



Thèse présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'École polytechnique

Spécialité :

Physique Théorique

par

Pierre VANHOVE

Au bout de la corde... la théorie M

soutenue le 17 avril 1998 devant le jury composé de :

| | |
|------------------|--------------------|
| C. Bachas | Directeur de thèse |
| É. Brézin | Président |
| J.P. Derendinger | Rapporteur |
| E. Kiritsis | |
| K. Narain | |
| V. Rivasseau | |
| E. Verlinde | |
| P. Windey | Rapporteur |

Table des matières

| | |
|--|----|
| I INTRODUCTION GÉNÉRALE | 1 |
| 1. Origine de la théorie des cordes | 1 |
| 2. Les groupes de symétries de dualités | 4 |
| 3. Avènement des solutions non perturbatives | 7 |
| 4. Structure nouvelle de la physique fondamentale | 8 |
| 5. Qualités et inconvénients des modèles de supercordes | 9 |
| II QUANTIFICATION D'OBJETS ÉTENDUS | 13 |
| 6. Algèbres supersymétriques en dimension dix et onze | 13 |
| 7. Objets étendus classiques | 16 |
| 8. Formalisme supersymétrique | 20 |
| 9. Conditions de saturation BPS | 23 |
| 10. Représentations de l'algèbre de super-Poincaré | 24 |
| 11. Modes zéros et quantification | 27 |
| • Retour sur les solutions de p -brane | 29 |
| III THÉORIE DES SUPERCORDES | 31 |
| 12. La supercorde comme objet fondamental | 31 |
| 13. Jauge du cône de lumière | 32 |
| • Action de la supercorde | 32 |
| • Spectre de masse nulle | 33 |
| 14. Formalisme covariant | 34 |
| • Couplages aux champs Ramond | 36 |
| 15. Structure des Dp -branes | 37 |
| • Coordonnées et conditions aux limites | 37 |
| • D-branes de la théorie de type I | 39 |
| • D-branes des théories de type II | 42 |
| IV STATIQUE ET DYNAMIQUE DES D-BRANES | 45 |
| 16. Géométrie des configurations de D-branes | 45 |
| 17. Interactions entre D-branes | 50 |
| • Forces statiques : calcul en théorie des champs | 51 |
| • Forces statiques : calcul en théorie des supercordes | 53 |
| • Diffusion de D-branes | 55 |
| 18. D0-brane et invariance de Lorentz | 57 |
| • Système de Yang-Mills-Higgs | 58 |
| • Diffusion de D0-branes | 59 |
| 19. Système 08 | 62 |
| V QUELQUES TESTS DES CONJECTURES DE DUALITÉ | 65 |
| 20. Lagrangien effectif et contributions non perturbatives | 65 |
| • Champs de fond et modes zéros | 67 |
| 21. Dualité hétérotique/type I | 69 |
| 22. Autodualité de la théorie de type IIB | 71 |
| 23. Théories des champs ou de supercordes ? | 72 |
| 24. Théorie de super Yang-Mills et quantification des D-branes | 74 |
| 25. Théorie de super Yang-Mills et espace des modules | 75 |

| | |
|--|-----------|
| 26. Modèle sigma matriciel | 77 |
| • Flux de 't Hooft | 79 |
| • Structure de l'orbifold | 81 |
| 27. Application à la supercorde hétérotique matricielle | 82 |
| 28. Application à la supercorde de type IIB matricielle | 85 |
| • Contributions des cordes de type (p, q) | 85 |
| • Contributions des D-instantons | 86 |
| VI PERSPECTIVES | 91 |
| RÉFÉRENCES | 92 |

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Constantin Bachas de m'avoir accepté en thèse. Tout au long des trois années de mes recherches doctorales il a su tempérer mes ardeurs et diminuer mes angoisses. La clareté de son esprit et la profondeur de sa compréhension des idées sans cesse renouvelées de la physique théorique, furent des gardes fous incomparables. Qu'il en soit grandement remercié.

Je remercie aussi mes collaborateurs directs qui m'ont considéré comme un collègue à part entière. En particulier Micheal Green dont l'ouverture et la rapidité d'esprit ainsi que l'énergie au travail sont de remarquables motivations. Je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir accueilli si souvent à Cambridge et d'avoir su transformer un discours souvent confus en résultat scientifique.

Mes remerciements vont aussi à mes autres collaborateurs directs Cyrille Fabre, Micheal Gutperle, Elias Kiritsis et Niels Obers dont j'ai apprécié le sérieux et leur grande intelligence des problèmes actuels de la théorie des supercordes. J'espère grandement poursuivre avec eux des collaborations aussi fructueuses.

Je n'oublie pas non plus les nombreuses personnes, comme Paul Windey, Marios Petropoulos, Bernard Julia, Boris Pioline, Frank Ferrari, Ivan Kostov, Ignatos Antoniadis, Nicole Berline, Benjamin Enriquez, etc., qui m'ont permis par de nombreuses discussions de clarifier mes confusions. J'espère pouvoir encore partager leur vie scientifique.

Je suis extrêmement reconnaissant à Édouard Brézin d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. En fait mes remerciements à son égard sont doubles. Tout d'abord, je salue ses grandes qualités pédagogiques qui me permirent lors de mes années d'études à l'École normale supérieure d'acquérir de solides connaissances de bases, ainsi que la disponibilité dont il a su faire part pendant ces années d'études ; je le remercie aussi pour ces actions pour faciliter l'accès des jeunes à la recherche. Je remercie Jean-Pierre Derendinger et Paul Windey d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse à l'écriture parfois elliptique presque oulipienne. Leur travail de lecture fut d'une remarquable précision. Je tiens à remercier Paul Windey pour tous les efforts qu'il fournit afin de faciliter l'intégration des jeunes dans la communauté scientifique parisienne en organisant de nombreux groupes de travail. Enfin, je suis très reconnaissant à Elias Kiritsis, Kumar Narain, Vincent Rivasseau et Erik Verlinde d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Marie-Noëlle Bussac de m'avoir accueillie dans son laboratoire où j'ai pu trouver toutes les conditions matérielles et humaines pour accomplir pleinement ma formation de chercheur. J'ai grandement apprécié l'esprit très cultivé de Claude de Callan, qui manie toujours avec élégance les disciplines classiques du *trivium* et du *quadrivium*. J'ai beaucoup apprécié l'esprit toujours curieux de Jean Lascoux, qui faisant appel à sa culture mathématiques à su m'indiquer des références bibliographiques déterminantes. Il ne faut pas oublier Amitabha Chakrabarti dont j'ai toujours apprécié l'intérêt pour mes travaux.

Je remercie aussi tous ceux qui par la qualité de leur enseignement ont su m'armer pour travailler dans la physique théorique. Je pense en particulier à Jean-Bernard Zuber, Édouard Brézin, Alain Lavergne et Vladimir Dotsenko ; sans oublier mes professeurs de classe préparatoire, MM. Karlamoff, Choques, Briche, Devaux et Gorson, qui ont su éveiller ma curiosité scientifique.

Je remercie aussi la fine équipe informatique du laboratoire Jean-luc Bellon et Florence Hamet dont la compétence dans ces choses aléatoires que sont les ordinateurs est remarquable. La grande compétence de Françoise Andalo et Brigitte Oisline pour établir une mission alors que les délais ne le permettent normalement pas est pour moi toujours un objet d'étonnement. Sans oublier Nicole Ribet du LPTENS qui a toujours su me dépanner lors des mes passage à l'École normale supérieure.

Que mes compagnons de bureau Jérôme, Cyrille, Gilles, Éric, Malek et nouvellement Margherita reçoivent l'expression de ma gratitude. Ils auront subi avec un stoïcisme remarquable mon goût invétéré pour les calembours (coulaunts) et l'humour non sens. Tout en mettant une ambiance agréable dans le bureau.

Qu'Anne, Lucien, Jérôme & Dominique, Olivier, Marc(ounet) & Blandine, Papy & Céline et Guillaume soient remerciés des grands moments (de bravoure culinaires) partagés depuis notre passage à l'École normale. Que ma famille aussi reçoive l'expression de ma profonde gratitude. Leur présence a souvent été décisive dans mon développement intellectuel tout en me permettant de conserver un contact avec la réalité.

Il me faut aussi remercier la compagnie UPSA dont le produit tamponné effervescent vitaminée C me fut très (trop) souvent un recours, ainsi que les chocolats CÔTE D'OR.

Моя дорогая Алла, тебе моя самая нежная признательность. Именно тебе, милая моя Алла, я посвящаю эту диссертацию, ведь это ты сумела наполнить мои сухие абстрактные размышления радостью жизни.

