Fundamentos de Teoria da Computação Aula 07

PRISCILA MARQUES KAI

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

As **regras de equivalência** e as **regras de inferência** para a lógica proposicional ainda fazem parte da lógica de predicados.

Um argumento da forma

$$P \land (P \to Q) \to Q$$

ainda é válido por *modus ponens*, mesmo que as fbfs envolvidas sejam predicadas.

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

EXEMPLO –Use a lógica de predicados para provar a validade do argumento

$$(\forall x)R(x) \land [(\forall x)R(x) \to (\forall x)S(x)] \to (\forall x)S(x)$$

Uma sequência de demonstração:

1. $(\forall x)R(x)$ hip 1
2. $(\forall x)R(x) \to (\forall x)S(x)$ hip 2
3. $(\forall x)S(x)$ 1,2, mp

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

No entanto, existem muitos argumentos com fbfs predicadas que não são tautologias, mas que ainda são válidos devido à sua estrutura e ao significado dos quantificadores universal e existencial .

- A abordagem geral para provar esses argumentos é retirar os quantificadores, manipular as fbfs sem os quantificadores e depois colocá-los no lugar.

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

Particularização Universal: podemos deduzir $P(x)$, $P(y)$, $P(z)$, $P(a)$ etc. de $(\forall x)P(x)$, retirando, assim, um quantificador universal.

Considere o argumento:

$$(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)] \wedge H(s) \rightarrow M(s)$$

Construa a sequência de demonstração.

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

$$(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)] \wedge H(s) \rightarrow M(s)$$

1.	$(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)]$	hip 1
2.	$H(s)$	hip 2
3.	$H(s) \rightarrow M(s)$	1, pu (particularização Universal)
4.	$M(s)$	2, 3, mp

No passo 3, x foi substituído por um símbolo constante em todo o escopo do quantificador universal, com permitido pela particularização universal.

AGENDA DA AULA

- Técnicas de demonstração
    - demonstração direta,
    - demonstração por contraposição e
    - demonstração por absurdo
- Indução

AGENDA DA AULA

Você trabalha como voluntário em uma ONG que recebeu doações de **792 sabonetes** e **400 frascos de xampus**.

Você quer fazer pacotes para distribuir em abrigos para pessoas sem teto de modo que todos os pacotes contenham o mesmo número de frascos de xampus e o mesmo número de sabonetes.

Quantos pacotes você pode formar?

Podemos resolver este problema por tentativa e erro. Mas também existem outras maneiras de solucionar esse problema.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Argumentos formais

$$P \rightarrow Q$$

onde P e Q podem apresentar proposições compostas.

- Demonstração da validade de um argumento (verdadeiro para todas as interpretações possíveis)

Ás vezes, queremos provar argumentos que não são universalmente verdadeiros, mas apenas em determinados contextos.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

- Infelizmente, não existe fórmula para a construção de demonstrações e não existe algoritmo geral prático ou programa de computador para provar teoremas.

- A experiência ajuda, melhorando com a prática
  - Uma demonstração que funciona para um teorema pode ser, algumas vezes, modificada para funcionar para outro teorema diferente, porém semelhante.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Para provar um teorema sobre o assunto XYZ, podemos inserir fatos sobre XYZ na demonstração; agindo como hipóteses adicionais (ocorre a diminuição do universo tratado).

- considera-se argumentos verdadeiros dentro do contexto no qual as hipóteses são válidas.

Demonstração de teoremas geralmente de maneira menos formal do que com argumentos da lógica proposicional e da lógica de predicados.

Proposição formal: $(\forall x)\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$

Informalmente: $P(x) \rightarrow Q(x)$

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Imagine que ao estudar um tema específico, você nota que sempre que uma condição chamada P é verdadeira, outra condição chamada Q também é. Com base nesses exemplos observados, você começa a pensar que, se P acontece, então Q também acontece. Quanto mais vezes você encontra essa relação entre P e Q, mais confiante você fica de que sua ideia está correta.

