



# Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2021

*Prof. Alejandra Schiavoni ([ales@info.unlp.edu.ar](mailto:ales@info.unlp.edu.ar))*

*Prof. Catalina Mostaccio ([catty@lifa.info.unlp.edu.ar](mailto:catty@lifa.info.unlp.edu.ar))*

*Prof. Laura Fava ([lfava@info.unlp.edu.ar](mailto:lfava@info.unlp.edu.ar))*

*Prof. Pablo Iuliano ([piuliano@info.unlp.edu.ar](mailto:piuliano@info.unlp.edu.ar))*

# Colas de prioridad

# Agenda

- Aplicaciones
- Definición
- Distintas implementaciones
- Heap Binaria
  - Propiedad Estructural
  - Propiedad de Orden
  - Implementación
- Operaciones: Insert, DeleteMin, Operaciones adicionales
- Construcción de una Heap: operación BuildHeap
  - Eficiencia
- HeapSort

# Aplicaciones

- Cola de impresión
- Sistema Operativo
- Algoritmos de Ordenación

# Definición

Una cola de prioridad es una estructura de datos que permite al menos dos operaciones:

- **Insert**

Inserta un elemento en la estructura

- **DeleteMin**

Encuentra, recupera y elimina el elemento mínimo



# Implementaciones

## ✓ Lista ordenada

- Insert tiene  $O(N)$  operaciones
- DeleteMin tiene  $O(1)$  operaciones

## ✓ Lista no ordenada

- Insert tiene  $O(1)$  operaciones
- DeleteMin tiene  $O(N)$  operaciones

## ✓ Árbol Binario de Búsqueda

- Insert y DeleteMin tienen en promedio  $O(\log N)$  operaciones

# Heap Binaria

- Es una implementación de colas de prioridad que no usa punteros y permite implementar ambas operaciones con  $O(\log N)$  operaciones en el peor caso
- Cumple con dos propiedades:
  - ✓ Propiedad estructural
  - ✓ Propiedad de orden

# Propiedad estructural

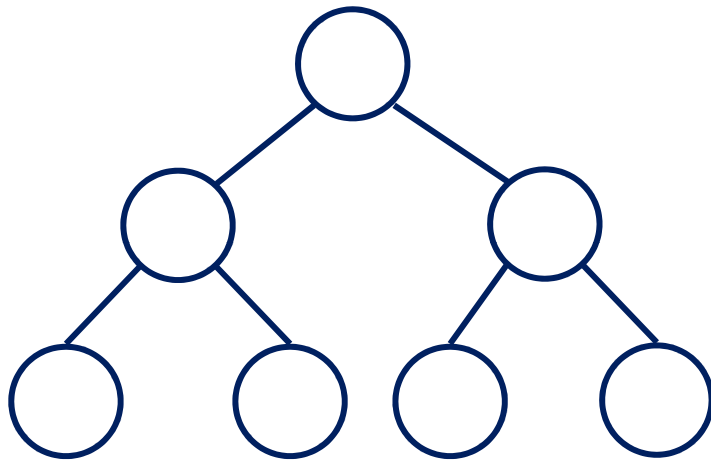
*Una heap es un árbol binario completo*

- ✓ En un árbol binario lleno de altura  $h$ , los nodos internos tienen exactamente 2 hijos y las hojas tienen la misma profundidad
- ✓ Un árbol binario completo de altura  $h$  es un árbol binario lleno de altura  $h-1$  y en el nivel  $h$ , los nodos se completan de izquierda a derecha

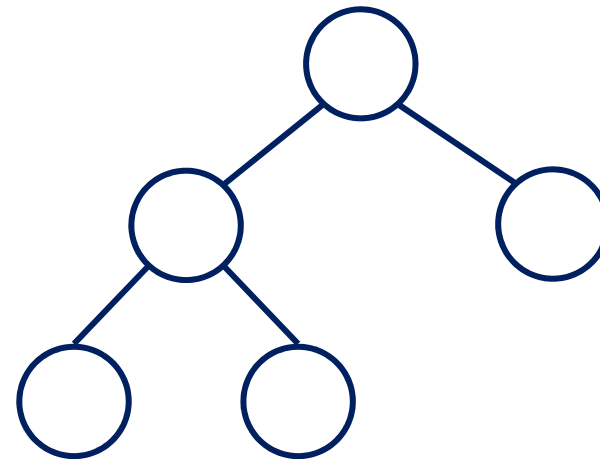


# Propiedad estructural (cont.)

Árbol binario lleno

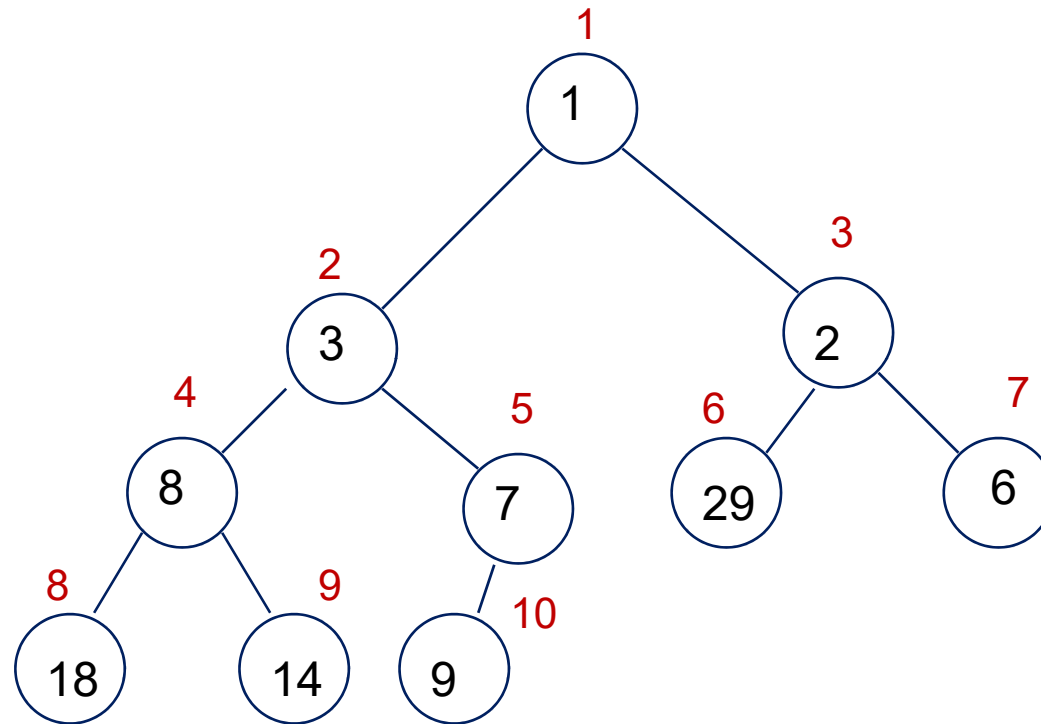


Árbol binario completo



# Propiedad estructural (cont.)

Ejemplo:



# Propiedad estructural (cont.)

- ✓ El número de nodos  $n$  de un árbol binario completo de altura  $h$ , satisface:

$$2^h \leq n \leq (2^{h+1}-1)$$

Demostración:

- Si el árbol es lleno,  $n = 2^{h+1}-1$
- Si no, el árbol es lleno en la altura  $h-1$  y tiene por lo menos un nodo en el nivel  $h$ :

$$n = 2^{h-1+1}-1+1=2^h$$

La altura  $h$  del árbol es de  **$O(\log n)$**

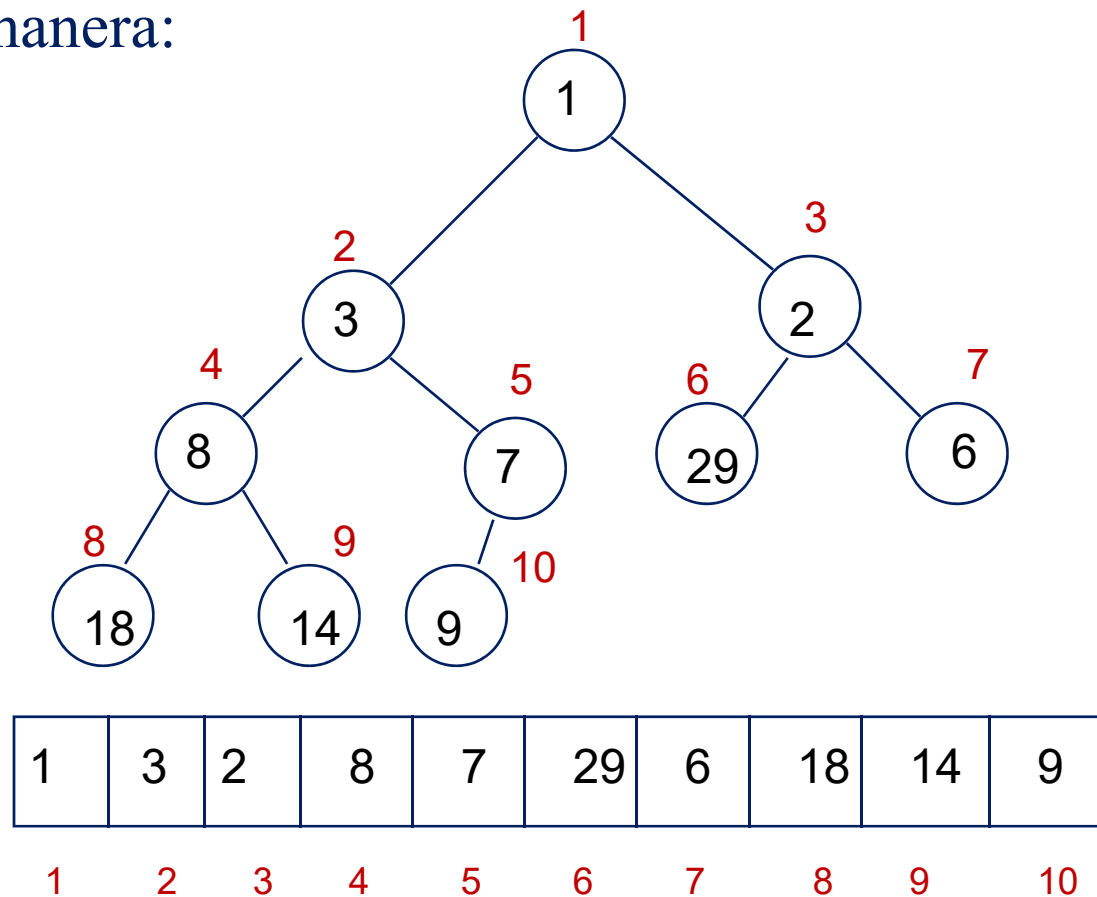
# Propiedad estructural (cont.)

