

k-曲线：局部最大曲率的插值

ZHIPEI YAN, Texas A&M University

STEPHEN SCHILLER, Adobe Research

GREGG WILENSKY, Adobe

NATHAN CARR, Adobe Research

SCOTT SCHAEFER, Texas A&M University

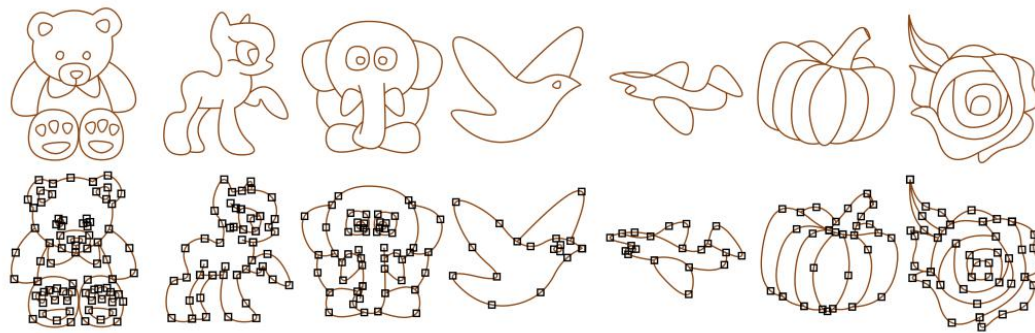


图 1. 上面一行显示了由下方控制点构成的示例的形状。在所有情况下，曲率的局部极大值只出现在控制点处，并且曲线几乎处处都是 G^2 。

我们提出了一种构造几乎处处曲率连续，分段二次曲线的方法，在一系列控制点中插值，并只在控制点上具有曲率极大值。我们假定这个曲线的突出特征应该在控制点上出现，以避免出现艺术家计划之外的对曲线特点的改变。尽管很多艺术家喜欢使用插值控制点，但是远离控制点的一些因素，例如环路和尖角的产生，限制了这种类型的曲线的使用。通过强化最大曲率特性，环路和尖角将不再产生，除非艺术家们主动想要创造它们。

为了创建这样的曲线，我们把重点放在分段二次曲线上，这种曲线可以只有一个最大曲率点。我们提供了一个简单的迭代优化，在每一个内部控制点处创建一段二次曲线，处处满足 G^2 连续，除了在 G^1 连续的曲线的拐点处。尽管曲率具有非线性的特性，我们的曲线只能在插值控制点处，获得曲率绝对值的局部最大值（极大值）。

CCS 概念：•计算方法学→参数曲线和曲面模型；

另外色关键词和短语：插值曲线，单调曲率，曲率连续性

1 引言

曲线模型在计算机图形学方面有着悠久的历史，可以用于绘图，素描，数据拟合，插值还有动画。这种丰富的应用使得对于表现和修饰曲线的研究长达数十年。这类曲线表示的目标就是在用户建立具有特定几何属性的曲线时，为他们提供对于曲线形状的控制。这些属性可能包括平滑度，各种点的插值和局部性。

在本文中，我们关注插值曲线；即插入其控制点的曲线。虽然许多研究集中在逼近曲线上，但许多用户更喜欢直接控制曲线的显著几何特征，例如曲线的位置。然而插值曲线有一个被诟病的过去，因为它们经常可以产生远离控制点的几何特征，例如尖端和回路，导致使用者难以控制（见图 2）。

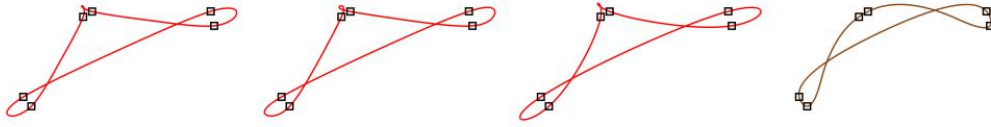


图 2. 对我们的结果和 C^2 曲线的比较。从左到右：6 个点的插值细分曲线 [Deslauriers and Dubuc 1989]， C^2 Catmull-Rom Spline (样条) [Catmull and Rom 1974]， C^2 内插三次 B 样条 [Farin 2002]，我们的曲线。

我们假定，插值曲线的显著的几何特征只应该在控制点出现。“位置”就是一个这样的例子，它在插值曲线构建的过程中自动执行。但是，问题是：还有哪些其他特征也只应该在控制点附近出现？Levien et al. [Levien and Sequin 2009] 认为最大曲率点也是显著特征。事实上，我们可以看到，对最大曲率点缺少控制，导致了在很多在插值曲线构造中的历史问题。