Esse processo exemplifica o **raciocínio indutivo** (com base nas experiências).

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

- Independentemente do quão razoável pareça sua conjectura (hipótese/palpite), no entanto, você não vai ficar satisfeito até aplicar, também, um **raciocínio dedutivo**.
- Nesse processo, você tenta verificar se sua conjectura é verdadeira ou falsa.
    - Então você produz uma demonstração de que $P \rightarrow Q$ (transformando sua conjectura em teorema) ou encontra um contraexemplo, mostrando que a conjectura está errada, com um caso em que P é verdadeiro e Q é falso.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Exemplo 1 - Para um inteiro positivo n, n fatorial é definido como

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1,$$

e denotado por n!. Prove ou encontre um contraexemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivon, $n! \leq n^2$."

O que podemos fazer?

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Exemplo 1 – Para um inteiro positivo n, n fatorial é definido como

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1,$$

e denotado por n!. Prove ou encontre um contraexemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$."

Vamos começar testando alguns casos:

n	$n!$	n^2	$n! \leq n^2$

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

EXEMPLO 1

Para um inteiro positivo n, ***n* fatorial** é definido como $n(n-1)(n-2)\ldots1$, e denotado por $n!$. Prove ou encontre um contraexemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$."

Vamos começar testando alguns casos:

n	$n!$	n^2	$n! \leq n^2$
1	1	1	sim
2	2	4	sim
3	6	9	sim

Até agora, essa conjectura parece boa. Mas, para o próximo caso,

n	$n!$	n^2	$n! \leq n^2$
4	24	16	não

encontramos um contraexemplo. O fato de que a conjectura é verdadeira para $n = 1$, 2 e 3 não prova nada, mas o caso $n = 4$ é suficiente para provar sua falsidade. ●

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

PROBLEMA PRÁTICO 1 Dê contraexemplos para as seguintes conjecturas:

a. Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

b. Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5. ■

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

PROBLEMA PRÁTICO 1 | Dê contraexemplos para as seguintes conjecturas:

a. Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

b. Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5. ■

a) Contraexemplo: a baleia é um mamífero que vive nos oceanos, mas não é um peixe.

b) Contraexemplo: o número 5 é menor do que 10 mas não é maior do que 5. Todos os números inteiros <= 5 também podem ser usados como contraexemplos.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

- Embora “provar a falsidade por um contraexemplo” sempre funcione, “provar por um exemplo” quase nunca funciona.
  - Uma exceção ocorre quando a conjectura é uma asserção sobre uma coleção finita.
  - Nesse caso, a conjectura pode ser provada verificando-se que ela é verdadeira para cada elemento da coleção.

Demonstração por exaustão!
todos os casos possíveis são examinados para confirmar a conjectura

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

Exemplo 2 – Prove a conjectura "Se um inteiro entre 1 e 20 for divisível por 6, então também será divisível por 3". ("Divisibilidade por 6" significa "divisibilidade inteira por 6", ou seja, o número é um múltiplo inteiro de 6.) Como existe apenas um número finito de casos, a conjectura pode ser provada simplesmente mostrando-se que é verdadeira para todos os inteiros entre 1 e 20.

Número	Divisível por 6	Divisível por 3
1	não	
2	não	
3	não	
...	...	...

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

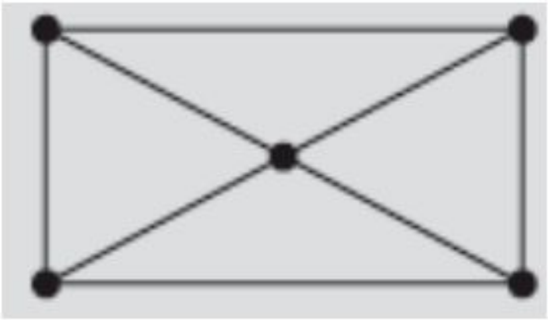
Exemplo 2 – Prove a conjectura "Se um inteiro entre 1 e 20 for divisível por 6, então também será divisível por 3".