- « — [...] Mais il m'est impossible d'admettre que la résolution de ces exercices formels ait un autre intérêt que celui d'un dressage de l'esprit à l'usage des écoliers. Je trouverais puéril et stupide qu'un homme se tienne sa vie entière sur des calculs et couvre éternellement du papier avec des rangées de chiffres.
- Tu te trompes, Goldmund ; tu supposes qu'un calculateur comme celui-là ne cesserait de résoudre de nouveaux exercices scolaires qu'un maître lui poserait. Mais il peut aussi se poser les questions lui-même ; elles peuvent se poser en lui avec une force irrésistible. Il faut avoir calculé et mesuré bien des espaces réels et fictifs avant de s'attaquer, comme penseur, au problème de l'espace. »

HERMANN HESSE *Narcisse & Goldmund*.

En quelle année sommes-nous ? Plus précisément, malgré tous les progrès récents accomplis dans la compréhension des phénomènes physiques fondamentaux, sommes-nous dans la situation des chercheurs du début du siècle qui disposaient de données expérimentales, comme les spectres de transitions et le rayonnement du corps noir, leur indiquant l'existence de la mécanique quantique sous-jacente mais pas encore dévoilée ; ou bien possédons-nous déjà une formulation de la théorie fondamentale dont il reste à comprendre le formalisme ? Un nom a été proposé celui de *théorie M*. Ce serait une formulation en termes de modèles matriciels en dimension onze. Encore une fois, les matrices viennent formaliser les effets quantiques associés à la perte de commutativité des variables. Les termes hors diagonaux contenant l'information relative à l'échelle caractéristique des phénomènes quantiques. Depuis l'émergence des symétries de dualité, dans les années 1994–1995, jusqu'aux conjectures actuelles sur la structure de la théorie M, des progrès spectaculaires ont été accomplis récemment dans la compréhension de la physique quantique à fort couplage gravitationnel et l'unité d'une description des interactions fondamentales.

Dans ce mémoire j'expose les résultats de mes recherches sur la compréhension de la structure de la physique des interactions fondamentales dans l'optique du définition de la théorie M. Une réponse définitive aux questions posées ne sera malheureusement pas donnée mais je présenterai certain résultats qui nous éclairent sur ce que l'on peut espérer trouver. Ce mémoire est consacré au point de vue personnel sur la structure des interactions que j'ai pu développer durant la période des mes recherches doctorales ; j'ai volontairement restreint les généralités au premier chapitre pour ensuite passer à un exposé, que j'espère original, de la structure des théories de supercordes perturbatives et non perturbatives. Ce mémoire est consacré à l'analyse des comportements non perturbatifs de la théorie des supercordes au moyen de grandeurs supersymétriquement protégées, des indices topologiques, et reliées à des quantités calculables perturbativement. Ce texte contient des remarques et calculs originaux non publiés dans les revues scientifiques, les articles publiés sont placés en annexe.

Je présenterai, tout d'abord, dans une introduction générale et historique le chemin qui a mené à la découverte de la théorie perturbative des supercordes, aux conjectures de dualité ainsi qu'à la mystérieuse théorie M. Les solutions non perturbatives des théories de supergravité et le rôle particulier des solutions des supercordes seront présentés dans le chapitre II. Dans ce chapitre, je présenterai également les caractéristiques remarquables, utilisées dans ce mémoire, des algèbres de super-Poincaré à supersymétries étendues utilisées dans la suite du mémoire. La supercorde comme objet fondamental perturbatif sera présentée dans le chapitre III ainsi que les solutions non perturbatives de membranes de Dirichlet. Les propriétés statiques et dynamiques des ces solitons seront discutées en détail dans le chapitre IV. Dans le chapitre V, seront présentés des tests des conjectures de dualité

par des calculs de contributions instantoniques aux actions effectives des différentes théories des supercordes. Seront ainsi testées les transformations de dualité du couple hétérotique et type I avec un groupe de jauge $SO(32)$ et l'autodualité de la théorie de type IIB. Ce chapitre se terminera par des calculs explicites des contributions non perturbatives pour les théories de type I et de type IIB, obtenues dans le cadre d'un modèle de super Yang-Mills supersymétrique. On y verra le rôle important d'une toute nouvelle formulation matricielle de la théorie des supercordes. Ce mémoire se terminera, par le chapitre VI où sont exposées les directions de mes recherches futures. Le lecteur trouvera en annexe les comptes rendus de conférences et articles écrits durant la période de mes recherches doctorales.

Chapitre I

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Origine de la théorie des cordes

La première moitié du XX^{ème} siècle a vu l'émergence de la mécanique quantique et de la physique statistique, permettant d'aborder l'étude de la physique microscopique. On comprenait alors facilement les spectres des transitions atomiques ainsi que le rayonnement du corps noir en termes de quanta élémentaires. Parallèlement, fut découverte la théorie classique de la gravitation, laquelle apparut rapidement difficilement conciliable avec la mécanique quantique. Fort des succès remportés en physique atomique, les physiciens découvrirent la théorie des champs et construisirent dans les années 1965–1968 le Modèle Standard de la physique des particules. L'excellent accord expérimental [1] de ce Modèle Standard des interactions électrofaibles, proposé par Glashow, Salam et Weinberg, est l'un des plus grands succès de la théorie quantique locale des champs. Comme cette théorie présente un grand nombre de paramètres, tels que les masses des constituants élémentaires, le nombre de familles, le champ de Higgs etc. elle ne devrait pas constituer la théorie ultime. De plus, l'interaction gravitationnelle n'est pas incluse dans cette description. La théorie de la relativité générale [2] est une théorie des champs non quantique des interactions gravitationnelles. La version minimale de cette théorie est bien testée pour des échelles cosmiques de l'ordre de la taille du système solaire. Mais des problèmes tels que la détermination de la géométrie globale de l'univers sont encore très discutés [3]. Une des questions fondamentales encore non résolue est celle de la constante cosmologique Λ . Les symétries de la théorie de la relativité générale autorisent d'ajouter un scalaire Λ à l'action d'Einstein

$$S_{\text{Einstein}} = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \Lambda),$$

dont la présence permet l'existence de solutions stationnaires des équations d'évolution de l'univers. Pourtant les déterminations observationnelles de l'âge et de l'évolution de l'univers semblent indiquer que cette constante est nulle, ou en tout cas de beaucoup inférieure à toutes les grandeurs physiques observées. Dans le cadre d'une version quantique de la théorie de la relativité générale, la constante cosmologique est donnée par l'énergie du vide. Ce problème se ramène alors à comprendre la formulation de la relativité générale par une théorie quantique locale cohérente (entendez renormalisable) [4].

Les efforts pour unifier les quatre forces fondamentales dans un même formalisme quantique, cohérent et prédictif, ont amené à la découverte des théories de supergravité et des modèles duaux, pour finalement engendrer la théorie des supercordes et la théorie

M d'avant-garde. Les théories de supergravité [5], théories de champs de jauge supersymétriques avec une invariance locale sous les difféomorphismes d'espace-temps, sont des théories mélangeant des degrés de liberté de symétrie de jauge non abélienne et la gravitation, contenant dans leur spectre des particules de spin 1 et 2. Bien qu'elles semblent très prometteuses à l'unification recherchée, elles restent, comme toutes théories des champs, marquées par de terribles divergences ultraviolettes et doivent satisfaire les critères de renormalisabilité afin d'avoir une validité quantique. De plus, il faut encore comprendre comment briser les supersymétries de celles-ci afin d'établir un contact avec la physique de nos accélérateurs de particules. Je discuterai plus en détail comment ces théories de supergravité s'insèrent dans le cadre unificateur de la théorie M. Contemporain de ces dernières mais inspiré d'une description des interactions hadroniques par une représentation des mésons comme une petite corde portant à chacun de ses bouts une charge de couleur, un modèle dit *dual* [6] a été inventé. Ce modèle contient une théorie de jauge effective de Yang-Mills des interactions hadroniques et une particule de spin 2. Nous sommes passés d'une description des particules élémentaires par des points à une description par des modes de vibration d'un objet avec l'extension d'une corde. Lors de son évolution, cette petite corde décrit une surface de dimension deux. Les symétries de cette surface, données par son groupe de difféomorphismes, sont à l'origine de la structure du spectre des particules. Cette théorie unifie les interactions gravitationnelles, les interactions de jauge et les couplages de Yukawa, en une vision géométrique de séparation ou de fusion de cordes [7]. L'énergie caractéristique de la théorie est fixée maintenant par la tension de la corde, égalée à la masse de Planck¹

$$T_{\text{string}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} = m_{\text{Planck}}^2 g_s^{1/2}$$

$$m_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\text{Newton}}}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}.$$

Cette énergie caractéristique de la gravité quantique est de beaucoup plus importante que celle des interactions fortes de l'ordre de 200 MeV. Ayant remplacé les interactions ponctuelles par des interactions entre surfaces, le comportement des amplitudes de diffusion à grande énergie (ou à petites distances) se trouve grandement amélioré. Nous passons ainsi du comportement en loi de puissance, caractéristique de la théorie des champs, au comportement exponentiel beaucoup plus doux de l'amplitude de Veneziano. L'amplitude de la théorie des champs

$$A(s, t) = - \sum_{\text{Spin } J} g_J^2 \frac{(-s)^J}{t - M_J^2}$$

¹ Dorénavant, je pose $\hbar = 1$ et $c = 1$. \hbar sera réintroduit quand ce sera nécessaire.

