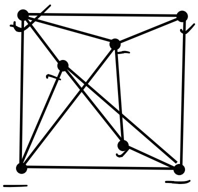
图论作业 3

一、填空题

1. 完全图 K_{2n} 共有 (2n-1)!! 个不同的完美匹配。
2. 超方体 Q_6 的最小覆盖包含的点数为 32 。
3. 图 $K_{m,n}$ ($m\leq n$)的最小覆盖包含的点数为 m 。
4. 完全图 K_{60} 能分解为 59 个边不重的 1-因子之并。
5. 完全图 K_{61} 能分解为 30 个边不重的 2-因子之并。
6. 假设 G 是具有 n 个点、m 条边、k 个连通分支的无圈图，则 G 的荫度为 1 。
7. 设图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删掉 1 条边才可能使其成为可平面图。
8. 设连通平面图 G 具有 5 个顶点，9 条边，则其面数为 6 。
9. 若图 G 是 10 阶极大平面图，则其面数等于 16 。
10. 若图 G 是 10 阶极大外平面图，其内部面共有 8 个。
11. 请判断右图是否为可平面(请填是或否) 否 。



二、不定项选择题

1. 关于非平凡树 T，下面说法错误的是(ACE)
(A) T 至少包含一个完美匹配；
(B) T 至多包含一个完美匹配；
(C) T 的荫度可能大于 1；
(D) T 是只有一个面的平面图；
(E) T 的对偶图可能是简单图。

2. 下列说法正确的是(ABC)
(A) 三正则的偶图存在完美匹配；
(B) 三正则的哈密尔顿图一定存在完美匹配；
(C) 无割边的三正则图一定存在完美匹配；
(D) 有割边的三正则图一定没有完美匹配。

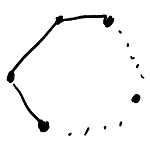
3. 下列说法正确的是(ABCDE
(A) 在偶图中，最大匹配包含的边数等于最小覆盖包含的点数；
(B) 任一非平凡正则偶图包含完美匹配；
(C) 任一非平凡正则偶图可以 1-因子分解；
(D) 偶度正则偶图可以 2-因子分解；
(E) 任意 k-正则偶图($k\geq 2$)一定不包含割边。

4. 下列说法中错误的是(AF)
(A) 完全图 K_{101} 包含 1-因子；
(B) 完全图 K_{101} 包含 2-因子；
(C) 完全图 K_{102} 包含 1-因子；
(D) 完全图 K_{102} 包含 2-因子；
(E) 图 G 的一个 1-因子对应 G 的一个完美匹配；
(F) 图 G 的一个 2-因子对应 G 的一个哈密尔顿圈。

5. 下列说法正确的是(AD)
(A) 方体 Q_n 可以 1-因子分解；
(B) 非平凡树可以 1-因子分解；
(C) 无割边的 3 正则图可以 1-因子分解；

(D) 有割边的 3 正则图一定不可以 1-因子分解；
(E) 可 1-因子分解的 3 正则图一定是哈密尔顿图。
6. 下列说法正确的是(ACDE
(A) 完全图 K_{2n} 是 $2n-1$ 个完美匹配的并；
(B) 完全图 K_{2n} 是 n 个哈密尔顿圈的并；
(C) 完全图 K_{2n} 是 1 个完美匹配与 $n-1$ 个哈密尔顿圈的并；
(D) 若图 G 是 $2k$ 正则连通图，则 G 可以分解为 k 个 2-因子的并；
(E) 无割边的 3 正则图可以分解为一个 1-因子与一个 2-因子的并。
7. 下列说法正确的是(ABCED
(A) 完全图 K_n 的荫度为 $[n/2]$，符号[ ]代表向上取整；
(B) 完全二部图 $K_{a,b}$ 的荫度为 $[ab/(a+b-1)]$，符号[ ]代表向上取整；
(C) 非平凡树的荫度为 1；
(D) 具有 m 条边的 n 阶无环图可以分解为 m 个生成森林的并；
(E) 假设 H 是图 G 的子图，则 $\sigma(H)\leq\sigma(G)$。
8. 下列说法错误的是(C)
(A) 任何平面图都只有一个外部面；
(B) 简单平面图中一定有度数不超过 5 的顶点；
(C) 平面图的各个面的次数之和可能为奇数；
(D) 只有一个面的连通平面图一定是树；
(E) 存在一种方法，总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面。
9. 下列说法正确的是(ABCD
(A) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割点；
(B) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割边；
(C) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含只属于一个面的边；
(D) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其每个面的边界均为圈。
10. 下列说法错误的是(D)
(A) 若 (n, m) 图 G 是极大平面图且 $n\geq3$，则 $m=3n-6$；
(B) 若 (n, m) 图 G 是极大外平面图且 $n\geq3$，则 $m=2n-3$；
(C) 阶数至少为 3 的极大平面图的每个面均是三角形；
(D) 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形；
(E) 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图。
11. 关于平面图 G 和其对偶图 G^* 的关系，下列说法中错误的是DEF
(A) G^* 是连通平面图；
(B) G^* 的顶点数等于 G 的面数；
(C) G^* 的边数等于 G 的边数；
(D) G^* 的面数等于 G 的点数；
(E) $(G^*)^*\cong G$；
(F) 若 $G_1\cong G_2$，则 $G_1^*\cong G_2^*$。
三、解答题
1. 设 G 是 $2k$ 阶简单图并且最小度 $\delta(G)\geq k\geq1$。证明：G 存在完美匹配。