例如，产生尖角的倾向性就是由于曲率的一个局部最大值（在这里，无限大的曲率）被生成成为远离控制点的。我们建议创建曲线曲率绝对值的极大值只出现在控制点的插值曲线，我们称之为 κ 曲线。另外，我们使用除了在拐点（连接处是 G^1 ），就处处满足 G^2 连续性的，分段二次曲线来构建这样的曲线。我们应该指出，为这些样条的构想的主要应用程序更多的是艺术设计类的，而不是 CAD。因此偶尔缺乏 G^2 连续性不是问题。而且，由于我们设想这些曲线是要被艺术家控制，所以曲线应该在控制点的连续运动下连续变化。最后一个属性被许多曲线构造一般性的满足，但不是所有的。例如，图 3 展示了一个回旋曲线的控制点连续的移动的例子 [Havemann et al. 2013]（造成了生成的曲线的不连续的变化）。

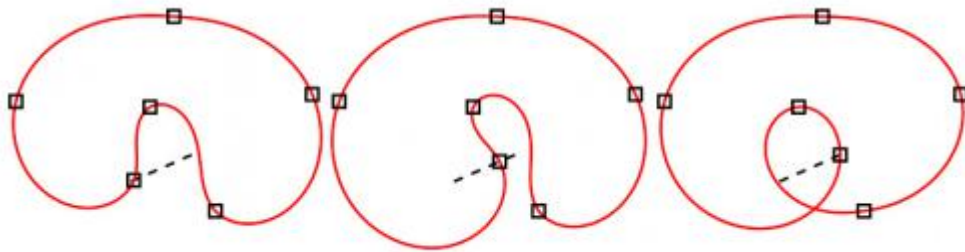


图 3. 连续移动一个分段回旋曲线的控制点可能会导致曲线的不连续变化，如右图所示，曲线突然翻转。

2 相关工作

有数量庞大的插值曲线构造方法被提出，我们不能提供一个详尽的列表，除了参考[Hoschek and Lasser 1993]中的很多这样的方法。

Catmull-Rom 样条 [Barry and Goldman 1988; Catmull and Rom 1974] 是一种更常见的插值曲线表示，是 Lagrange 插值与 B 样条基函数的组合。细分曲线 [Deslauriers and Dubuc 1989; Dyn et al. 1987] 也可以用于模拟插值样条。三次样条，由近似的 B 样条形成，通过解三对角方程组的办法来插值具有 C^2 连续性的点得到 [Farin 2002]。不同的参数化方法。比如向心或者弦，也可以被用来控制这些曲线的形状。

在 C^1 Catmull-Rom 样条的例子中，这样的选择可以保证除了控制点外的其余地方不出现尖角。[Yuksel et al. 2011]。然而，这些结果无法延续到 C^2 Catmull-Rom 样条。尽管所有这些构造方法都可以建立插值曲线，甚至是带有曲率连续性的，但是没有一种方法可以控制曲率。图 2 展示了许多这样的构造方法和我们的方法的对比。请注意除了我们的方法，所有其他方法生成的曲线都产生尖角或者带有远离控制点的曲率极大值点。

和我们的方法更加相关的曲线是这样的，它们不仅对控制点进行插值，而且在某些方面控制曲率。Higashi 等人 [Higashi et al. 1988] 限制了贝塞尔曲线的控制点的位置来获得单调的曲率，构造了 C^2 样条。“A 类”的贝塞尔曲线 [Farin 2006; Mineur et al. 1998] 有单调的曲率，但自由度很小，难以控制。回旋线 (Clothoids)，也被称为欧拉螺旋 (Euler spirals)，[Havemann et al. 2013; McCrae and Singh 2009; Schneider and Kobbelt 2000] 也许是最著名的这类曲线。这类曲线有着曲线曲率随弧长线性变化的形状。因此，分段回旋曲线在插值点处具有局部最大曲率量值。这样的曲线对于我们的目标来说是很理想的，除了控制点的连续运动并不总是产生曲线的连续形变，就如图 3 所示。对数美学曲线 (Log-aesthetic curves) [Miura and Gobithaasan 2014; Miura et al. 2013; Yoshida et al. 2009; Yoshida and Saito 2017] 类似于回旋曲线（确实回旋线是一种特殊的情况），有着随弦长指数式增长的曲率图。Levein 等人 [Levien