(écrite dans le canal t) où sont échangées des particules de spin J et de masse M présente un comportement asymptotique $A(s, t) \sim s^{J_0}$ (pour s tendant vers l'infini avec t fixé) très différent du $A(s, t) \sim s^{\alpha(s)}$ extrait de l'amplitude de Veneziano

$$\begin{aligned} A(s, t) &= \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(s) + 1)(\alpha(s) + 2) \cdots (\alpha(s) + n)}{n!} \frac{1}{\alpha(t) - n}, \end{aligned}$$

où $\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma d'Euler et $\alpha(s) = \alpha' s + \alpha_0$ est la loi de Regge qui relie le spin de la particule échangée à sa masse. De plus l'introduction de coordonnées grassmanniennes selon le procédé de Ramond, Neveu et Schwarz [8,9], permet d'avoir des états fermioniques et un spectre supersymétrique est extrait par usage de la projection due à Gliozzi, Scherk et Olive (GSO) [10]. Ainsi la théorie des supercordes est une théorie quantique à l'échelle de Planck régularisée dans l'ultraviolet par l'extension de la corde, dont la limite infrarouge est une théorie de supergravité. En effet, la limite de tension infinie (ou $\alpha' \rightarrow 0$) des supercordes donne quatre grandes classes de théories de supergravité : la théorie non chirale à supersymétrie étendue² $N_{10} = 2$ dite de type IIa, la théorie chirale $N_{10} = 2$ dite de type IIb, la théorie de supergravité $N_{10} = 1$ avec groupe $E_8 \times E_8$ et celle avec un groupe de jauge $SO(32)$. Parallèlement dans les années 1975, Cremmer, Julia et Scherk [11,12] ont écrit un lagrangien classique pour la théorie de supergravité $N_{11} = 1$ en dimension onze. C'est la dimension maximale pour une théorie de supergravité avec des particules de spin au plus 2. Bien que l'on sache classiquement la relier à la théorie non chirale de type IIa par compactification, une version quantique fait toujours défaut.

Ce sont les années 1984–1985 qui virent la *première révolution* de la théorie des supercordes où il fut montré l'absence d'anomalies pour cinq classes de théories [13], à savoir : les théories de supercordes fermées non chirales de type IIa et chirales de type IIb, les théories de supercordes ouvertes de type I et les théories hétérotiques avec un groupe de jauge $SO(32)$ ou encore $E_8 \times E_8$. Un pas vers l'unification reste encore à faire puisque nous avons alors cinq théories différentes et malheureusement une version seulement perturbative en la constante de couplage g_s . À cette époque, une compréhension de la physique non perturbative des théories de supercordes est manquante, la pluralité de théorie disponibles

² Le nombre de supersymétrie en dimension d sera indiqué par $N_d = n$. Cette notation donne le nombre maximal de charges spinorielles réelles indépendantes (condition de Majorana et de Weyl lorsqu'elles sont compatibles) génératrices de l'algèbre de super-Poincaré. Par exemple $N_{10} = 2$ est l'extension supersymétrique de l'algèbre de Poincaré en dimension 10 par 2 charges spinorielles à 16 composantes réelles. Soit 8 charges spinorielles avec 4 composantes réelles qui engendrent l'extension supersymétrique $N_4 = 8$ de l'algèbre de super-Poincaré en dimension 4.

est un mystère et la supergravité définie en dimension onze est singularisée dans le paysage de la physique fondamentale. En fait, fascinés par la richesse mathématique de la théorie des supercordes hétérotique, certains la considéraient comme la théorie d'unification en occultant les autres formulations.

Les succès remportés dans les années 1994–1995, par Sen, Seiberg et Witten, dans l'étude des symétries non perturbatives des théories des champs supersymétriques [14,15,16] ont bouleversés notre compréhension de la physique à l'échelle de Planck. Ces travaux montrent que l'action wilsonienne des théories de jauge de Yang-Mills sans matière avec des supersymétries étendues $N_4 = 2$, sont invariantes sous un groupe de symétrie de dualité introduit par Montonen et Olive [17,18]. Ces symétries transforment les états perturbatifs (les bosons de jauge) et en les états non perturbatifs (les monopoles de 't Hooft-Polyakov). Les états perturbatifs et les solutions solitoniques sont regroupés en des multiplets d'un nouveau groupe de symétrie de la théorie : le groupe des dualités. En étendant ces idées aux théories de supercordes et de supergravité, on réinterprète une des cinq formulations des théories de supercordes comme un soliton de l'une des autres. C'est l'époque de la *seconde révolution* de la théorie des supercordes. Je vais présenter, un peu plus précisément, ces groupes de symétries de dualité de la théorie des supercordes.

2. Les groupes de symétries de dualités

La théorie M est le nom générique de l'espace des configurations de champs élémentaires dont les différentes théories de supercordes et de supergravité représentent des régions localisées, mises en correspondances par les symétries de dualité. De façon très générale une théorie A et une théorie B sont mises en correspondance soit par une transformation de *S-dualité* qui transforme une théorie de couplage faible en une théorie de couplage fort en inversant le signe de leur dilaton $\phi_A = -\phi_B$, soit en inversant les dimensions de l'espace de compactification selon une transformation dite de *T-dualité*, soit enfin en identifiant une théorie compactifiée sur une variété de grand (ou faible) volume avec une autre dans le régime de couplage fort (ou faible) selon une transformation de *U-dualité* (voir figure 1). Schématiquement une transformation de U-dualité est la composée d'une transformation de S-dualité et de T-dualité. Ces transformations de dualité sont considérées comme des symétries exactes de la théorie quantique et les différentes théories A et B sont vues comme deux écritures de la même théorie dans des régimes et des variables différents des champs élémentaires. Par exemple dans le cadre des théories des champs de jauge avec $N_4 = 2$ supersymétries étendues, Seiberg et Witten ont pu montrer l'invariance de cette théorie sous le groupe de S-dualité [15,16]. L'existence de groupe global non compact de symétrie $G(\mathbb{R})$ est une caractéristique générale des théories de supergravité qui représentent les modes de masse nulle des théories des supercordes compactifiées. De façon générale, l'action du groupe G est réalisée non linéairement par des champs scalaires qui paramétrisent le

quotient G/H , où H est le sous-groupe compact maximal de G . Le premier exemple de ce phénomène, avec $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ et $H = U(1)$, a été découvert en 1976 dans le cadre de la supergravité $N_4 = 4$ [19,20]. Un autre cas avec $G = E_7(\mathbb{R})$ a été exhibé en 1978 par Cremmer et Julia dans le cadre de la supergravité $N_4 = 8$. Ce groupe de symétrie contient les trois transformations de S, T et U-dualité de la supercorde de type II compactifiée en dimension quatre. La notation, $G(\mathbb{R})$, insiste sur le fait que l'action de ces groupes est représentée dans un espace vectoriel réel.

La première symétrie non perturbative d'une théorie de supercorde a été proposée dans le cadre de la compactification en dimension quatre de la théorie des supercordes hétérotiques par Font, Ibañez, Lüster et Quevedo [21] et Rey [22]. Ils ont proposé l'invariance de cette théorie sous le groupe de S-dualité $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$. Ce groupe est un sous-groupe discret du groupe non compact $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ de la théorie de supergravité $N_4 = 4$. Cette symétrie qui échange le comportement en couplage fort avec celui en couplage faible, n'est pas visible dans le cadre de la théorie des supercordes perturbatives. En fait, la série perturbative des supercordes est seulement invariante ordre par ordre sous la symétrie de T-dualité³ [23]. Dans le cas de la compactification sur un cercle cette symétrie, représentée par le groupe \mathbb{Z}_2 , réalise l'inversion du rayon de compactification $R \leftrightarrow \alpha'/R$. Dans le cadre d'une seule théorie cette symétrie est une simple transformation des champs scalaires qui caractérisent la variété de compactification. Quand cette symétrie met en correspondance deux théories différentes, comme les théories de type IIa et IIb en dimension neuf, son action est donnée par des relations de correspondance entre les champs des deux théories. Le groupe de symétrie de T-dualité d'une théorie des supercordes, est toujours strictement inclus dans le groupe global non compact de symétrie, $G(\mathbb{R})$, de la théorie de supergravité effective. Par exemple, le groupe de T-dualité de la théorie de type IIb en dimension dix, se réduit à l'élément unité \mathbb{I} contenu dans le groupe $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ de la supergravité chirale $N_{10} = 2$ ou encore le groupe de T-dualité des théories de type II compactifiées en dimension huit, $O(2, 2; \mathbb{Z})$, est bien un sous-groupe de $G = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. Hull et Townsend [24] ont argumenté que les groupes de U-dualité des théories de supercordes sont donnés par la version discrète, $G(\mathbb{Z})$, des groupes de symétrie des théories de supergravité $G(\mathbb{R})$. La restriction à $G(\mathbb{Z})$ signifie que l'action du groupe est représentée sur un module sur \mathbb{Z} . Cette restriction est en fait une quantification des charges de Noether (électriques) et topologiques (magnétiques) de la théorie, selon les règles de quantification de Dirac-Schwinger-Zwanziger [25] pour les théories de jauge ou de Neipomechie-Teitelboim [26,27] pour les objets étendus des théories de supergravité. Les multiplets invariants sous les transformations de T-dualité sont remplis par les états perturbatifs des théories de supercordes, qu'il faut donc compléter par de nouveaux états pour obtenir les multiplets invariants sous le groupe de dualité $G(\mathbb{Z})$. Ces états sont, en fait, issus du secteur non perturbatif de la théorie.

