

Au bout de la corde...

la théorie M

Pierre Vanhove

École polytechnique, le 17 avril 1998.

Plan de l'exposé

- Des supercordes perturbatives ...
- ... aux solutions non perturbatives
- Présentation des dualités

Règles semi-classiques des calculs instantoniques

- Autodualité de la théorie de type IIB et théorie M
- Autour de la dualité hétérotique/type I $SO(32)$
- Règles semi-classiques des calculs instantoniques

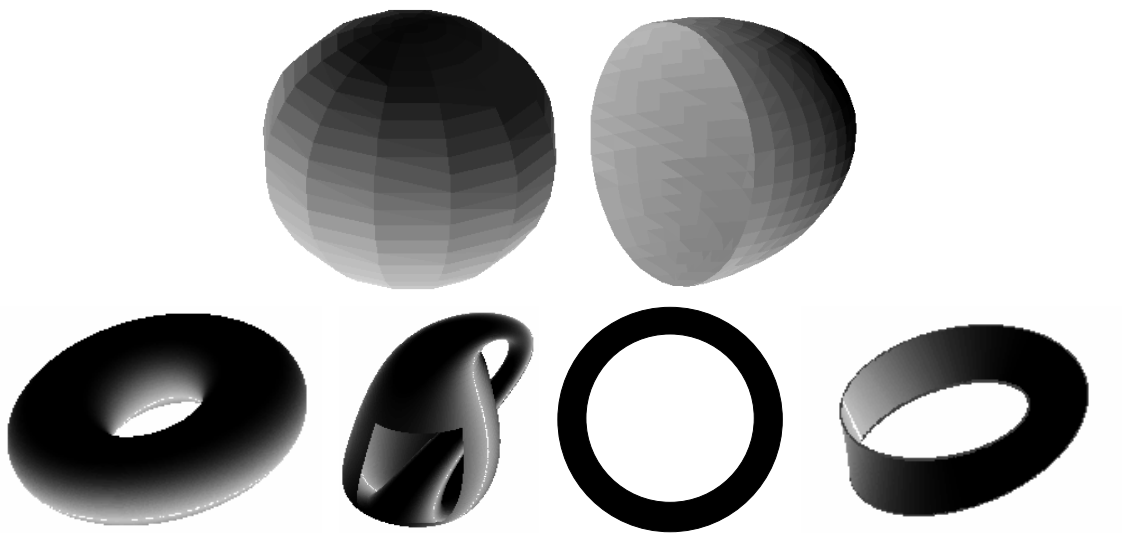
Théorie des supercordes matricielles

- Calcul non perturbatifs dans le cadre de la supercorde matricielle

Supercordes perturbatives

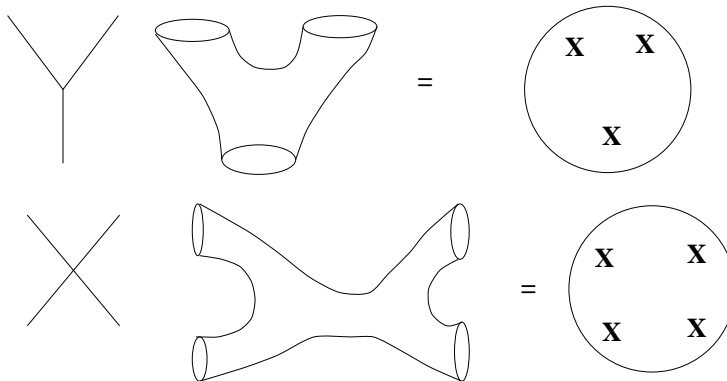
- La théorie des supercordes donne une description quantique des interactions de jauge et gravitationnelles.
- Le spectre des particules est donné par la vibration de la (super)corde et les interactions entre cordes sont décrites par *le seul processus* de fusion/séparation.
- La constante couplage est donnée par la valeur moyenne dans le vide du dilaton : $g_s = \langle \exp \phi \rangle$.
- La (super)corde est décrite par une surface 2d : $X^\mu(\sigma, \tau)$ (et leurs partenaires fermioniques).