and Sequin 2009]也描述了一个双参数样条族模共形转换。(modulo conformal transformations)。

除了控制曲率，我们的方法使用分段满足 G^2 连续性的分段二次曲线。大多数曲线构造方法需要三次曲线来生成 C^2 或 G^2 曲线，但是 G^2 二次曲线在过去已经出现了。Schaback [Schaback 1989] 创建了一个分段二次 G^2 贝塞尔曲线来插值一系列非拐点。这种方法插值点之间产生一个二次贝塞尔曲线，但倾向于在曲线在插值点生成平坦的曲线。Feng 等人 [Feng and Kozak 1996] 改变了这种方法，并构造了一个 G^2 二次曲线来插值一系列切向方向相关的点，并且每一个二次的曲线的末端的点出现在插值点之间。Gu 等人 [Gu et al. 2009] 使用二次贝塞尔曲线来插值一系列具有任意切线方向的带有 G^1 连续性的点。

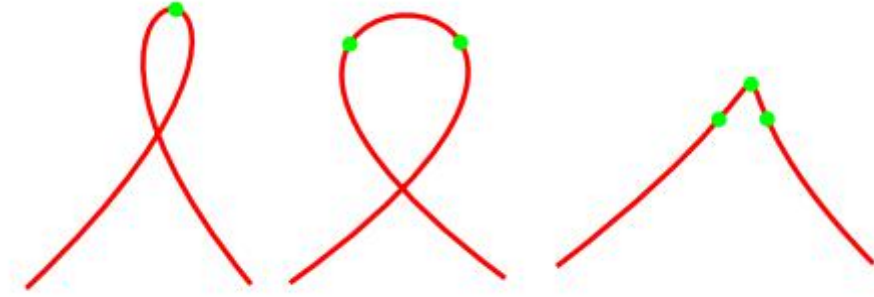


图 4. 具有不同数量的极大值曲率点的三次曲线。从左到右：分别带有一个，两个，三个极大值曲率点的三次曲线，极大值曲率点在图中使用绿色被标注。

我们创建 G^2 二次曲线的方法和所有这些都不一样。

并且我们发展出了一套对于保证两个二次曲线之间的连接点的 G^2 连续性的明确的解决方案。另外，我们考虑了控制点被插值在最大曲率量值位置的这样的附加的条件。

3 几何约束

首先，我们考虑我们需要这些曲线满足哪些几何属性。

具体而言，给定一组有序的点 $p_1 \dots p_n \in R^2$ ，我们想建立一个曲率连续曲线（ G^2 曲线），使得曲线插值在 p_i ；即，存在参数 t_i 使得 $p(t_i) = p_i$ 。我们进一步假设这些点形成一个闭合的曲线，应该被循环处理（我们在第 4 节放宽这个假设）。

此外，我们希望任何的曲率极大量值（曲率的绝对值）只存在于 p_i 处。最后的这一个标准是基于，曲线弯曲程度最大的点（至少是局部弯曲的）是曲线的一个显著特点，并且应该由用户直接控制。注意到这最后

一个属性并不意味着每个 p_i 处的曲率的导数的大小必须是零。因此，曲率可能在插值点 p_i 处局部增加或减少。然而，如果存在最大的曲率大小，它会出现于插值点处。

3.1 局部最大曲率插值

像许多曲线方法一样，我们把重点放在分段多项式曲来作为我们的曲线表示。我们用贝塞尔形式表示我们的曲线。给定一组控制点 $c_{i,j}$ ， d 度（ d degree）的第 i 个贝塞尔曲线为

$$c_i(t) = \sum_{j=0}^d \frac{d!}{(d-j)!j!} (1-t)^{d-j} t^j c_{i,j}$$

其中 $t \in [0,1]$

然而，控制多项式曲线的曲率充其量是困难的。立方参数曲线在任意给定段都可能三个曲率极大值。

图4显示了几个具有曲率极大值(被标出)的参数三次贝塞尔曲线。虽然存在“A类”贝塞尔曲线[Farin 2006]，并且单调的曲率，但它们被严格限制，自由度很低。

考虑到曲率最大值对于多项式曲线来说是如此难以控制，我们给我们的曲线选择了一种非常简单的表示，

是由分段二次贝塞尔曲线构造而来的；每个插值点 p_i 的一条曲线 ($c_i(t)$)。单独的二次曲线有，至多拥有一个曲率最大值点的性质，这对我们的应用至关重要。