由Dirac定理知：$\delta(G)\geq k=\frac{n}{2}$，G为哈密尔顿图
则G中存在长为2k的H圈



可交错选择边 v_iv_j 组成匹配，可组成包括2k个顶点的完美匹配

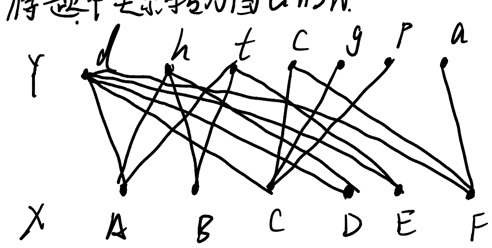
得证：G存在完美匹配

2. 由于在考试中获得好成绩，6 名学生将获得下列书籍的奖励，分别是：代数学(a)、微积分(c)、微分方程(d)、几何学(g)、数学史(h)、规划学(p)、拓扑学(t)。每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：

A：d, h, t；B：h, t；C：c, d, g, p；D：d, h；E：d, t；F：a, c, d。

每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？(用图论方法求解)

将题中关系转为图G形式



由题意可知 求解图G是否存在饱和X中点的完美匹配

可找出 $S=\{A\ B\ D\ E\}$ 其 $N(S)=\{d, h, t\}$ $|N(S)|<|S|$

由Hall定理知：图G不存在包含学生集合的完美匹配

因此每名学生不可以得到他喜欢的书

3. 假定 G 是具有 m 条边的简单二部图，顶点的最大度为 Δ。证明：G 包含一个至少有 m/Δ 条边的匹配。

由于顶点最大度数为Δ，一个顶点最大覆盖Δ条边

又因G中有m条边，则G的最小覆盖至少需 $\frac{m}{\Delta}$ 个点

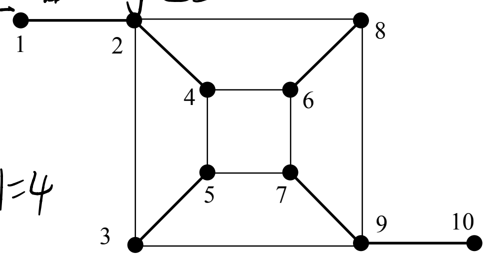
由König定理知：$|M^*|=\tilde{K}\geq\frac{m}{\Delta}$

得证 G包含一个至少有 $\frac{m}{\Delta}$ 条边的匹配

4. 有一个街区如下图所示，其中所有街道都是直线段。为了在巷战中能控制所有的街道，需要在街口处修筑碉堡，其中一个碉堡可以控制与其关联的所有街道。问最少需要多少个碉堡？并给出一种具体修建的位置。(用图论方法解答)

由题意可知 可转为求解该图G的最小覆盖 由König定理

通过求解G的最大匹配边数得到最小覆盖点数



显然G为二部图

易得到一个最大匹配 $M=\{24, 35, 79, 68\}$ $|M|=4$

得到一个点覆盖 $S=\{2, 5, 6, 9\}$

5. 证明：完全图 K_{6n-2} 可以 3-因子分解。

设 $\forall v\in V(K_{6n-2})$，由题可知 $d(v)=6n-3$，K_{6n-2} 是$6n-3$正则图

K_{6n-2} 可分解为 $6n-3$个边不重的1因子的并

将其中3个1因子合并为1个3因子，则恰好得到 $2n-1$个3因子

故 K_{6n-2} 可3因子分解

6. 有 8 名研究生同学喜欢外出散步，他们每人每天都和一位同学外出散步。试给出一种安排使得每名研究生在一个星期内都和不同的同学出行。(用图论方法解答)

由题意可得到8位研究生间的关系，可转化为图G完全图K_8

由定理知，K_8可1因子化分解为7个边不重的1因子的并

1个1因子即星期内某一天的安排，两点间的连线即所代表的两个同学组一起散步

1因子个数恰好可安排一个星期的散步

7. 设简单图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点，其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大数目，使得 G 保持其可平面性。

设7度顶点个数为x，由题可得：$2m=10\times4+8\times5+7x$

$n=10+8+x$

由极大平面图性质得：若G保持其平面性需满足 $m\le 3n-6$

$$\frac{7x+80}{2}\le 3(18+x)-6$$

$x\le 16$　　得到7度顶点最多16个

8. 设 G^*是具有 k ($k\ge2$)个连通分支的平面图 G 的对偶图，已知 G 的边数为 10，面数为 3，求 G^*的面数。

由对偶图性质知：G^*的$n=3$　$m=10$

对偶图一定为连通图，由Eular公式　$n-m+\varphi=2$

得：$\varphi=9$

9. 经报道，近年发现了一种由硼和氮元素构成的化学分子，其分子结构呈球状。该分子中每个原子均有 3 个相邻的原子并以化学单键相连，且分子结构中仅有 4 长圈和 6 长圈。试计算该分子中有多少个 4 长圈？(用图论方法求解)

由题可知 该分子可转换为一种只包含4边形和6边形的3正则图

求解4边形面的个数，设4边形面个数为f_4　6边形个数为f_6.

在分子中一个点同时被3个平面共用，得到关系方程组：

一条边被2个面共用

$$\begin{cases} n=|V|=\dfrac{4f_4+6f_6}{3} \\ m=|E|=\dfrac{4f_4+6f_6}{2} \end{cases}$$

由Eular公式 $n-m+\varphi=2$ 得

$$\frac{4f_4+6f_6}{3}-\frac{4f_4+6f_6}{2}+f_4+f_6=2$$

$$\frac{4}{3}f_4+2f_6-2f_4-3f_6+f_4+f_6=2$$

$$f_4=6$$