Exercice 1 question 4 Concours général 2023

Romain Lemahieu

November 13, 2023

1 Sujet

Exercice 1 : Soyons rationnels !

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier k tel que $\dfrac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0\,; \\ 1 + 2v(n) - \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1) Donner la valeur des entiers $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
2) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.
3) Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.
4) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
5) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.
6) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.

2 Correction

Soit 3 propriétés définis pour tout entiers naturels non nul :

$$\mathcal{P}_1(n) : u_n \in \mathbb{Q}^*$$
$$\mathcal{P}_2(n) : u_{2n} = u_n + 1$$
$$\mathcal{P}_3(n) : u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

2.1 Initialisation

Montrons que $\mathcal{P}_1(1)$ est vraie :

$$u_1 = 1 \quad 1 \in \mathbb{Q}^*$$

Montrons que $\mathcal{P}_2(1)$ est vraie :

$$\begin{aligned} u_{2\times 1} &= 1 + 2\nu(2) - \frac{1}{u_{2\times 1-1}} \\ u_2 &= 1 + 2\times 1 - \frac{1}{u_1} \\ u_2 &= 1 + 2\times 1 - \frac{1}{1} \\ u_2 &= 2 \end{aligned} \qquad u_1 + 1 = 2$$

Montrons que $\mathcal{P}_3(1)$ est vraie :

$$\begin{aligned} u_{2\times 1+1} &= 1 + 2\nu(3) - \frac{1}{u_{2\times 1+1-1}} \\ u_3 &= 1 - \frac{1}{u_2} \\ u_3 &= 1 - \frac{1}{2} \\ u_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{u_1}{u_1+1} &= \frac{1}{1+1} \\ \frac{u_1}{u_1+1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2 Hérédité

En supposant que $\mathcal{P}_1(k)$, $\mathcal{P}_2(k)$ et $\mathcal{P}_3(k)$ sont vraie pour un certain entier k naturel non nul montrons que $\mathcal{P}_1(2k)$, $\mathcal{P}_1(2k+1)$, $\mathcal{P}_2(k+1)$ et $\mathcal{P}_3(k+1)$ le sont :

2.2.1 Montrons que $\mathcal{P}_1$ est héréditaire

Montrons que $\mathcal{P}_1(2k)$ est vraie supposant que $\mathcal{P}_1(k)$ et $\mathcal{P}_2(k)$ est vraie :

$$u_k \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow u_k + 1 \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow u_{2k} \in \mathbb{Q}^*$$

Montrons que $\mathcal{P}_1(2k+1)$ est vraie:

$$
\begin{aligned}
&u_k \in \mathbb{Q}^* \\
\Rightarrow &u_k > 0 \\
\Rightarrow &u_k + 1 > 1 \\
\Rightarrow &\frac{1}{u_k+1} < 1 \\
\Rightarrow &-1 + \frac{1}{u_k+1} < 0 && \text{Car la fonction } \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{Q}^* \\
\Rightarrow &1 - \frac{1}{u_k+1} > 0 \\
\Rightarrow &\frac{u_k}{u_k+1} > 0 \\
\Rightarrow &u_{2k+1} > 0 && \text{En supposant que } \mathcal{P}_2(k) \text{ est vraie} \\
\Rightarrow &u_{2k+1} \in \mathbb{Q}^*
\end{aligned}
$$

2.2.2 Montrons que $\mathcal{P}_2$ est héréditaire

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} + 1 &= 1 + 1 + 2\nu(k+1) - \frac{1}{u_k} && \text{En supposant que } \mathcal{P}_1(k) \text{ est vraie} \\
u_{k+1} + 1 &= 2 + 2(\nu(2k+2) - 1) + 1 - \left(1 + \frac{1}{u_k}\right) && \text{Car } 2k+2 \text{ est pair ssi } \nu(2k+2) = \nu(k+1) + 1 \\
u_{k+1} + 1 &= 1 + 2 - 2 + 2\nu(2k+2) - \frac{u_k+1}{u_k} \\
u_{k+1} + 1 &= 1 + 2\nu(2k+2) - \frac{1}{u_{2k+1}} && \text{En supposant que } \mathcal{P}_3(k) \text{ et } \mathcal{P}_1(2k+1) \text{ sont vraies} \\
u_{k+1} + 1 &= u_{2k+2}
\end{aligned}
$$

2.2.3 Montrons que $\mathcal{P}_3$ est héréditaire

$$
\begin{aligned}
u_{2k+3} &= 1 + 2\nu(2k+3) - \frac{1}{u_{2k+2}} && \text{En supposant que } \mathcal{P}_1(2k) \text{ est vraie} \\
u_{2k+3} &= 1 - \frac{1}{u_{2k+2}} && \text{Car } 2k+3 \text{ est impair ssi } \nu(2k+3) = 0 \\
u_{2k+3} &= 1 - \frac{1}{u_{k+1}+1} && \text{En supposant que } \mathcal{P}_2(k) \text{ est vraie} \\
u_{2k+3} &= \frac{u_{k+1}+1-1}{u_{k+1}+1} \\
u_{2k+3} &= \frac{u_{k+1}}{u_{k+1}+1}
\end{aligned}
$$

2.3 Conclusion

Les propriétés $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ étant initialisées et héréditaires donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \mathbb{Q}^*, u_{2n} = u_n + 1, u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$