Número	Divisível por 6	Divisível por 3
1	não	
2	não	
3	não	
4	não	
5	não	
6	sim: 6 = 1 x 6	sim: 6 = 2 x 3
7	não	
8	não	
9	não	
10	não	
11	não	
12	sim: 12 = 2 x 6	sim: 12 = 4 x 3
13	não	
14	não	
15	não	
16	não	
17	não	
18	sim: 18 = 3 x 6	sim: 18 = 6 x 3
19	não	
20	não	

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

EXEMPLO 3

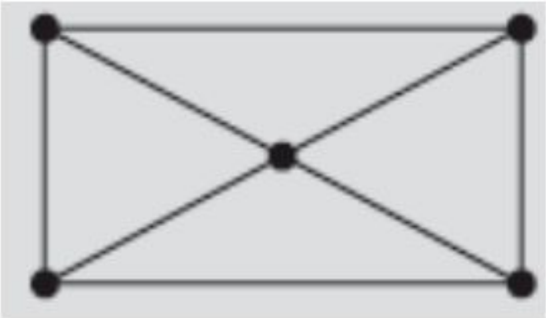
Prove a conjectura "Não é possível traçar todas as retas na Fig. 2.1 sem levantar o lápis do papel e sem redesenhar nenhuma reta".



DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

EXEMPLO 3

Prove a conjectura "Não é possível traçar todas as retas na Fig. 2.1 sem levantar o lápis do papel e sem redesenhar nenhuma reta".



Existe apenas um número finito de maneiras de traçar as retas na figura. Fazendo anotações cuidadosas, cada uma das possibilidades pode ser tentada, e cada uma delas vai falhar.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

a. Prove a conjectura “Para qualquer inteiro positivo menor ou igual a 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro”.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

a. Prove a conjectura "Para qualquer inteiro positivo menor ou igual a 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro".

n	n^2	$10 + 5n$	$n^2 \leq 10 + 5n$
1	1	15	sim
2	4	20	sim
3	9	25	sim
4	16	30	sim
5	25	35	sim

Logo, para todos os inteiros ≤ 5, temos $n^2 \leq 10+5n$. Prova-se que a conjectura é verdadeira para esses casos específicos de n.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

b. Dê um contraexemplo para a conjectura “Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro”

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

b. Dê um contraexemplo para a conjectura “Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro”

n	n^2	10 + 5n	n2 ≤ 10 + 5n
1	1	15	sim
2	4	20	sim
3	9	25	sim
4	16	30	sim
5	25	35	sim
6	36	40	sim
7	**49**	**45**	**não**

Logo, a conjectura "Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro" é falsa.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Em geral (quando a demonstração por exaustão não funciona), como você pode provar que P → Q é verdadeira?

- A abordagem óbvia é a demonstração direta — suponha a hipótese P e deduza a conclusão Q.
- Uma demonstração formal necessitaria de uma sequência de demonstração partindo de P e chegando a Q.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Assim, na demonstração direta temos que $P \rightarrow Q$ deve ser verdadeira.

Se *P* **então** *Q*

EXEMPLO - Se <u>n é um número par</u>, então <u>n^2 é um número par</u>.

Como provar por demonstração direta?

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO - Se n é um número par, então n^2 é um número par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO - Se n é um número par, então n^2 é um número par.

$n = 2k, k \in Z$ $\Rightarrow$ $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Logo, se n é um número par, n^2 é um número par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO2 - Se n é um número ímpar, então n^2 é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO2 - Se <u>n é um número ímpar</u>, então <u>n^2 é um número ímpar</u>.

$n = 2k+1, k \in Z$ ⟹

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Logo, se n é um número ímpar, n^2 é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO3 - Se n é ímpar e m é par, então n+m é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO3 - Se n é ímpar e m é par, então n+m é um número ímpar.

$n = 2k + 1$
$m = 2l$

$$
\begin{aligned}
n + m &= 2k + 1 + 2l \\
&= 2(k + l) + 1
\end{aligned}
$$

Logo, se n é ímpar e m é par, n + m é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO4 – o produto de dois inteiros pares é par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO4 – o produto de dois inteiros pares é par.

