Récurrence

Romain Lemahieu

December 13, 2023

1 Première récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$$

1.1 Définition

Une propriété est une "fonction" qui est soit vraie ou fausse, par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_1(x) : "x+1=4" & \mathcal{P}_1(2) \text{ est fausse} & \mathcal{P}_1(3) \text{ est vraie} \\ \mathcal{P}_2(x) : "x<2" & \mathcal{P}_2(2) \text{ est fausse} & \mathcal{P}_1\left(-\sqrt{3}\right) \text{ est vraie} \\ \mathcal{P}_3(x;y) : "x>y" & \mathcal{P}_3(2;4) \text{ est fausse} & \mathcal{P}_3(-2;t^2) \text{ est vraie pour tout réel } t \end{array}$$

Dans le raisonnement par récurrence classique utilise une propriété définie sur un sous ensemble d'un entier avec qu'un paramètre
Rédaction :
Soit la propriété définie pour tout entier naturel $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n - 1$"

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1 \Leftrightarrow \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}$$

1.2 Initialisation

Rédaction :
Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie :

$$u_0 = 0 \quad 2^0 - 1 = 0$$

Donc $\mathcal{P}$ est initialisée.

1.3 Hérédité

En supposant pour un certain entier naturel k que $\mathcal{P}(k)$ est vraie montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est :
Broullion :
Hypothèse de récurrence : $\mathcal{P}(k)$: "$u_k = 2^k - 1$"
Ce que on veut démontrer : $\mathcal{P}(k+1)$: "$u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$"

1.3.1 En partant d'énoncé :

$$\begin{aligned}
u_{k+1} =& 2u_k + 1 && \text{d'après l'énoncé} \\
u_{k+1} =& 2 \times (2^k - 1) + 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
u_{k+1} =& 2 \times 2^k - 2 + 1 \\
u_{k+1} =& 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

1.3.2 En partant de la propriété :

$$\begin{aligned}
u_k =& 2^k - 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
2u_k =& 2 \times \left(2^k - 1\right) \\
u_{k+1} =& 2 \times 2^k - 2 + 1 && \text{d'après l'énoncé} \\
u_{k+1} =& 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire

1.4 Conclusion

La propriété $\mathcal{P}$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$$

2 Exercice

1. Soit u_n definie pour tout entier naturel n tel que :
$$\begin{cases} u_0 & = -2 \\ u_{n+1} & = -3u_n + 2 \end{cases}$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2,5 \times (-3)^n + 0.5$
2. Montrer que la somme des angles d'un polygone de n côtés est égale à $180 + 180n$
3. Montrer l'inégalité de bernoulli :
$$(x+1)^n > 1 + nx$$
pour tout entier naturel non nul réel x non nul supérieur ou égal à -1
4. (Récurrence Double) Exercice 7 LLG. Soit u_n definie pour tout entier naturel n tel que :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} u_n = 2^n + 3^n$
5. (Récurrence forte) Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 s'exprime comme un produit de facteurs premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

6. Polynômes de Tchebychev de première espèce (Ex CGL 2023). Soit T_n definie pour tout entier naturel n tel que :

$$\begin{cases} T_0(x) & = 0 \\ T_1(x) & = x \\ T_{n+2} & = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \end{cases}$$

Montrer que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, sachant que:

$$\cos(a+b) = \cos(a)cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$