Quelques ordres de la série perturbative des supercordes fermées et ouvertes :



Qualités :

- Unification des interactions : à chaque ordre en perturbation (des cordes fermées) ne correspond qu'un **seul diagramme**, contrairement à la théorie des champs.



- L'extension naturelle des (super)cordes $l_s = \sqrt{\alpha'} \sim 10^{-30}$ cm, régularise la théorie dans l'ultraviolet.
- La limite infrarouge $\alpha' \rightarrow 0$, déduite par découplage des états massifs des supercordes, redonne les théories effectives de supergravité.

Inconvénients :

- Pas d'accès aux phénomènes non perturbatifs associés aux instantons d'espace-temps. Formalisme essentiellement perturbatif.
- Multiplicité : supercordes fermées de type IIa et IIb, hétérotique $E_8 \times E_8$ ou $SO(32)$ et la supercorde ouverte de type I.

Une révolution : les dualités

La compréhension du **régime non perturbatif** des théories de supercordes va permettre

- d'exhiber les **correspondances** entre les différentes théories de supercordes.
- de résoudre le problème du calcul **microscopique** de l'entropie d'évaporation des trous noirs supersymétriques

Vafa, Strominger, Maldacena, Callan,...

- etc.
-
-

Conjectures de dualité

- Les connections entre les différents vides perturbatifs des théories de supercordes se transcrivent par les transformations de **dualités**.
- Une transformation de dualité met en correspondance les champs élémentaires (modulo redéfinitions locales) des différentes théories.
- De telles transformations s'écrivent naturellement sur les lagrangiens effectifs dans le repère d'Einstein afin d'avoir la même échelle de masse pour les deux théories.

L'exemple de la dualité hétérotique/type I SO(32)

Witten, Polchinski

Théorie effective de supergravité $N_{susy} = 4$ avec groupe de jauge SO(32)

- en dimension 10 :

$$\mathcal{L}_{\text{het}} = \int d^{10}x \sqrt{g} \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(\phi) R^n + f_n(\phi) F^n + \dots)$$

$$\mathcal{L}_{\text{typeI}} = \int d^{10}x \sqrt{g'} \sum_{n=1}^{\infty} (g'_n(\phi') R'^n + f'_n(\phi') F'^n + \dots)$$

Identifications : $\alpha'^h = \alpha'^I$, $g'_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}$, $\phi = -\phi'$, $C_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$, $A_\mu = A'_\mu$, $g'_n(\phi') = e^{(n-5)\phi'} g_n(-\phi')$, etc.

Masse de Planck non corrigée (supersymétrie $N_{susy} = 4$).

- en dimension 4 : supersymétrie $N_{susy} = 2$, masse de Planck corrigée à une boucle du coté type I. Si on pose $\alpha'^h = \alpha'^I$ alors la constante de couplage de jauge reçoit une correction $1/g^2 \rightarrow 1/g'^2 + \frac{\sqrt{g}}{2S'_2} \delta(\text{BPS})$.

$$\mathcal{L}_{\text{het}} \sim \frac{1}{\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{g} \left((e^{-2\phi} + 0)R + \frac{1}{g^2} F^2 \right)$$

$$\mathcal{L}_{\text{TypeI}} \sim \frac{1}{\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{g} \left((e^{-2\phi} + \delta)R + \frac{1}{g'^2} F^2 \right)$$

Harvey, Moore

Antoniadis, Bachas, Fabre, Partouche, Taylor

Transformations de dualité

- **dualité T** : inversion des dimensions de compactification. Exacte perturbativement.

$$\mathcal{M}_9 \times S^1(R) \leftrightarrow \mathcal{M}_9 \times S^1(R')$$

$R' = \exp(\varphi') = l_s^2/R = \exp(-\varphi)$, $\varphi' = -\varphi$, α' ne bouge pas (identification des masses de Planck),

$$R \exp(-2\phi) = R' \exp(-2\phi')$$

Exemple : théories de type IIa et IIb, hétérotique $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$ en dimension 9.

- **dualité S** : échange d'une théorie en régime de fort couplage avec une théorie en régime de faible couplage : changement du signe du dilaton $\phi = -\tilde{\phi}$, $\alpha' = \tilde{\alpha}'$, etc.