➤ Dado que un árbol binario completo es una estructura de datos regular, puede almacenarse en un arreglo, tal que:

- ✓ La raíz está almacenada en la posición 1
- ✓ Para un elemento que está en la posición  $i$ :
  - El hijo izquierdo está en la posición  $2*i$
  - El hijo derecho está en la posición  $2*i + 1$
  - El padre está en la posición  $\lfloor i/2 \rfloor$

# Propiedad estructural (cont.)

El árbol que vimos como ejemplo, puede almacenarse de la siguiente manera:



# Propiedad de orden

## ➤ MinHeap

- El elemento mínimo está almacenado en la raíz
- El dato almacenado en cada nodo es menor o igual al de sus hijos

## ➤ MaxHeap

- Se usa la propiedad inversa

# Implementación de Heap

Una heap H consta de:

- *Un arreglo que contiene los datos*
- *Un valor que me indica el número de elementos almacenados*

Ventaja:

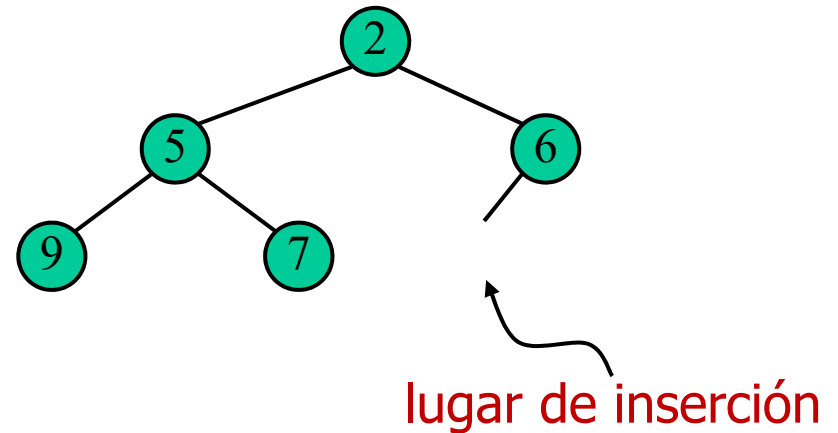
- ✓ No se necesita usar punteros
- ✓ Fácil implementación de las operaciones

# Operación: Insert

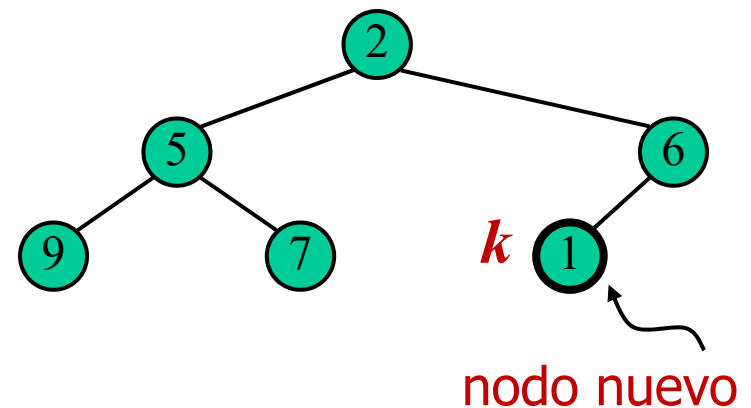
➤ El dato se inserta como último ítem en la heap

➤ La propiedad de la heap puede ser violada

➤ Se debe hacer un filtrado hacia arriba para restaurar la propiedad de orden



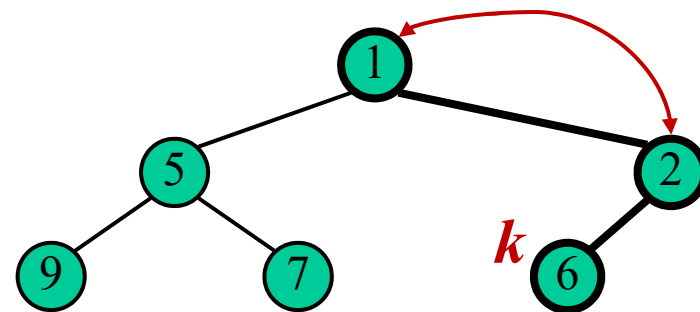
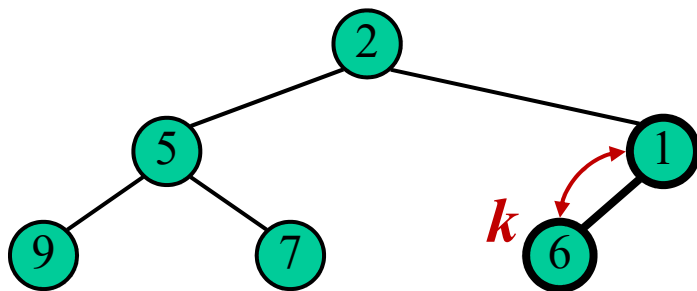
Inserto el 1





# Insert: Filtrado hacia arriba (Percolate Up)

- El filtrado hacia arriba restaura la propiedad de orden intercambiando  $k$  a lo largo del camino hacia arriba desde el lugar de inserción
- El filtrado termina cuando la clave  $k$  alcanza la raíz o un nodo cuyo padre tiene una clave menor
- Ya que el algoritmo recorre la altura de la heap, tiene  $O(\log n)$  intercambios



# Operación: insert (Versión 1)

```
insert (Heap h, Comparable x) {
```

```
    h.tamaño = h.tamaño + 1;  
    n = h.tamaño;
```

*Filtrado hacia arriba  
o Percolate\_up*

```
    while ( n / 2 > 0 & h.dato[n/2] > x ) {  
        h.dato[n] = h.dato[n/2];  
        n = n/2;  
    }
```

```
    h.dato[n] = x; // ubicación correcta de "x"
```

```
} // end del insert
```

# Operación: percolate\_up

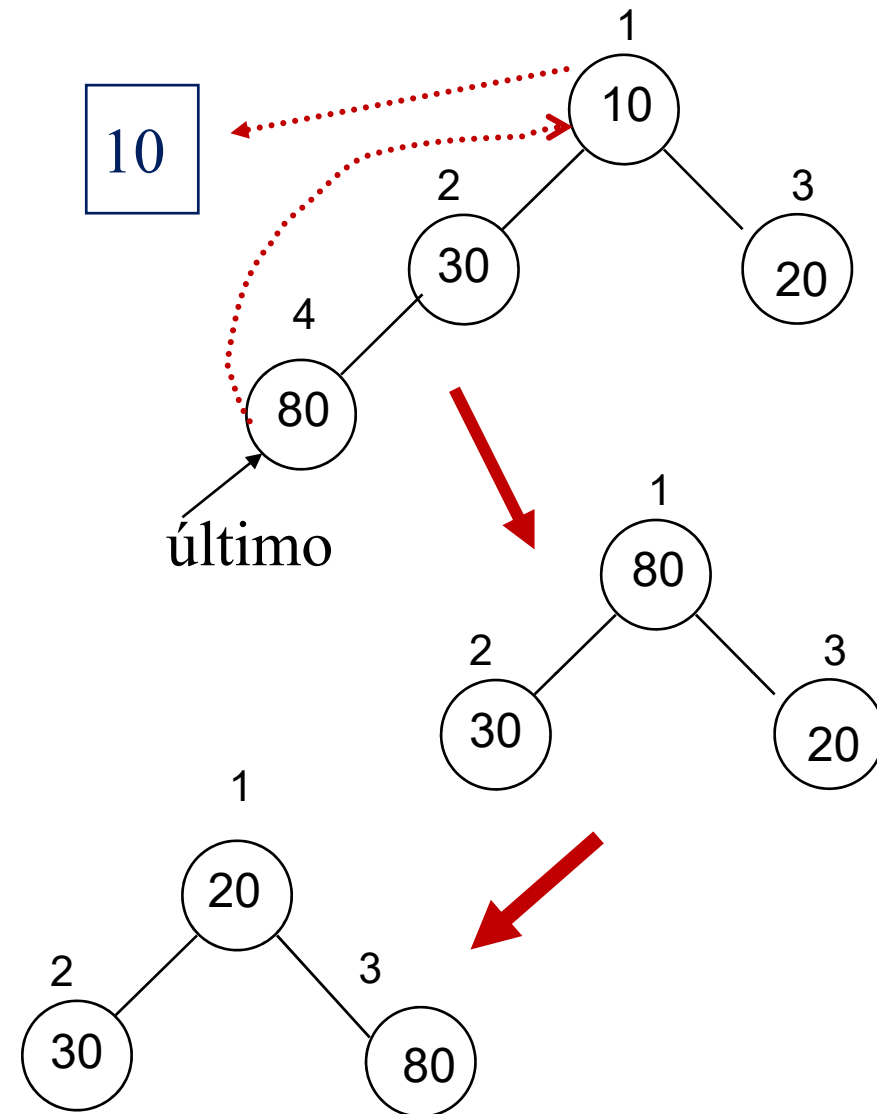
```
percolate_up (Heap h, Integer i) {  
  
    temp = h.dato[i];  
    while (i/2 > 0 & h.dato[i/2] > temp ) {  
        h.dato[i] = h.dato[i/2];  
        i = i/2;  
    }  
    h.dato[ i ] = temp;  // ubicación correcta del elemento a filtrar  
  
} // end del percolate_up
```

# Operación: insert (Versión 2)

```
insert (Heap h, Comparable x) {  
  
    h.tamaño = h.tamaño + 1;  
    h.dato[h.tamaño] = x;  
    percolate_up ( h , h.tamaño )  
  
} // end del insert
```

# Operación: DeleteMin

- Guardo el dato de la raíz
- Elimino el último elemento y lo almaceno en la raíz
- Se debe hacer un filtrado hacia abajo para restaurar la propiedad de orden



# DeleteMin: Filtrado hacia abajo (Percolate Down)

- Es similar al filtrado hacia arriba
- El filtrado hacia abajo restaura la propiedad de orden intercambiando el dato de la raíz hacia abajo a lo largo del camino que contiene los hijos mínimos
- El filtrado termina cuando se encuentra el lugar correcto dónde insertarlo
- Ya que el algoritmo recorre la altura de la heap, tiene  $O(\log n)$  operaciones de intercambio.

# Operación: delete\_min (Versión 1)

```
delete_min ( Heap h, Comparable e ) {  
  if (not esVacía(h) ) {  
    e := h.dato[1];  
    candidato := h.dato[ h.tamaño ];  
    h.tamaño := h.tamaño - 1;  
    p := 1;  
    stop_perc := false;
```

**Filtrado hacia abajo o  
Percolate\_down**

```
  while ( 2* p <= h.tamaño ) and ( not stop_perc) {  
    h_min := 2 * p; // buscar el hijo con clave menor  
    if h_min <> h.tamaño //como existe el hijo derecho comparo a ambos  
      if ( h.dato[h_min +1] < h.dato[h_min] )  
        h_min := h_min + 1  
    if candidato > h.dato [h_min] { // percolate_down  
      h.dato [p] := h.dato[ h_min ];  
      p := h_min;  
    }  
    else stop_perc := true;  
  }
```

```
  h.dato[p] := candidato;
```

```
}  
} // end del delete_min
```

# Operación: percolate\_down

```
percolate_down ( Heap h, int p) {  
  
    candidato := h.dato[ p ]  
    stop_perc := false;  
    while ( 2* p <= h.tamaño ) and ( not stop_perc) {  
        h_min := 2 * p; // buscar el hijo con clave menor  
        if h_min <> h.tamaño then  
            if ( h.dato[h_min +1] < h.dato[h_min] )  
                h_min := h_min + 1  
            if candidato > h.dato [h_min] { // percolate_down  
                h.dato [p] := h.dato[ h_min ]  
                p := h_min;  
            }  
            else stop_perc := true;  
        } // end { while }  
        h.dato[p] := candidato;  
    } // end {percolate_down }
```



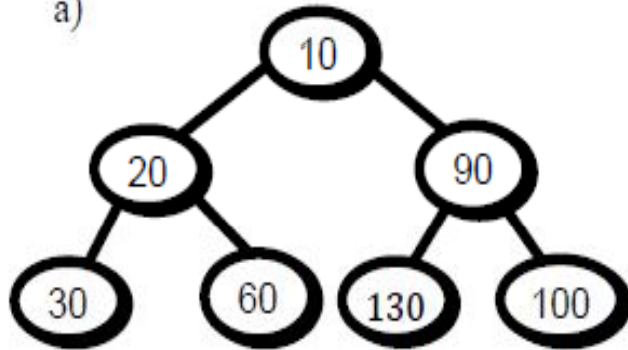
# Operación: delete\_min (Versión 2)

```
delete_min ( Heap h; Comparable e) {  
  
    if (h.tamaño > 0 ) { // la heap no está vacía  
        e := h.dato[1] ;  
        h.dato[1] := h.dato[h.tamaño] ;  
        h.tamaño := h.tamaño - 1;  
        percolate_down ( h ; 1);  
    }  
} // end del delete_min
```

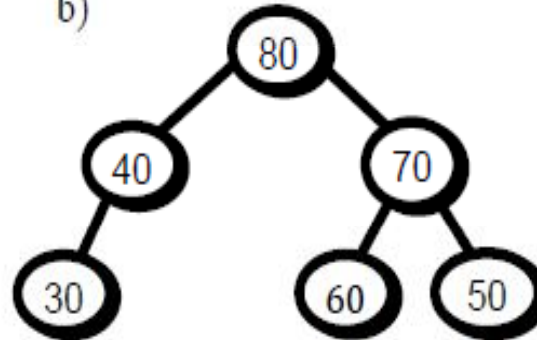
# Ejercitación

1.- Indique para cada uno de los siguientes árboles binarios si son un árbol parcialmente ordenado. En caso negativo, explique por qué.

