Fundamentos de Teoria da Computação Aula 08

PRISCILA MARQUES KAI

INDUÇÃO

Existe uma última técnica de demonstração particularmente útil.

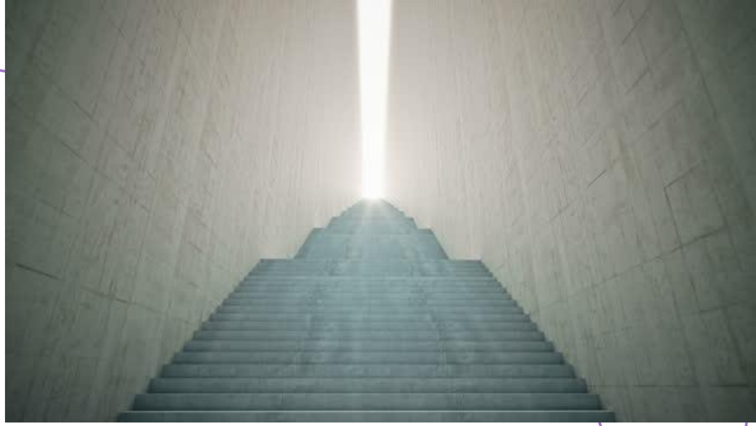
Para ilustrar como ela funciona, imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta.

Como você sabe se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?

INDUÇÃO

Suponha que você faça as seguintes hipóteses sobre sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo. (condicional.)



INDUÇÃO

Hipóteses sobre sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo (condicional).

Se a proposição 1 e o condicional 2 forem ambos verdadeiros, então, pela proposição 1, você consegue chegar ao primeiro degrau e portanto, pela proposição 2, consegue chegar ao segundo; novamente pela proposição 2, você consegue chegar ao terceiro degrau; mais uma vez pela proposição 2, você consegue chegar ao quarto degrau; e assim por diante.

Você pode subir tão alto quanto quiser. Ambas as hipóteses são necessárias.

INDUÇÃO

Hipóteses sobre sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo (condicional).

Agora pense sobre uma propriedade específica que um número possa ter. Em vez de "chegar a um degrau arbitrariamente alto", podemos falar sobre um inteiro positivo arbitrário tendo essa propriedade.

INDUÇÃO

Vamos usar a notação P(n) para dizer que o inteiro positivo n tem a propriedade P. Como usar a mesma técnica que usamos para subir a escada para provar que, qualquer que seja o inteiro positivo n, temos P(n)?

As duas proposições que precisamos provar são

1. $P(1)$ — (1 tem a propriedade de *P*.)
2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. — (Se qualquer número tem a propriedade *P*, o próximo também tem.)

Para provar que alguma coisa é verdade para todos os inteiros n ≥ algum valor, pense em indução.

INDUÇÃO

PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P(1) \text{ é verdade} \\ 2. & (\forall k)[P(k) \text{ verdade} \rightarrow P(k+1) \text{ verdade}] \end{array}\right\} \rightarrow P(n) \textit{ verdade para todos os inteiros positivos } \text{n}$$

INDUÇÃO

Para mostrar que a conclusão desse condicional é verdadeira, precisamos provar que as duas hipóteses, 1 e 2, são verdadeiras.

Para provar a proposição 1, basta mostrar que o número 1 tem a propriedade P, geralmente uma tarefa trivial.

A proposição 2 é um condicional que tem que ser válido para todo k.

- Para provar esse condicional, suponha que $P(k)$ é verdade para um inteiro positivo arbitrário *k* e mostre, com base nessa hipótese, que $P(k+1)$ é verdade.
- Portanto, $P(k) \rightarrow P(k+1)$, e, usando a generalização universal, $(\forall k)[P(k) \rightarrow P(k+1)]$.

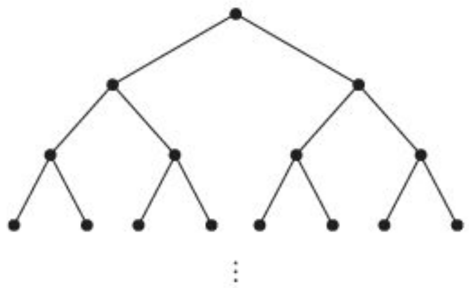
INDUÇÃO

Na demonstração por indução, demonstrar a veracidade da proposição 1 é chamado de **base da indução** ou passo inicial da demonstração por indução.