Exemple : hétérotique/type I $SO(32)$ en dimension 10.

- **dualité U** : échange d'une théorie régime de couplage fort (faible) avec une théorie compactifiée sur une variété de faible (grand) volume. Échange du scalaire fixant volume avec le dilaton : $e^{-2\phi_6} = \text{Vol}(K)$

Exemple : hétérotique/type I en dimension 6.

Cadre de l'étude

- Comprendre le régime non perturbatif des supercordes
- Tester les dualités

Que considérer ? Des grandeurs calculables dans le régime de couplage fort. Donc protégées par un théorème de non renormalisation.

Objet d'étude : Les contributions instantoniques, brisant la moitié des supersymétries d'espace-temps (états 1/2-BPS).

Cadre : Corrections en $\mathcal{R}^{2p}\mathcal{F}^{2n}$ avec $n + p = 2$ aux lagrangiens effectifs des théories de supercordes avec groupe de jauge $SO(32)$ et de type IIB.

La saturation des modes zéros fermioniques entraînera **un théorème de non renormalisation.**

- hétérotique et type I : termes en $\mathcal{R}^{2n}\mathcal{F}^{2p}$ $n + p = 2$ avec 8 modes zéros fermioniques. Du côté hétérotique la non renormalisation (perturbative) viendra de leur relation avec les contre-termes d'annulation d'anomalie.

Lerche, Tseytlin

- type IIB : termes en \mathcal{R}^4 avec 16 modes zéros fermioniques. Non renormalisation issue de la chiralité des modes zéros dans un formalisme d'espace-temps.

Green, Vanhove, Berkovits, Pioline

Calculs instantoniques

- Solutions instantoniques des théories de champs correspondent à une configuration globale d'énergie **finie non nulle** des champs (de jauge par exemple) : ce sont des points selles de l'action, associé à un vide quantique dans le développement semi-classiquement en \hbar .
- Dynamique donnée par le formalisme des coordonnées collectives (ou modules), ϕ , associées aux symétries brisées par la configuration instantonique.

$$\langle \Psi_1 \cdots \Psi_n \rangle = \sum_{\text{instantons}} \int [d\phi] \frac{\text{Jacobien}}{\sqrt{|S''|}} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\text{clas}}} \ll \Psi_1 \cdots \Psi_n \gg$$

- intégration sur les modes zéros bosoniques est fermioniques $[d\phi] = [dx][dS^a]$ $a = 1, \dots, N_{\text{susy}}$.
- Déterminants issus du changement de variable entre les champs microscopiques et les modules et des fluctuations quadratiques autour de la solution instantonique.
- $\ll \cdots \gg$ fonction de corrélation dans le fond instantonique.

Un calcul direct des contributions instantonique est difficile. Je vais donc

- déduire des règles semi-classiques des contributions instantoniques en utilisant les transformations de dualité. Test de cohérence des transformations dualités.
- Retrouver ces contributions dans le formalisme non perturbatif de la supercorde matricielle.

Remarque : Vision uniquement en terme de théorie de surface d'univers. Un formalisme d'espace-temps, développé par Berkovits, ne sera pas abordé.

Quels instantons pour les supercordes?

N'ayant qu'une version de première quantification de la théorie des (super)cordes on cherche les solutions solitoniques/instantoniques en **passant par l'action effective de supergravité**.

Champs mis en jeu pour les théories de type II :

supersymétrie $N_{10} = 2$

- **secteur Neveu-Schwarz** : métrique $g_{\mu\nu}$, tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$, dilaton ϕ et leurs partenaires fermioniques.
- **secteur Ramond** : formes de rang pair cas IIA et impair cas IIB : $C^{(p)}$

Champs mis en jeu pour la théorie de type I :

supersymétrie $N_{10} = 1$

- **secteur Neveu-Schwarz** : métrique $g_{\mu\nu}$, dilaton ϕ et leurs partenaires fermioniques.
- **secteur Ramond** : $C^{(1)}$ et $C^{(5)}$
- **secteur de jauge** : bosons de jauge A_μ^a dans l'adjointe de $SO(32)$ et partenaires fermioniques.