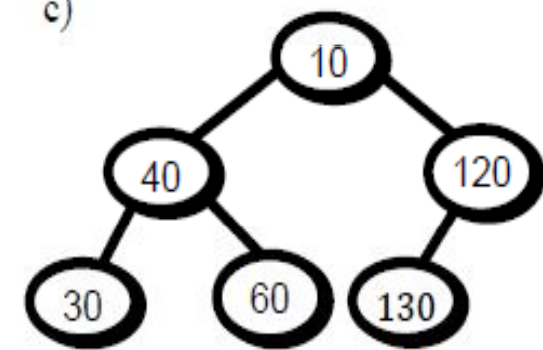
a)



b)

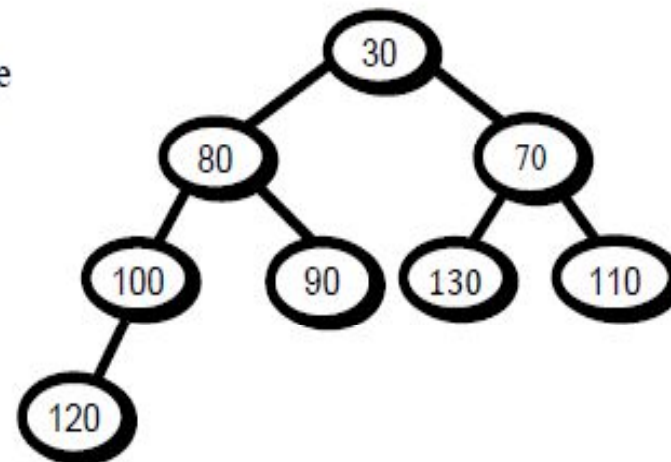


c)



2.- ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al almacenamiento lineal del siguiente árbol parcialmente ordenado o Heap binaria?

- a) 30,70, 80 90,100, 110,120, 130
- b) 30,80, 70,100, 90,130, 110, 120
- c) 30,80, 100,120, 90,70, 130, 110
- d) 120, 100, 90, 80, 130, 110, 70, 30



3.- Inserte los valores 60,75 y 10 a la heap anterior. Dibuje la heap resultante después de cada operación.

# Otras operaciones

## ➤ **DecreaseKey( $x$ , $\Delta$ , $H$ )**

- Decrementa la clave que está en la posición  $x$  de la heap  $H$ , en una cantidad  $\Delta$

## ➤ **IncreaseKey( $x$ , $\Delta$ , $H$ )**

- Incrementa la clave que está en la posición  $x$  de la heap  $H$ , en una cantidad  $\Delta$



## ➤ **DeleteKey( $x$ )**

- Elimina la clave que está en la posición  $x$
- Puede realizarse:



# ¿Cómo construir una heap a partir de una lista de elementos?

Para construir una heap a partir de una lista de  $n$  elementos:

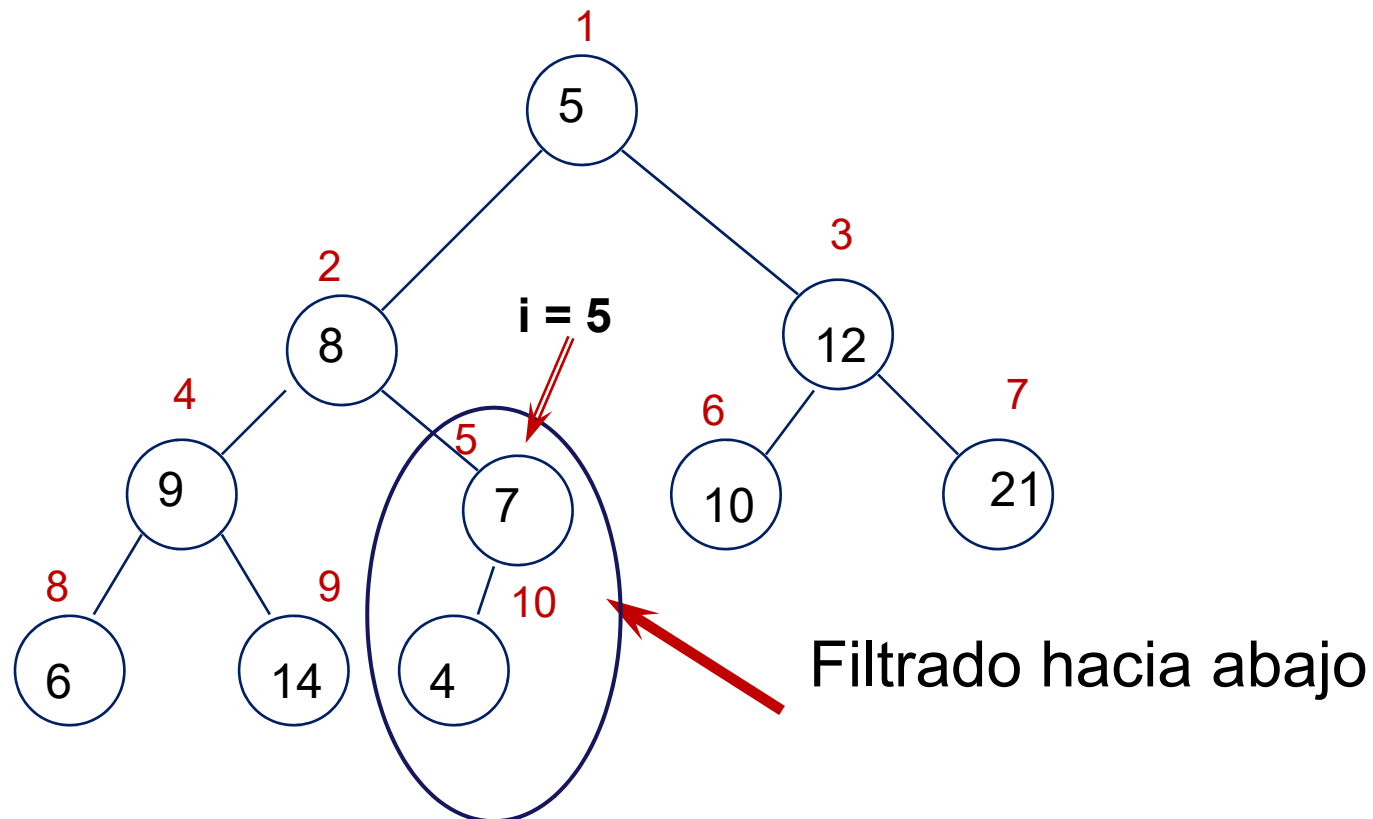
- ✓ Se pueden insertar los elementos de a uno  
     se realizan  $(n \log n)$  operaciones en total
- ✓ Se puede usar un algoritmo de orden lineal, es decir, proporcional a los  $n$  elementos  **BuildHeap**
  - Insertar los elementos desordenados en un árbol binario completo
  - Filtrar hacia abajo cada uno de elementos

# Algoritmo BuildHeap

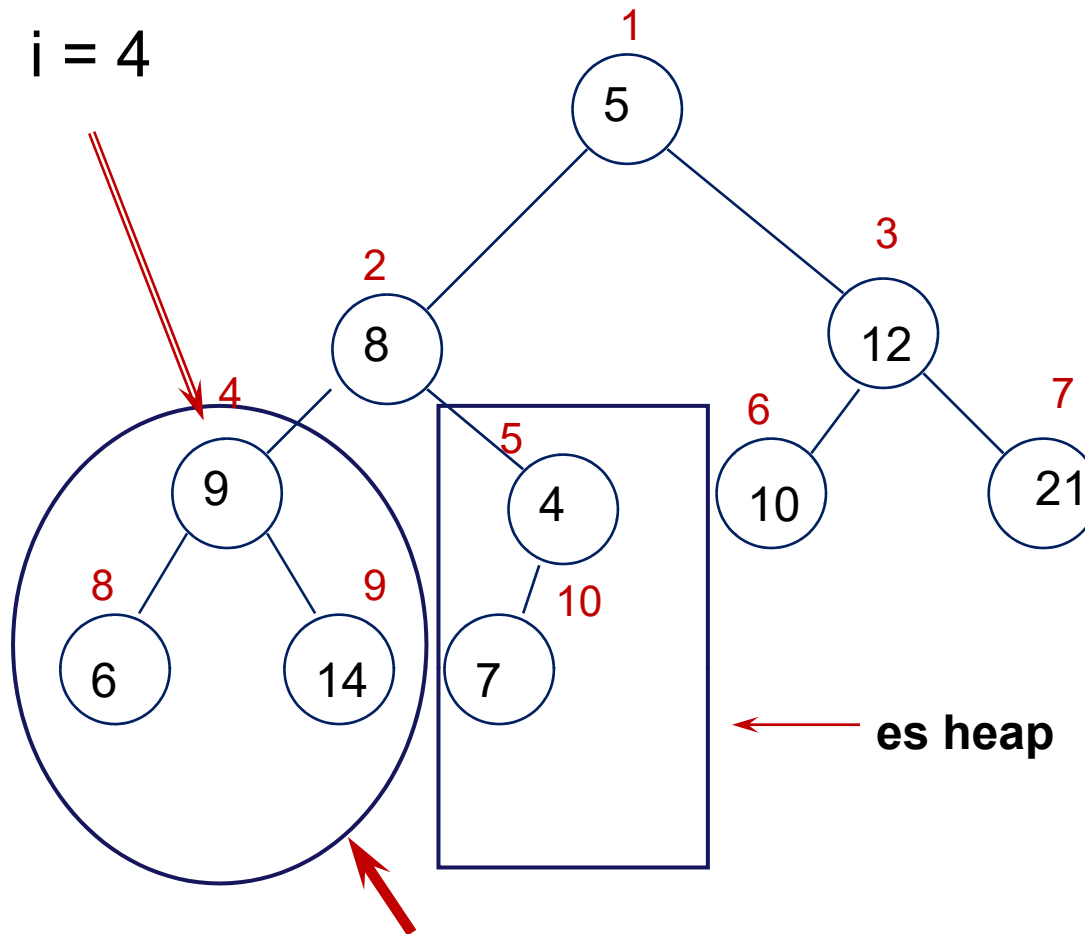
- Para filtrar:
  - se elige el menor de los hijos
  - se compara el menor de los hijos con el padre
- Se empieza filtrando desde el elemento que está en la posición  $(\text{tamaño}/2)$ :
  - se filtran los nodos que tienen hijos
  - el resto de los nodos son hojas