令 $c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i,2} \in R^2$ 为二次曲线 $c_i(t)$ 的三个控制点，这个曲线的曲率如下

$$\begin{aligned} \kappa_i(t) &= \frac{\det(\frac{\partial c_i(t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 c_i(t)}{\partial t^2})}{\|\frac{\partial c_i(t)}{\partial t}\|^3} \\ &= \frac{\Delta(c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i,2})}{\|(1-t)(c_{i,1} - c_{i,0}) + t(c_{i,2} - c_{i,1})\|^3} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 Δ 表示由其参数指定的三角形的面积。取 $\kappa_i(t)$ 的导数并且使方程等于零，可以得到就第 i 个贝塞尔曲线的贝塞尔系数而言的最大曲率点的参数 t_i 。

$$t_i = \frac{(c_{i,0} - c_{i,1}).(c_{i,0} - 2c_{i,1} + c_{i,2})}{||c_{i,0} - 2c_{i,1} + c_{i,2}||^2}. \quad (2)$$

现在为了构建一个曲线 $c_i(t)$ 使得 $c_i(t_i) = p_i$ ，我们将展示，对于任意的 $c_{i,0}$, $c_{i,2}$ 和 p_i ，都存在一个 $c_{i,1}$

的选择使得 p_i 被插值在曲率最大值点。从以下条件开始

$$c_i(t_i) = p_i,$$

我们解出点 $c_{i,1}$ 并且得到

$$c_{i,1} = \frac{p_i - (1 - t_i)^2 c_{i,0} - t_i^2 c_{i,2}}{2t_i(1 - t_i)}. \quad (3)$$

将等式 3 带入等式 2 产生一个关于 t_i 三次的方程

$$||c_{i,2} - c_{i,0}||^2 t_i^3 + 3(c_{i,2} - c_{i,0}).(c_{i,0} - p_i)t_i^2 + (3c_{i,0} - 2p_i - c_{i,2}).(c_{i,0} - p_i)t_i - ||c_{i,0} - p_i||^2 = 0. \quad (4)$$

虽然这个方程可能有三个实根，这意味着解并不是唯一的，然而我们在附录 A 中将展示，对于任意的

$c_{i,0}$, p_i , $c_{i,2}$ ，这个等式确实只有一个属于区间 $[0, 1]$ 的实根。考虑到这个三次方程确实只有一个实根，找

到这个根就很简单了，并且有多办法可以做到。在我们的实现中我们使用了一个三次方程的根的精确公式。

即使在退化的情况下，即，所有三个点形成一条直线。（比如， $p_i = (1 - \alpha)c_{i,0} + \alpha c_{i,2}$ ），这个三次方程

只有一个根 $t_i = \alpha$ 。一旦我们有了 t_i ，把它带入到方程 3 就完成了在曲率最大量值点插入 p_i 的二次曲线。

3.2 平滑度

虽然我们已经讨论了一个曲线具有最大曲率量值的插值点的局部构造方法，我们的目标是

将这些曲线拼合在一起以形成连续的曲率的曲线（比如 G^2 曲线）。请注意，如果曲率符号随曲线改变，

那么使用分段二次式创建一个处处 G^2 的曲线是不可能的。原因是二次曲线不可能拥有大小为零的曲率，

除非曲线是平直的直线。因此，除非我们的曲线是严格凸起的，我们不可能期望构建出处处 G^2 的分段二次曲线。

我们的折中是构建一个几乎处处 G^2 的分段二次曲线。我们的曲线会失去曲率连续性的唯一的地方是曲线从凸面变成凹面的地方，反之亦然。因此，和标准的样条构造方法不一样，我们分段构造得到的几何平滑度随曲线的几何形状变化，而不是曲线被如何分解成多项式。连接具有 G^2 平滑度的二次曲线的条件之前已经被讨论过[Schaback 1989]。考虑到可以构造曲率连续的二次曲线这一点还不是众所周知的，我们从这里得到条件，并且提供一种封闭形式的解决方案，这将会是第 4 节中我们的优化方案的一部分。

我们的曲线由每一个插值点 p_i 一段带有控制点 $c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i,2}$ 的二次曲线构成。曲线之间的 C^0 连续性的条件很简单，仅仅需要 $c_{i,2} = c_{i+1,0}$ 。 G^1 连续性同样很简单并且需要

