Serie 08

Aufgabe 1:

Implementieren Sie das Sieb des Eratosthenes, um alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl `n` zu finden. Schreiben Sie eine Funktion `sieve_of_eratosthenes(n)`, die eine Liste aller Primzahlen kleiner oder gleich `n` zurückgibt. Erstellen Sie dazu eine Liste von Zahlen von 2 bis `n` und entfernen Sie iterativ die Vielfachen jeder verbleibenden Zahl in der Liste. Sie beginnen also mit dem Entfernen aller Vielfachen von 2, dann aller Vielfachen von 3, und so weiter. Am Ende sollten nur die Primzahlen in der Liste verbleiben. Testen Sie nur die Vielfachen der verbleibenden Zahlen, und nicht die Vielfachen von bereits entfernten Zahlen (wie etwa 4).

Aufgabe 2:

Wenn eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist das Newtonverfahren eine schnelle Methode um eine Nullstelle von f zu suchen. Schreiben Sie eine Funktion `newton(f,fprime,x0,tol)`, welche für einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ iterativ die Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

berechnet bis entweder $|f(x_n)| < \tau$ oder $|x_n - x_{n-1}| < \tau$ für eine vorgegebene Toleranz $\tau > 0$ erfüllt ist. In diesem Fall soll x_n zurückgegeben werden. Falls während der Iteration der Fall $|f'(x_n)| \leq \tau |f(x_n)|$ auftritt, so soll mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden.

Finden Sie Beispiele für Funktionen f und Startwerte x_0, bei denen das Newtonverfahren funktioniert bzw. nicht funktioniert.

Aufgabe 3:

Sie haben n faire Würfel mit jeweils m_k Seiten, wobai $m_1 = 2, m_2 = 3, \ldots, m_n = n+1$. Der k-te Würfel zeigt die Zahlen von 1 bis m_k. Schreiben Sie eine Funktion `probability(n,k)`, welche die Wahrscheinlichkeit ausgibt, dass die Summe der Augenzahlen beim Werfen aller n Würfel genau k beträgt.

Aufgabe 4:

Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ ein Vektor von n ganzen Zahlen mit der Eigenschaft, dass $|x_{i+1} - x_i| \leq 1$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Adaptieren Sie das Bisektionsverfahren aus der Vorlesung, um zu überprüfen ob ein solcher Vektor das Element 0 enthält. Finden Sie

Beispielvektoren bei denen das Bisektionsverfahren funktioniert bzw. nicht funktioniert. Wie können Sie die Methode anpassen, um zu überprüfen ob ein bestimmtes Element $y \in \mathbb{N}$ in x enthalten ist?

Aufgabe 5:

Erstellen Sie eine Klasse `polynom` . Ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, soll erstellt werden können indem man die Koeffizienten als Liste `[a_0,...,a_n]` übergibt. Die Ordnung des Polynoms soll als Attribut abgespeichert werden. Die Klasse soll verschiedene Methoden haben:

1. Eine Methode `eval(self,x)` zur Auswertung an $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion soll $f(x)$ zurückgeben.
2. Eine Methode `diff(self)` , die die Ableitung berechnet. Die Funktion soll ein Objekt der Klasse `polynom` zurückgeben
3. Eine Methode `integrate(self,x_1,x_2)` , die das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ berechnet und zurückgibt. Tipp: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$, mit $F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
4. Eine Methode `zeros(self)` , die die Nullstellen eines Polynoms zweiten Grades berechnet. Falls der Polynomgrad höher ist, soll eine `ValueError` Fehlermeldung ausgegeben werden. Erinnern Sie sich dafür an die Nullstellenformel für Polynome zweiten Grades. Falls es keine Nullstellen gibt, soll `None` zurückgegeben werden.
5. Eine statische Methode `add(f1,f2)` , die zwei Objekte der Klasse `polynom` als Übergabeparameter hat und die Summe als Objekt der Klasse `polynom` zurückgibt.

Erstellen Sie verschiedene Instanzen der Klasse und testen Sie die Methoden auf Korrektheit.

Aufgabe 6:

Luzifer-Rätsel: Die berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler landen nach ihrem Tod in der Hölle. Luzifer verspricht ihnen die Freiheit, wenn sie die beiden ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 (d.h. im Bereich {2,3,…,99}) erraten, die er sich ausgedacht hat. Er nennt Gauß das Produkt und Euler die Summe der beiden Zahlen. Außerdem gibt Luzifer den Tipp, dass die Summe der beiden Zahlen kleiner als 100 ist. Darauf entwickelt sich zwischen den Mathematikern folgender Dialog:

```
Gauß: „Ich kenne die beiden Zahlen nicht.“

Euler: „Das war mir klar.“

Gauß: „Jetzt kenne ich die beiden Zahlen.“

Euler: „Dann kenne ich sie jetzt auch.“
```

Schreiben Sie ein Programm, das die beiden Zahlen ermittelt, die Luzifer sich ausgedacht hat. Wenn Sie wollen können Sie dafür diese Schritt-für-Schritt Hilfestellung verwenden:

1. Erstellen Sie eine Liste aller möglichen Paare (x,y) mit 1 < x < y < 100. Schließen Sie alle Paare aus, deren Summe größer als 100 ist.
2. Schließen Sie alle Paare aus, bei denen das Produkt eindeutig ist (d.h. es gibt kein anderes Paar mit demselben Produkt). - Das sind alle Paare wo x und y beide Primzahlen sind, oder $xy = p^3$ für eine Primzahl p, oder eine der beiden Zahlen x, y eine Primzahl > 50 ist.
3. Schließen Sie alle verbleibenden Paare (x, y) aus, bei denen $x + y = x' + y'$ für ein anderes bereits ausgeschlossenes Paar (x', y') gilt.
4. Schließen Sie alle verbleibenden Paare (x, y) aus, bei denen $xy = x'y'$ für mehr als ein verbleibendes Paar (x', y') gilt.
5. Schließen Sie alle verbleibenden Paare (x, y) aus, bei denen $x + y = x' + y'$ für mehr als ein verbleibendes Paar (x', y') gilt.
6. Es sollte nur noch ein Paar übrig bleiben.

Warum funktionieren diese Schritte?