图论_____班　　　　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　　　　学号

图论作业 1

一、填空题

1. 非同构的 4 阶和 5 阶树的个数分别为__2__和__3__。
2. 若 G 为 n 阶 k 正则图，则 G 的补图的边数为__$\frac{n(n-1-k)}{2}$__。
3. 设图 $G=(n, m)$ 中各顶点度数均为 3，且 $2n=m+3$，则 $n=$__6__，$m=$__9__。
4. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

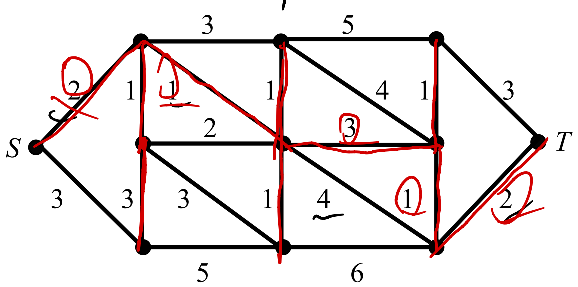
则图 G 的边数为__6__。

5. 已知简单图 G 的邻接矩阵为

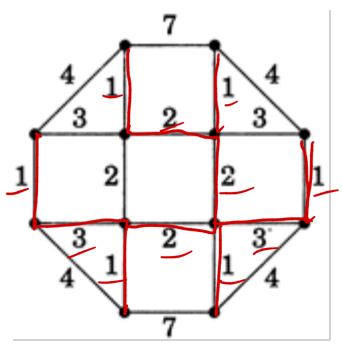
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 G 中长度为 2 的途径的数目为__30__。

6. 下图中从 S 到 T 的最短路的长度为__9__。



7. 设 G 是 n 阶简单图，且不含完全子图 K_3，则其边数一定不会超过__$\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$__。
8. 设 n 阶图 G 是具有 k 个分支的森林，则其边数为__$n-k$__。
9. 完全图 K_5 的生成树的个数为__125__。
10. 下图的最小生成树的权重为__18__。



二、不定项选择题

1．关于图的度序列，下列命题正确的是(ABCDE

(A) 同构的两个图的度序列相同；

(B) 非负整数序列$(d_1, d_2,\dots,d_n)$是图的度序列当且仅当 $d_1+d_2+\cdots+d_n$是偶数；

(C) 非负整数序列$(d_1, d_2,\dots,d_n)$是图的度序列当且仅当 $d_1, d_2, \dots, d_n$中有偶数个奇数；

(D) 如果正整数序列$(d_1, d_2,\dots,d_n)$是一棵树的度序列且 $n\geq 2$，那么序列中至少有两个 1；

(E) 正整数序列$(d_1, d_2,\dots,d_n)$是非平凡树的度序列当且仅当 $d_1+d_2+\cdots+d_n=2(n-1)$；

(F) 若图 G 的顶点度数之和大于等于图 H 的顶点度数之和，则图 G 度优于图 H；

(G) 如果非负整数序列$(d_1, d_2,\dots,d_n)$是简单图的度序列，那么在同构意义下只能确定一个图。

2. 对于序列(5, 5, 4, 4, 4, 4, 1, 1)，下列说法正确的是(AB)

(A) 可能是简单图的度序列；

(B) 可能是非简单图的度序列；

(C) 可能是森林的度序列；

(D) 一定是包含圈的图的度序列；

(E) 不是任意图的度序列。

3. 下列说法错误的是ADE

(A) 若一个图中存在闭途径，则一定存在圈；

(B) 偶图中不存在奇圈；

(C) 若图 G 不含三角形，则 G 为偶图；

(D) 图的顶点之间的连通关系一定是等价关系；

(E) 存在每个顶点的度数互不相同的非平凡简单图。

4. 关于简单图 G 的邻接矩阵 A，下列说法错误的是(C)

(A) 矩阵 A 的行和等于该行对应顶点的度数；

(B) 矩阵 A 的所有元素之和等于该图边数的 2 倍；

(C) 矩阵 A 的所有特征值之和等于该图边数的 2 倍；

(D) 矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍；

(E) 矩阵 A^2的主对角线上的元素之和等于该图边数的 2 倍；

(F) 若 G 是非连通图，则 A 相似于某个准对角矩阵。

5. 图 $G=(n, m)$一定是树的是BDE

(A) 连通图；

(B) 无回路但任意添加一条边后有回路的图；

(C) 每对顶点间都有路的图；

(D) 连通且 $m=n-1$；

(E) 无圈且 $m=n-1$。

三、解答题

1. 设无向图 G 有 10 条边，3 度与 4 度顶点各 2 个，其余顶点度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点？在顶点数最少的情况下，写出 G 的度序列，该度序列是一个图序列吗？

