

# $p$ -адическая интерполяция дзета-функции Римана

---

Приньков А. С.



Липецк 2016

Целью работы является исследование вопроса сходимости дзета-функции Римана и её практического применения. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи:

- Изучить литературу по  $p$ -адическому анализу
- Применить на практике методологию  $p$ -адической интерполяции
- Провести практические вычисления



## Определение нормы

Нормой на поле  $F$  называется отображение, обозначаемое через  $\|\cdot\|$ , поля  $F$  в множество неотрицательных вещественных чисел, такое что:

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|x \odot y\| = \|x\| \odot \|y\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



## Определение метрики

Функция  $d$ , определенная на множестве пар  $(x, y) \in F$  и принимающая значения из  $\mathbb{R}_+$ , называется метрикой в  $F$ , если она обладает следующими свойствами:

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

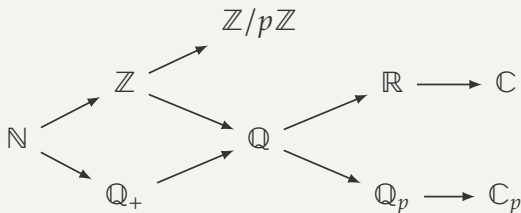
Метрика  $d$  индуцирована нормой, если  $d(x, y) = \|x - y\|$



Определение нормы  $\mathbb{Q}_p$

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{p^{\text{ord}_p a}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Расширение алгебраических структур (Гамильтон, 1832)



# $p$ -адическая $\zeta$ -функция

---

## Дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ или же в интегральном виде } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

## Утверждение

Пусть  $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Q}_p$ , такая что  $f(2k) = C' \cdot \zeta(2k)$ ,  
тогда  $f(2k)$  - всегда рационально  
и  $\forall \varepsilon > 0 \exists k, k' : |k - k'|_p < \varepsilon$ , то  $|f(k) - f(k')|_p < \varepsilon$



## Числа Бернулли

По определению  $\frac{t}{e^t-1} = \frac{1}{1+t/2!+t^2/3!+\dots+t^n/(n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot t^k / k!$

Здесь  $B_k$  - числа Бернулли

например:  $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, \dots$

В  $\mathbb{R}$  справедлива следующая формула:  $\zeta(2k) = \pi^{2k} \cdot C \cdot B_{2k}$ ,  
для  $2k > 1$





## СВЯЗЬ $\zeta(s)$ и $\zeta(s)_p$

$$\zeta(1-k) = \zeta(1-k)_p / (1-p^{k-1}),$$
$$\zeta(1-k) = \prod_{q \neq p} \frac{1}{1-q^{k-1}}$$

## Практические вычисления

$1-k$	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15
$\zeta(1-k)$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{252}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{132}$	$-\frac{691}{32760}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3617}{8160}$



# Практическое применение

---




Интерполяция дзета-функции находит свое применение при расчете упорядочивающей константы.

$$\zeta(-1) = \frac{-1}{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}(D - 2) \sum_{p=1}^{\infty} p \\ D = 26, a = -1 \end{array} \right.$$

Значение  $D$  приводит к согласованности определения оператора Вирасоро, а значения  $a$  к тому, что спектр открытых струн включал безмассовые фотонные состояния!



-  Каток С.Б. р-адический анализ в сравнении с вещественным – М., МЦНМО, 2004, 112 с.
-  Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн – М.: Мир, 1990. - 656 с.
-  Цвибах Б. Начальный курс теории струн – М.: Едиториал УРСС, 2011. - 784 с.