³ Cette symétrie est une propriété de la théorie conforme bi-dimensionnelle de la surface d'univers des (super)cordes. C'est la raison de son exactitude perturbative en la constante de couplage des (super)cordes.

Illustrons ceci sur les deux cas de la théorie de type IIB en dimension dix et en dimension neuf obtenue par compactification sur un cercle de rayon R . La théorie chirale de supergravité $N_{10} = 2$ présente une invariance sous le groupe $G = \text{Sl}(2, \mathbb{R})$ [28] et le groupe de T-dualité de la théorie des supercordes de type IIB est trivial $\{\mathbb{I}\}$. Le sous-groupe compact maximal de G est $H = U(1)$ et la variété scalaire associée $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})/U(1)$ est paramétrisée par le champ complexe $\rho = C^{(0)} + ie^{-\phi}$. Le groupe $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ agit sur le paramètre ρ par la transformation $(a\rho + b)/(c\rho + d)$ et les états excités de la supercorde de type IIB se placent dans des représentations sous cette action. Cette théorie possède un objet non perturbatif unidimensionnel, la D1-brane, qui peut former un état lié avec la supercorde fondamentale. Ces états liés caractérisés par leurs charges entières p et q sous les un-formes de Neveu-Schwarz et Ramond (*confer* la section 15), ont une tension $T_{(p,q)} = T_s |p + q\rho|$ [29,30]. La corde perturbative de type IIB habituelle est celle caractérisée par le couple $(1, 0)$. Si la théorie est vraiment invariante sous le groupe $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$, on peut considérer n'importe quel état lié comme l'objet perturbatif de référence, les autres étant forcément non perturbatifs. En prenant comme référence une corde de type (p, q) et en compactifiant la théorie sur un cercle, la masse des états dans la limite perturbative est alors [31]

$$M^2 = \left(\frac{m}{R}\right)^2 + (2\pi R n T_{(p,q)})^2 + 4\pi T_{(p,q)}(N_L + N_R).$$

Le premier terme représente la masse des modes de Kaluza-Klein, le second celle des états d'enroulement de la corde autour du cercle de compactification et le dernier terme la masse des états excités. N_L et N_R sont respectivement les nombres d'oscillateurs gauches et droits, contraints par $N_R - N_L = mn$. Cette formule de masse écrite dans le régime de couplage faible, n'est bien sûr pas invariante sous le groupe de dualité en dimension neuf, $\text{Sl}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_2$, pour n'importe quel état. En revanche, on s'attend à ce que des états particuliers protégés par la supersymétrie, les états BPS (voir la section 9), constituent des multiplets des représentations sous ce groupe de transformations. Ils sont ici donnés par $N_L = 0$ (ou $N_R = 0$) et leur masse $M^2 = (m/R + 2\pi n R T_{(p,q)})^2$ est invariante sous l'action de $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$. Je reviendrai par la suite sur les propriétés d'invariance de cette théorie lorsque j'étudierai le comportement non perturbative de l'action effective à une boucle de la théorie de type IIB, pour une configuration non triviale de champs de fond gravitationnels.

Les symétries non perturbatives de la théorie de type IIB requièrent l'existence d'un état lié entre la supercorde fondamentale et l'objet unidimensionnel non perturbatif D1-brane, en fait plus généralement ces symétries feront intervenir sur un pied d'égalité les états perturbatifs d'enroulements et de Kaluza-Klein des supercordes et des états nouveaux représentés par des objets supersymétriques étendus comme les D-branes ou des p -branes. Ces objets, qui seront présentés dans le chapitre suivant, complètent les multiplets qui se transforment sous l'action du groupe $G(\mathbb{Z})$. Cette analyse montre que l'unité de la théorie des supercordes est reliée à la compréhension de son régime de couplage fort. Dans le chapitre suivant, je présenterai les différentes configurations de champs couplées aux champs des théories effectives de supergravité. Une fois ces solutions présentées, la supercorde sera ensuite, choisie comme l'objet perturbatif de référence. Ensuite, je montrerai que ces solitons possèdent les degrés de liberté nécessaires pour appartenir aux multiplets de dualité. Mais continuons encore notre présentation générale des résultats de dualité.

3. Avènement des solutions non perturbatives

En électrodynamique, l'électron est couplé au champ de jauge $A^{(1)}$ par l'intermédiaire de son courant $j = e\delta(r)$ (localisé sur la ligne Σ_1 unidimensionnelle qu'il décrit lors de son évolution temporelle) selon l'expression

$$\mathcal{L}_{\text{électron}} = e \int_{\Sigma_1} dt A^{(1)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x j \cdot A^{(1)}.$$

Que l'on généralise pour les théories de supergravité qui contiennent des champs représentés par des $p+1$ -formes $C^{(p+1)}$, par le couplage avec un objet étendu de dimension p

$$\mathcal{L}_{p\text{-brane}} = \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}\sigma C^{(p+1)}, \quad (3.1)$$

une p -brane (qui décrit une surface de dimension $p+1$ dans son évolution temporelle), de charge μ_p par unité de volume [32]. Par exemple, la corde fondamentale qui est couplée à la deux-forme du secteur Neveu-Schwarz est l'équivalent unidimensionnel de l'électron. Il existe d'autres solution étendues, comme la D1-brane de la section précédente, qui couplent aux autres formes antisymétriques de la théorie. Bien que les symétries de dualité rendent d'égales importances la supercorde fondamentale et ces solutions de membrane, il fallait encore comprendre comment quantifier de tels objets non perturbatifs, pour achever l'unification recherchée. Quantifier un objet étendu n'est pas aisé, mais Polchinski [33] a compris la réalité quantique des p -branes chargées sous les champs Ramond-Ramond $C^{(p+1)}$, appelées *membranes de Dirichlet* ou *Dp-branes*. La surface d'univers de ces objets est une théorie des champs supersymétrique compatible avec la supersymétrie de l'espace-temps dont les fluctuations quantiques sont décrites par des processus de création et d'annihilation de petites supercordes ouvertes accrochées sur leur surface. Les p -branes chargées sous les champs du secteur Neveu-Schwarz, à savoir la 1-brane appelée communément supercorde et la NS5-brane, ont une réalité quantique toute autre. La NS5-brane est décrite par une théorie superconforme et la supercorde par les formalismes décrits dans le chapitre III. Ces différences entre les p -branes et les Dp -branes sont visibles sur la façon dont leur masse dépend du dilaton (ou de la constante de couplage des cordes g_s). En unité de masse de la (super)corde, celle d'une p -brane vaut $\mathcal{M}_p \sim 1/g_s^2$ et celle d'une Dp -brane $\mathcal{M}_{Dp} \sim 1/g_s$ [34,35]. Ces objets sont bien non perturbatifs car ils deviennent infiniment massifs dans la limite de couplage faible.

4. Structure nouvelle de la physique fondamentale

La théorie de type IIA compactifiée sur la surface K_3 avec des D2-branes euclidiennes enroulées sur des cycles bidimensionnels évanescents, donnent une description de la supercorde hétérotique compactifiée sur le tore quadridimensionnel T^4 . Les degrés de liberté de jauge sont donnés par les champs de masse nulle issus des D2-branes de volume nul [36,37]. Également en dimension dix, la supercorde hétérotique est identifiée avec la D1-brane de la théorie de type I [38]. De même, la supercorde de type IIA est vue comme la membrane de la théorie de supergravité définie en dimension onze, enroulée sur un cercle [39]. Et cette théorie de supergravité est vue maintenant comme la limite infrarouge de la théorie M [40]. En choisissant des valeurs moyennes dans le vide des champs de la théorie M, on peut obtenir les différentes théories de supercordes connues. Un des résultats les plus spectaculaires issu de ce nouveau point de vue, est la compréhension de l'origine de l'entropie d'un trou noir par un calcul de comptage d'états microscopiques [41,42]. Un trou noir est une solution singulière des équations d'Einstein, caractérisé entièrement au niveau classique par la donnée de sa masse, de sa charge électrique et d'un moment angulaire [43]. En essayant de quantifier un champ en présence de ces solutions, Hawking a montré qu'un trou noir émet un rayonnement pour finalement disparaître en s'évaporant complètement. Une entropie uniquement proportionnelle à l'aire de l'horizon du trou noir fut associée à cette évolution [44,45,46,47,48,49,50]. Il manquait une compréhension des degrés de liberté microscopiques. Pour progresser dans ce domaine, il fallait comprendre la physique quantique à courte distance. En effet, l'évaporation d'un trou noir pose la question de la physique à très courte distance dans un régime de couplage fort pour les interactions gravitationnelles. Malheureusement, dans un processus de diffusion de (super)cordes l'échelle minimale visible est limitée par la taille caractéristique d'une corde $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$. En effet, le graviton étant un mode d'excitation de la corde, plus on injecte d'énergie dans le centre de masse du système, plus le graviton est énergétique plus on perd de la résolution, la taille caractéristique des cordes croissant avec la quantité d'énergie injectée. Nous pouvons réinterpréter ce résultat par une extension de la relation d'incertitude d'Heisenberg par un terme dépendant de la taille caractéristique de la (super)corde et de l'énergie dans le centre de masse du système E_{CM} :