# BuildHeap

5	8	12	9	7	10	21	6	14	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

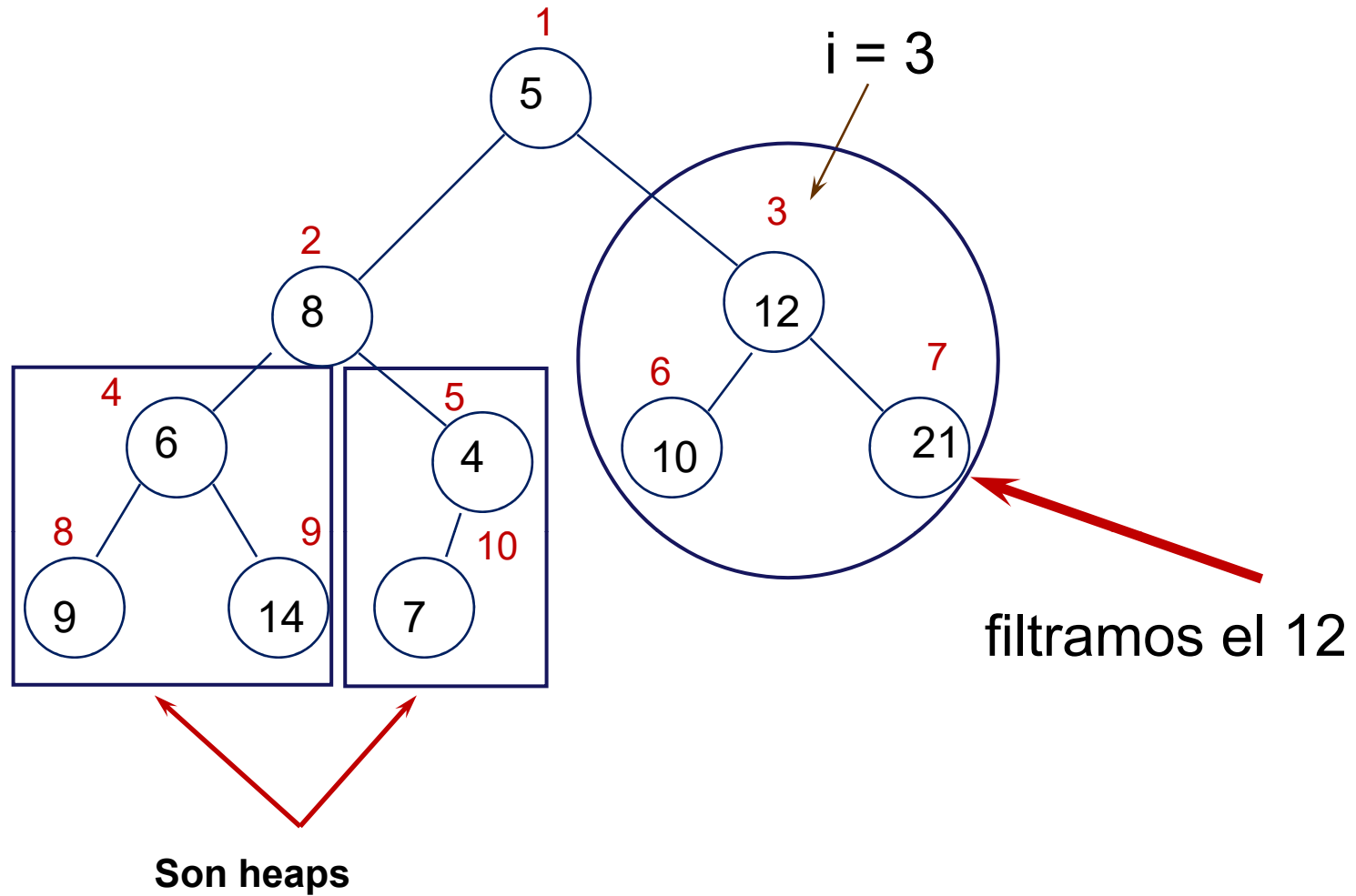


# BuildHeap



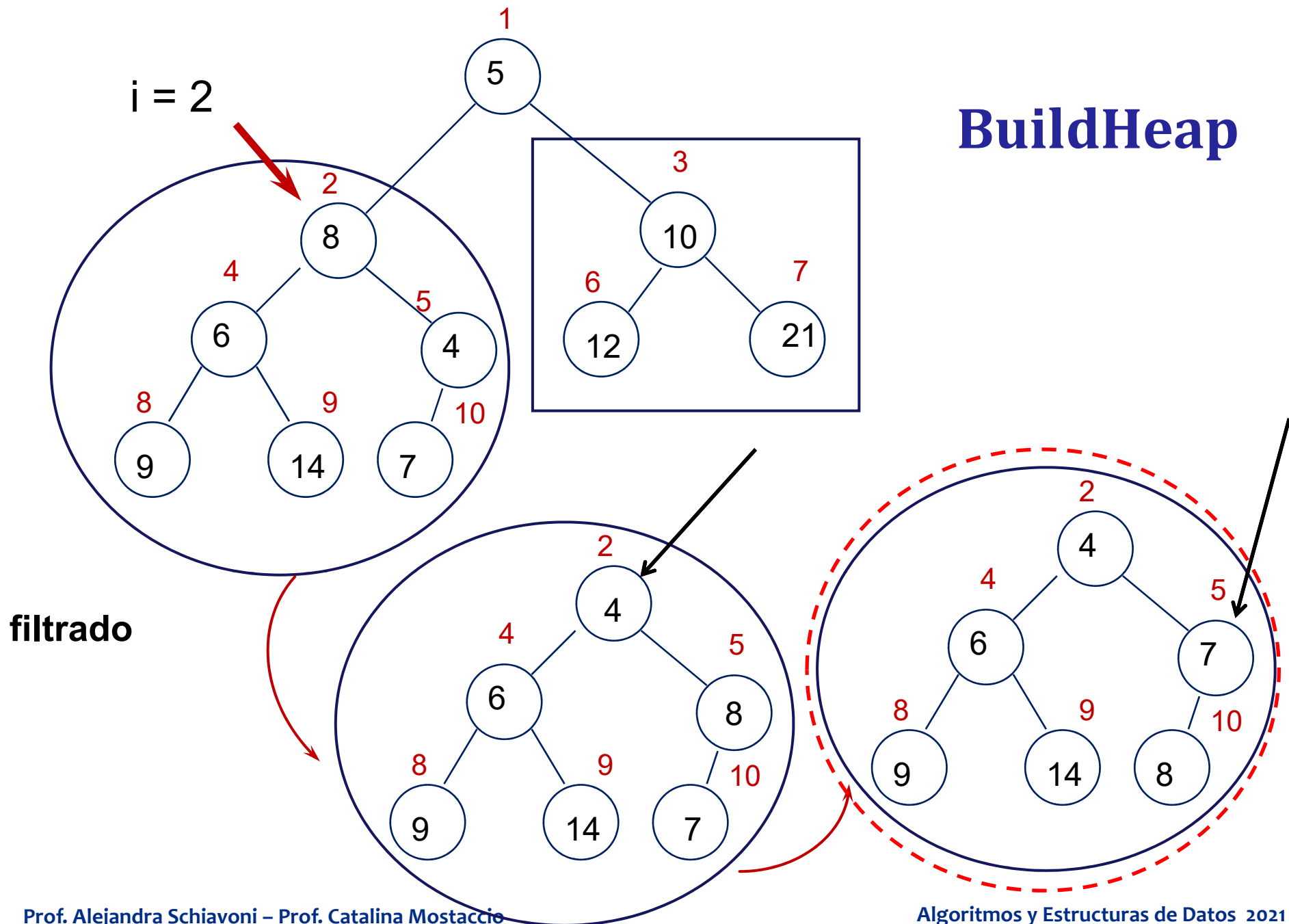
filtramos el 9

# BuildHeap

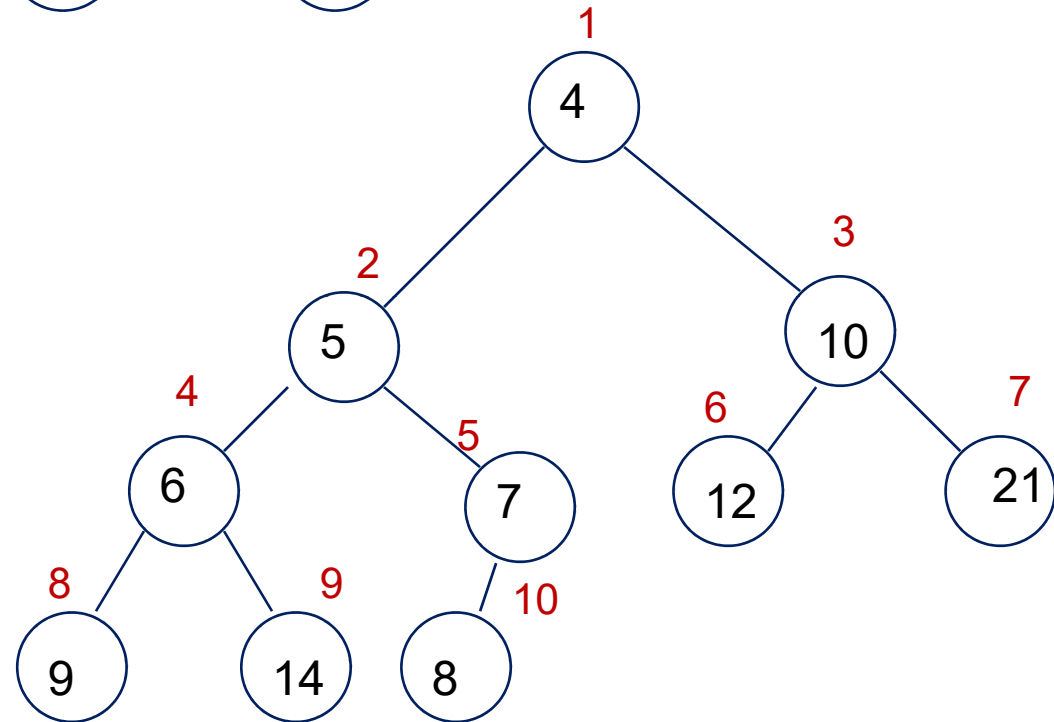
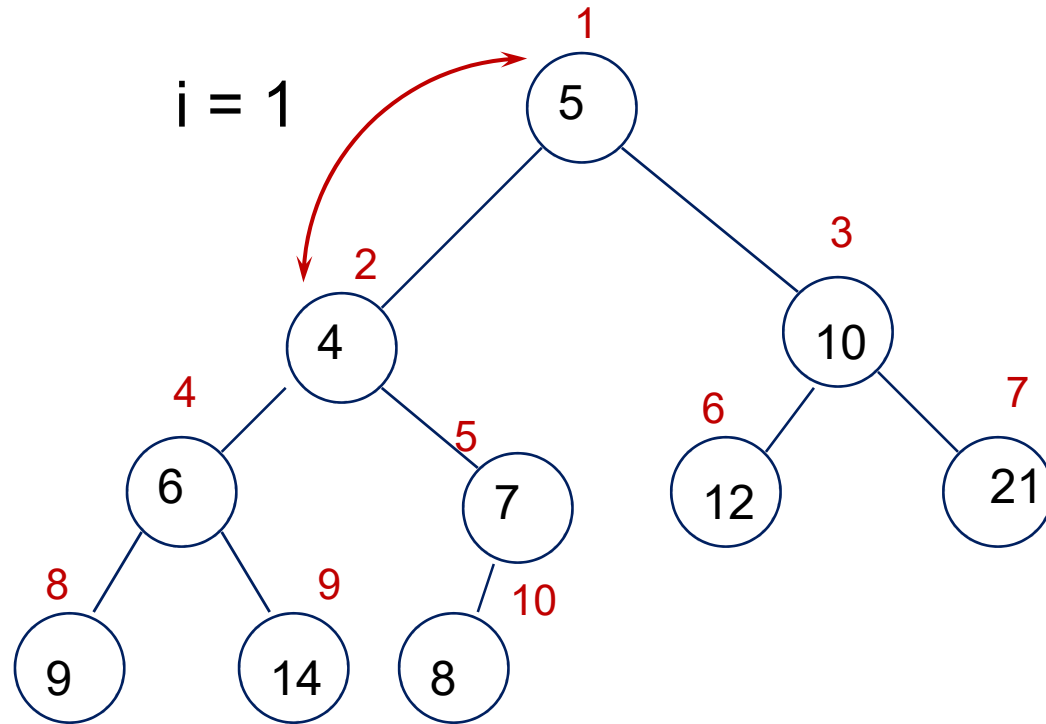