Sejam:
$x = 2m$
$y = 2n$

$$\begin{aligned} xy &= (2m)(2n) \\ &= 2(mn) \end{aligned}$$

em que 2mn é um inteiro. Logo, xy tem a forma 2k, em que k é um inteiro e, portanto, é par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

PROBLEMA PRÁTICO - Dê uma demonstração direta (informal) do teorema "Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4".

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

PROBLEMA PRÁTICO - Dê uma demonstração direta (informal) do teorema "Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4".

Considere um número divisível por 6 como
$n = 6k$

E o dobro desse inteiro divisível por 4 como

$$2n = 4l$$
$$2(6k) = 4l$$
$$12k = 4l$$
$$(3*4)k = 4l$$
$$4(3k) = 4l$$

Logo, Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4

CONTRAPOSIÇÃO

Se você tentou produzir uma demonstração direta da conjectura $P \rightarrow Q$ e não conseguiu, mas ainda acha que a conjectura é verdadeira, você pode tentar algumas variantes da técnica de demonstração direta.

- Se você puder provar o teorema $Q' \rightarrow P'$, pode concluir que $P \rightarrow Q$ usando a tautologia $(Q' \rightarrow P') \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (contrapositiva).

tautologia é uma fórmula proposicional que é verdadeira para todas as possíveis valorações de suas variáveis proposicionais.

CONTRAPOSIÇÃO

EXEMPLO 6 - Prove que, se o quadrado de um inteiro for ímpar, então o inteiro terá que ser ímpar.

$P \rightarrow Q$ $\qquad$ n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar

Fazendo uma demonstração por contraposição, teremos que

$Q' \rightarrow P'$ $\qquad$ n par $\rightarrow$ n^2 par

Seja n par, então temos que

$n = 2k$

$$n^2 = (2k)(2k)$$
$$= 2(2k^2)$$

Logo, n^2 é par.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

“Se e somente se” requer duas demonstrações, uma em cada direção.

Teoremas são enunciados, muitas vezes, na forma “P se e somente se Q”, o que significa que P se Q e P só se Q, ou seja, $Q \rightarrow P$ e $P \rightarrow Q$. Para provar tal teorema, você precisa demonstrar um condicional e sua recíproca. Novamente, a verdade de um não implica a verdade do outro

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Vamos provar primeiro que, se x e y forem ímpares, então xy também o será:

$x = 2m + 1$

$y = 2n + 1$

$$\begin{aligned} \text{então, } xy &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + k + l) + 1 \end{aligned}$$

que possui a forma de $2k + 1$

Logo, xy é ímpar.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Agora, iremos mostrar que se xy forem ímpares, então x e y também serão:

xy ímpar→ x ímpar e y ímpar

Uma demonstração direta começaria com a hipótese de que xy é ímpar, não nos dando muitas opções. Uma demonstração por contraposição irá funcionar melhor, pois teremos informações mais úteis como hipóteses.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Agora, iremos mostrar que se xy forem ímpares, então x e y também serão:

$$\text{xy ímpar} \rightarrow \text{x ímpar e y ímpar}$$

Através da <u>demonstração por contraposição</u>, teremos $Q' \rightarrow P'$

$$(\text{x ímpar e y ímpar})' \rightarrow (\text{xy ímpar})'$$

Pela lei de De Morgan, $(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$, logo a expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\text{x par ou y par} \rightarrow \text{xy par}$$

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

$$x \text{ par ou } y \text{ par} \rightarrow xy \text{ par } (1)$$

A hipótese "x par ou y par" pode ser quebrada em três casos.

Vamos considerar cada um deles.

1. x par, y ímpar: então $x = 2m$ e$y = 2n + 1$, logo $xy = (2m)(2n + 1) = 2(2mn + m)$, que é par.
2. x ímpar, y par: funciona como no primeiro caso.
3. x par, y par: então xy é par Isso completa a demonstração de (1) e, portanto, do teorema.