$$c_{i,2} = (1 - \lambda_i)c_{i,1} + \lambda_i c_{i+1,1} \quad (5)$$

此处 $\lambda_i \in (0,1)$ 。

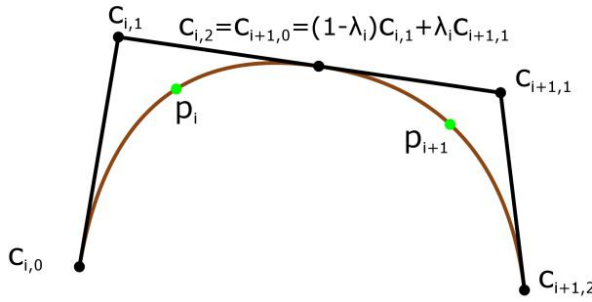


图 5. 我们控制点的标记 $c_{i,0...2}$ ，插值输入点 p_i 以及 G^2 连接的条件

对于 G^2 连续性，我们考虑图 5 中的凸曲线。由于 $c_{i,2}$ 是 $c_{i,1}$ 和 $c_{i+1,1}$ 的线性组合，问题是是否存在 $\lambda_i \in [0,1]$ 使曲率连续。 G^2 连续性要求 $k_i(1) = k_{i+1}(0)$ 。使用等式 1 并使用控制点和 λ_i 来表达 G^2 的条件，将产生

$$\frac{\Delta(c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i+1,1})}{|c_{i,1} - c_{i+1,1}|^3 \lambda_i^2} = \frac{\Delta(c_{i,1}, c_{i+1,1}, c_{i+1,2})}{|c_{i,1} - c_{i+1,1}|^3 (1 - \lambda_i)^2}. \quad (6)$$

这个条件将产生一个以 λ_i 表示的二次等式，并且在区间 $(0, 1)$ 上有一个确切的实根，它是

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{\Delta(c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i+1,1})}}{\sqrt{\Delta(c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i+1,1})} + \sqrt{\Delta(c_{i,1}, c_{i+1,1}, c_{i+1,2})}}$$

当曲线的凸度改变时，曲线将不再可能是 G^2 的，因为二次曲线不能有为零的曲率，除非它们退化为一
直线。在这种情况下，我们通过最小化曲率量值差值的平方来选择 λ_i

$$\min_{\lambda_i} (|\kappa_i(1)| - |\kappa_{i+1}(0)|)^2$$

由于曲率的符号是相反的，所以这种最小化相当于对 λ_i 求解 $\kappa_i(1) + \kappa_{i+1}(0) = 0$ 。使用等式 6 中的曲率表达式，我们又找到了这个二次等式在区间 $(0, 1)$ 中的一个根，如下

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{|\Delta(c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i+1,1})|}}{\sqrt{|\Delta(c_{i,0}, c_{i,1}, c_{i+1,1})|} + \sqrt{|\Delta(c_{i,1}, c_{i+1,1}, c_{i+1,2})|}}. \quad (7)$$

注意到这一个等式和前面 λ_i 的表达式是一样的，除了绝对值的部分。因此，这个表达式可以综合两种情况。

在单纯凸的情况下，这种 λ_i 的这种选择产生 G^2 的曲线，而当曲线的凸度改变时曲线为 G_1 。但是，在这种情况下，曲率的绝对值（但不是曲率符号）曲线之间的连接处匹配。

以上对于 λ_i 等式将是未知的，如果分母中的三角区域同时为零，这种情况可能在足够多的 $c_{i,j}$ 是共线的或重合时发生。这种情况可以被鲁棒性地处理，只要向每一个这样地平方根加入一个小常数 $\varepsilon = 10^{-10}$ 。

4 优化

使用第 3 节中的几何条件，我们把这些条件结合在一起找到满足所有这些性质的曲线的优化方法。为此，我们采用一种局部/全局的方法 [Liu et al. 2008; Sorkine and Alexa 2007]。在这种优化方法中，我们的自由度是脱离曲线的点 (off-the-curve points) $c_{i,1}$ ，因为通过 C^0 条件有 $c_{i,2} = c_{i+1,0}$ ，由 G^1 和 G^2 条件有 $c_{i,2} = (1 - \lambda_i)c_{i,1} + \lambda_i c_{i+1,1}$ 。

根据 $c_{i,0}, \dots, c_{i,2}$ 的现有解，并且使用等式 7 估计 λ_i 然后使用等式 5 更新 $c_{i,0}$ 和 $c_{i,2}$

接下来我们从等式 4 计算 t_i 的最大参数值。在第一轮迭代中我们使用初始的猜测值 $\lambda_i = \frac{1}{2}$ 和 $c_{i,1} = p_i$ ，使用这些局部计算的值，我们现在假定 t_i 和 λ_i 是常量，并且解出 $c_{i,1}$ 的一个全局的线性的系统，使得