Champs mis en jeu pour les théories hétérotiques :

supersymétrie $N_{10} = 1$

- **secteur Neveu-Schwarz** : métrique $g_{\mu\nu}$, tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$, dilaton ϕ et leurs partenaires fermioniques.
- **secteur de jauge** : bosons de jauge A_μ^a dans l'adjointe de $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$ et partenaires fermioniques.

Structure des p -branes

Solutions chargées sous le champ B de Neveu-Schwarz

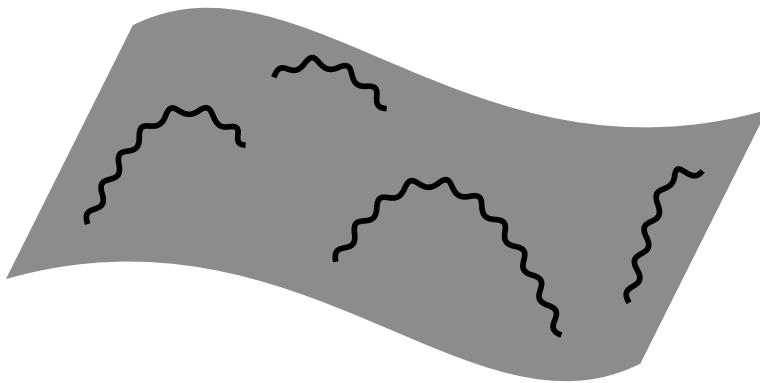
- NS1-brane \equiv supercordes : théorie conforme 2d avec une supersymétrie $n = 1$ ou $n = 2$
- NS5-brane : théorie superconforme effective en 6d avec $n = (1, 0)$ supersymétrie (hétérotique) ou $n = (2, 0)$ supersymétries (type IIA) ou $n = (1, 1)$ supersymétries (type IIB).

Callan, Harvey, Strominger

Solutions chargées sous les champs Ramond $C^{(p)}$

- Dp -branes : structure de surface d'univers supersymétrique donnée par des champs de Higgs X^\perp , Ψ^α et des degrés de liberté d'un champs de jauge $A_{//}^a$. Théorie de basse énergie donnée par un modèle de super Yang-Mills réduit de la dimension 10 à la dimension $p + 1$.

Polchinski, Witten



Autodualité de la théorie de type IIB

Conjecture : théorie 10d invariante sous le groupe $Sl(2, \mathbb{Z})$ agissant sur le paramètre $\rho = C^{(0)} + ie^{-\phi}$.

Schwarz

La théorie effective de supergravité est invariante sous $Sl(2, \mathbb{R})$, et celle perturbative des supercordes sous le groupe \mathbb{I} .

Schwarz, Hull, Townsend, Aspinwall

Action effective en \mathcal{R}^4 en type IIB dimension 10

$$\mathcal{L} \sim \frac{\alpha'^3}{\kappa_{(10)}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \rho_2^{1/2} t_8 t_8 R^4 f(\rho, \bar{\rho})$$

$f(\rho, \bar{\rho})$ fonction invariante modulaire.

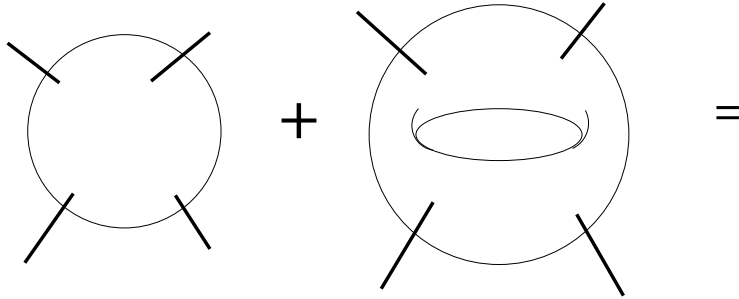
Green, Gutperle

$$\begin{aligned} f &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{\rho_2}{|m + n\rho|^2} \right)^{3/2} \\ &= 2\zeta(3)\rho_2^{3/2} + \frac{2\pi^2}{3}\rho_2^{-1/2} + 0 \\ &\quad + 4\pi\rho_2^{1/2} \sum_m \sum_n \left| \frac{m}{n} \right| K_1(2\pi\rho_2|mn|) e^{2\pi imnC^{(0)}} \end{aligned}$$

Cette fonction n'admet pas de corrections perturbatives et la partie non perturbative est identifiée avec les contributions des D-instantons.