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

Além da demonstração direta e da demonstração por contraposição, você pode usar a técnica de **demonstração por absurdo**.

- Denotaremos qualquer contradição por **0**, ou seja, qualquer fbf cujo valor lógico é sempre falso. (Um exemplo de tal fbf é $A \wedge A'$.)
- Suponha que você está tentando provar $P \to Q$. Construindo uma tabela-verdade, vemos que

$$(P \wedge Q' \to \mathbf{0}) \to (P \to Q)$$

é uma tautologia, logo, para provar o teorema $P \to Q$, basta provar que

$$P \wedge Q' \to \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

EXEMPLO - Demonstre por absurdo a proposição:
“Se um número somado a ele mesmo for igual a ele mesmo, então esse número será 0”.
Considerando x um número arbitrário, temos a seguinte hipótese:

$$(x + x = x) \rightarrow x = 0$$

Para demonstrar por absurdo, teremos que provar que $P \wedge Q' \rightarrow$ **0**. Assim, suponha que

$$(x + x = x) \wedge x \neq 0$$

$$2x = x \wedge x \neq 0$$

Como $x \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação

$$2 = x/x$$

$2 = 1$, uma contradição.

Portanto, $(x + x = x) \rightarrow (x = 0)$

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

EXEMPLO 11

Uma demonstração por absurdo que é bem conhecida é a de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Lembre-se de que um **número racional** é um número que pode ser colocado na forma p/q, em que p e q são inteiros, q 0, e p e q não têm fatores comuns (exceto ± 1).

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Então $\sqrt{2} = p/q$ e $2 = p^2/q^2$, ou seja, $2q^2 = p^2$. Logo, 2 divide p^2 e — como o próprio 2 é indivisível — 2 tem que dividir p. Isso significa que 2 é um fator de p, donde 4 é um fator de p^2 e a equação $2q^2 = p^2$ pode ser escrita como $2q^2 = 4x$ ou $q^2 = 2x$. Vemos dessa equação que 2 divide q^2, logo 2 divide q. Mas, então, 2 é um fator de q e de p, o que contradiz a declaração de que p e q não têm fatores comuns. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional. ●

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

EXEMPLO 11

Uma demonstração por absurdo que é bem conhecida é a de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Lembre-se de que um **número racional** é um número que pode ser colocado na forma p/q, em que p e q são inteiros, q 0, e p e q não têm fatores comuns (exceto ± 1).

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Então $\sqrt{2} = p/q$ e $2 = p^2/q^2$, ou seja, $2q^2 = p^2$. Logo, 2 divide p^2 e — como o próprio 2 é indivisível — 2 tem que dividir p. Isso significa que 2 é um fator de p, donde 4 é um fator de p^2 e a equação $2q^2 = p^2$ pode ser escrita como $2q^2 = 4x$ ou $q^2 = 2x$. Vemos dessa equação que 2 divide q^2, logo 2 divide q. Mas, então, 2 é um fator de q e de p, o que contradiz a declaração de que p e q não têm fatores comuns. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional. ●

Suponha por absurdo que

$$\sqrt{2} = p/q, \qquad p,q \in Z \qquad mdc(p,q) = 1$$

$$(\sqrt{2})^2 = (p/q)^2$$

$$2 = p^2/q^2$$

$$2q^2 = p^2$$

p^2 é par, logo p é par. Ou seja, p = 2k

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

q^2 é par, logo q é par, logo q = 2l

Isso significa que 2 é um fator de p e de q, o que contradiz a declaração de que p e q não têm fatores comuns. Portanto, não é racional.

