determinare i coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$w = av_1 + bv_2 + cv_3$$

Definizione dei vettori I vettori sono:

- $v_1 = (0, 1, -1)$
- $v_2 = (1, 0, 1)$
- $v_3 = (1, -1, 3)$
- $w = (1, 0, 2)$

Scriviamo w come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3:

$$(1, 0, 2) = a(0, 1, -1) + b(1, 0, 1) + c(1, -1, 3)$$

Espandiamo l'espressione per ottenere un sistema lineare:

$$(1, 0, 2) = (a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1,\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot (-1),\ a \cdot (-1) + b \cdot 1 + c \cdot 3)$$

Questo equivale al sistema:

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a - c = 0 \\ -a + b + 3c = 2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

1. Dalla seconda equazione, $a - c = 0 \Rightarrow a = c$.
2. Sostituendo nella prima equazione, $b + c = 1 \Rightarrow b = 1 - c$.
3. Sostituendo $a = c$ e $b = 1 - c$ nella terza equazione:
$$-c + (1 - c) + 3c = 2$$
$$-c + 1 - c + 3c = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$
4. Quindi, $a = 1$ e $b = 1 - 1 = 0$.

Il vettore w può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base S con i seguenti coefficienti:

$$w = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

Quindi:

$$w = v_1 + v_3$$

- (iv) Considerando $u := v_1 - 2v_2 + v_3$ crivere i pesi del vettore u quando esso si esprime come combinazione lineare dei vettori canonici $\{e_1; e_2; e_3\}$ (in altri termini si chiede di determinare le componenti del vettore $u \in \mathbb{R}^3$)

Per determinare i pesi del vettore u quando viene espresso come combinazione lineare dei vettori canonici $\{e_1, e_2, e_3\}$ nello spazio $\mathbb{R}^3$, dobbiamo prima calcolare le componenti del vettore u dato. Successivamente, queste componenti saranno direttamente i pesi rispetto alla base canonica.

I vettori assegnati sono:

- $v_1 = (0, 1, -1)$
- $v_2 = (1, 0, 1)$
- $v_3 = (1, -1, 3)$

Il vettore u è definito come:

$$u := v_1 - 2v_2 + v_3$$

Per calcolare u, sostituiamo i vettori v_1, v_2, v_3:

$$u = (0, 1, -1) - 2(1, 0, 1) + (1, -1, 3)$$

Espandiamo ciascun termine:

$$-2v_2 = (-2, 0, -2)$$

Quindi:

$$u = (0, 1, -1) + (-2, 0, -2) + (1, -1, 3)$$

Calcoliamo la somma componente per componente:

- **Componente** x: $0 - 2 + 1 = -1$
- **Componente** y: $1 + 0 - 1 = 0$
- **Componente** z: $-1 - 2 + 3 = 0$

Quindi:

$$u = (-1, 0, 0)$$

Ora determiniamo i Pesi Rispetto alla Base Canonica...
I vettori canonici in $\mathbb{R}^3$ sono:

- $e_1 = (1, 0, 0)$
- $e_2 = (0, 1, 0)$
- $e_3 = (0, 0, 1)$

Il vettore $u = (-1, 0, 0)$ può essere scritto come:

$$u = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

I pesi del vettore u rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono:

$$-1, 0, 0$$

Quindi le componenti del vettore $u \in \mathbb{R}^3$ sono $(-1, 0, 0)$.

Esercizio 5

Come nell'esercizio 4 si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ ed i vettori

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, -1, 3)$$

- **Determinare la dimensione di Span $\{v_1\}$ e descrivere due basi differenti di questo sottospazio**

Il sottospazio Span$\{v_1\}$ è definito come l'insieme di tutti i multipli scalari del vettore v_1. In altre parole:

$$\text{Span}\{v_1\} = \{k \cdot v_1 \mid k \in \mathbb{R}\}$$

Il vettore v_1 è un vettore non nullo, quindi lo span di v_1 rappresenta una retta passante per l'origine nello spazio $\mathbb{R}^3$.

La dimensione di questo sottospazio è **1**, poiché è generato da un solo vettore linearmente indipendente.