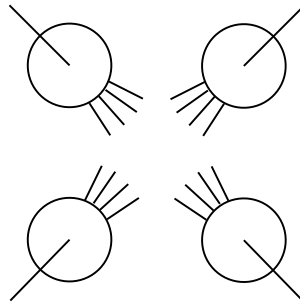
Green, Gutperle, Vanhove, Kiritsis, Pioline, Berkovits

Partie perturbative extraite de la fonction de corrélation à quatre points à l'ordre des arbres et d'une boucle :



$$\langle V_g V_g V_g V_g \rangle \sim \frac{\alpha'^3}{\kappa_{(10)}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} t_8 t_8 R^4 \left(2\zeta(3) \rho_2^2 + \frac{2\pi^2}{3} \right)$$

Partie non perturbative donnée par le couplage aux D-instantons :



$$\langle V_g V_g V_g V_g \rangle \sim \frac{\alpha'^3}{\kappa_{(10)}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} t_8 t_8 R^4 \sqrt{\rho_2} \times$$

$$\left(\left[\sum_{N>0} \sqrt{N} \sum_{nm=N} \frac{1}{m^2} \right] (e^{2i\pi N\rho} + c.c.) \{1 + \text{boucles}\} \right)$$

Au bout de la corde... la théorie M

Les précédentes contributions 1/2-BPS sont en fait des degrés de liberté de la métrique en dimension 11 (après une transformation de dualité T)

$$ds_{11}^2 = R_{11}^2(dx^{11} + C_i dx^i)^2 + \frac{1}{R_{11}} dx^i g_{ij} dx^j,$$

avec $R_{11} = e^{2\phi/3}$, et $B_{\mu\nu}$ correspond à $C_{11,\mu\nu}$.

Witten

Un calcul à une boucle de la supergravité 11d sur un 2-tore identifié avec le calcul précédant donne une régularisation du calcul de théorie de champs.

Green, Gutperle, Vanhove

Le calcul à une boucle prend la forme

$$A_4 = \frac{1}{\kappa_{11}^{2/3}} t_8 t_8 R^4 (I(S, T) + I(S, U) + I(U, T))$$

$S = -(k_1 + k_2)^2$, $T = -(k_1 + k_4)^2$, $U = -(k_1 + k_3)^2$ et $S + T + U = 0$. avec

$$I(S, T) = \frac{1}{\pi^{5/2} \mathcal{V}_2} \int \prod_{r=1}^4 d\tau_r \int d^9 q \sum_{l_1, l_2} e^{-G^{IJ} l_I l_J \tau - \sum_r p_r^2 \tau_r}.$$

On isole la partie indépendante des impulsions $I(S, T) = I_0 + I'(S, T)$

$$I_0 = \pi^{3/2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{5/2}} \sum_{\hat{l}_1, \hat{l}_2} e^{-\frac{\pi}{\tau} G_{IJ} \hat{l}_I \hat{l}_J}$$

La partie avec $l_1 = l_2 = 0$ est divergente en Λ^3 (cut-off ultraviolet) donc dimensionnellement

$$I_0 = C \kappa_{11}^{-2/9} + V_2^{-3/2} \zeta(3) f(\rho, \bar{\rho})$$

À comparer avec le résultat du calcul à une boucle de la théorie des supercordes de compactifiée sur un cercle :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\sim \frac{\alpha'^3}{\kappa_{10}^2} \int d^9 x \sqrt{-g^A} t_8 t_8 R^4 r_A \left[2\zeta(3) (\rho_2^A)^2 + \frac{2\pi^2}{3} \left(1 + \frac{1}{r_A^2}\right) + \dots \right] \\ &\sim \frac{\alpha'^3}{\kappa_{10}^2} \int d^9 x \sqrt{-g^B} t_8 t_8 R^4 r_B \left[2\zeta(3) (\rho_2^B)^2 + \frac{2\pi^2}{3} \left(1 + \frac{1}{r_B^2}\right) + \dots \right] \\ &\sim \frac{\alpha'^3}{\kappa_{10}^2} \int d^9 x \sqrt{-G} t_8 t_8 R^4 R_{10} R_{11} \left[2\zeta(3) \frac{1}{R_{11}^3} + C + \frac{2\pi^2}{3 R_{10}^2 R_{11}} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$C = \frac{2\pi^2}{3}$$

Extension du calcul au delà d'une boucle ? Pas sûr, car il faut prendre des contributions en les impulsions dans I et le lien avec la théorie des supercordes n'est alors plus univoque.

