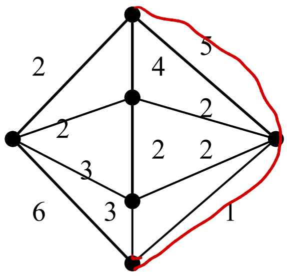
图论作业 2

一、填空题

1. 图 G 的顶点数为 n 且 7 连通，则其边数至少为 $\left\lceil \frac{7n}{2} \right\rceil$。
2. 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 3 和 3。
3. 非平凡树的点连通度和边连通度分别为 1 和 1。
4. 长度为 n ($n\geq3$)的圈的 2 宽直径为 $n-1$。
5. 完全图 K_n ($n\geq5$)的 3 宽直径为 2。
6. 设图 G 是具有 k 个奇度顶点，则在 G 中最少添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使 G 具有欧拉回路。
7. 完全偶图 $K_{m,n}$ ($m, n\geq2$ 且均为偶数)，则在其最优欧拉环游中共含 $m\cdot n$ 条边。
8. 下图的最优欧拉环游的权值为 38。



9. 具有 5 个点的非哈密尔顿简单图最多包含 7 条边，它们分别为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$。
10. 完全图 K_5 的线图有 30 条边。
11. 完全图 K_5 的线图的补图的边数为 15。

二、不定项选择题

1. 下列说法正确的是(CD)
(A) 有割边的图一定有割点；
(B) 有割点的图一定有割边；
(C) 割点至少属于图的两个块；
(D) 割边不在图的任一圈中；
(E) 图的割点也是子图的割点。

2. 下面说法正确的是(BDE)
(A) 没有割点的非平凡连通图一定是 2 连通图；
(B) 在 2 连通图中，一定没有割边；
(C) 完全图一定没有割边；
(D) 完全图一定没有割点；
(E) 非平凡树一定有割边；
(F) 非平凡树一定有割点。

3. 设图 G 是一个块，下列说法错误的是(ABC)
(A) 图中一定有圈；
(B) 图中一定无环；
(C) 图中一定无割边；
(D) 图中一定无割点；

(E) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两点必位于某一圈上；
(F) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两条边必位于某一圈上；
(G) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中没有割边。
4. 设 $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$ 分别表示图 G 的点连通度、边连通度和最小度。下面说法错误的是(D)
(A) 存在图 G，使得 $\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)$；
(B) 存在图 G，使得 $\kappa(G)<\lambda(G)<\delta(G)$；
(C) 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G)\geq n/2$，则 G 连通且 $\lambda(G)=\delta(G)$；
(D) 图 G 是 k 连通的，则 $\kappa(G)=k$；
(E) 若图 G 是 k 连通的，则 $\lambda(G)\geq k$。
5. 下面说法正确的是(CDE
(A) 若图 G 是 k 连通的，则 G 中必存在 k 点割；
(B) 若图 G 是 k 边连通的，则 G 中必存在 k 边割；
(C) 若图 G 的连通度是 k，则 G 中必存在 k 点割；
(D) 若图 G 的边连通度是 k，则 G 中必存在 k 边割；
(E) 若图 G 是 k 连通的，则 G 也是 k 边连通的；
(F) 若图 G 是 k 边连通的，则 G 也是 k 连通的；
(G) 存在最小度为 3 的 4 连通图。
6. 下面说法错误的是(AB)
(A) 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图；
(B) 欧拉图一定没有割点；
(C) 欧拉图一定没有割边；
(D) 非平凡欧拉图中一定有圈；
(E) 至少具有 2 个点的无环欧拉图一定是 2 边连通的；
(F) 两个欧拉图的积图一定是欧拉图。
7. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是(E)
(A) 若 G 是哈密尔顿图，则对于 V 的每个非空顶点真子集 S，均有 $\omega(G-S)\leq|S|$；
(B) 设 G 是阶数为 n ($n\geq3$)的简单图，若其最小度 $\delta\geq n/2$，则 G 是哈密尔顿图；
(C) 设 G 是 n ($n\geq3$)阶简单图，若 G 中任意两个不邻接点 u 与 v，满足 $d(u)+d(v)\geq n$，则 G 是哈密尔顿图；
(D) 哈密尔顿图一定没有割边；
(E) 哈密尔顿图一定没有割点；
(F) 两个哈密尔顿图的积图一定是哈密尔顿图。
8. 关于哈密尔顿图，下列命题正确的是(ABCE
(A) 设 n ($n\geq3$)阶简单图的最小度满足 $\delta\geq n/2$，则其闭包一定为完全图；
(B) 设 n ($n\geq3$)阶简单图的任意两个不邻接顶点 u 与 v 满足 $d(u)+d(v)\geq n$，则其闭包一定为完全图；
(C) 设 n ($n\geq3$)阶简单图 G 满足度序列判定定理的条件，则其闭包一定为完全图；
(D) 若 n ($n\geq3$)阶简单图 G 的闭包不是完全图，则它一定是非哈密尔顿图；
(E) 若 n ($n\geq3$)阶简单图 G 的闭包是完全图，则图 G 是哈密尔顿图。
9. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是(BD)
(A) 设 G 是阶数为 n ($n\geq3$)的非哈密尔顿简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图；
(B) 图 G 是哈密尔顿图当且仅当其闭包是完全图；
(C) 若(n, m)简单图 G 的边数

