Aufgabe 1:e

Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Ist g Linksinverse von f, d. h. $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist f injektiv.

(ii) Ist g Rechtsinverse von f, d. h. $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, so ist f surjektiv.

Beweis

(i) $g \circ f = \mathrm{id}_X \Rightarrow f$ **injektiv.**
Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Wenden wir g auf beide Seiten an, so erhalten wir

$$g(f(x)) = g(f(x')).$$

Da $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt, ist $g(f(x)) = x$ und $g(f(x')) = x'$. Somit folgt $x = x'$. Daher ist f injektiv.

(ii) $f \circ g = \mathrm{id}_Y \Rightarrow f$ **surjektiv.**
Sei $y \in Y$ beliebig. Setze $x := g(y) \in X$. Dann gilt

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y.$$

Also existiert für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Daher ist f surjektiv.

Damit sind beide Aussagen gezeigt.