Green, Russo, Tseytlin

Dualité hétérotique/type I $SO(32)$

- Contributions contenant 8 modes zéros fermioniques à l'action effective de supercordes hétérotiques et de type I $SO(32)$. En dimension $d > 4$.
- Du côté hétérotique contribue seulement l'amplitude à une boucle. Pas de corrections instantoniques d'espace-temps.

$$\mathcal{L}_{1\text{-loop}}^{\text{heter}} = -\frac{V^{(d)}}{2^{10}\pi^6} \int_{\mathbb{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} (2\pi^2\tau_2)^{5-d/2} \Gamma_{10-d,10-d} \mathcal{A}(F, R, \tau)$$

- $V^{(d)}$ est le volume transverse au tore de compactification
- $\Gamma_{10-d,10-d}$ somme sur les enroulements et impulsions compactes

$$\Gamma_{10-d,10-d} = \left(\frac{2}{\tau_2}\right)^{5-d/2} \sqrt{\det G} \sum_{n^i, m^i} e^{-\frac{2\pi}{\tau_2}(G+B)_{ij}(m^i\tau - n^i)(m^j\bar{\tau} - n^j)}$$

G_{ij} et B_{ij} caractérisent la géométrie du tore.

- \mathcal{A} fonction modulaire (presque)holomorphe de poids nul, reliée au genre elliptique

Witten, Windey, Schellekens, Lerche,...

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \langle V_{g,F} V_{g,F} V_{g,F} V_{g,F} \rangle_{Spin \text{ impaire}} \\ &= \int_{Tore} \mathcal{D}X^i \mathcal{D}S^a \mathcal{D}\lambda \ e^{-S} (j_{R,F})^4\end{aligned}$$

Cette expression se réécrit

$$\mathcal{L}_{1\text{-loop}}^{\text{heter}} = \mathcal{L}_{\text{pert}} + \mathcal{L}_{\text{non-pert}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{pert}} = -\frac{V^{(8)}T_2}{2^9\pi^4} \times \int_{\mathbb{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \mathcal{A} + \int_{|\tau_1| < 1/2\tau_2 > 0} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \sum_{(j_1, j_2) \neq (0,0)} e^{-\frac{\pi T_2}{\tau_2 U_2} |j_1 + j_2 U|^2} \mathcal{A}$$

$$\mathcal{L}_{\text{non-pert}} = -\frac{V^{(8)}T_2}{2^9\pi^4} \times 2 \int_{\mathbb{C}^+} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \sum_{0 \leq j < kp \neq 0} e^{2\pi i T p k} e^{-\frac{\pi T_2}{\tau_2 U_2} |k\tau - j - pU|^2} \mathcal{A}$$

L'application des transformations de dualité S on constate que

Bachas, Fabre, Kiritsis, Obers, Vanhove

- $\mathcal{L}_{\text{pert}}$ correspond à la partie perturbative (jusqu'à 3 boucles) coté type I.

$$\mathcal{L}_{\text{pert}} \sim -V^{(10)} \left\{ \frac{\pi}{3} \rho_2 \, t_8 \text{tr} F^4 + \frac{N_1}{L^2} \, t_8 \text{tr} F^4 \right\}$$

- $\mathcal{L}_{\text{non-pert}}$ est interprété comme la contribution de la D1-brane euclidienne enroulée sur le tore

$$\mathcal{L}_{\text{non-pert}} \sim -V^{(8)} \sum_{N=1}^{\infty} e^{2i\pi NT} \left[\frac{1}{N} \sum_{nm=N} \frac{1}{m} \right] t_8 \text{tr} F^4$$