$$\Delta X \Delta P \geq \hbar + \sqrt{\alpha'} E_{CM}^2.$$

Pour des énergies faibles devant la masse de Planck c'est le premier terme de $\Delta X \geq \frac{\hbar}{\Delta P} + \Delta P / (m_{\text{Planck}} g_s^{1/4})$ qui domine alors que pour des énergies élevées on est limité par la taille naturelle des (super)cordes. Il est nécessaire d'utiliser des sondes dont on sait séparer les degrés d'excitation de ceux de la métrique de l'espace-temps ambiant. Les Dp -branes plus massives que les supercordes puisque leur tension est en $1/(\alpha' g_s)$ en unité de masse des supercordes font l'affaire. Comme la constante de Newton en dimension dix est reliée à

la constante de couplage des supercordes par $\kappa_{(10)}^2 \sim \alpha'^4 g_s^2$, le champ gravitationnel autour d'une Dp -brane se comporte en $g_{\mu\nu} \sim g_s/r^{7-p}$ (voir les équations (7.6) et (7.9)). Dans la région de couplage faible ($g_s \rightarrow 0$) la taille caractéristique d'une Dp -brane tend vers zéro suivant la loi $\ell_p \sim g_s^{1/(7-p)} \ell_s$. Si on utilise des D0-branes pour sonder la structure à petite échelle de l'espace-temps, ℓ_0 est plus grande que la longueur de Planck à dix dimension $\ell_{10} = g_s^{1/4} \ell_s$, mais plus petite que la taille caractéristique des supercordes. Bien que les excitations quantiques des Dp -branes soient décrites par un phénomène de nucléation de petites supercordes ouvertes, seuls les états de masse nulle contribuent aux calculs des interactions car les solutions de Dp -branes préservent la moitié des supersymétries d'espace-temps. Ainsi l'échelle caractéristique des interactions entre des D0-branes n'est pas corrigée quantiquement et satisfait bien $\ell_{10} \ll \ell_0 \ll \ell_s$. Les Dp -branes sont alors bien mieux adaptées à l'étude des phénomènes de couplages gravitationnels forts que les supercordes fondamentales. Strominger et Vafa [41] ont pu identifier les degrés de libertés statistiques d'un trou noir supersymétrique avec ceux de certaines configurations de Dp -branes, et ainsi donner une interprétation microscopique de l'entropie de Bekenstein-Hawking [41,42]. Forts de ce résultat, Bank, Fischler, Shenker Susskind [51] ont émis la conjecture que la physique quantique à une échelle de l'ordre de la masse de Planck ℓ_{10} est uniquement décrite par des interactions entre Dp -branes, ce qui par usage des dualités se ramène à une description en terme de D0-branes. Ils ont proposé une version quantique de l'hypothétique théorie M sous la forme d'un modèle supersymétrique de matrices, écrit relativement à l'espace-temps de dimension onze. Malgré tous ces progrès spectaculaires la théorie M n'a pas encore dévoilé tous ses secrets. La majorité des progrès accomplis sur la compréhension de la physique en couplage gravitationnel fort, ont été faits dans les cas avec un nombre maximal de supersymétries, ceux avec un nombre réduit de supersymétries restent encore difficilement abordables.

5. Qualités et inconvénients des modèles de supercordes

Avant d'entreprendre l'exposé de certains de mes travaux et réflexions sur des tests des conjectures de dualité par des calculs de contributions instantoniques aux actions effectives des théories de supercordes, je détaille ci-dessous les propriétés principales de ces modèles.

- **Symétries de jauge non abéliennes :** Dans le cas des cordes ouvertes avec deux extrémités libres, on peut introduire une symétrie non abélienne suivant le mécanisme des facteurs de Chan-Paton [34,52]. Ces facteurs contraints par les annulations d'anomalies [53] et des contributions des diagrammes en forme de têtards (*tadpole*) [54], peuvent prendre des valeurs dans les algèbres de Lie des groupes $SU(n)$, $Sp(2n)$ ou $SO(n)$ et donnent lieu à des théories de super Yang-Mills effectives avec ces symétries. Dans le cas des cordes fermées (sans extrémités libres), on utilise une algèbre de courant définie sur la surface d'univers

des supercordes. Cette algèbre de courant peut être donnée dès le début dans le cas des cordes hétérotiques ou bien être engendrée lors de la compactification de la théorie sur des surfaces à homologie non triviale [52,55].

- **Gravitation :** Les théories des (super)cordes en dimension critique ont dans leur spectre une particule de spin 2 de masse nulle, identifiée au graviton. Sa présence est due à l'invariance de la théorie sous les difféomorphismes de la surface d'univers de la (super)corde. La présence d'un couplage à la gravitation peut paraître gênant si l'on veut décrire les interactions fortes à partir des cordes, comme le voulaient les modèles d'aux originaux. En fait, dans le cadre de l'extension aux théories de cordes des résultats de Seiberg et Witten sur la dualité en théorie des champs supersymétrique [15,16], il a été montré que pour certaines compactifications des supercordes en dimension six, la gravitation est découplée (consultez [56] pour une introduction et des références sur le sujet).
- **Supersymétrie :** La supersymétrie est inhérente à la définition de la théorie des supercordes. En effet la présence de particules fermioniques est subordonnée à l'introduction de coordonnées grassmanniennes [57] selon un mécanisme proposé par Ramond [8] et Neveu et Schwarz [9]. Un spectre supersymétrique exempt de particules tachyoniques, est extrait au moyen de la projection GSO [10]. Dans les théories où interviennent des objets étendus, on peut avoir des degrés de liberté fermioniques sur la surface d'univers de l'objet, alors que le caractère bosonique et fermionique d'un état est donné par leur propriétés supersymétriques d'espace-temps ambiant. Dans la section 8, j'explique comment, pour des objets étendus comme les membranes de Dirichlet et les supercordes, la symétrie kappa rend ces deux supersymétries compatibles. La majorité des problèmes solubles ou dont on sait extraire des informations intéressantes sont supersymétriques. La supersymétrie donne une symétrie exacte entre les particules bosoniques et fermioniques, qui n'est pas observée dans les accélérateurs de particules jusqu'à une énergie de l'ordre de 200 GeV. Malheureusement, aucun mécanisme cohérent et phénoménologiquement intéressant de brisure de la supersymétrie n'existe à l'heure actuelle. Il semble qu'un tel mécanisme fera appel à la physique non perturbative de la théorie des supercordes. Les brisures de supersymétrie intéressantes sont celles dont on peut contrôler l'écart à une théorie supersymétrique par un paramètre continu. J'expliquerai dans la section 17 comment certaines configurations de D-branes permettent de réaliser ce genre de contrôle par l'intermédiaire des fonctions génératrices des identités supersymétriques, telles que le genre elliptique.
- **Modes de Kaluza-Klein :** La dimension critique quantique de la théorie des supercordes est dix, et présumée onze pour la théorie M. Afin de faire le contact avec le monde de dimension quatre que nous percevons, il nécessaire de

compactifier la théorie sur une variété de dimension six (ou sept) de très petite taille caractéristique. La richesse de la physique mesurée en dimension quatre se retranscrit alors en terme de contraintes géométriques pour cette variété.

