Aufgabe 1:f

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Eine Inverse einer Abbildung ist gleichzeitig Rechts- und Linksinverse.

(ii) Eine Abbildung kann mehrere Linksinverse haben.

(iii) Jede bijektive Abbildung besitzt eine Inverse.

(iv) Die Inverse einer Abbildung ist immer eindeutig.

Antworten mit Begründung

(i) **Wahr.** Unter „Inverse“ versteht man üblicherweise die zweiseitige Inverse f^{-1}, also eine Abbildung g mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Solch eine Inverse ist per Definition sowohl Links- als auch Rechtsinverse.

(ii) **Wahr.** Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ kann mehrere Linksinverse besitzen, falls f injektiv, aber nicht surjektiv ist. Für $y \notin f(X)$ darf ein Linksinverses $g\colon Y \to X$ die Werte beliebig wählen, ohne die Bedingung $g \circ f = \mathrm{id}_X$ zu verletzen.
Beispiel: $X = \{1\}, Y = \{a, b\}$, $f(1) = a$. Dann genügt $g(a) = 1$ und $g(b)$ kann entweder 1 oder ein anderer Wert (falls vorhanden) sein — also mehrere Möglichkeiten.

(iii) **Wahr.** Ist f bijektiv, so existiert für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit ist die (zweiseitige) Inverse $f^{-1}\colon Y \to X$ wohldefiniert.

(iv) **Wahr.** Falls eine zweiseitige Inverse existiert, ist sie eindeutig. Angenommen g und h sind zwei Inverse von f. Dann

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h,$$

also $g = h$.