Fundamentos de Teoria da Computação Aula 06

PRISCILA MARQUES KAI

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

As **regras de equivalência** e as **regras de inferência** para a lógica proposicional ainda fazem parte da lógica de predicados.

Um argumento da forma

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$$

ainda é válido por *modus ponens*, mesmo que as fbfs envolvidas sejam predicadas.

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

EXEMPLO –Use a lógica de predicados para provar a validade do argumento

$$(\forall x)R(x) \wedge [(\forall x)R(x) \rightarrow (\forall x)S(x)] \rightarrow (\forall x)S(x)$$

Uma sequência de demonstração:

1. $(\forall x)R(x)$ hip 1
2. $(\forall x)R(x) \rightarrow (\forall x)S(x)$ hip 2
3. $(\forall x)S(x)$ 1,2, mp

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

No entanto, existem muitos argumentos com fbfs predicadas que não são tautologias, mas que ainda são válidos devido à sua estrutura e ao significado dos quantificadores universal e existencial .

- A abordagem geral para provar esses argumentos é retirar os quantificadores, manipular as fbfs sem os quantificadores e depois colocá-los no lugar.

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

Particularização Universal: podemos deduzir P(x), P(y), P(z), P(a) etc. de $(\forall x)P(x)$, retirando, assim, um quantificador universal.

Considere o argumento:

$$(\forall x)[H(x)\rightarrow M(x)] \land H(s)\rightarrow M(s)$$

Construa a sequência de demonstração.

REGRAS DE DEDUÇÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS

$$(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)] \land H(s) \rightarrow M(s)$$

1.	$(\forall x)[H(x) \rightarrow M(x)]$	hip 1
2.	$H(s)$	hip 2
3.	$H(s) \rightarrow M(s)$	1, pu (particularização Universal)
4.	$M(s)$	2, 3, mp

No passo 3, x foi substituído por um símbolo constante em todo o escopo do quantificador universal, com permitido pela particularização universal.

AGENDA DA AULA

- Técnicas de demonstração
  - demonstração direta,
  - demonstração por contraposição e
  - demonstração por absurdo
- Indução

AGENDA DA AULA

Você trabalha como voluntário em uma ONG que recebeu doações de **792 sabonetes** e **400 frascos de xampus**.

Você quer fazer pacotes para distribuir em abrigos para pessoas sem teto de modo que todos os pacotes contenham o mesmo número de frascos de xampus e o mesmo número de sabonetes.

Quantos pacotes você pode formar?

Podemos resolver este problema por tentativa e erro. Mas também existem outras maneiras de solucionar esse problema.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Argumentos formais

$$P \rightarrow Q$$

onde P e Q podem apresentar proposições compostas.

- Demonstração da validade de um argumento (verdadeiro para todas as interpretações possíveis)

Ás vezes, queremos provar argumentos que não são universalmente verdadeiros, mas apenas em determinados contextos.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

- Infelizmente, não existe fórmula para a construção de demonstrações e não existe algoritmo geral prático ou programa de computador para provar teoremas.

- A experiência ajuda, melhorando com a prática
  - Uma demonstração que funciona para um teorema pode ser, algumas vezes, modificada para funcionar para outro teorema diferente, porém semelhante.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Para provar um teorema sobre o assunto XYZ, podemos inserir fatos sobre XYZ na demonstração; agindo como hipóteses adicionais (ocorre a diminuição do universo tratado).

- considera-se argumentos verdadeiros dentro do contexto no qual as hipóteses são válidas.

Demonstração de teoremas geralmente de maneira menos formal do que com argumentos da lógica proposicional e da lógica de predicados.

Proposição formal: $(\forall x)\,[P(x) \rightarrow Q(x)]$

Informalmente: $P(x) \rightarrow Q(x)$

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Imagine que ao estudar um tema específico, você nota que sempre que uma condição chamada P é verdadeira, outra condição chamada Q também é. Com base nesses exemplos observados, você começa a pensar que, se P acontece, então Q também acontece. Quanto mais vezes você encontra essa relação entre P e Q, mais confiante você fica de que sua ideia está correta.

Esse processo exemplifica o **raciocínio indutivo** (com base nas experiências).