(1) $c_i(t_i) = p_i$ (2) 来自等式 5 的限制条件仍然保持。从这些限制条件将得出每一个 p_i 的以未知的 $c_{i-1,1}$ ，

$c_{i,1}$, $c_{i+1,1}$ 的形式表示的线性等式:

$$p_i = \frac{(1 - \lambda_{i-1})(1 - t_i)^2 c_{i-1,1} + \lambda_i t_i^2 c_{i+1,1} + (\lambda_{i-1}(1 - t_i)^2 + (2 - (1 + \lambda_i)t_i)t_i) c_{i,1}}{(1 - \lambda_{i-1})(1 - t_i)^2 + \lambda_i t_i^2 + (\lambda_{i-1}(1 - t_i)^2 + (2 - (1 + \lambda_i)t_i)t_i)}$$

解决这个线性方程组的循环的三对角的系统将得到 $c_{i,1}$ 更新的位置。然后我们重复这个解决过程直到收敛。

因为我们只需要解决一个很小的，稀疏的线性等式系统，所以这个优化方法收敛的速度很快，并且每一次迭代计算也很快。图 6 展示了我们优化的过程。在一轮迭代之后，我们的结果就非常接近最终的解了，但是一些曲率最大值点并没有和控制点重合。在两次迭代之后，结果就几乎和我们最终的结果难以区分了。即使是对于有很多控制点的很大的曲线，我们的优化方法由于它的简单性仍然以超越交化式的速度产生结果。更进一步，通过从用户之前控制点设置的结果开始，优化速度甚至可以更快，尽管我们已经发现这样的提升是不必要的。

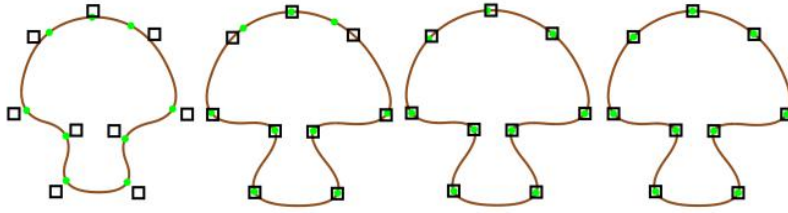


图 6. 我们优化的迭代显示了控制点的收敛（黑色方格）和控制曲率最大值点的位置（绿色点）。从左到右：我们初始的猜测，在一次迭代之后，在两次迭代之后，以及最终经历三十次迭代之后的收敛。

4.1 带有边界的曲线

我们的讨论集中在了闭合曲线上。处理带有末端点的曲线是对我们现有方法的一个简单的修改。设 $p_1 \dots p_n$ 为曲线的内部控制点， p_0 和 p_{n+1} 为曲线的末端点。对于曲线 $c_i(t)$ ，它插入 p_1 ，我们简单地加上要求 $c_{1,0} = p_0$ 。类似地，我们约束 $c_{n,2} = p_{n+1}$ 。这样一个改变可以确保 p_0 和 p_{n+1} 不出现在曲率极大值点，但是却在曲率极小值点。图 9 展示了一个带有端点的曲线使用这种方法的例子。

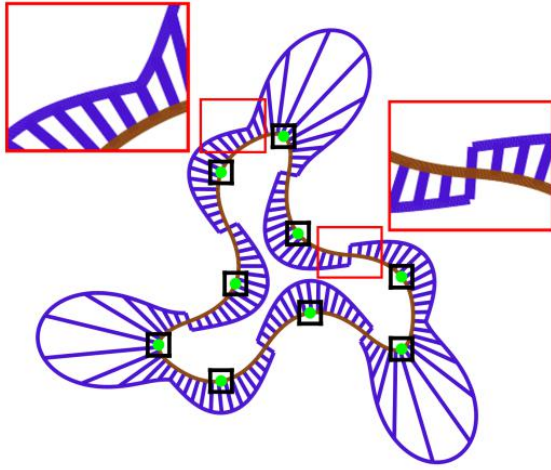


图 7. 我们的曲线（棕色）使用黑色方格展示了控制点，绿色的点是曲率极大值点的位置。我们同样画出了曲率法线（紫色）。

正如在突出显示的区域，我们的曲线是处处 G^2 的，除了在拐点处，这里曲线是 G^1 的，并且曲率的符号，而非量值发生变化。

5 结果

我们的曲线被设计成了在控制点具有曲率极大值。图 7 在曲线上将所有的控制点展示为空心的小方格，并且将所有的曲率极大值点展示为绿色的点。因此，绿色的点应该出现在我们曲线上每个控制点小方格中。这些点是曲线弯曲程度最大的地方。尽管它的形状很复杂，曲线上并没有出现尖角或者回路。图 1 展示了由许多曲线组成的形状。在所有的情况中，曲率极大值点只出现在控制点处。