O estabelecimento da veracidade de $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ é o **passo indutivo**. Quando supomos que $P(k)$ é verdade para provar o passo indutivo, $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução**.

INDUÇÃO

Suponha que um progenitor ancestral Silva casou e teve dois filhos. Vamos chamar esses dois filhos de geração 1. Suponha, agora, que cada um desses filhos teve dois filhos; então, a geração 2 contém quatro descendentes. Isso continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva, portanto, tem a forma ilustrada na Figura 2.2. (Ela é exatamente igual à Figura 1.1b, onde obtivemos todos os valores lógicos possíveis V-F para n letras de proposição.)



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
$\vdots$	$\vdots$

Figura 2.2

Parece que a geração n contém 2^n descendentes. Mais formalmente, se denotarmos por $P(n)$ o número de descendentes em cada geração, nossa conjectura é que

$$P(n) = 2^n$$

Podemos usar indução para *provar* que nossa conjectura para $P(n)$ está correta.

O passo básico é estabelecer $P(1)$, que é a equação

$$P(1) = 2^1 = 2$$

INDUÇÃO

Isso é verdade, pois nos foi dito que Silva teve dois filhos. Vamos supor, agora, que nossa conjectura está correta para uma geração arbitrária k, $k \geq 1$, ou seja, vamos supor que

$$P(k) = 2^k$$

e tentar mostrar que

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

Nessa família, cada descendente tem dois filhos, de modo que o número de descendentes na geração $k + 1$ será o dobro do número de descendentes na geração k, ou seja, $P(k+1) = 2P(k)$. Pela hipótese de indução, $P(k) = 2^k$, logo

$$P(k+1) = 2P(k) = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

e, de fato,

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

Isso completa nossa demonstração. Agora que estamos tranquilos sobre o clã dos Silva, podemos aplicar o método de demonstração por indução a problemas menos óbvios.

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

fórmula para o valor dessa soma.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

fórmula para o valor dessa soma.

Embora possamos verificar a veracidade dessa equação para qualquer valor particular de n substituindo esse valor na equação, não podemos substituir n por todos os inteiros positivos que existem. Assim, uma demonstração por exaustão não funciona. Uma demonstração por indução é apropriada.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

fórmula para o valor dessa soma.

Passo 1: Base da indução

Para n=1, temos: $1=1^2$

Portanto, a base da indução é verdadeira.

Quando substituímos n por 1 na expressão à esquerda do sinal de igualdade na Equação (1), obtemos a soma de todos os inteiros ímpares começando em 1 em terminando em 2(1) – 1 = 1.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

fórmula para o valor dessa soma.

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Para a hipótese de indução, vamos supor $P(k)$ para um inteiro arbitrário k, que é a Equação(1) quando n tem o valor k:

Passo 2: Hipótese de indução

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

Usando a hipótese de indução, queremos mostrar $P(k+1)$, que é a Equação(1) quando n assume o valor $k + 1$, ou seja,

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k + 1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] \stackrel{?}{=} (k + 1)^2 \qquad (3)$$

A chave de uma demonstração por indução é encontrar um modo de relacionar o que queremos saber ($P(k + 1)$, Equação(3)), e o que supomos ($P(k)$, Equação(2)). A expressão à esquerda do sinal de igualdade em $P(k + 1)$ pode ser reescrita como:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

(2)

$$P(k + 1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] \stackrel{?}{=} (k + 1)^2$$

(3)

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

(2)

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2$$

(3)

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$= 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

(2)

$P(k+1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2$

(3)

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, **podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).**

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$= \mathbf{1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)} + [2(k+1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$
(2)

$$P(k + 1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k + 1) - 1] \stackrel{?}{=} (k + 1)^2$$
(3)

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, **podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).**

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

$$= \mathbf{1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)} + [2(k + 1) - 1]$$
$$= \boldsymbol{k^2} + [2(k + 1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k + 1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k + 1) - 1] \stackrel{?}{=} (k + 1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + [2k + 2 - 1] \end{aligned}$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k + 1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] \stackrel{?}{=} (k + 1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + [2k + 2 - 1] \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$= 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

o que mostra a validade de $P(k + 1)$, provando, assim, que a Equação(1) é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

INDUÇÃO

Três passos para uma demonstração usando o primeiro princípio de indução:

TABELA 2.3	
Para Demonstrações com o Primeiro Princípio de Indução	
Passo 1	Prove o passo básico.
Passo 2	Suponha $P(k)$.
Passo 3	Prove $P(k + 1)$.