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

- Independentemente do quão razoável pareça sua conjectura (hipótese/palpite), no entanto, você não vai ficar satisfeito até aplicar, também, um **raciocínio dedutivo**.
- Nesse processo, você tenta verificar se sua conjectura é verdadeira ou falsa.
  - Então você produz uma demonstração de que $P \rightarrow Q$ (transformando sua conjectura em teorema) ou encontra um contraexemplo, mostrando que a conjectura está errada, com um caso em que P é verdadeiro e Q é falso.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Exemplo 1 – Para um inteiro positivo n, n fatorial é definido como

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots 1,$$

e denotado por n!. Prove ou encontre um contraexemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivon, $n! \leq n^2$."

O que podemos fazer?

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Exemplo 1 – Para um inteiro positivo n, n fatorial é definido como

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots 1,$$

e denotado por n!. Prove ou encontre um contraexemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$."

Vamos começar testando alguns casos:

n	$n!$	n^2	$n! \leq n^2$

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

EXEMPLO 1

Para um inteiro positivo n, **n fatorial** é definido como $n(n-1)(n-2)\ldots 1$, e denotado por $n!$. Prove ou encontre um contraexemplo para a conjectura "Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$."

Vamos começar testando alguns casos:

n	$n!$	n^2	$n! \leq n^2$
1	1	1	sim
2	2	4	sim
3	6	9	sim

Até agora, essa conjectura parece boa. Mas, para o próximo caso,

n	$n!$	n^2	$n! \leq n^2$
4	24	16	não

encontramos um contraexemplo. O fato de que a conjectura é verdadeira para $n = 1$, 2 e 3 não prova nada, mas o caso $n = 4$ é suficiente para provar sua falsidade. ●

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

PROBLEMA PRÁTICO 1 Dê contraexemplos para as seguintes conjecturas:

a. Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

b. Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5. ■

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

PROBLEMA PRÁTICO 1 | Dê contraexemplos para as seguintes conjecturas:

a. Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

b. Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5. ■

a) Contraexemplo: a baleia é um mamífero que vive nos oceanos, mas não é um peixe.

b) Contraexemplo: o número 5 é menor do que 10 mas não é maior do que 5. Todos os números inteiros <= 5 também podem ser usados como contraexemplos.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

- Embora "provar a falsidade por um contraexemplo" sempre funcione, "provar por um exemplo" quase nunca funciona.
  - Uma exceção ocorre quando a conjectura é uma asserção sobre uma coleção finita.
  - Nesse caso, a conjectura pode ser provada verificando-se que ela é verdadeira para cada elemento da coleção.

Demonstração por exaustão!
todos os casos possíveis são examinados para confirmar a conjectura

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

Exemplo 2 – Prove a conjectura "Se um inteiro entre 1 e 20 for divisível por 6, então também será divisível por 3". ("Divisibilidade por 6" significa "divisibilidade inteira por 6", ou seja, o número é um múltiplo inteiro de 6.) Como existe apenas um número finito de casos, a conjectura pode ser provada simplesmente mostrando-se que é verdadeira para todos os inteiros entre 1 e 20.

Número	Divisível por 6	Divisível por 3
1	não	
2	não	
3	não	
...	...	...

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

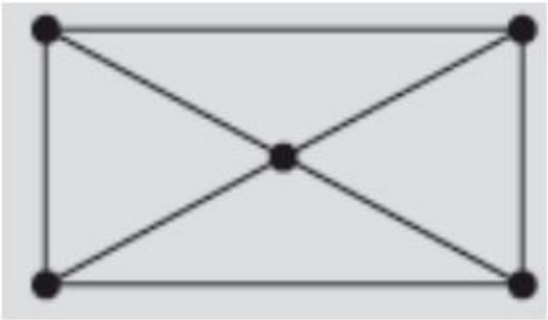
Exemplo 2 – Prove a conjectura “Se um inteiro entre 1 e 20 for divisível por 6, então também será divisível por 3”.

