Aufgabe 1:d

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, $A \subseteq X$ und

$$B := \{f(a) : a \in A\} = f(A).$$

Welche der folgenden Aussagen müssen dann gelten?

(i) $\forall x \in X : (x \in A \Rightarrow f(x) \in B)$

(ii) $\forall x \in X : (f(x) \in B \Rightarrow x \in A)$

(iii) $A \subseteq f^{-1}(B)$

(iv) $f^{-1}(B) \subseteq A$

Lösung und Begründung

(i) **Wahr.** Wenn $x \in A$ gilt, so ist $f(x)$ per Definition ein Element von $f(A) = B$. Daher gilt $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$.

(ii) **Falsch.** Aus $f(x) \in B$ folgt nur, dass es ein $a \in A$ mit $f(a) = f(x)$ gibt. Das bedeutet nicht zwingend $x \in A$, außer f ist injektiv.

$$\text{Beispiel: } X = \{1, 2\},\ A = \{1\},\ f(1) = f(2) = 0.$$

Dann ist $B = \{0\}$, und $f(2) \in B$, aber $2 \notin A$.

(iii) **Wahr.** Es gilt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Für alle $a \in A$ gilt $f(a) \in B$, also $a \in f^{-1}(B)$. Damit folgt $A \subseteq f^{-1}(B)$.

(iv) **Falsch.** Im obigen Gegenbeispiel ist $f^{-1}(B) = \{1, 2\} \not\subseteq A = \{1\}$.

Bemerkung

Die Aussagen (i) und (iii) sind logisch äquivalent (punktweise bzw. mengenweise formuliert). Die Aussagen (ii) und (iv) gelten nur, falls f injektiv ist.