(1) $m=10$

至少则 设 $d<3$ 的顶点数为 x

$$\frac{20-(3\times2+4\times2)}{x}<3$$

$x>2$

则 x 至少为3

$\therefore$ $2+2+3=7$

至少7个顶点

(2) $\pi_1=(4,4,3,3,2,2,2)$

$\pi_2=\ 3\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2$

$(3\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1)$

$\pi_3=(\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1)$

$(2\ 1\ 1\ 1\ 1)$

$\pi_4=(1\ 1\ 0\ 0)$

π_4是可图的，则π_1也可图，该度序列是图序列

2. 证明：若 G 是简单图且 $\delta(G)\geq 2$，则 G 包含长度至少是 $\delta(G)+1$ 的圈。

设 $W=V_1V_2V_3\cdots V_k$ 是G中最长路

根据 $\delta(G)\geq 2$ 得 V_1 必有相异于 V_2 的相邻顶点设为 V_m

又因W为G最长路，V_m 必是 $V_3V_4\cdots V_k$ 中的一个

$\therefore V_1V_2\cdots V_mV_1$ 是G中的一个圈L且L长度 $>\delta(G)$

$\therefore$ G包含长度至少为 $\delta(G)+1$ 的圈

3. 设 G 为 n 阶简单图，$n>2$ 且 n 为奇数，G 与其补图中度数为奇数的顶点个数是否相等？并给出理由。

由补图性质可知，图G中任一点的度数与其补图中度数之和为 $n-1$，即 $d_G(V)+d_{\bar{G}}(V)=n-1$

若G中有 b_i 个顶点度数为奇数 d_i，则 $\bar{G}$ 中这 b_i 点 d 为 $n-1-d_i$

又因 n 为奇数，则 $n-1$ 为偶数 所以 $n-1-d_i$ 为奇数

G中奇度顶点在补图中的度数应也为奇数

综上，G与其补图中度数为奇的顶点个数相等

4. 证明：若 k 正则连通图 G 中每个圈的长度至少为 4，则 G 至少包含 $2k$ 个顶点。

设 u、v 为G中相邻的两个点，$S(u)$ 为G中与u相邻点集，$S(v)$ 同理。

由题可知，$S(u)\cap S(v)=\phi$ 否则G中会包含长度为3的圈，与题不符

因此，G中至少包含 $2(k-1)+2=2k$ 个顶点

5. 证明：若图 G 的直径大于 3，则图 G 的补图的直径小于 3。

由题得：G存在点 u 和 v，$d(u,v)>3$

记 $N(u)$ 为G中与u相邻点，$N(v)$ 与v相邻点集合

显然 $N(u)\cap N(v)=\phi$，否则 u、v 之间存在一条路径长度 ≤ 3

将G中点分为两部分：$P=N(u)\cup N(v)$　$Q=V(G)-P$

分别分析在 $\bar{G}$ 中的距离：

① P中两点：由于在G中 $N(u)$ $N(v)$ 中点不相邻

根据补图性质知 在 $\bar{G}$ 中 $N(u)$ 与 $N(v)$ 中点均相邻

即P中任意两点间 $d\leq 2$

② Q中两点：在G中 Q中的任意一点均不与 u、v 相邻

所以在 $\bar{G}$ 中 Q中任一点均与 u、v 相邻，Q中任意两点

s、t 间均有条 $s\to u\to v\to t$ 的路，$d\leq 3$

③ 对于P中一点和Q中一点：

在 $\bar{G}$ 中，任一点 $s\in N(u)$，$t\in Q$ 均有

$s\to v\to t$，同理任一点 $s\in N(v)$

$t\in Q$ 均有 $s\to u\to t$　$d\leq 2$

综上可得 当G直径 >3 时，$\bar{G}$ 的直径 <3

6. 在碳氢化合物 C_mH_n 中，每个碳原子(C)处有 4 条化学键，每个氢原子(H)处有 1 条化学键，任意多条化学键都不构成圈。已知癸烷是一种碳氢化合物，且包含 10 个碳原子，它当中包含多少个氢原子？(用图论方法求解并说明具体理由)

将化合物看作连通图，原子化学键数即为度数，而不构成圈的连通图即为树

$d(H_i)=1$　　由树的性质得：　设H个数为x　　$\begin{cases} m=n-1 \\ 2m=\sum_{i=1}^{n} d(n_i) \end{cases}$

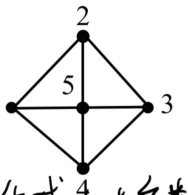
$d(C_i)=4$

$$\frac{10\times4+x}{2}=10+x-1$$

$$x=22$$

包含22个H原子

7. 经勘测，下图是某地的 5 个小镇(图中的顶点)现有的公路网络图，图中每条边所代表的距离均相同。现计划在公路网络图的基础上修建铁路使得 5 个小镇都能通过铁路可达(可通过其它小镇中转)并且修建的总长度最小，试计算共有多少种不同的修建方式？(用图论方法求解)



将公路网络图看作一个连通简单图G

由题可知：修个点最短可达的铁路即为求图G的生成树，修建方式个数即为不同生成树个数

这里采用矩阵树定理求生成树个数：

$$C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

删去1行1列：

$$C_1=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau(G)=|C_1|=45$$