图 7 同样通过曲率法线（the curvature normal）展示了曲线的曲率的连续性（法线长度正比于曲线在该点的曲率）。对于一个曲率连续（ G^2 ）的曲线，曲率法线量值（the magnitude of the curvature normal）应该在整条曲线上连续的变化。这对于我们的曲线来说是处处正确的，除了在曲线的拐点处。在这些点上，曲率法线翻转方向但保持相同的大小。

请注意，如图 8 所示，控制点不存在于一个曲率最大值点是可能的。在这种情况下，曲率在被突出显示的点处是下降的。然而，所有的曲率极大值点都出现在控制点。

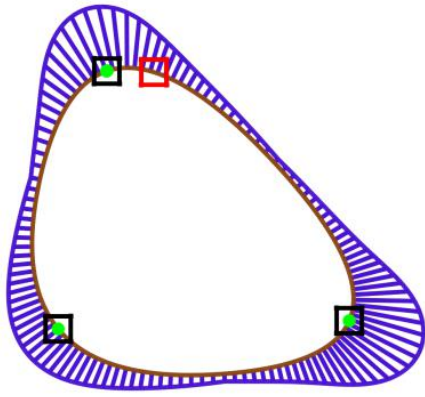


图 8. 红色的控制点并不是曲率一个严格递减的点。然而，所有的曲率极大值出现在控制点。

不像诸如回旋线这样的曲线，控制点的连续运动会产生曲线连续的变形。回旋线使用随控制点运动连续变化的曲率的估计。当曲率从正变成负，曲线必须通过无限正曲率点到无限负曲率点（一个尖角），以使曲线的几何形状连续变化。曲线在控制点之间分段线性地改变曲率，不能具有这样的行为。相比之下，我们的曲线可以产生无限曲率，尽管只在控制点处。无限曲率不是不必要的人为因素，而恰恰是产生曲线连续运动的属性。然而，这种连续运动的成本是一个曲率轮廓，不像“回旋曲线”那么“公平”。图 9 描述了在用户使用我们的方法操纵曲线时在控制点的尖角的产生。这张图和许多图 1 中的形状，也展示带有末端点的开放曲线。

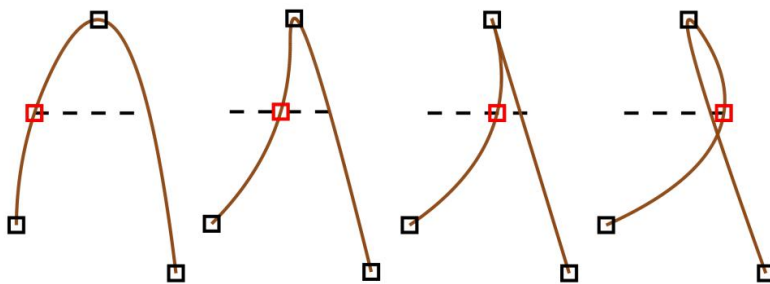


图 9. 使用我们的方法，尖角只可能产生在控制点处。

由于我们的优化产生了一个全局的解，一个控制点的影响技术上讲也是全局的。那就是，移动一个控制点会改变整个曲线的形状。然而，实际上，一个点的影响是相当有限的。图 10 展示了一个示例曲线，这里我们移动单个控制点，并且把蓝色的原始曲线画在了棕色的新曲线后面。该图说明曲线的非常小的运动发生在远离修改的形状的几个控制点之外。

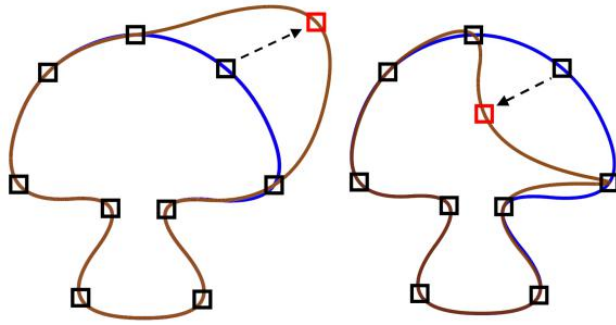


图 10. 使用蓝色表示的原始曲线，在其上使用棕色绘制新的曲线。尽管控制点对于曲线有着全局的作用，这个影响随着离控制点的距离而急剧下降，这就产生了局部影响的效果。