Una base per Span$\{v_1\}$ è costituita da qualsiasi vettore che sia un multiplo non nullo di v_1. Possiamo fornire due basi differenti per questo sottospazio:

- **Prima Base: Utilizzare il Vettore Originale**
  Una base naturale per il sottospazio Span$\{v_1\}$ è il vettore stesso v_1:

  $$B_1 = \{v_1\} = \{(0, 1, -1)\}$$

- **Seconda Base: Utilizzare un Multiplo di v_1**
  Un'altra base può essere ottenuta prendendo un qualsiasi multiplo non nullo di v_1. Ad esempio, possiamo considerare il vettore $2v_1 = (0, 2, -2)$:

  $$B_2 = \{2v_1\} = \{(0, 2, -2)\}$$

- **(ii) Determinare la dimensione di Span$\{v_1, v_2\}$ e descrivere due basi differenti di questo sottospazio**

I vettori dati sono:

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, 0, 1)$$

Lo span di v_1 e v_2 è definito come l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori:

$$\text{Span}\{v_1, v_2\} = \{av_1 + bv_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Per determinare la dimensione di $\text{Span}\{v_1, v_2\}$, dobbiamo verificare se i vettori sono linearmente indipendenti o dipendenti. Se sono linearmente indipendenti, allora formano una base di dimensione 2.

Discutiamo l'indipendenza lineare tra v_1 e v_2:

$$av_1 + bv_2 = (0, 0, 0)$$

Sostituendo i vettori v_1 e v_2:

$$a(0, 1, -1) + b(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Espandendo, otteniamo:

$$(0, a, -a) + (b, 0, b) = (0, 0, 0)$$

$$(b, a, -a + b) = (0, 0, 0)$$

Da cui si ricava il sistema:

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $a = 0$ e $b = 0$, quindi i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, la dimensione di $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ è **2**.

Dato che sono linearmente indipendenti e generatori, una base per $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ può essere costituita dai vettori v_1 e v_2 stessi, oppure da qualsiasi coppia di vettori linearmente indipendenti ottenuti come combinazioni lineari di v_1 e v_2.

- **Prima Base: Utilizzare i Vettori Originali**
  Una base naturale per il sottospazio $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ è costituita dai vettori stessi v_1 e v_2:
  $$B_1 = \{v_1, v_2\} = \{(0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$$

- **Seconda Base: Utilizzare una Combinazione Lineare dei Vettori**
  Un'altra base può essere ottenuta prendendo una combinazione lineare dei vettori. Ad esempio, possiamo considerare i vettori v_1 e $v_1 + v_2$... il vettore $v_1 + v_2$ è una combinazione lineare di v_1 e v_2, pertanto il vettore $v_1 + v_2$ si trova nello span di v_1 e v_2. Di conseguenza, ogni combinazione lineare di v_1 e $v_1 + v_2$ può essere espressa come una combinazione lineare di v_1 e v_2.:
  $$B_2 = \{v_1, v_1 + v_2\} = \{(0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$$

- **Determinare la dimensione di Span $\{v_1; v_2; v_3\}$ e descrivere due basi differenti di questo sottospazio.**

I vettori dati sono:

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, -1, 3)$$

Lo span di v_1, v_2, e v_3 è definito come l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori:

$$\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Per determinare la dimensione di Span$\{v_1, v_2, v_3\}$, dobbiamo verificare se i vettori sono linearmente indipendenti. Questo può essere fatto calcolando il determinante della matrice che ha v_1, v_2, v_3 come colonne.

Costruiamo la matrice A utilizzando v_1, v_2, v_3 come colonne:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Utilizziamo l'espansione per la prima riga:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcoliamo i determinanti dei minori:

$$\det(A) = -1 \cdot (1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1)) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1))$$

$$\det(A) = -1 \cdot (3 - 1) + 1 \cdot 1 = -1 \cdot 2 + 1 = -2 + 1 = -1$$

Poiché il determinante è diverso da zero ($\det(A) = -1 \neq 0$), i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per $\mathbb{R}^3$.

La dimensione di Span$\{v_1, v_2, v_3\}$ è quindi 3, che coincide con la dimensione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

Quali sono due basi Differenti per Span$\{v_1, v_2, v_3\}$?

Poiché i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e formano una base per $\mathbb{R}^3$, possiamo descrivere due diverse basi:

1. **Prima Base: Utilizzare i Vettori Originali**
   La prima base può essere costituita dai vettori stessi:

$$B_1 = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(0, 1, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 3)\}$$

2. **Seconda Base: Utilizzare una Combinazione Lineare dei Vettori** Una seconda base può essere ottenuta combinando i vettori in modo diverso. Ad esempio, possiamo mantenere v_1 e v_2, e prendere la combinazione lineare $v_1 + v_3$:

$$B_2 = \{v_1, v_2, v_1 + v_3\} = \{(0, 1, -1), (1, 0, 1), (1, 0, 2)\}$$

Entrambe le basi, B_1 e B_2, sono costituite da tre vettori linearmente indipendenti e generano lo stesso sottospazio, che è $\mathbb{R}^3$.

