Limite de e

Romain Lemahieu

December 2, 2023

Montrer que :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
$$\ln(f(x)) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$
$$\ln(f(x)) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$\ln(f(x)) = x(\ln(x+1)-\ln(x))$$
$$\ln(f(x)) = x\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$$

Soit $t \in [x; x+1]$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$$
$$(x+1-x)\frac{1}{x+1} \leq \int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt \leq (x+1-x)\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{x+1} \leq \int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{x}$$
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(f(x)) \leq \frac{x}{x}$$
$$1-\frac{1}{x+1} \leq \ln(f(x)) \leq 1$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x} = 0$ par soustraction $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right) = 1$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x)) = 1$

or pour tout x réel posisif $e^{\ln(f(x))} = f(x)$

$\lim_{x\to 1} e^x = e$ donc par composition $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$