INDUÇÃO

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$

INDUÇÃO

EXEMPLO 16

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$

$P(1)$ é a proposição $2^1 > 1$, que certamente é verdade. Vamos supor, agora, $P(k)$, $2^k > k$, e tentar concluir $P(k+1)$, $2^{k+1} > k+1$. Mas onde está escondido o $P(k)$ aqui? Ah! — podemos escrever a expressão à esquerda do sinal de igualdade em $P(k+1)$ como $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$ e aí está a expressão à esquerda do sinal de igualdade em $P(k)$. Usando a hipótese de indução $2^k > k$ e multiplicando os dois membros dessa desigualdade por 2, obtemos $2^k \cdot 2 > k \cdot 2$. Completando o argumento,

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 = k + k \geq k + 1 \text{ (já que } k \geq 1)$$

ou seja,

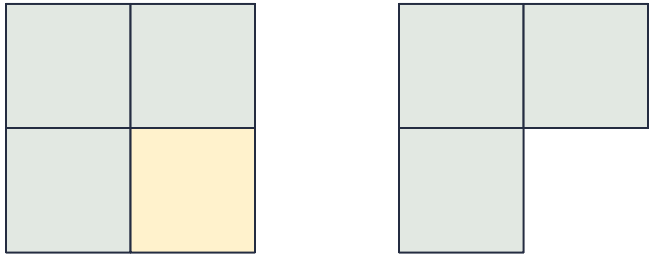
$$2^{k+1} > k + 1$$

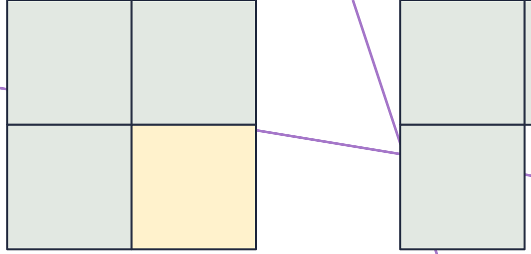
INDUÇÃO

Prove que, para todo inteiro $n > 1$, $2^{n+1} < 3^n$

INDUÇÃO

Exemplo em um contexto geométrico. Um ângulo de ferro é uma peça em forma de L cobrindo três quadrados em um tabuleiro quadriculado, como o de xadrez. O problema é mostrar que, para qualquer inteiro positivo *n*, se removermos um quadrado de um tabuleiro originalmente com 2^n x 2^n quadrados, ele pode ser ladrilhado - completamente revestido - com ângulos de ferro.





INDUÇÃO

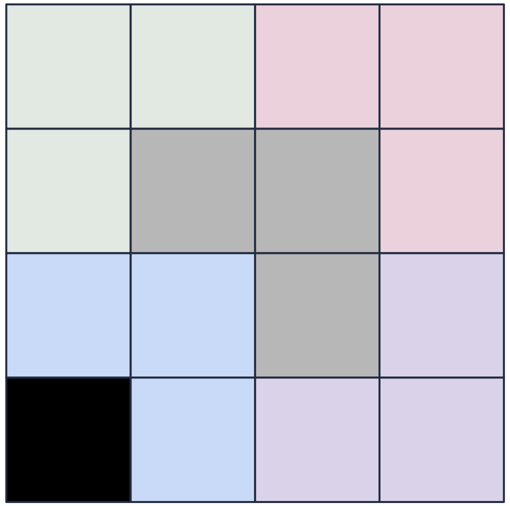
Mostrar que, para qualquer inteiro positivo *n*, se removermos um quadrado de um tabuleiro originalmente com 2^n x 2^n quadrados, ele pode ser ladrilhado - completamente revestido - com ângulos de ferro.