En théorie de type IIB les mêmes genre de calcul avec cette fois $\mathcal{A} \equiv 1$ donne la contribution non perturbative en dimension 8 de la D1-brane euclidienne vaut aussi

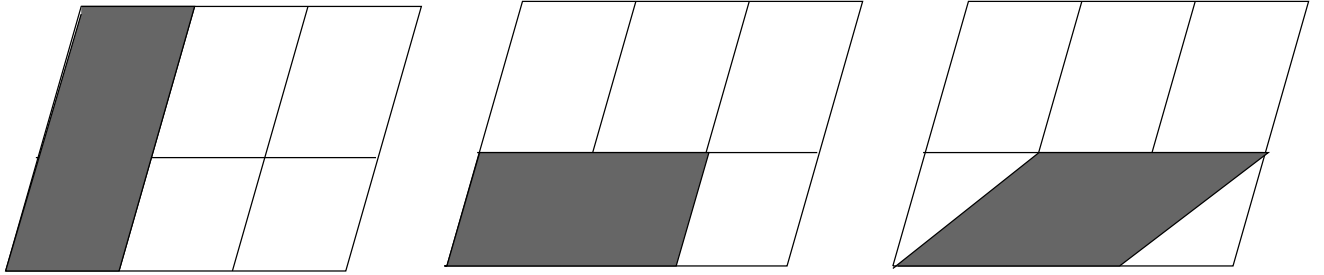
$$\mathcal{L}_{\text{non-pert}} \sim -V^{(8)} \sum_{N=1}^{\infty} e^{2i\pi NT} \left[\sum_{nm=N} \frac{1}{m} \right] t_8 t_8 R^4$$

Règles de sommation

$$\mathcal{L}_{\text{non-pert}} = -\frac{V^{(8)}}{2^8 \pi^4} \sum_{N=1}^{\infty} e^{2i\pi NT} \mathcal{H}_N \mathcal{A}(U) + \text{c.c.},$$

avec

$$\mathcal{H}_N \mathcal{A}(U) \equiv \frac{1}{N} \sum_{kp=N} \sum_{0 \leq j < k} \mathcal{A}\left(\frac{j + pU}{k}\right).$$

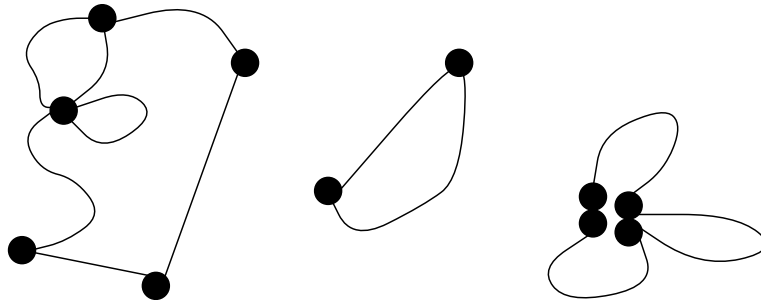


Règles semi-classiques de dénombrement des contributions d'instantons multiples

On doit sommer les contributions de N D-branes euclidiennes comme une seule D-brane de taille N , modulo les reparamétrisations de la surface d'univers. Les contributions d'instantons d'orientations différentes ne contribuent pas.

Dénombrement des modes zéros fermioniques

Configurations de D0-branes avec un nombre fixé de mode zéros fermioniques ?



Supercorde matricielle non perturbative

$$\begin{array}{ccccc}
 \#D0 - \text{brane} = N & \leftarrow & (T) & \rightarrow & \#D1 - \text{string} = N \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 (11 - 9 \text{ flip}) & & & & (S) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \text{Impulsion } P_+ = N & \leftarrow & (T) & \rightarrow & \# \text{Enroulement} = N
 \end{array}$$

Je me place dans le cadre de la supercorde hétérotique matricielle, déduite par une compactification du modèle de matrice (U(N)) en 11d sur $S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$.

La branche de Higgs est donnée par un modèle superconforme (0,8) sur

$$(\mathbb{R}^8)^N / S_N$$

Les champs de Higgs sont dans l'adjointe de $SO(2N)$.