- **Unification** : Les interactions se réduisant à la fusion/séparation des (super)cordes, la seule grandeur physique (dimensionnée) qui intervient dans le problème est la tension de la corde, c'est-à-dire la masse de Planck en dimension dix. Ainsi, en dimension dix la constante de couplage de jauge, $g_{(10)}$, d'une théorie de supercorde ouverte est reliée à la constante de Newton $\kappa_{(10)}^2$ selon $g_{(10)}^4 = 2^9 \pi^7 \kappa_{(10)}^2 (2\alpha')^2$ [58,59]. Ceci a l'inconvénient de fixer la constante d'unification des forces à $m_{\text{Planck}} \simeq 10^{19}$ GeV qui est de deux ordres de grandeur au-delà de la valeur extrapolée des données expérimentales $m_{\text{GUT}} \simeq 10^{17}$ GeV. De nombreux mécanismes ont été proposés pour réconcilier ces deux échelles d'énergie [60].
- **Unicité** : Les conditions d'annulation des anomalies de jauge et gravitationnelles restreignent les modèles possibles en dimension dix aux cinq cités ci-dessus [52,53]. Les conjectures de dualité relient ces modèles entre eux dans le cadre unificateur de la théorie M. La théorie des supercordes ne possédant pas de paramètre libre sans dimension (à part le dilaton), les théories en dimension inférieure sont données par les valeurs moyennes dans le vide des champs, fixées selon le choix du vide quantique de la théorie. Les différentes théories possibles sont paramétrisées par le lieu de variation des valeurs moyennes dans le vide des champs qui fixent la configuration du vide quantique. Cet ensemble est appelé *l'espace des modules de la théorie*. La géométrie globale de ces espaces de modules est difficile à connaître car le choix d'un vide quantique n'en donne qu'une description locale. Selon une analogie, due à Vafa, avec les structures des variétés différentiables, on peut imaginer que chaque théorie perturbative est une carte locale de l'espace des modules de la théorie M et que les transformations de dualité entre les différents vides quantiques donnent les relations de compatibilité entre les différentes cartes. Le problème principal revenant à déterminer la structure globale de l'atlas abstrait de cet espace. Les conjectures de dualités entre les différentes théories des supercordes sont résumées dans la figure 1. En dimension dix seules les transformations de dualité entre la supercorde hétérotique SO(32) et la théorie des supercordes ouvertes et l'autodualité de la théorie de type IIB sont non perturbatives. La supergravité $N_{11} = 1$ en dimension onze est vue comme la limite de couplage fort de la théorie de type IIA.

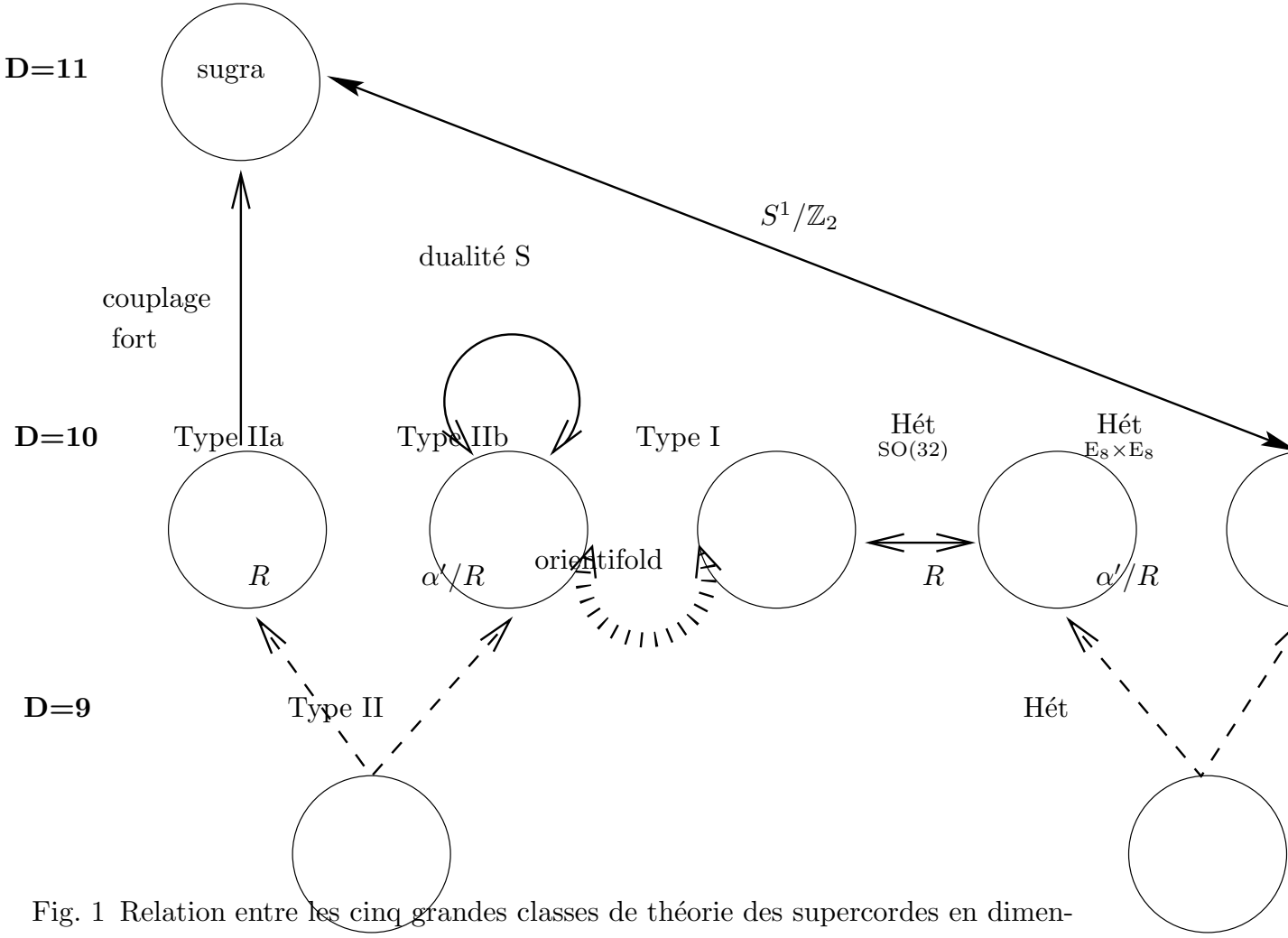


Fig. 1 Relation entre les cinq grandes classes de théorie des supercordes en dimension dix et la supergravité en dimension onze. Les compactifications de la dimension dix à la dimension neuf sont faites sur des cercles dont le rayon est indiqué sur la figure. La supergravité est compactifiée sur un cercle de rayon $R_{11} = g_s^{2/3} \ell_{\text{Planck}}^{11}$. La théorie hétérotique $E_8 \times E_8$ est obtenue par compactification de la supergravité à onze dimension sur un intervalle S^1/\mathbb{Z}_2 selon le mécanisme proposé dans [61].

Chapitre II

QUANTIFICATION D'OBJETS ÉTENDUS

Le formalisme nécessaire aux calculs perturbatifs en la constante de couplage g_s est extensivement développé dans les ouvrages de base [7]. Je ne revois ici que les notions nécessaires dans la suite de ce mémoire.

6. Algèbres supersymétriques en dimension dix et onze

L'algèbre de super-Poincaré est engendrée par les générateurs des translations P_μ l'impulsion ($\mu \in \{0, \dots, 9\}$), les générateurs des rotations de Lorentz $M_{\mu\nu}$ et par N_{10} charges spinorielles Q_α^I ($\alpha \in \{1, \dots, 32\}$, $I \in \{1, \dots, N_{10}\}$). Par exemple, les différentes théories des supercordes ont, soit une soit deux supercharges dans leur algèbre de supersymétrie. Dans la représentation de Majorana où les matrices de Dirac sont imaginaires pures, on peut imposer la condition de réalité sur chacune des charges ${}^t Q^I C = \bar{Q}^I$ où $C = \Gamma^0$ est la matrice de conjugaison de charge. Ainsi chaque charge Q^I a 32 composantes réelles. De plus $\Gamma_{11} = \Gamma^0 \cdots \Gamma^9$ ($(\Gamma_{11})^2 = 1$) définit un opérateur de chiralité⁴ : $\Gamma_{11} Q_\pm = \pm Q_\pm$, réduisant à 16 le nombre de composantes réelles des supercharges. Je note $\mathcal{P}^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{11})$ le projecteur associé à la symétrie de chiralité.

L'algèbre supersymétrique $N_{10} = 1$ la plus générale s'écrit [62]

$$\begin{aligned}
 [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
 [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= P_\mu \eta_{\nu\rho} - P_\nu \eta_{\mu\rho} \\
 [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= M_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma} - M_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + M_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - M_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} \\
 [Q^+, P_\mu] &= 0 \\
 \{Q^+, Q^+\} &= (C\Gamma^\mu \mathcal{P}^+)_{\alpha\beta} P_\mu + (C\Gamma^{\mu\nu\rho\kappa\sigma} \mathcal{P}^+) Z_{\mu\nu\rho\kappa\sigma}^+ .
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Les trois premières équations ci-dessus correspondent à l'algèbre de Poincaré. Comme elles sont identiques pour toutes les théories supersymétriques elles ne seront plus répétées par la suite. L'avant-dernière équation n'étant qu'une condition de compatibilité entre les générateurs commutants (P_μ et $M_{\mu\nu}$) et les générateurs anticommutants (les supercharges Q^I), ne changera jamais ; elle ne sera pas répétée non plus. Seule la dernière équation

⁴ Je choisis les matrices Gamma réelles satisfaisant $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ avec une métrique essentiellement positive $\eta^{\mu\nu} = \text{Diag}(-1, +1, \dots, +1)$. En général le produit de matrices Gamma $\Gamma^{\mu_1} \cdots \Gamma^{\mu_k}$ sera noté $\Gamma^{\mu_1 \cdots \mu_k}$. La notation $\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ fait référence au produit antisymétrisé avec le facteur de symétrie $\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]} \stackrel{\text{def}}{=} k! \Gamma^{\mu_1 \cdots \mu_k}$. Enfin l'opérateur de chiralité est noté Γ_{11} , avec des indices en bas, pour qu'il ne soit pas confondu avec un produit de deux matrices Γ^1 .

contient les grandeurs qui seront au centre de notre discussion. Afin de comprendre la signification de la cinq-forme dans la dernière équation de (6.1), je vais rappeler la structure des algèbres supersymétriques en dimension quatre. Les propriétés de ces algèbres sont reliées à celles en dimension dix par une compactification de six coordonnées spatiales.