# BuildHeap



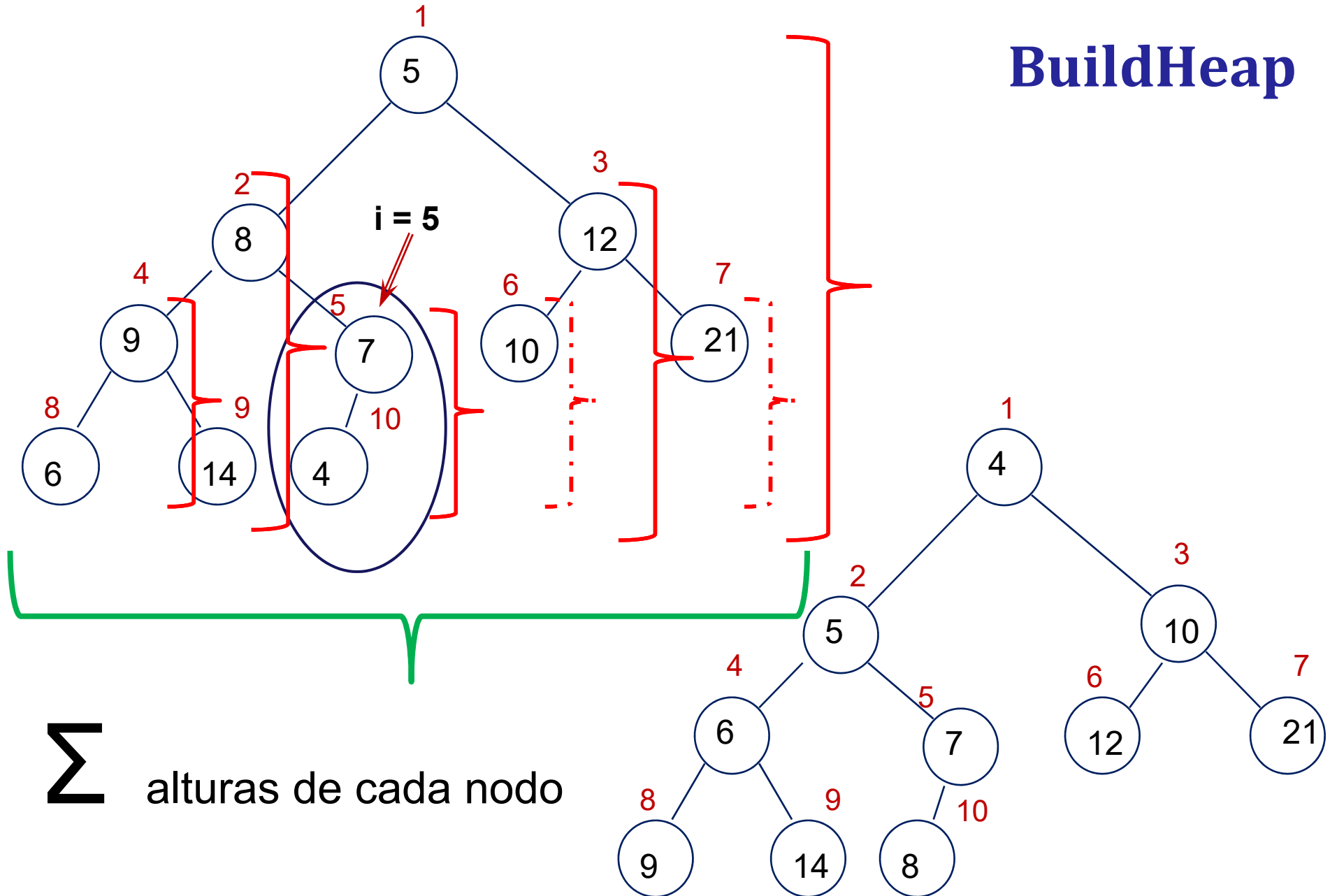
# BuildHeap



# Cantidad de operaciones requeridas

- En el filtrado de cada nodo recorreremos su altura
- Para acotar la cantidad de operaciones (*tiempo de ejecución*) del algoritmo BuildHeap, debemos calcular la suma de las alturas de todos los nodos

# BuildHeap



# Cantidad de operaciones requeridas (cont.)

## Teorema:

En un árbol binario lleno de altura  $h$  que contiene  $2^{h+1} - 1$  nodos, la suma de las alturas de los nodos es:  $2^{h+1} - 1 - (h + 1)$

## Demostración:

Un árbol tiene  $2^i$  nodos de altura  $h - i$

$$S = \sum_{i=0}^h 2^i (h-i)$$

$$S = h + 2(h-1) + 4(h-2) + 8(h-3) + \dots 2^{h-1}(1)$$

## Cantidad de operaciones requeridas (cont.)

$$S = \underset{-}{h} + 2 \underset{-}{(h-1)} + 4 \underset{-}{(h-2)} + 8 \underset{-}{(h-3)} + \dots + 2^{h-1} (1) \quad (A)$$

$$2S = 2h + 4 (h-1) + 8 (h-2) + 16 (h-3) + \dots + 2^h (1) \quad (B)$$

Restando las dos igualdades (B) – (A)

$$S = -h + 2 (h-(h-1)) + 4((h-1)-(h-2)) + 8 ((h-2)-(h-3)) + \dots + 2^{h-1}(2-1) + 2^h$$

$$S = -h + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{h-1} + 2^h$$

$$S + 1 = -h + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{h-1} + 2^h$$

$$S + 1 = -h + (2^{h+1} - 1)$$

$$S = (2^{h+1} - 1) - (h + 1)$$

## Cantidad de operaciones requeridas (cont.)

- Un árbol binario completo no es un árbol binario lleno, pero el resultado obtenido es una cota superior de la suma de las alturas de los nodos en un árbol binario completo
- Un árbol binario completo tiene entre  $2^h$  y  $2^{h+1} - 1$  nodos, el teorema implica que esta suma es de  $O(n)$  donde  $n$  es el número de nodos.
- Este resultado muestra que la operación BuildHeap es lineal

# Ordenación de vectores usando Heap

Dado un conjunto de  $n$  elementos y se los quiere ordenar en forma creciente, existen dos alternativas:

*a) Algoritmo que usa una heap y requiere una cantidad aproximada de  $(n \log n)$  operaciones.*

➤ Construir una MinHeap, realizar  **$n$**  DeleteMin operaciones e ir guardando los elementos extraídos en otro arreglo.

➤ Desventaja: **requiere el doble de espacio**



# Ordenación de vectores usando Heap

*Ejemplo: Construir una MinHeap, realizar 6 DeleteMin operaciones e ir guardando los elementos extraídos en otro arreglo.*

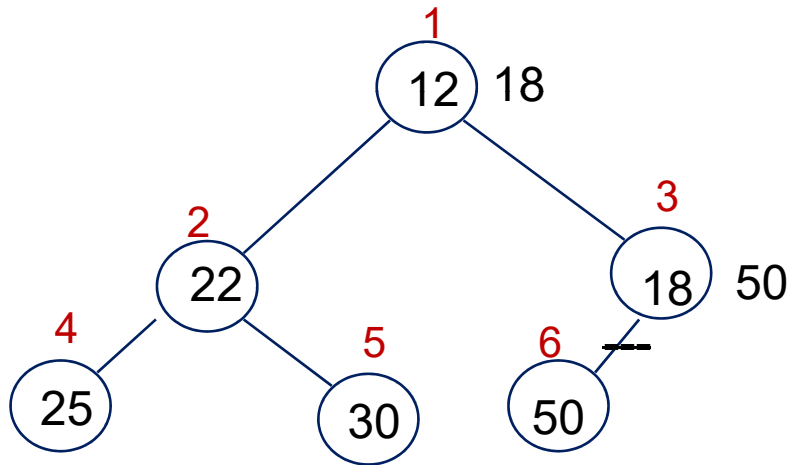
50	30	18	25	22	12
----	----	----	----	----	----

entrada

12					
----	--	--	--	--	--

salida

1 2 3 4 5 6



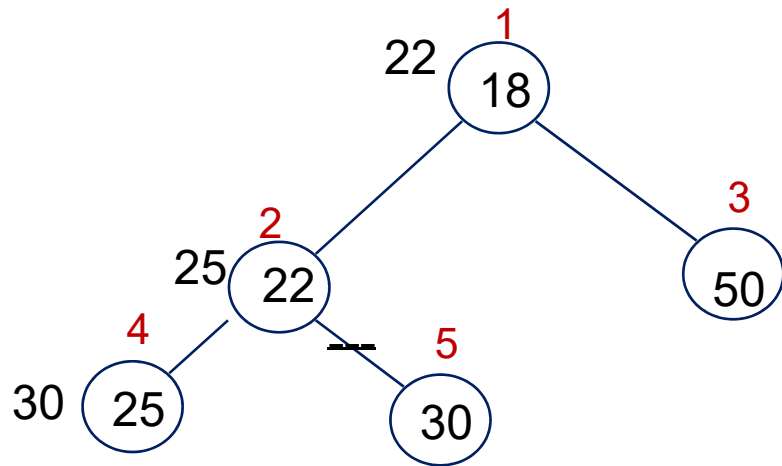
12	22	18	25	30	50
----	----	----	----	----	----