6 实现

κ 曲线系统被作为一个工具实现在一个商业插画工具包里面，Adobe Illustrator。Adobe Illustrator 可以检测用户使用每种可用工具的时间。新的工具叫“curvature”工具，是使用基数样条线的较老的“pen”工具的直接竞争者。尽管有许多经验丰富且付出很多努力的艺术家在 pen 工具上投入了多年的时间，但在 curvature 工具的发布六个月之后，这两种工具的组合使用的 35% 就是和桌面设备上新的 curvature 工具了。在带有触摸屏幕的设备上，curvature 工具占用了两种工具的组合使用的 66%。尽管需要更多的研究来全面得理解艺术家得偏好，这个使用数据强烈地表明，我们的模型对专业工作流程来说是一种受欢迎的补充。

7 结论和未来的工作

插值曲线通常受到人工因素得影响，并且使用带有大量支持的高阶多项式，即使是对于低连续性得曲线。我们的曲线改变了这种模式。我们使用低阶曲线，但是却实现了更高阶的连续性。尽管它们具有全局的本性，我们已经证明了输入点的影响对于实际应用来说是局部的。而且，输入点与曲线的特征一致：即曲率极大值点。即使用户没有直接控制输入点处的切线角或曲率，系统也会自动为这些参数选择自然的值。实际上，人们可以把这种工作看成一种仅基于输入点去自动地选择自然的和令人愉快的切线角度和曲率的办法。最后，我们的曲线在控制点的连续运动下连续地变化。这两个组合属性使它们成为包括矢量设计和运动路径关键帧在内的许多创造性任务的一种理想选择。总之，我们认为 κ 曲线解决了许多困扰插值曲线的问题，使其更适合于现代设计应用。

尽管我们在这里关注的是非有理贝塞尔二次曲线，这项工作也可以被延伸到有理二次曲线。额外的自由度，可以想象，允许在每一个插值点一个独立的张力控制，使得对于曲线的形状可以进行更多的艺术控制。然

而，有理曲线解决不了拐点处 G^2 连续性缺失的问题。

参考

[此处略去]

最大曲率解的唯一性

证明：

为了显示等式 4 在区间 $[0, 1]$ 中确有一个实根，我们首先以贝塞尔额形式些出它的参数，达到一个及其简单的表达式。令 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{c}_{i,0} - \mathbf{p}_i$ ， $\mathbf{v}_2 = \mathbf{c}_{i,2} - \mathbf{p}_i$ 。

得到贝塞尔参数如下：

$$(-|\mathbf{v}_0|^2, \frac{-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_2}{3}, \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_2}{3}, |\mathbf{v}_2|^2)$$

考虑到我们对这个多项式的根感兴趣，我们把它除以一个正常数 $|\mathbf{v}_0| \|\mathbf{v}_2\|$ ，来得到一个更加简单的参数表达式

$$\left(-r, -\frac{\cos(\theta)}{3}, \frac{\cos(\theta)}{3}, \frac{1}{r}\right) \quad (8)$$

此处 $r = \frac{|\mathbf{v}_0|}{|\mathbf{v}_2|}$ ， θ 是向量 \mathbf{v}_0 和 \mathbf{v}_2 之间的夹角。请注意贝塞尔形式的多项式服从笛卡尔符号规则来界定

多项式根的个数[Lane and Riesenfeld 1981]。由于第一个参数是负的，最后一个参数是正的。因此在区间 $[0,1]$ 中至少存在一个根。如果 $\cos(\theta) \geq 0$ ，则根据笛卡尔符号规则，在 $[0,1]$ 中确有一个根。因此，我们考虑 $\cos(\theta) < 0$ 的情况。

然而在这种假设下，从等式 8 得到的带有贝塞尔参数的多项式在区间 $[0,1]$ 上单调递增。我们通过计算多项式的导数证实了这一点，此处得到一个二次贝塞尔参数。

$$(3r - \cos(\theta), 2 \cos(\theta), \frac{3}{r} - \cos(\theta)).$$

因为 $\cos(\theta) < 0$ ， $r > 0$ ，所以第一个和最后一个参数都是正的。而且，我们可以计算这个二次式的最小值，如下

$$\frac{3r - \cos(\theta)(1 + r^2 + r \cos(\theta))}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta)}.$$

因为 $1 + r^2 + r \cos(\theta) > 0$, 所以同样是严格的正数。由于这个二次式在负数 $6(\cos(\theta) - r)$ 处导数为零,

这个带有等式 8 中的贝塞尔参数的三次函数是单调递增的并且在区间[0,1]中确有一个实根。

证毕