Un théorème général, de Coleman et Mandula et Haag, Lopuszanski et Sohnius, exposé dans le livre [63], nous apprend que les seules extensions possibles de l'algèbre de super-Poincaré (en dimension $d = 4$) avec N_4 supercharges réelles Q_α^I sont données par $N_4(N_4 - 1)$ charges centrales telles que

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \delta^{IJ}(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + U^{IJ} C_{\alpha\beta} + V^{IJ} (C\gamma_5)_{\alpha\beta}. \quad (6.2)$$

Les charges centrales U^{IJ} et V^{IJ} ne portant pas d'indices d'espace-temps commutent avec tous les générateurs de Poincaré. Les charges centrales U et V de l'équation (6.2) sont des charges de Noether ou topologiques de la théorie. Elles correspondent à des nombres quantiques qui caractérisent les représentations par des particules de l'algèbre de super-Poincaré. Par exemple dans le cas de la théorie de super Yang-Mills (SYM) avec une supersymétrie étendue $N_4 = 2$ et un groupe de jauge $SU(2)$ brisé spontanément en $U(1)$ par un mécanisme de Higgs, les états sont caractérisés par leur charge électrique Q_E et magnétique Q_M :

$$Q_E = \frac{1}{2} \int_{S_2} F_{U(1)}^{0i} dn^i$$

$$Q_M = \frac{1}{2} \int_{S_2} \epsilon_{ijk} F_{U(1)}^{jk} dn^i,$$

définies respectivement comme le flux du champ électrique $F_{U(1)}^{0i}$ et du champ magnétique $\epsilon_{ijk} F_{U(1)}^{jk}$ à travers une sphère S_2 de grand rayon. Les charges centrales de (6.2), se combinent alors en un scalaire Z

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \delta^{IJ}(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + 2\sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{IJ} Z$$

$$Z = \frac{1}{g} (Q_E + iQ_M).$$

Le coefficient $1/g$ est proportionnel au rapport de la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs et de la constante de couplage du groupe de jauge $U(1)$.

Le premier terme du second membre de l'équation (6.1) est dicté par la structure graduée de l'algèbre de super-Poincaré. Le second terme contient une charge donnée par la cinq-forme autoduale $Z_{(5)}^+ = \star Z_{(5)}^+$. Vérifions que nous avons écrit toutes les charges possibles. Chaque Q_α^+ a 16 composantes réelles donc le membre de gauche de (3.1) à 136 composantes, qui se décomposent en 10 composantes pour P_μ et 126 pour la cinq-forme autoduale $Z_{(5)}^+$. Comme la charge $Z_{(5)}^+$ porte des indices de Lorentz, elle n'est donc pas centrale puisqu'elle

ne commute pas avec les générateurs des rotations de Lorentz $M_{\mu\nu}$, mais elle préserve la sous-algèbre (fermée) des supertranslations. $Z_{(5)}^+$ n'est pas associée à un état décrivant une particule, contrairement à la charge centrale Z précédente. Pour déterminer à quoi cette charge fait référence, considérons un espace-temps de dimension dix décomposé en un produit d'un espace de dimension cinq et un cinq-tore : $\mathcal{M}_{10} = \mathcal{M}_5 \times T^5$. Si les indices de la cinq-forme appartiennent à l'espace tangent du tore, Z_{12345}^+ devient alors une charge centrale (topologique) pour l'algèbre de super-Poincaré de l'espace transverse \mathcal{M}_5 . On interprète alors $Z_{(5)}^+$, comme la manifestation de la présence d'une membrane de dimension cinq plongée dans l'espace-temps de dimension dix \mathcal{M}_{10} :

$$\begin{aligned} Z_{(5)}^+ &= \mu_5 \int_{\Sigma_5} dX^{\mu_1} \wedge dX^{\mu_2} \wedge dX^{\mu_3} \wedge dX^{\mu_4} \wedge dX^{\mu_5} \\ \mu_5 &= \frac{1}{\text{Vol}_3} \int_{\mathcal{S}_3} \star F^{(7)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Σ_5 est une variété de dimension cinq non contractible en un point. Et la charge (topologique) μ_5 est obtenue en intégrant le flux du “champ magnétique” $\star F^{(7)} = \star dC^{(6)}$ associé à la six-forme introduite dans (3.1). Cette expression est étendue au cas de la limite de volume infinie pour Σ_5 , que l'on imagine comme un plan de dimension cinq plongé dans \mathcal{M}_{10} . Par la suite, en référence à ce raisonnement, j'appellerai *charge centrale* les p -formes qui interviendront au second membre de l'anticommutateur de deux charges de supersymétrie et l'objet étendu associé, une p -brane.

De même l'extension maximale (au sens de la sous-algèbre des supertranslations) pour la théorie non chirale ou de type IIa, $N_{10} = 2$ engendrée par le spineur de Majorana $Q \stackrel{\text{def}}{=} (Q_\alpha^+, Q_\alpha^-)$ ($\alpha = 1, \dots, 16$) [62]

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= (C\Gamma^\mu)P_\mu + (C\Gamma_{11})Z + (C\Gamma_{11}\Gamma^\mu)Z_\mu + (C\Gamma^{\mu\nu})Z_{\mu\nu} \\ &\quad + (C\Gamma_{11}\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma})Z_{\mu\nu\rho\sigma} + (C\Gamma^{\mu\nu\rho\kappa\sigma})Z_{\mu\nu\rho\kappa\sigma}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

On vérifie que l'on a écrit tous les termes possibles puisque le membre de gauche est une matrice symétrique réelle de rang 32 donc possède 528 composantes indépendantes, qui se décomposent selon $528 = 10 + 1 + 10 + 45 + 210 + 252$. La charge $Z_{(0)}$ est portée par une 0-brane (un objet ponctuel), $Z_{(1)}$ par une corde de type IIa, $Z_{(2)}$ par une 2-brane, $Z_{(4)}$ par une 4-brane et $Z_{(5)}$ par une 5-brane.

La version chirale de cette théorie $N_{10} = 2$ dite de type IIb est engendrée par les deux spineurs de Majorana-Weyl Q_α^i ($\alpha = 1, \dots, 16$) de même chiralité $\mathcal{P}^- Q^i = 0$ ($i = 1, 2$) [62]

$$\begin{aligned} \{Q^i, Q^j\} &= \delta^{ij}(C\Gamma^\mu \mathcal{P}^+)P_\mu + (C\Gamma^\mu \mathcal{P}^+)Z_\mu^{ij} + \varepsilon^{ij}(C\Gamma_{11}\Gamma^{\mu\nu\rho} \mathcal{P}^+)Z_{\mu\nu\rho} \\ &\quad + \delta^{ij}(C\Gamma^{\mu\nu\rho\kappa\sigma} \mathcal{P}^+)Z_{\mu\nu\rho\kappa\sigma}^+ + (C\Gamma^{\mu\nu\rho\kappa\sigma} \mathcal{P}^+)Z_{\mu\nu\rho\kappa\sigma}^{ij}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ici encore on vérifie que la décomposition est complète puisque le membre de gauche contient $2 \times \frac{16 \times 17}{2} + 16^2 = 528$ composantes indépendantes qui se groupent en 10 composantes pour P_μ , 2×10 pour $Z_{(2)}^{ij}$ (qui est un tenseur symétrique sans trace de $SO(2)$ relativement aux indices i et j), 120 pour $Z_{(3)}$, et enfin les trois cinq-formes autoduales données par 126 degrés de liberté pour $Z_{(5)}^+$ et 2×126 pour $Z_{(5)}^{ij}$. La charge $Z_{(1)}^{ij}$ est portée par un doublet de 1-brane (en fait la supercorde de type IIB et une 1-brane), $Z_{(3)}$ par une 3-brane, $Z_{(5)}^+$ et $Z_{(5)}^{ij}$ sont portées par les deux 5-branes. Les différences entre tous les objets étendus seront clarifiées lorsque nous discuterons l'écriture d'une action pour une p -brane. Enfin l'analyse de l'algèbre de super-Poincaré $N_{11} = 1$ en dimension onze engendrée par un spineur de Majorana Q_α ($\alpha = 1, \dots, 32$), donne [62]

$$\{Q, Q\} = (C\Gamma^M)P_M + (C\Gamma^{MN})Z_{MN} + (C\Gamma^{MNPQR})Z_{MNPQR}, \quad (6.6)$$

avec les indices M, N, \dots dans $\{1, \dots, 11\}$. On vérifie encore que le membre de gauche possède 528 charges réelles indépendantes qui se décomposent en $528 = 11 + 55 + 462$. Nous lisons la présence d'une 2-brane associée à $Z_{(2)}$ et d'une 5-brane associée à $Z_{(5)}$.