1 2 3 4 5 6

18	22	50	25	30	<del>50</del>
----	----	----	----	----	---------------

1 2 3 4 5 6

# Ordenación de vectores usando Heap



salida

12	18	22			
----	----	----	--	--	--

1 2 3 4 5 6

18	22	50	25	30	<del>50</del>
----	----	----	----	----	---------------

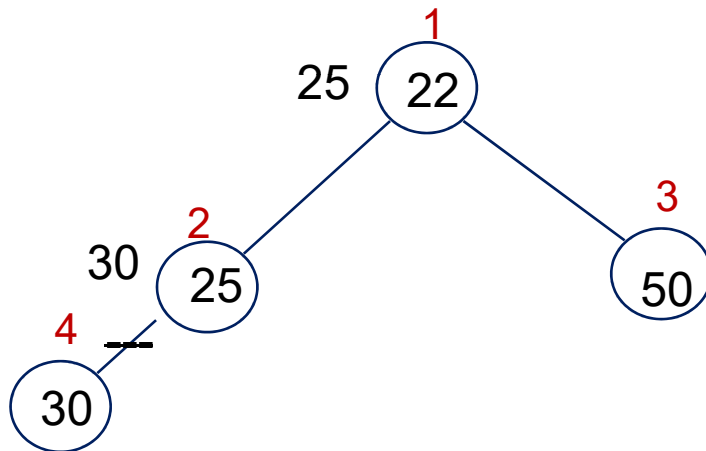
1 2 3 4 5 6

22	25	50	30	<del>30</del>	<del>50</del>
----	----	----	----	---------------	---------------

1 2 3 4 5 6

25	30	50	<del>30</del>	<del>30</del>	<del>50</del>
----	----	----	---------------	---------------	---------------

1 2 3 4 5 6

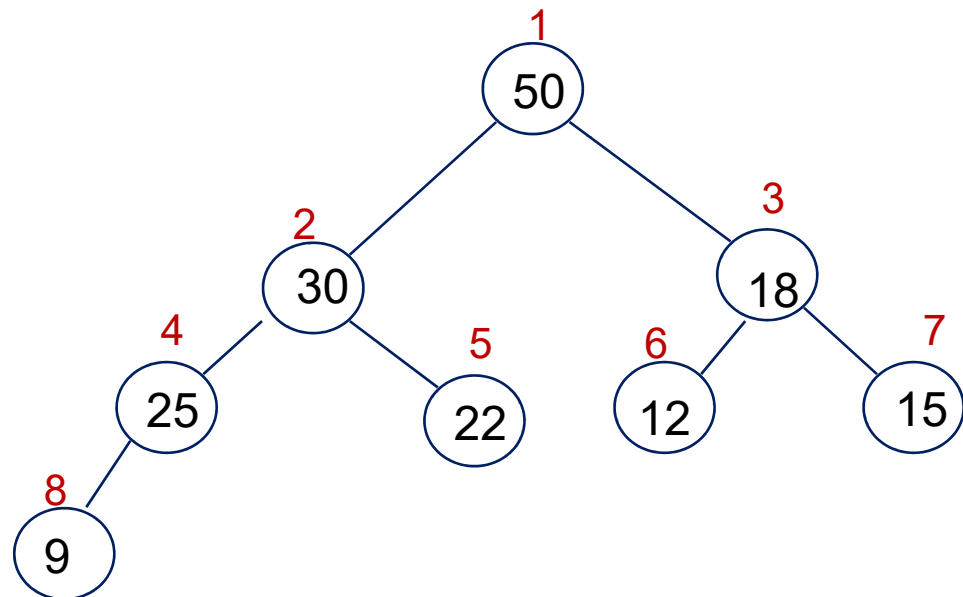


# Ordenación de vectores usando Heap: Algoritmo HeapSort

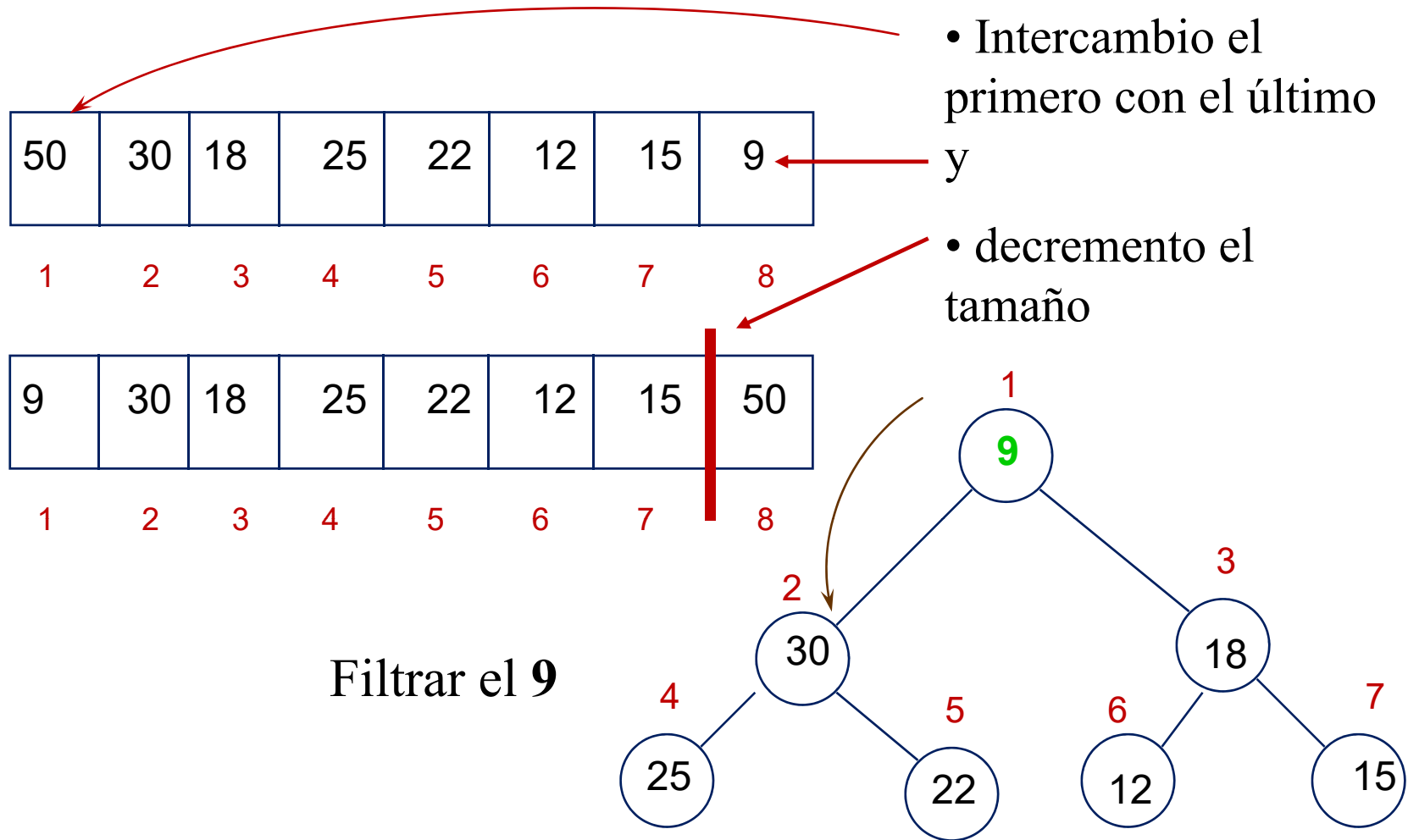
*b) Algoritmo **HeapSort** que requiere una cantidad aproximada de  $(n \log n)$  operaciones, pero **menos espacio**.*

➤ Construir una MaxHeap con los elementos que se desean ordenar, intercambiar el último elemento con el primero, decrementar el tamaño de la heap y filtrar hacia abajo. Usa sólo el espacio de almacenamiento de la heap.

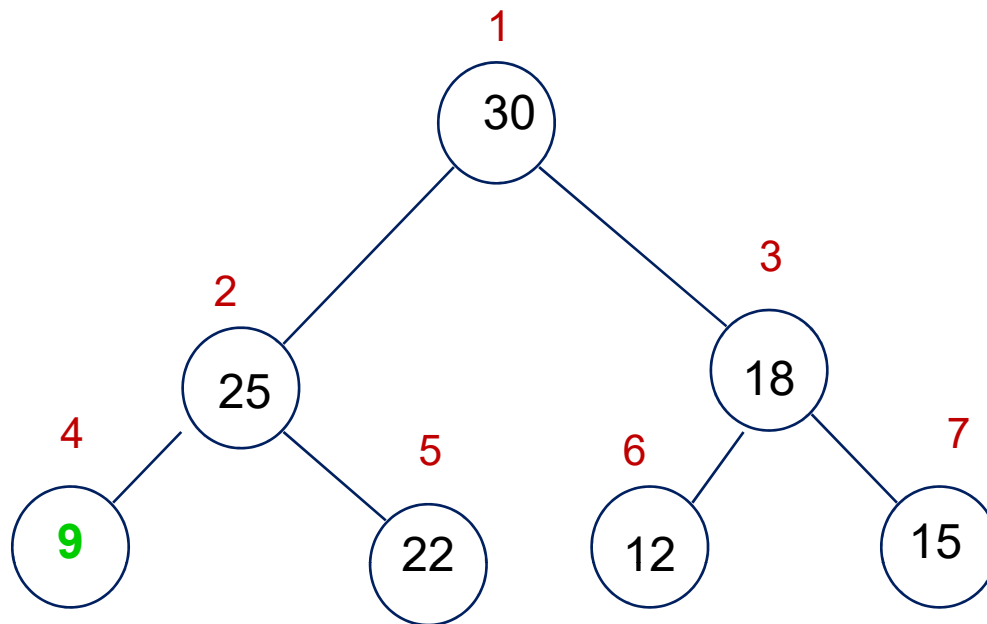
Ejemplo:



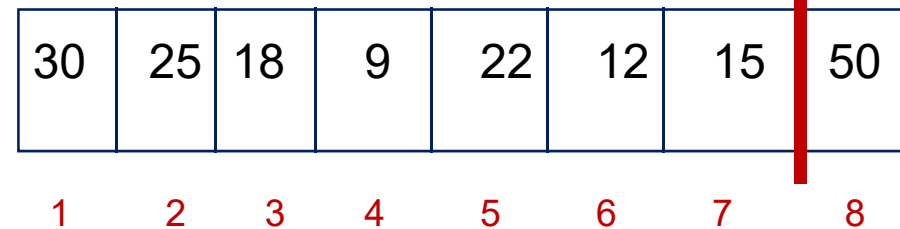
# HeapSort (cont.)



