Aufgabenblatt 1 (15 Okt 2025: EiMA/Logik, Funktionen)

Aufgabe 1:a. Zeigen Sie, dass für Aussagen A, B und C

$$((A \lor B) \lor C) \;\Leftrightarrow\; (A \lor (B \lor C)) \text{ (Assoziativität)}$$

und folgern Sie (ohne Benutzung einer Wahrheitstafel), dass

$$(A \Rightarrow (B \lor C)) \;\Leftrightarrow\; (A \land \neg B) \Rightarrow C).$$

Aufgabe 1:b. Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, wenn A, B, ... Aussagen bezeichnen (die wahr oder falsch sein können):

(i) $A \lor (\neg A)$;

(ii) $(\neg B \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow A$;

(iii) Assoziativität: $A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$;

(iv) $C \lor (\neg\neg C \land A \land (B \lor C)) \Leftrightarrow \neg\neg C \land (C \lor (A \land B))$.

Aufgabe 1:c. Sind eine Implikation $A \Rightarrow B$ und ihre Prämisse A wahr, so folgt das die Konklusion B wahr ist; kann man etwas über den Wahrheitsgehalt der Prämisse A aussagen, wenn Implikation und Konklusion wahr sind? Man betrachte die folgenden zwei Beispiele:

(i) A bezeichne die Aussage $\forall x, y \in \mathbb{R} : x, y > 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel).

   (a) Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

   (b) Entscheiden Sie, ob der folgende "Beweis" der Aussage A richtig oder falsch ist; lokalisieren Sie im zweiten Fall den/die Fehler und entscheiden Sie (mit Begründung), ob man den Beweis so modifizieren kann, dass er richtig wird: "*Wir multiplizieren die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ mit 2, also folgt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Jetzt bringen wir $2\sqrt{xy}$ auf die linke Seite der Ungleichung, also folgt $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$. Nun formen wir die linke Seite um und erhalten $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schliessen daraus, dass die Aussage A wahr ist.*"

(ii) A bezeichne die Aussage $\forall x > 0 : x + 1 \leq 2x$.

   (a) Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

   (b) Entscheiden Sie, ob der folgende "Beweis" der Aussage A richtig oder falsch ist; lokalisieren Sie im zweiten Fall den/die Fehler und entscheiden Sie (mit Begründung), ob man den Beweis so modifizieren kann, dass er richtig wird: "*Wir multiplizieren die Ungleichung $x + 1 \leq 2x$ mit $x - 1$, also folgt $x^2 - 1 \leq 2x^2 - 2x$. Jetzt bringen wir alle Terme von der linken auf die rechte Seite, dadurch erhalten wir $0 \leq x^2 - 2x + 1$. Nun formen wir die rechte Seite um, und erhalten $0 \leq (x - 1)^2$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schliessen daraus, dass die Aussage A wahr ist.*"

Aufgabe 1:d. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, $A \subseteq X$, und $B := \{f(a) : a \in A\}$. Welche der folgenden Aussagen müssen dann gelten?

(i) $\forall x \in X : (x \in A \Rightarrow f(x) \in B)$.

(ii) $\forall x \in X : (f(x) \in B \Rightarrow x \in A)$.

(iii) $A \subseteq f^{-1}(B)$.

(iv) $f^{-1}(B) \subseteq A$.

Aufgabe 1:e. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Ist g Linksinverse von f, d.h., $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist f injektiv;

(ii) Ist g Rechtsinverse von f, d.h., $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, so ist f surjektiv.

Aufgabe 1:f. Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Eine Inverse einer Abbildung ist gleichzeitig Rechts- und Linksinverse.

(ii) Eine Abbildung kann mehrere Linksinverse haben.

(iii) Jede bijektive Abbildung besitzt eine Inverse.

(iv) Die Inverse einer Abbildung ist immer eindeutig.

Aufgabenblatt 2 (22 Okt 2025: Gruppen, Körper)

Aufgabe 2:a. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von S_n für $n \in \mathbb{N}^\times$. Geben Sie für $n = 1, 2, 3$ die Elemente von S_n und ihre Kompositionen an.

Aufgabe 2:b. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Jede Gruppe hat eine Umkehrabbildung.

(ii) Eine Permutationsgruppe ist nie abelsch.

(iii) S_3 ist die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks.

(iv) S_4 kann als Symmetriegruppe eines Quadrats realisiert werden.

Aufgabe 2:c. Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ bezeichne $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\!\sim$ die Menge der Restklassen $x' = \{x, x \pm m, x \pm 2m, \dots\}$ der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : y = k\,m + x;$$

weiters definieren wir Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}_m$ durch

$$x' + y' := (x + y)' \;\text{ und }\; x' \cdot y' := (x \cdot y)'.$$

Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Die so definierte Multiplikation ist wohldefiniert.

(ii) Für jedes m ist $(\mathbb{Z}_m, +)$ eine abelsche Gruppe.

(iii) Für jedes m ist $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe (wobei $\mathbb{Z}_m^\times := \mathbb{Z}_m \setminus \{0'\}$).

(iv) Für jedes m sind die so definierten "Restklassenoperationen" verträglich, d.h., sie erfüllen die Distributivgesetze

$$\forall x', y', z' \in \mathbb{Z}_m : \begin{cases} (x' + y') \cdot z' = x' \cdot z' + y' \cdot z'; \\ x' \cdot (y' + z') = x' \cdot y' + x' \cdot z'. \end{cases}$$

Aufgabe 2:d. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_p$ ($p \in \mathbb{N}$ Primzahl) sind Körper. Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen $\mathbb{Z}_2$ und von $\mathbb{Z}_5$ auf.
[Achtung: Wählen Sie verschiedene Bezeichnungen für Elemente von $\mathbb{Z}$ und von $\mathbb{Z}_p$!]

Aufgabe 2:e. Sei $K = \{0, 1\}$ versehen mit der Addition von $\mathbb{Z}_2$ und der Multiplikation

$$\cdot : K \times K \to K, \;\; (x, y) \mapsto x \cdot y := y.$$

Zeigen Sie: $(K, +)$ und $(K^\times, \cdot)$ sind abelsche Gruppen, aber nur eines der beiden Distributivgesetze gilt. Entscheiden Sie, ob $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist (vgl Arbeitsmaterial 100:5(48ff)).

Aufgabe 2:f. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Jeder Körper hat unendlich viele Elemente.

(ii) In einem Körper ist stets $(-1) \cdot x = -x$.

(iii) Gilt $1 = -1$ in einem Körper K, so ist $Char(K) = 2$.

(iv) Es gibt einen Körper K mit $Char(K) = 1$.