Número	Divisível por 6	Divisível por 3
1	não	
2	não	
3	não	
4	não	
5	não	
6	sim: 6 = 1 x 6	sim: 6 = 2 x 3
7	não	
8	não	
9	não	
10	não	
11	não	
12	sim: 12 = 2 x 6	sim: 12 = 4 x 3
13	não	
14	não	
15	não	
16	não	
17	não	
18	sim: 18 = 3 x 6	sim: 18 = 6 x 3
19	não	
20	não	

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

EXEMPLO 3

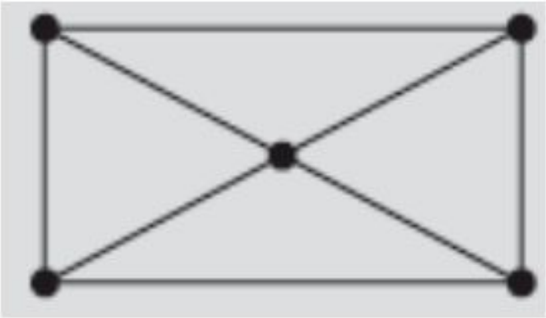
Prove a conjectura "Não é possível traçar todas as retas na Fig. 2.1 sem levantar o lápis do papel e sem redesenhar nenhuma reta".



DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

EXEMPLO 3

Prove a conjectura "Não é possível traçar todas as retas na Fig. 2.1 sem levantar o lápis do papel e sem redesenhar nenhuma reta".



Existe apenas um número finito de maneiras de traçar as retas na figura. Fazendo anotações cuidadosas, cada uma das possibilidades pode ser tentada, e cada uma delas vai falhar.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

a. Prove a conjectura "Para qualquer inteiro positivo menor ou igual a 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro".

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

a. Prove a conjectura “Para qualquer inteiro positivo menor ou igual a 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro”.

n	n^2	$10 + 5n$	$n^2 \leq 10 + 5n$
1	1	15	sim
2	4	20	sim
3	9	25	sim
4	16	30	sim
5	25	35	sim

Logo, para todos os inteiros ≤ 5, temos $n^2 \leq 10+5n$. Prova-se que a conjectura é verdadeira para esses casos específicos de n.

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

b. Dê um contraexemplo para a conjectura “Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro”

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

PROBLEMA PRÁTICO 2 –

b. Dê um contraexemplo para a conjectura "Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro"

n	n^2	10 + 5n	n2 ≤ 10 + 5n
1	1	15	sim
2	4	20	sim
3	9	25	sim
4	16	30	sim
5	25	35	sim
6	36	40	sim
7	**49**	**45**	**não**

Logo, a conjectura "Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro" é falsa.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Em geral (quando a demonstração por exaustão não funciona), como você pode provar que $P \to Q$ é verdadeira?

- A abordagem óbvia é a demonstração direta — suponha a hipótese P e deduza a conclusão Q.
- Uma demonstração formal necessitaria de uma sequência de demonstração partindo de P e chegando a Q.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Assim, na demonstração direta temos que $P \rightarrow Q$ deve ser verdadeira.

Se *P* **então** *Q*

EXEMPLO - Se <u>n é um número par</u>, então <u>n^2 é um número par</u>.

Como provar por demonstração direta?

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO - Se n é um número par, então n^2 é um número par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO - Se n é um número par, então n^2 é um número par.

$n = 2k, k \in Z$ → $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Logo, se n é um número par, n^2 é um número par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO2 - Se n é um número ímpar, então n^2 é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO2 - Se n é um número ímpar, então n^2 é um número ímpar.

$n = 2k+1, k \in Z \Rightarrow$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Logo, se n é um número ímpar, n^2 é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO3 - Se n é ímpar e m é par, então n+m é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO3 – Se n é ímpar e m é par, então n+m é um número ímpar.

$$n = 2k + 1$$
$$m = 2l$$

$$\Rightarrow$$

$$n + m = 2k + 1 + 2l$$
$$= 2(k + l) + 1$$

Logo, se n é ímpar e m é par, n + m é um número ímpar.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO4 - o produto de dois inteiros pares é par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO4 – o produto de dois inteiros pares é par.