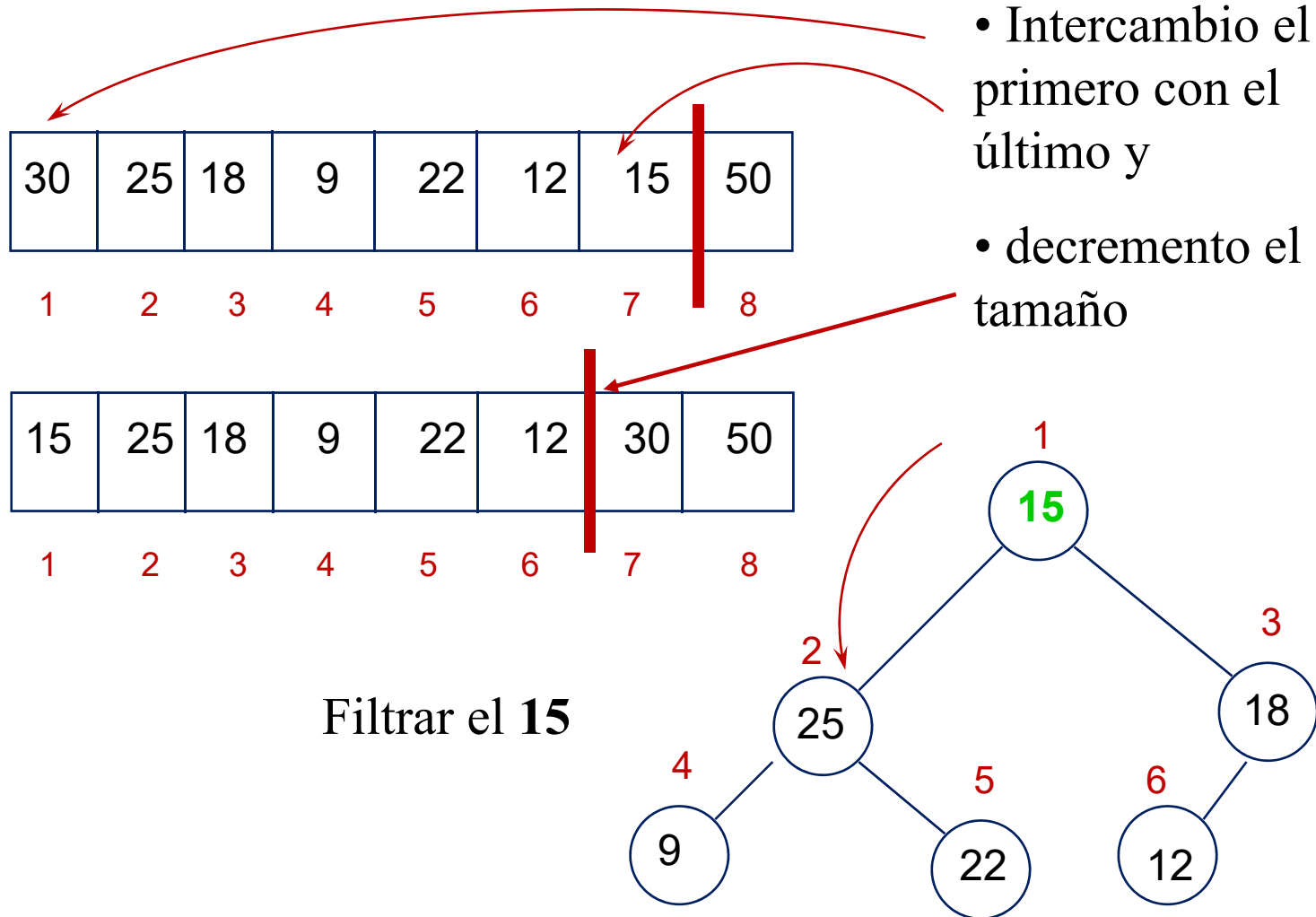
# HeapSort (cont.)



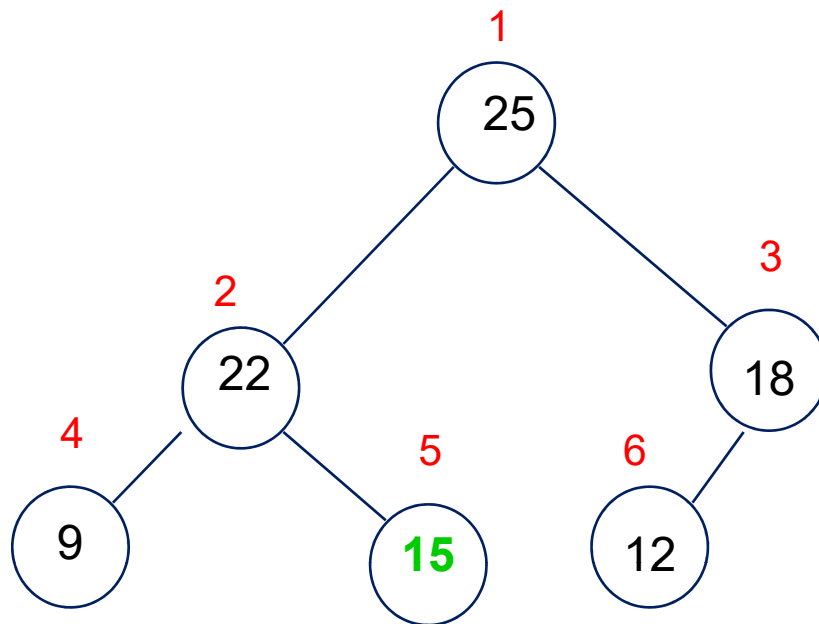
Después de filtrar el 9  
hacia abajo



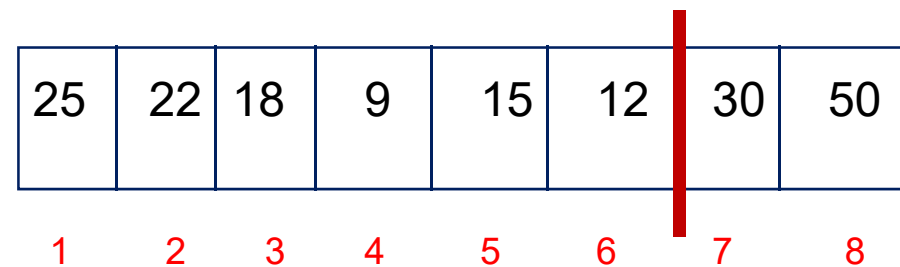
# HeapSort (cont.)



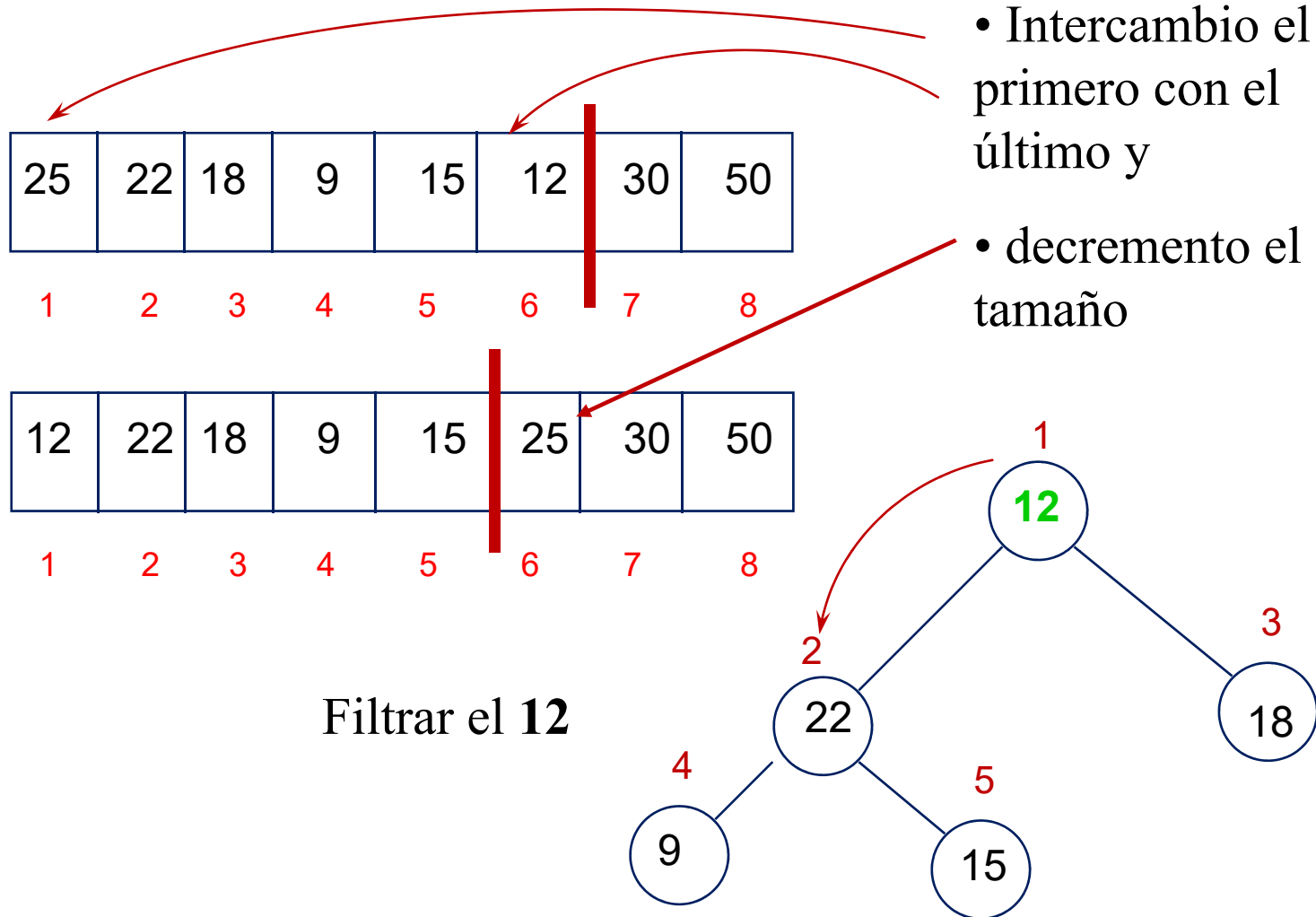
# HeapSort (cont.)



Después de filtrar el **15**  
hacia abajo



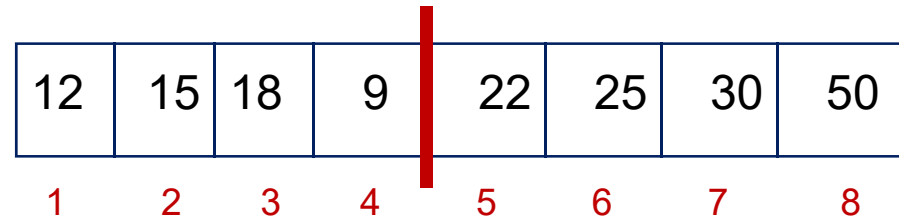
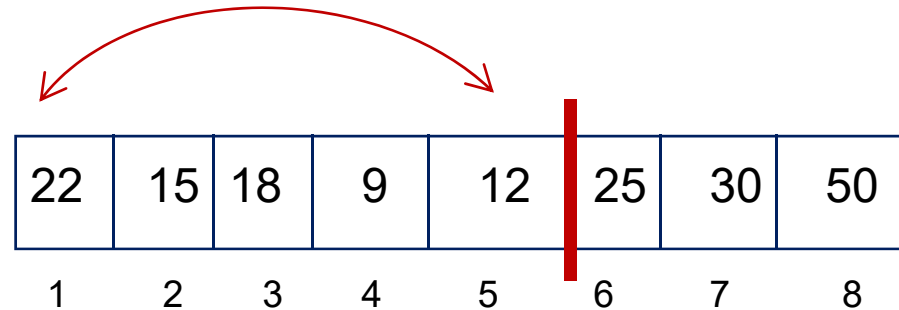
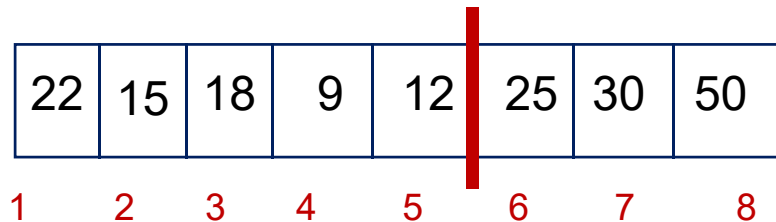
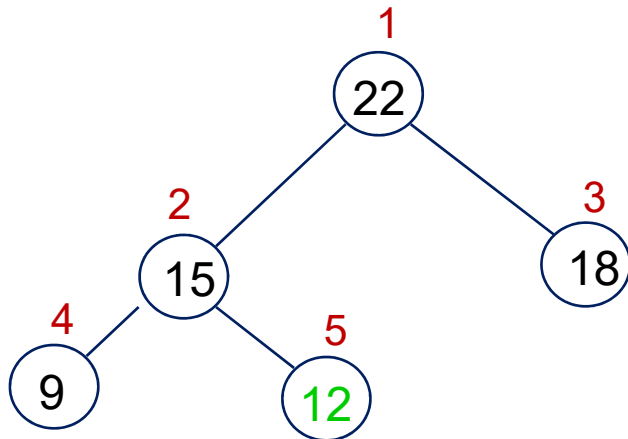
# HeapSort (cont.)