RESUMO

TABELA 2.2		
Técnica de Demonstração	**Abordagem para Demonstrar $P \to Q$**	**Observações**
Demonstração exaustiva	Demonstre $P \to Q$ para todos os casos possíveis.	Só pode ser usada para provar um número finito de casos.
Demonstração direta	Suponha P, deduza Q.	A abordagem padrão — o que deve ser tentado em geral.
Demonstração por contraposição	Suponha Q', deduza P'.	Use isso se a hipótese Q' parece dar mais "munição" do que P.
Demonstração por absurdo	Suponha $P \wedge Q'$, deduza uma contradição.	Use isso quando Q diz que alguma coisa não é verdade.

INDUÇÃO

Existe uma última técnica de demonstração particularmente útil. Para ilustrar como ela funciona, imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta.

Como você sabe se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?

Suponha que você faça as seguintes hipóteses sobre sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo. (condicional.)

INDUÇÃO

Hipóteses sobre sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo (condicional).

Se a proposição 1 e o condicional 2 forem ambos verdadeiros, então, pela proposição 1, você consegue chegar ao primeiro degrau e portanto, pela proposição 2, consegue chegar ao segundo; novamente pela proposição 2, você consegue chegar ao terceiro degrau; mais uma vez pela proposição 2, você consegue chegar ao quarto degrau; e assim por diante.

Você pode subir tão alto quanto quiser. Ambas as hipóteses são necessárias.

INDUÇÃO

Agora pense sobre uma propriedade específica que um número possa ter. Em vez de “chegar a um degrau arbitrariamente alto”, podemos falar sobre um inteiro positivo arbitrário tendo essa propriedade.

Vamos usar a notação P(n) para dizer que o inteiro positivo n tem a propriedade P. Como usar a mesma técnica que usamos para subir a escada para provar que, qualquer que seja o inteiro positivo n, temos P(n)?

As duas proposições que precisamos provar são

1. $P(1)$ (1 tem a propriedade de P.)
2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$. (Se qualquer número tem a propriedade P, o próximo também tem.)

Para provar que alguma coisa é verdade para todos os inteiros n ≥ algum valor, pense em indução.

INDUÇÃO

PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P(1) \text{ é verdade} \\ 2. & (\forall k)[P(k) \text{ verdade} \rightarrow P(k+1) \text{ verdade}] \end{array}\right\} \rightarrow P(n) \textit{ verdade para todos os inteiros positivos } n$$

INDUÇÃO

- Para mostrar que a conclusão desse condicional é verdadeira, precisamos provar que as duas hipóteses, 1 e 2, são verdadeiras.

- Para provar a proposição 1, basta mostrar que o número 1 tem a propriedade P, geralmente uma tarefa trivial.

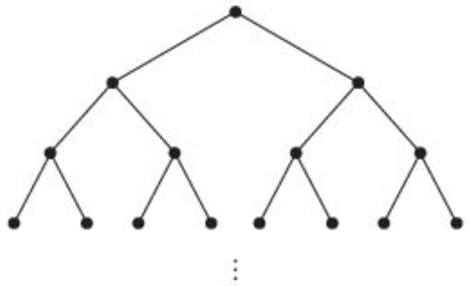
- A proposição 2 é um condicional que tem que ser válido para todo k.
    - Para provar esse condicional, suponha que $P(k)$ é verdade para um inteiro positivo arbitrário k e mostre, com base nessa hipótese, que $P(k + 1)$ é verdade.
    - Portanto, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$, e, usando a generalização universal, $(\forall k)[P(k) \rightarrow P(k + 1)]$.

INDUÇÃO

- Na demonstração por indução, demonstrar a veracidade da proposição 1 é chamado de **base da indução** ou passo inicial da demonstração por indução.
- O estabelecimento da veracidade de $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é o **passo indutivo**. Quando supomos que $P(k)$ é verdade para provar o passo indutivo, $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução**.

INDUÇÃO

Suponha que um progenitor ancestral Silva casou e teve dois filhos. Vamos chamar esses dois filhos de geração 1. Suponha, agora, que cada um desses filhos teve dois filhos; então, a geração 2 contém quatro descendentes. Isso continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva, portanto, tem a forma ilustrada na Figura 2.2. (Ela é exatamente igual à Figura 1.1b, onde obtivemos todos os valores lógicos possíveis V-F para n letras de proposição.)