Sejam:
$x = 2m$
$y = 2n$

$$
\begin{aligned}
xy &= (2m)(2n) \\
&= 2(mn)
\end{aligned}
$$

em que 2mn é um inteiro. Logo, xy tem a forma 2k, em que k é um inteiro e, portanto, é par.

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

PROBLEMA PRÁTICO - Dê uma demonstração direta (informal) do teorema "Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4".

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

PROBLEMA PRÁTICO - Dê uma demonstração direta (informal) do teorema "Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4".

Considere um número divisível por 6 como
$n = 6k$

E o dobro desse inteiro divisível por 4 como

$$2n = 4l$$
$$2(6k) = 4l$$
$$12k = 4l$$
$$(3*4)k = 4l$$
$$4(3k) = 4l$$

Logo, Se um inteiro for divisível por 6, então o dobro desse inteiro será divisível por 4

CONTRAPOSIÇÃO

Se você tentou produzir uma demonstração direta da conjectura $P \to Q$ e não conseguiu, mas ainda acha que a conjectura é verdadeira, você pode tentar algumas variantes da técnica de demonstração direta.

- Se você puder provar o teorema $Q' \to P'$, pode concluir que $P \to Q$ usando a tautologia $(Q' \to P') \to (P \to Q)$ (contrapositiva).

tautologia é uma fórmula proposicional que é verdadeira para todas as possíveis valorações de suas variáveis proposicionais.

CONTRAPOSIÇÃO

EXEMPLO 6 - Prove que, se o quadrado de um inteiro for ímpar, então o inteiro terá que ser ímpar.

$P \rightarrow Q$ $\qquad$ n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar

Fazendo uma demonstração por contraposição, teremos que

$Q' \rightarrow P'$ $\qquad$ n par $\rightarrow$ n^2 par

Seja n par, então temos que

$n = 2k$

$$n^2 = (2k)(2k) = 2(2k^2)$$

Logo, n^2 é par.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

Teoremas são enunciados, muitas vezes, na forma "P se e somente se Q", o que significa que P se Q e P só se Q, ou seja, $Q \rightarrow P$ e $P \rightarrow Q$. Para provar tal teorema, você precisa demonstrar um condicional e sua recíproca. Novamente, a verdade de um não implica a verdade do outro

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Vamos provar primeiro que, se x e y forem ímpares, então xy também o será:

$x = 2m + 1$ então, $xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$y = 2n + 1$ $= 4mn + 2m + 2n + 1$

$= 2(2mn + k + l) + 1$ que possui a forma de $2k + 1$

Logo, xy é ímpar.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Agora, iremos mostrar que se xy forem ímpares, então x e y também serão:

xy ímpar→ x ímpar e y ímpar

Uma demonstração direta começaria com a hipótese de que xy é ímpar, não nos dando muitas opções. Uma <u>demonstração por contraposição</u> irá funcionar melhor, pois teremos informações mais úteis como hipóteses.

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

Agora, iremos mostrar que se xy forem ímpares, então x e y também serão:

xy ímpar→ x ímpar e y ímpar

Através da <u>demonstração por contraposição</u>, teremos $Q' \rightarrow P'$

(x ímpar e y ímpar)′ → (xy ímpar)′

Pela lei de De Morgan, $(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$, logo a expressão anterior pode ser escrita na forma

x par ou y par → xy par

CONTRAPOSIÇÃO

LEMBRETE

"Se e somente se" requer duas demonstrações, uma em cada direção.

EXEMPLO - Prove que o produto xy será ímpar se e somente se tanto x quanto y forem inteiros ímpares.

$$x \text{ par ou } y \text{ par} \rightarrow xy \text{ par } (1)$$

A hipótese "x par ou y par" pode ser quebrada em três casos.

Vamos considerar cada um deles.

1. x par, y ímpar: então x = 2m ey = 2n + 1, logo xy = (2m)(2n + 1) = 2(2mn + m), que é par.
2. x ímpar, y par: funciona como no primeiro caso.
3. x par, y par: então xy é par Isso completa a demonstração de (1) e, portanto, do teorema.

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

Além da demonstração direta e da demonstração por contraposição, você pode usar a técnica de **demonstração por absurdo**.