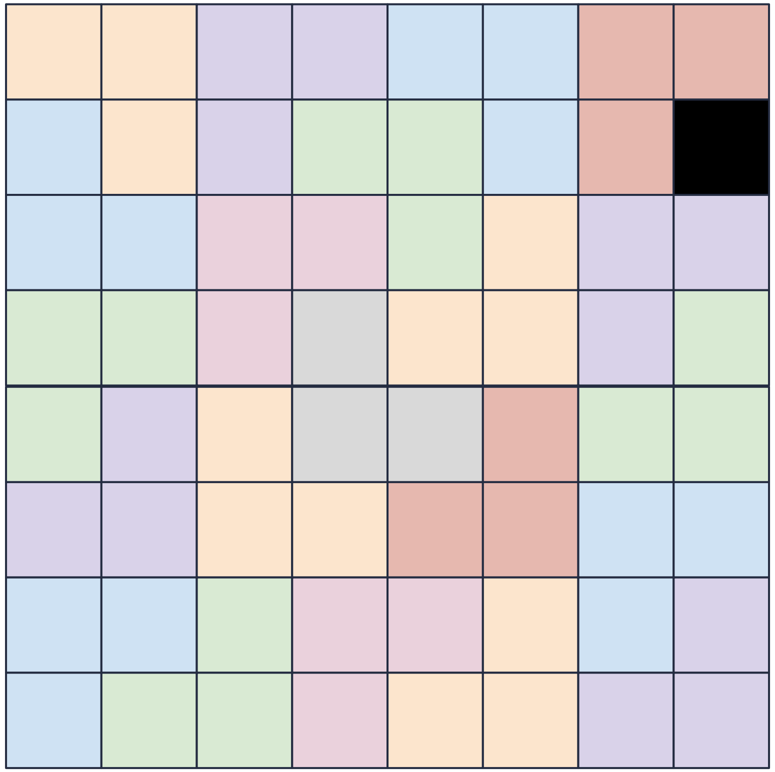
A base da indução é *n* = 1, ou seja, um tabuleiro com 2 x 2 quadrados. Após, remova um canto do quadrado.

Suponha agora que qualquer tabuleiro 2^k x 2^k com um quadrado removido pode ser ladrilhado usando ângulos de ferro. Vamos considerar um tabuleiro 2^{k+1} x 2^{k+1} em quatro partes iguais. Cada parte é um tabuleiro 2k x 2k, e uma delas terá um quadrado faltando. Pela hipótese de indução, essas três partes com os quadrado removidos podem ser ladrilhadas.

INDUÇÃO

Vamos considerar um tabuleiro 2^{k+1} x 2^{k+1} em quatro partes iguais. Cada parte é um tabuleiro 2k x 2k, e uma delas terá um quadrado faltando. Pela hipótese de indução, essas três partes com os quadrado removidos podem ser ladrilhadas.





INDUÇÃO

SEGUNDO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P(1) \text{ é verdade} \\ 2. & (\forall k)[P(k) \text{ verdade para todo r,} \\ & 1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1) \text{ verdade}] \end{array}\right\} \rightarrow P(n) \textit{ verdade para todos os inteiros positivos } \text{n}$$

INDUÇÃO

Os dois princípios de indução diferem nas proposições 2 e 2′.

PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P(1) \text{ é verdade} \\ 2. & (\forall k)[P(k) \text{ verdade} \rightarrow P(k+1) \text{ verdade}] \end{array}\right\} \rightarrow P(n) \textit{ verdade para todos os inteiros positivos } \text{n}$$

SEGUNDO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P(1) \text{ é verdade} \\ 2. & (\forall k)[P(k) \text{ verdade para todo r,} \\ & 1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1) \text{ verdade}] \end{array}\right\} \rightarrow P(n) \textit{ verdade para todos os inteiros positivos } \text{n}$$

INDUÇÃO

Na proposição 2, precisamos ser capazes de provar, para um inteiro positivo arbitrário k, que P(k + 1) é verdadeira com base apenas na hipótese de que P(k) é verdadeira.

Na proposição 2', podemos supor que P(r) é verdadeira para todos os inteiros r entre 1 e um inteiro positivo arbitrário k para provar P(k + 1).