$$m > \binom{n-1}{2} + 1,$$

且 $n \geq 3$，则 G 是哈密尔顿图；

(D) 若图 G 的闭包是哈密尔顿图，则其闭包一定是完全图；

(E) 设 G 是阶数为 n ($n \geq 3$)的哈密尔顿简单图，若 n 为奇数，则 G 一定不是偶图。

三、解答题

1. 证明：设简单图 G 是 k 边连通的，E' 是 G 的某 k 条边构成的集合，则

$$\omega(G-E') \leq 2。$$

① 当 $\lambda(G)=k$ 时

(1) G 的最小边割为 $|M|=k$ 一定存在，若 $E'=M$，则由边割性质得 $w(G-E')=2$

(2) 若 $E'\neq M$ 则由边割性质得 $w(G-E')=1$

② 当 $\lambda(G)>k$ 时

由于 $|E'|=k<\lambda(G)$，得到 $w(G-E')=1$

综上所述 $w(G-E')\leq 2$

2. 证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G) \geq n-2$，则 $\kappa(G)=\delta(G)$。

由 G 为简单图易知：$n-2\leq \delta(G)\leq n-1$

当 $\delta(G)=n-1$ 时　G 为完全图 K_n　$K(G)=n-1=\delta(G)$

当 $\delta(G)=n-2$ 时　只需证"当删去 $n-3$ 个顶点时不影响图的连通性"

删去 $n-3$ 个顶点后还剩 3 个顶点，假设为 x, y, z，若此时 G 不再连通则有两种情况

两种情况都存在一个点与其他两点不邻接　$d(v)\leq n-3<n-2$ 与 $\delta(G)=n-2$ 矛盾

$\therefore K(G)>n-3$　　　　$\therefore n-3<K(G)\leq n-2$

$\therefore \delta(G)\geq n-2$ 且 $K(G)\leq\delta(G)$　　　　$\therefore K(G)=n-2=\delta(G)$

3. 在 8×8 黑白方格相间的棋盘上跳动一只马，这只马能否连续地完成每一种可能的跳动恰好一次？（一只马跳动一次是指从一个长为 3、宽为 2 的黑白方格组成的长方形的一个角跳到对角上；在同一个长方形的两个对角之间的相互跳动认为是同一跳动）

将棋盘上每个方格看作一个结点，两结点间有边当且仅当马可从一个结点跳到另一个点得到一张跳马图 G，G 中每个结点度数写到对应方格中得到：

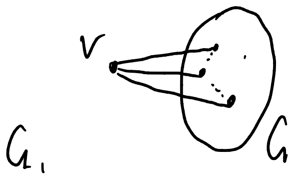
2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

其中 $d=3$ 的结点有 8 个度数为奇数，由 eular 图性质得：

G 中无 eular 回路 也无 eular 迹

4. 证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G)\geq(n-1)/2$，则 G 包含哈密尔顿路。

在 G 之外加一新点 v，将 v 与 G 中所有顶点连接得图 G_1



$d(v)=n$

$\delta(G_1)=\delta(G)+1\geq\frac{n+1}{2}>\frac{n}{2}$

由Dirac定理知：G_1 为H图，得到 G 有H路

5. 亚瑟王在王宫中召见他的 $2n$ 位骑士，其中某些骑士之间互有怨仇。已知每个骑士的仇人不超过 n–1 个，证明亚瑟王的谋士摩林能够让这些骑士围着圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻。

将每个骑士看作一个点，非仇人关系的骑士间用边连接，得到关系图 G

问题转为求 G 是否存在哈密尔顿圈，即证明 G 为H图

由题可知 每个点最多与 $n-1$ 个点不相邻 则 $\delta(G)\geq 2n-1-(n-1)=n>\frac{n}{2}$

由Dirac定理得 G 为H图，存在一个H圈排列骑士围着圆桌坐下且不与仇人相邻

6. 令 G 是阶数至少为 3 的简单连通图。若 G 中存在割边，则 G 中一定存在割点。

∵ G 为非平凡连通图，所有非平凡连通图为1连通的

∴ 由定义知 $\kappa(G)\geq 1$

∵ G 中存在割边

∴ $\lambda(G)=1$

由定理知，$\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$

得 $1\leq\kappa(G)\leq 1$

∴ $\kappa(G)=1$

G 中一定存在割点