- Denotaremos qualquer contradição por **0**, ou seja, qualquer fbf cujo valor lógico é sempre falso. (Um exemplo de tal fbf é $A \wedge A'$.)
- Suponha que você está tentando provar $P \to Q$. Construindo uma tabela-verdade, vemos que

$$(P \wedge Q' \to \mathbf{0}) \to (P \to Q)$$

é uma tautologia, logo, para provar o teorema $P \to Q$, basta provar que

$$P \wedge Q' \to \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

EXEMPLO - Demonstre por absurdo a proposição:
"Se um número somado a ele mesmo for igual a ele mesmo, então esse número será 0".
Considerando x um número arbitrário, temos a seguinte hipótese:

$$(x + x = x) \rightarrow x = 0$$

Para demonstrar por absurdo, teremos que provar que $P \wedge Q' \rightarrow$ **0**. Assim, suponha que

$$(x + x = x) \wedge x \neq 0$$
$$2x = x \wedge x \neq 0$$

Como $x \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação

$$2 = x/x$$

$2 = 1$, uma contradição.

Portanto, $(x + x = x) \rightarrow (x = 0)$

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

EXEMPLO 11

Uma demonstração por absurdo que é bem conhecida é a de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Lembre-se de que um **número racional** é um número que pode ser colocado na forma p/q, em que p e q são inteiros, q 0, e p e q não têm fatores comuns (exceto ± 1).

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Então $\sqrt{2} = p/q$ e $2 = p^2/q^2$, ou seja, $2q^2 = p^2$. Logo, 2 divide p^2 e — como o próprio 2 é indivisível — 2 tem que dividir p. Isso significa que 2 é um fator de p, donde 4 é um fator de p^2 e a equação $2q^2 = p^2$ pode ser escrita como $2q^2 = 4x$ ou $q^2 = 2x$. Vemos dessa equação que 2 divide q^2, logo 2 divide q. Mas, então, 2 é um fator de q e de p, o que contradiz a declaração de que p e q não têm fatores comuns. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional. ●

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

EXEMPLO 11

Uma demonstração por absurdo que é bem conhecida é a de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Lembre-se de que um **número racional** é um número que pode ser colocado na forma p/q, em que p e q são inteiros, q 0, e p e q não têm fatores comuns (exceto ± 1).

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Então $\sqrt{2} = p/q$ e $2 = p^2/q^2$, ou seja, $2q^2 = p^2$. Logo, 2 divide p^2 e — como o próprio 2 é indivisível — 2 tem que dividir p. Isso significa que 2 é um fator de p, donde 4 é um fator de p^2 e a equação $2q^2 = p^2$ pode ser escrita como $2q^2 = 4x$ ou $q^2 = 2x$. Vemos dessa equação que 2 divide q^2, logo 2 divide q. Mas, então, 2 é um fator de q e de p, o que contradiz a declaração de que p e q não têm fatores comuns. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional. ●

Suponha por absurdo que

$\sqrt{2} = p/q$, $p,q \in Z$ $mdc(p,q) = 1$

$(\sqrt{2})^2 = (p/q)^2$

$2 = p^2/q^2$

$2q^2 = p^2$

p^2 é par, logo p é par. Ou seja, $p = 2k$

$2q^2 = (2k)^2$

$2q^2 = 4k^2$

$q^2 = 2k^2$

q^2 é par, logo q é par, logo $q = 2l$

Isso significa que 2 é um fator de p e de q, o que contradiz a declaração de que p e q não têm fatores comuns. Portanto, não é racional.

RESUMO

TABELA 2.2		
Técnica de Demonstração	**Abordagem para Demonstrar $P \to Q$**	**Observações**
Demonstração exaustiva	Demonstre $P \to Q$ para todos os casos possíveis.	Só pode ser usada para provar um número finito de casos.
Demonstração direta	Suponha P, deduza Q.	A abordagem padrão — o que deve ser tentado em geral.
Demonstração por contraposição	Suponha Q', deduza P'.	Use isso se a hipótese Q' parece dar mais "munição" do que P.
Demonstração por absurdo	Suponha $P \wedge Q'$, deduza uma contradição.	Use isso quando Q diz que alguma coisa não é verdade.