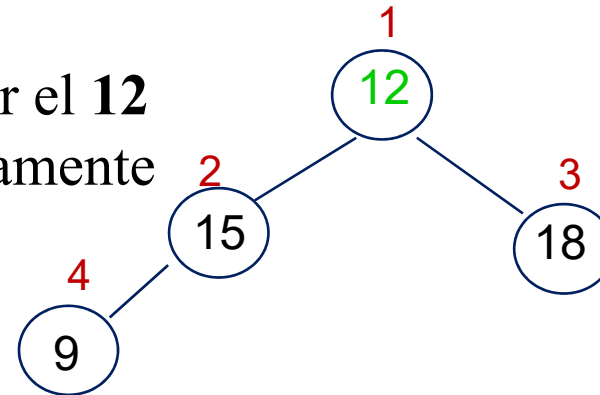


# HeapSort (cont.)

Después de filtrar el **12**  
hacia abajo

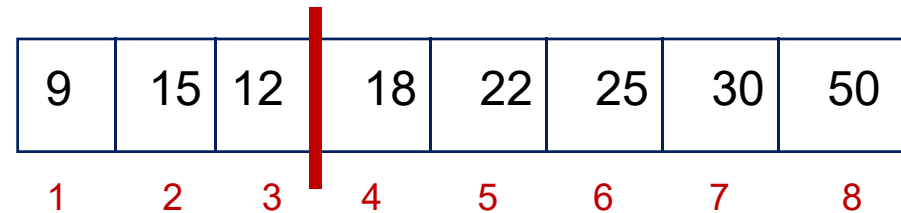
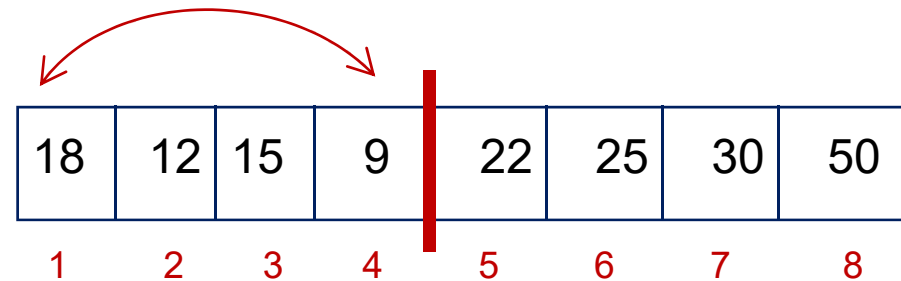
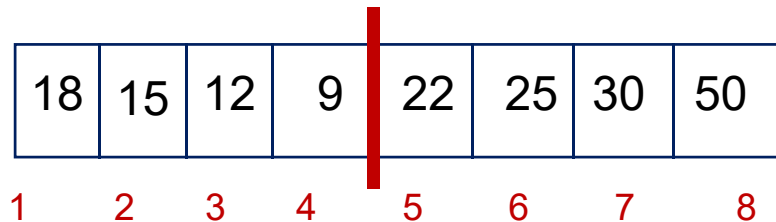
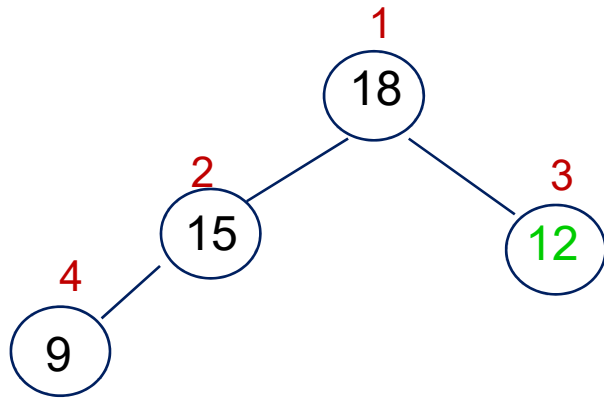


Filtrar el **12**  
nuevamente

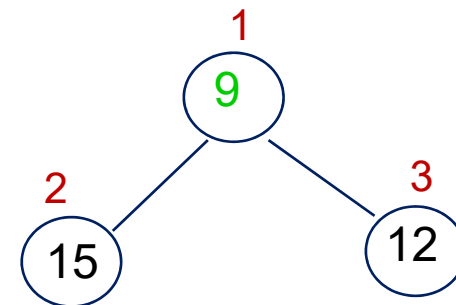


# HeapSort (cont.)

Después de filtrar el **12**  
hacia abajo

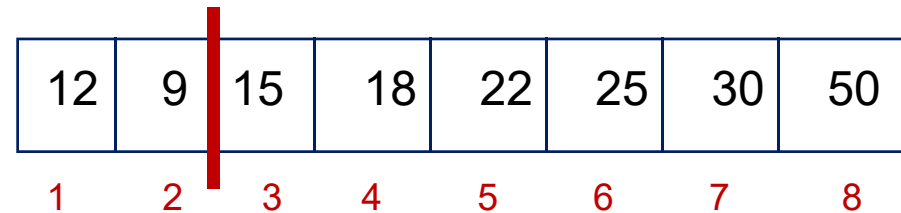
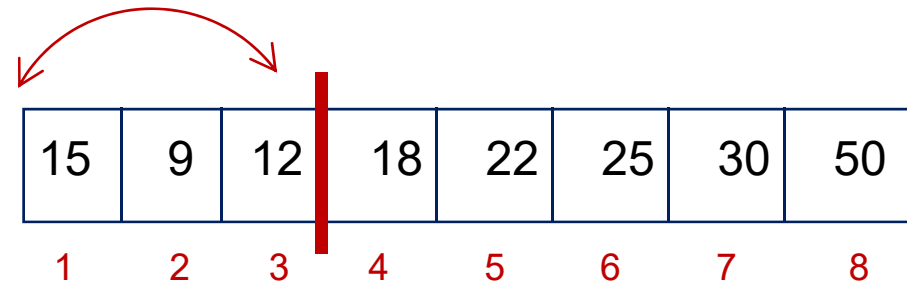
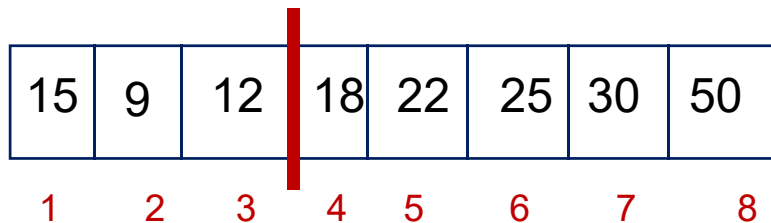
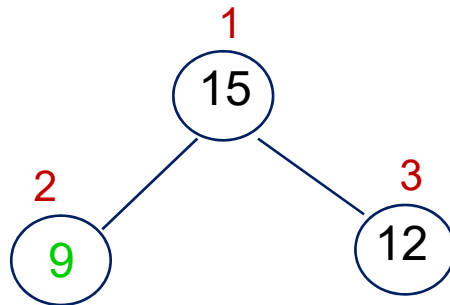


Filtrar el **9**

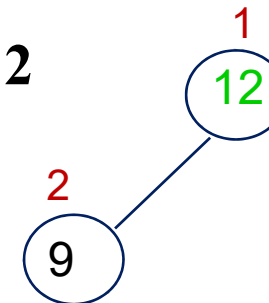


# HeapSort (cont.)

Después de filtrar el 9  
hacia abajo

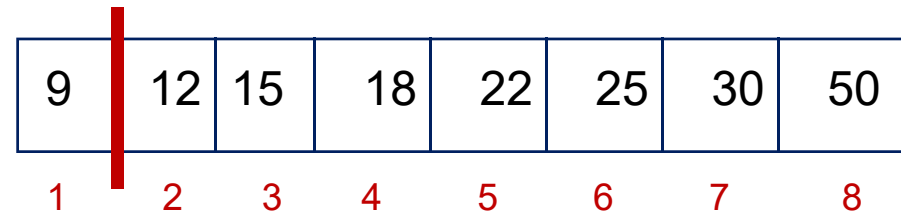
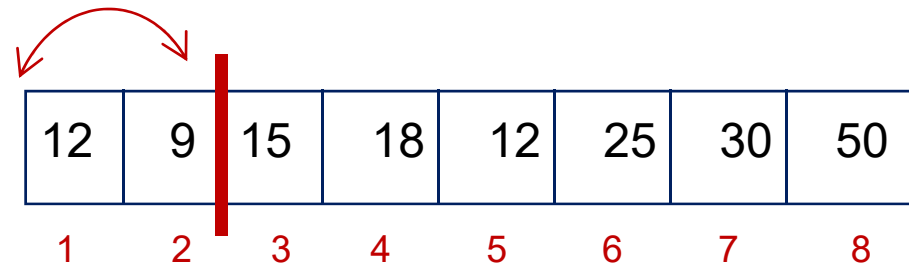
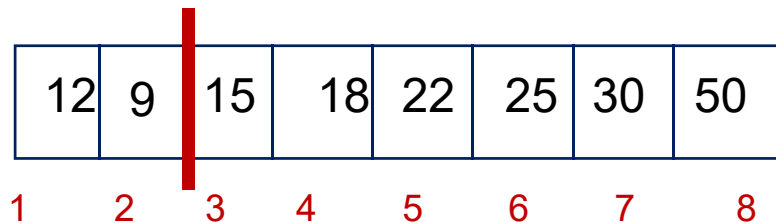
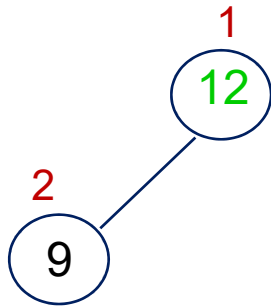


Filtrar el 12

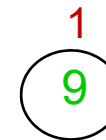


# HeapSort (cont.)

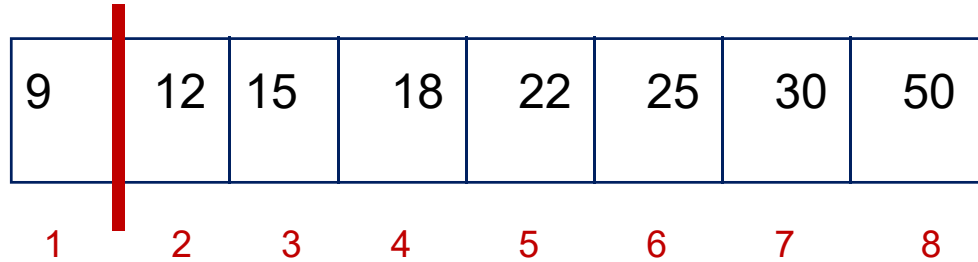
Después de filtrar el **12**  
hacia abajo



Filtrar el **9**



# HeapSort (cont.)



Datos almacenados internamente

Heap conceptual