- Isso parece nos dar muito mais argumentos, de modo que pode acontecer, algumas vezes, de sermos capazes de provar o condicional em 2' quando não conseguirmos provar o condicional em 2.

INDUÇÃO

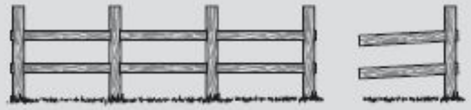
Prove que uma cerca reta com n esteios tem $n-1$ seções para qualquer $n \geq 1$ (veja a Figura 2.4a).

Cerca com 4 esteios, 3 seções

(a)

Cerca com 1 esteio, 0 seção

(b)



Cerca com o último esteio e
a última seção removidos

(c)

Cerca com 1 seção removida

(d)

Figura 2.4

Seja $P(n)$ a proposição de que uma cerca com n esteios tem $n-1$ seções; vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Vamos começar com o primeiro princípio de indução. Para o passo básico, $P(1)$ diz que uma cerca com apenas 1 esteio tem 0 seção, o que é claramente verdade (veja a Figura 2.4b). Suponha que $P(k)$ é verdadeira:

uma cerca com k esteios tem $k-1$ seções

e tente provar $P(k+1)$:

(?) uma cerca com $k+1$ esteios tem k seções.

Dada uma cerca com $k+1$ esteios, como podemos relacioná-la com uma cerca com k esteios de modo a usar a hipótese de indução? Podemos cortar fora o último esteio e a última seção (Figura 2.4c). A cerca resultante tem k esteios e, pela hipótese de indução, tem $k-1$ seções. Portanto, a cerca original tinha k seções.

INDUÇÃO

Vamos agora provar o mesmo resultado usando o segundo princípio de indução. O passo básico é igual ao do caso anterior. Para a hipótese de indução, supomos que,

$$\text{para todo } r, 1 \leq r \leq k, \text{ uma cerca com } r \text{ esteios tem } r - 1 \text{ seções}$$

e tentamos provar $P(k + 1)$:

$$\text{(?) uma cerca com } k + 1 \text{ esteios tem } k \text{ seções}$$

Para uma cerca com $k + 1$ esteios, divida a cerca em duas partes removendo uma seção (Figura 2.4d). As duas partes da cerca têm r_1 e r_2 esteios, em que $1 \leq r_1 \leq k$, $1 \leq r_2 \leq k$ e $r_1 + r_2 = k + 1$. Pela hipótese de indução, as duas partes têm, respectivamente, $r_1 - 1$ e $r_2 - 1$ seções, logo a cerca original tinha

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + 1 \text{ seções}$$

(O 1 extra é pela seção que foi removida.) Uma aritmética simples nos dá

$$r_1 + r_2 - 1 = (k + 1) - 1 = k \text{ seções}$$

Isso prova que uma cerca com $k + 1$ esteios tem k seções, o que verifica a veracidade de $P(k + 1)$, completando a demonstração pelo segundo princípio de indução.

EXERCÍCIOS

EXERCÍCIOS

1) Para todos os inteiros positivos n, seja $P(n)$ a equação

$$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$$

a) Escreva a equação para o caso básico $P(1)$ e verifique que é verdadeira.

b) Escreva a hipótese de indução $P(k)$.

c) Escreva a equação para $P(k + 1)$.

d) Prove que $P(k + 1)$ é verdade.

2) Para todos os inteiros positivos n, seja $P(n)$ a equação

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

a) Escreva a equação para o caso básico P(1) e verifique que é verdadeira.

b) Escreva a hipótese de indução P(k).

c) Escreva a equação para P(k + 1).

d) Prove que P(k + 1) é verdade.

EXERCÍCIOS

EXERCÍCIOS

Nos Exercícios 3 ao 11, use indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

3) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$
4) $1 + 3 + 6 + \dots + n(n+1)/2 = (n(n + 1)(n + 2))/6$
5) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$
6) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (n(n + 1)(2n + 1))/6$
7) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (n^2(n + 1)^2)/4$
8) $7^n - 2^n$ é divisível por 5.
9) $n^3 - n$ é divisível por 3.
10) $n^3 + 2^n$ é divisível por 3