p-адическая интерполяция дзета-функции Римана

Приньков А. С.

Липецк 2016

Цель работы

Целью работы является исследование вопроса сходимости дзета-функции Римана и её практического применения. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи:

- Изучить литературу по p-адическому анализу
- Применить на практики методологию p-адической интерполяции
- Провести практические вычисления

Определение нормы

Нормой на поле F называется отображение, обозначаемое через $\|\|$, поля F в множество неотрицательных вещественных чисел, такое что:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|x \odot y\| = \|x\| \odot \|y\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Основные определения

Определение метрики

Функция d, определенная на множестве пар $(x, y) \in F$ и принимающая значения из $\mathbb{R}_+$, называется метрикой в F, если она обладает следующими свойствами:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Метрика d инуцирована нормой, если $d(x, y) = \|x - y\|$

p-адическое расширение

Определение нормы $\mathbb{Q}_p$

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{p^{ord_p a}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Расширение алгебраических структур (Гамильтон, 1832)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & & \\
 & \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{C} \\
\mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Q} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \mathbb{Q}_+ \arrow[ur] & & \mathbb{Q}_p \arrow[r] & \mathbb{C}_p
\end{tikzcd}$$

p-адическая ζ-функция

Основные понятия

Дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ , или же в интегральном виде } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

Утверждение

Пусть $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Q}_p$, такая что $f(2k) = C' \cdot \zeta(2k)$,

тогда $f(2k)$ - всегда рационально

и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k, k' : |k - k'|_p < \varepsilon$, то $|f(k) - f(k')|_p < \varepsilon$

Числа Бернулли

По определению $\frac{t}{e^t-1} = \frac{1}{1+t/2!+t^2/3!+\ldots+t^n/(n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot t^k/k!$

Здесь B_k - числа Бернулли

например: $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, \ldots$

В $\mathbb{R}$ справедлива следующая формула: $\zeta(2k) = \pi^{2k} \cdot C \cdot B_{2k}$, для $2k > 1$

Числа Бернулли

Связь $\zeta(s)$ и $\zeta(s)_p$

$$\zeta(1-k) = \zeta(1-k)_p/(1-p^{k-1}),$$
$$\zeta(1-k) = \prod_{q \neq p} \frac{1}{1-q^{k-1}}$$

Практические вычисления

$1-k$	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15
$\zeta(1-k)$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{252}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{132}$	$-\frac{691}{32760}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3617}{8160}$

Практическое применение

Применение в теории суперструн

Интерполяция дзета-функции находит свое применение при расчете упорядочивающей константы.

$$\zeta(-1) = \frac{-1}{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(D-2)\sum\limits_{p=1}^{\infty} p \\ D = 26, a = -1 \end{cases}$$

Значение D приводит к согласованости определения оператора Вирасоро, а значения a к тому, что спектр открытых струн включал безмассовые фотонные состояния!

Литература

- Каток С.Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным – М., МЦНМО, 2004, 112 с.
- Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн – М.: Мир, 1990. - 656 с.
- Цвибах Б. Начальный курс теории струн – М.: Едиториал УРСС, 2011. - 784 с.