- **È possibile scrivere i vettori canonici e_1, e_2, e_3 di $\mathbb{R}^3$ come combinazioni lineari del sistema $S_1 = \{v_1\}$? Stesso quesito ma con il sistema $S_2 = \{v_1, v_2\}$? Stesso quesito ma con il sistema $S_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$? Quando la risposta è affermativa, determinare esplicitamente i pesi delle combinazioni lineari che esprimono, rispettivamente, i vettori canonici e_1, e_2, e_3 di $\mathbb{R}^3$.**

- I **vettori canonici** di $\mathbb{R}^3$ sono:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

- I vettori dati sono:

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, -1, 3)$$

Consideriamo tre sistemi:

- $S_1 = \{v_1\}$
- $S_2 = \{v_1, v_2\}$
- $S_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$

Vediamo se i vettori canonici possono essere scritti come combinazioni lineari dei vettori nei vari sistemi.

Il sistema S_1 contiene un solo vettore $v_1 = (0, 1, -1)$. Lo span di v_1 è una retta passante per l'origine. Poiché i vettori canonici $\{e_1, e_2, e_3\}$ appartengono a tre direzioni ortogonali tra loro, è **impossibile** scrivere e_1, e_2, e_3 come combinazioni lineari di un singolo vettore v_1. Quindi la risposta è **no** per il sistema S_1.

Il sistema S_2 contiene due vettori: $v_1 = (0, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$.

Per vedere se possiamo scrivere i vettori canonici come combinazioni lineari di v_1 e v_2, dobbiamo verificare se e_1, e_2, e_3 appartengono al piano generato da v_1 e v_2.

Poiché e_1, e_2, e_3 sono tutti ortogonali tra loro, il vettore e_3 non può essere contenuto nel piano generato da v_1 e v_2. Quindi, **non è possibile** scrivere tutti i vettori canonici $\{e_1, e_2, e_3\}$ come combinazioni lineari dei vettori in S_2.

Il sistema S_3 contiene tre vettori: $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, -1, 3)$.

Se i tre vettori sono **linearmente indipendenti**, generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$. Abbiamo già verificato che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice formata da questi vettori, che risulta diverso da zero. Quindi, possiamo scrivere ogni vettore canonico come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Per trovare i pesi a, b, c tali che:

$$e_1 = av_1 + bv_2 + cv_3$$

e analogamente per e_2 e e_3, risolviamo un sistema lineare per ciascuno dei vettori canonici.

$$e_1 = (1, 0, 0) = a(0, 1, -1) + b(1, 0, 1) + c(1, -1, 3)$$

Espandiamo la combinazione lineare:

$$e_1 = (b + c, a - c, -a + b + 3c)$$

Confrontando con $(1, 0, 0)$:

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a - c = 0 \\ -a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

- $a - c = 0 \implies a = c$
- $b + c = 1$
- $-a + b + 3c = 0$

Sostituendo $a = c$ nella seconda equazione:

$$b + c = 1 \implies b = 1 - c$$

Sostituendo $a = c$ e $b = 1 - c$ nella terza equazione:

$$-c + (1 - c) + 3c = 0$$

$$-c + 1 - c + 3c = 0 \implies 1 + c = 0 \implies c = -1$$

Quindi:

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1$$

Il vettore e_1 può essere scritto come:

$$e_1 = -1v_1 + 2v_2 - v_3$$

Allo stesso modo, possiamo risolvere per e_2 ed e_3 utilizzando gli stessi passaggi.

Per e_2 :

$$e_2 = (0, 1, 0) = a(0, 1, -1) + b(1, 0, 1) + c(1, -1, 3)$$

Quindi:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a - c = 1 \\ -a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} b = -c \\ a = c + 1 \\ -(c + 1) + (-c) + 3c = 0 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Così da ottenere a=-1; b= 2 e c=1 . Quindi:

$$e_2 := -v_1 + 2v_2 + v_3$$

Il processo è esattamente lo stesso per e_3:

$$e_3 = (0, 0, 1) = a(0, 1, -1) + b(1, 0, 1) + c(1, -1, 3)$$

diventa:

$$\begin{cases} b + c = 0 \Rightarrow b = -c \\ a - c = 0 \Rightarrow a = c \\ -a + b + 3c = 1 \Rightarrow -c + (-c) + 3c = 1 \end{cases}$$

Troviamo c=1, a=1 e b=-1 e quindi e_3 si può scrivere come combinazione lineare di:

$$e_3 := v_1 - v_2 + v_3$$

Quindi:

- **Sistema** S_1: Non è possibile esprimere i vettori canonici come combinazioni lineari.
- **Sistema** S_2: Non è possibile esprimere tutti i vettori canonici.
- **Sistema** S_3: È possibile esprimere e_1, e_2, e_3 come combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 poiché sono linearmente indipendenti e formano una base per $\mathbb{R}^3$.