Ferreti, Danielsson, Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde

Lowe, Rey, Banks, Motl

$$\begin{aligned}
 S_E^{\text{matrix}} = & \int d^2\sigma \text{Tr} \left[\partial \mathbf{X}^i \left(\bar{\partial} \delta_{ij} + \frac{i}{2} \mathcal{R}_{ij} \right) \mathbf{X}^j + \mathbf{S}_a \partial \mathbf{S}_a + \right. \\
 & \left. + {}^T \lambda_A^{(P)} \left(\bar{\partial} \delta^{AB} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}^{AB} \right) \lambda_B^{(P)} + {}^T \lambda_A^{(A)} \left(\bar{\partial} \delta^{AB} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}^{AB} \right) \lambda_B^{(A)} \right]. \\
 (\mathcal{R}_{ij})_{MN} = & -\frac{1}{8} \mathcal{R}_{ijkl} (\mathbf{S}_0^a)_{MP} \gamma_{ab}^{kl} (\mathbf{S}_0^b)_{PN}
 \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}^{AB})_{MN} = -\frac{1}{8}\mathcal{F}_{kl}^{AB}(\mathbf{S}_0^a)_{MP}\gamma_{ab}^{kl}(\mathbf{S}_0^b)_{PN}$$

\mathcal{R}_{MN} et \mathcal{F}_{MN} sont des matrices de $\text{SO}(2N)$

Les contributions non perturbatives en $\mathcal{R}^{2n}\mathcal{F}^{2p}$ sont données par

$$\mathcal{L}_{\text{non-pert}} = \sum_{\text{Secteurs-orbifold}} \int_{\text{Tordus}} \mathcal{D}X \mathcal{D}S^a \mathcal{D}\lambda \ e^{-S_E^{\text{matrix}}}$$

Les secteurs de l'orbifold sont classés par une représentation de S_N en l'action adjointe sur les champs de Higgs

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^a &= V[g]^{-1} \mathbf{S}^a V[g] & \mathbf{X}^i &= V[g]^{-1} \mathbf{X}^i V[g] \\ \lambda &= V[g]^{-1} \lambda V[g] \end{aligned}$$

Une permutation générique $[g] = [1^{n_1}, \dots, N^{n_N}]$ avec $\sum_i i n_i = N$ contient $8 \times \sum_i n_i$ modes zéros fermioniques.

Ne contribuent que les configurations invariantes sous l'action d'une permutation totale $[g]=[N]$

Bachas, Vanhove

Les règles d'orbifold (abélien \mathbb{Z}_N) donnent donc

$$\mathcal{L}_{\text{non-pert}} = \frac{1}{N!} \sum_{g, hgh=hg} h \square_g$$

Les mêmes argument peuvent être appliqués au calcul du terme en \mathcal{R}^4 de la théorie de type IIB. Cette fois la branche de Higgs toujours donnée par un espace orbifold $((8,8)$ supersymétrique)

$$(\mathbb{R}^8)^N / S_N$$

Mais le champs de jauge subsiste. Les configurations de jauge non triviales sont données par des conditions de flux de 't Hooft :

- un flux non nul correspond aux états liés des cordes de type (p, q)
- les contributions des D-instantons aux contributions sans flux de 't Hooft.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{non-pert}} &= \sum_{\Phi: flux} \frac{1}{N!} \sum_{g, hgh=hg} h \square_g \\
&= \mathcal{R}^4 \sum_N \left(\sum_{(p,q) \text{ cordes}} e^{-NS_{(p,q)}} \times \left[\sum_{nm=N} \frac{1}{m} \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{-2i\pi N\rho} \left[\sqrt{N} \sum_{nm=N} \frac{1}{m^2} \right] (1 + \text{boucles}) + c.c. \right)
\end{aligned}$$

Perspectives

Directions futures de recherches :

- structure de la supercorde de type IIB
- calculs en boucles en supergravité 11d
- application du calcul instantonique : Seiberg-Witten, ...
- la supercorde matricielle à la DVV : rôle précis du champ jauge, connection avec la corde de Schild, structure de la CFT pour des compactifications en dimension plus grandes (d'autres paramètres?).