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
⋮	⋮

Figura 2.2

Parece que a geração n contém 2^n descendentes. Mais formalmente, se denotarmos por $P(n)$ o número de descendentes em cada geração, nossa conjectura é que

$$P(n) = 2^n$$

Podemos usar indução para *provar* que nossa conjectura para $P(n)$ está correta.

O passo básico é estabelecer $P(1)$, que é a equação

$$P(1) = 2^1 = 2$$

INDUÇÃO

Isso é verdade, pois nos foi dito que Silva teve dois filhos. Vamos supor, agora, que nossa conjectura está correta para uma geração arbitrária k, $k \geq 1$, ou seja, vamos supor que

$$P(k) = 2^k$$

e tentar mostrar que

$$P(k + 1) = 2^{k+1}$$

Nessa família, cada descendente tem dois filhos, de modo que o número de descendentes na geração $k + 1$ será o dobro do número de descendentes na geração k, ou seja, $P(k + 1) = 2P(k)$. Pela hipótese de indução, $P(k) = 2^k$, logo

$$P(k + 1) = 2P(k) = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

e, de fato,

$$P(k + 1) = 2^{k+1}$$

Isso completa nossa demonstração. Agora que estamos tranquilos sobre o clã dos Silva, podemos aplicar o método de demonstração por indução a problemas menos óbvios.

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

fórmula para o valor dessa soma.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + . . . + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

fórmula para o valor dessa soma.

Embora possamos verificar a veracidade dessa equação para qualquer valor particular de n substituindo esse valor na equação, não podemos substituir n por todos os inteiros positivos que existem. Assim, uma demonstração por exaustão não funciona. Uma demonstração por indução é apropriada.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

fórmula para o valor dessa soma.

Passo 1: Base da indução

Para n=1, temos: $1=1^2$

Portanto, a base da indução é verdadeira.

Quando substituímos n por 1 na expressão à esquerda do sinal de igualdade na Equação (1), obtemos a soma de todos os inteiros ímpares começando em 1 em terminando em 2(1) – 1 = 1.

A propriedade P(n) aqui é que a equação (1) é válida. (Note que P(n) é uma propriedade de n (predicado).

INDUÇÃO

O termo que representa a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n – 1.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

fórmula para o valor dessa soma.

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Para a hipótese de indução, vamos supor $P(k)$ para um inteiro arbitrário k, que é a Equação(1) quando n tem o valor k:

Passo 2: Hipótese de indução

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

Usando a hipótese de indução, queremos mostrar $P(k+1)$, que é a Equação(1) quando n assume o valor $k + 1$, ou seja,

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

A chave de uma demonstração por indução é encontrar um modo de relacionar o que queremos saber ($P(k+1)$, Equação(3)), e o que supomos ($P(k)$, Equação(2)). A expressão à esquerda do sinal de igualdade em $P(k+1)$ pode ser reescrita como:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$= 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, **podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).**

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$= \mathbf{1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)} + [2(k+1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, **podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).**

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$= \mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)} + [2(k+1) - 1]$$
$$= \boldsymbol{k^2} + [2(k+1) - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + ... + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$= 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$
$$= k^2 + [2(k+1) - 1]$$
$$= k^2 + [2k + 2 - 1]$$

INDUÇÃO

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (2)$$

$$P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \qquad (3)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

Contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Equação(2).

Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Equação(2).

Obtemos, então:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] \\ &= k^2 + [2(k+1) - 1] \\ &= k^2 + [2k + 2 - 1] \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$= 1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2$$

o que mostra a validade de $P(k+1)$, provando, assim, que a Equação(1) é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

INDUÇÃO

Três passos para uma demonstração usando o primeiro princípio de indução:

TABELA 2.3	
Para Demonstrações com o Primeiro Princípio de Indução	
Passo 1	Prove o passo básico.
Passo 2	Suponha $P(k)$.
Passo 3	Prove $P(k + 1)$.