Dévellopement de taylor

Romain Lemahieu

June 9, 2023

1 Enoncé

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de tout ordre Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

2 Réponse

Procédons à un raisonnement par récurence Soit $\mathcal{P}_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

3 Initialisation : montrons que $\mathcal{P}_0$ est vrai

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 : I &= \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \lim_{n\to 0} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{0!} f^{(0+1)}(t)\, dt \\
I &= f(0) + \int_0^x \lim_{n\to 0} (x-t)^n f'(t)\, dt \\
I &= f(0) + \Big[f(t)\Big]_0^x \text{ car } \lim_{x\to 0} x^0 = 1 \\
I &= f(0) + f(x) - f(0) \\
I &= f(x)
\end{aligned}$$

4 Hérédité

En supposant que $\mathcal{P}_n$ est vrai montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n+1} : & f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\
\mathcal{P}_n : & f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\
& f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt
\end{aligned}$$

Procédons à l'intégration par partie :

$$I = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \qquad I = \int_0^x u(t) v'(t)\, dt$$

avec

$$\begin{aligned}
v'(t) &= f^{(n+2)}(t) & u(t) &= \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\
v(t) &= f^{(n+1)}(t) & u'(t) &= -\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} \\
& & u'(t) &= -\frac{(x-t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \left[v(t)u(t)\right]_0^x - \int_0^x v(t)u'(t)\, dt \\
I &= \left[f(t)^{(n+1)} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f(t)^{(n+1)}\, dt \\
I &= f(x)^{(n+1)} \frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} - f(0)^{(n+1)} \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f(t)^{(n+1)}\, dt \\
I &= -f(0)^{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)^{(n+1)}\, dt \\
I &= -\frac{f(0)^{(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)^{(n+1)}\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + I \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est verifié.

5 Conclusion

La propriété est vraie au rang initial $\mathcal{P}_0$ est héréditaire donc d'après le principe de récurence donc elle est vraie pour tout entier naturel n.