Le raisonnement précédent par lequel j'ai pu introduire la notion d'objet étendu repose sur un comptage algébrique des degrés de liberté de l'algèbre classique de super-Poincaré. Pour l'instant ces p -branes ne sont que des objets statiques infiniment étendus. Une p -brane est couplée à une $p+1$ -forme $C^{(p+1)}$ et aussi au graviton. Je vais détailler le couplage de ces objets à la gravitation et au champ Ramond et Neveu-Schwarz.

7. Objets étendus classiques

La propagation d'une p -brane dans l'espace-temps \mathcal{M}_{10} engendre une surface Σ_{p+1} de dimension $p+1$ de volume minimal. Les équations d'évolution d'un tel objet peuvent être déduites du lagrangien de *Nambu-Goto*

$$\mathcal{S}_{\text{cinétique}} = T_p \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det \Pi_a \cdot \Pi_b}. \quad (7.1)$$

T_p est la tension de cette surface, les coordonnées sur la surface sont appelées σ^a ($a = 0, \dots, p$). Le plongement de celle-ci dans l'espace-temps de Minkowski \mathcal{M}_{10} est réalisé grâce aux coordonnées $X^\mu(\sigma^a)$ ($\mu = 0, \dots, 9$) : $\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu$ et $\Pi_a \cdot \Pi_b = g_{\mu\nu}^{\Sigma_p} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu$. $g_{\mu\nu}^{\Sigma_p}$ est la métrique de l'espace ambiant \mathcal{M}_{10} , exprimée relativement au repère de la p -brane⁵. La signature des espaces de Minkowski est fixée à $(-1, +1, \dots, +1)$. Enfin, le déterminant est

⁵ Cette métrique est reliée à la métrique du modèle sigma des supercordes par $g_{\mu\nu}^{\Sigma_p} = e^{-2\phi/(p+1)} g_{\mu\nu}^\sigma$, avec $g^\sigma = e^{\phi/2} g^E$.

calculé relativement aux indices a et b tangents à la surface Σ_{p+1} . Je me placerai le plus souvent (sauf mention contraire explicite) dans la *jauge statique*

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma) &= (X^a(\sigma), X^i(\sigma)) \quad i \in \{p+1, \dots, 9\} \\ X^a(\sigma) &= \sigma^a \quad a \in \{0, \dots, p\}. \end{aligned}$$

La p -brane est couplée à la $p+1$ -forme $C^{(p+1)}$ selon

$$\mathcal{S}_{\text{couplage}} = \frac{\mu_p}{(p+1)!} \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}\sigma \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \Pi_{a_1}^{\mu_1} \dots \Pi_{a_{p+1}}^{\mu_{p+1}} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}^{(p+1)}. \quad (7.2)$$

La charge volumique μ_p est pour l'instant arbitraire. Les équations du mouvement déduites de la variation de $\mathcal{S}_{p\text{-brane}} = \mathcal{S}_{\text{cinétique}} + \mathcal{S}_{\text{couplage}}$ sont non linéaires et difficiles à résoudre. En introduisant une métrique auxiliaire γ_{ab} définie sur la surface Σ_{p+1} (c'est l'action de Polyakov) les équations du mouvement peuvent être déduites de la variation de l'action quadratique en les Π_a^μ

$$\mathcal{S}_{\text{cinétique}} = \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}\sigma \left[\frac{T_p}{2} (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} g_{\mu\nu}^{\Sigma_p} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu - (p-1)\sqrt{-\gamma}) \right]. \quad (7.3)$$

Où $\gamma = \det \gamma_{ab}$ et $g^{\Sigma_p} = \det g_{\mu\nu}^{\Sigma_p}$. Il est immédiat de vérifier que l'équation du mouvement pour γ_{ab} est $\gamma_{ab} = \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu g_{\mu\nu}^{\Sigma_p}$ et par substitution dans (7.3) que l'on obtient l'action (7.1). Dans le cas particulier d'une corde $p=1$, la métrique γ_{ab} n'est déterminée qu'à un facteur multiplicatif près et cette action est invariante sous le groupe des transformations conformes. Le cas de la corde sera étudié en grand détail par la suite. Pour trouver la géométrie de l'espace-temps autour de cette p -brane il faut résoudre les équations du mouvement pour la métrique. On extrait la dépendance en le dilaton, ϕ , de la métrique $g_{\mu\nu}^{\Sigma_p}$ en passant dans le repère canonique d'Einstein, par le changement de variable

$$g_{\mu\nu}^{\Sigma_p} = \exp \left\{ \frac{a(p)}{(p+1)} \phi \right\} g_{\mu\nu}^E. \quad (7.4)$$

La transformation dépend de la dimension de la p -brane par l'intermédiaire de la fonction $a(p)$ qui sera déterminée ultérieurement. La propagation des champs $g_{\mu\nu}^E$, ϕ et $C^{(p+1)}$ dans l'espace à dix dimensions est donnée par la variation de l'action

$$\mathcal{S}_{\text{propagation}} = \frac{1}{2\kappa_{(10)}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g^E} \left[R - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2(p+2)!} e^{-(a(p)+c)\phi} F_{(p+2)}^2 \right]. \quad (7.5)$$

Où $\kappa_{(10)}^2$ est la constante de Newton en dimension dix, $F_{(p+2)}$ le tenseur de courbure $F_{(p+2)} = dC^{(p+1)}$ et c , une constante, qui vaut 2 lorsque le champ $C_{(p+1)}$ est associé à un champ issu de la partie Neveu-Schwarz du spectre des supercordes et 0, lorsqu'elle

est associée à un champs du spectre Ramond. Les équations du mouvement des différents champs sont obtenues par variation de $\mathcal{S}_{\text{propagation}} + \mathcal{S}_{\text{cinétique}} + \mathcal{S}_{\text{couplage}}$. Si l'on choisit une p -brane *localisée* au point de coordonnées $(x^{a=0,\dots,p}, 0)$ de l'espace \mathcal{M}_{10} (dans la jauge statique), on peut chercher une solution aux équations du mouvement respectant la symétrie sous le groupe de Poincaré selon la p -brane \mathbb{E}_{p+1} et la symétrie de rotation $\text{SO}(9-p)$ pour l'espace euclidien transverse à celle-ci. Selon cette symétrie, la métrique se sépare et s'écrit $X^\mu = (x^a, y^m)$; si l'on exige, de plus, que la métrique $g_{\mu\nu}^E$ tende vers la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$ pour les grandes dimensions transverses à la p -brane, alors les équations du mouvement ont pour solution [32] :

$$ds^2|_{\text{singulière}} = H(y)^{-\frac{7-p}{8}} dx^2 + H(y)^{\frac{p+1}{8}} dy^2 \quad (7.6)$$

pour la métrique et

$$F_{(p+2)} = \text{Vol}(\mathbb{E}_{p+2}) \wedge dH^{-1}$$

pour le tenseur antisymétrique. Ces solutions ne dépendent que de la fonction harmonique

$$\exp\left(-\frac{4}{p-3}(\phi - \phi_\infty)\right) = H(y) = \begin{cases} 1 + C/y^{7-p} & \text{pour } p \neq 7 \\ 1 - C' \ln(y) & \text{pour } p = 7 \end{cases} \quad (7.7)$$

où $C = 2\kappa_{(10)}^2 g_s^{(3-p)/4} \mu_p / (7-p) \text{Vol}_{8-p}$, $C' = \kappa_{(10)}^2 g_s \mu_{(7)} / \pi$, Vol_{8-p} est le volume de la sphère \mathcal{S}^{8-p} et enfin $a(p) = (p-3)/2$. Cette solution de p -brane porte une charge électrique (de Noether) déduite de (7.3)

$$e_p = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_{(10)}} \int_{\mathcal{S}^{8-p}} e^{(a(p)-c)\phi} \star F_{(p+2)} = \sqrt{2}\kappa_{(10)}\mu_p.$$

et une masse par unité de volume (donnée par le flux du pseudo-tenseur énergie impulsion $\Theta_{\mu\nu}$ du système (7.3))

$$\mathcal{M}_p = \int d^{9-p}x \Theta_{00} = \kappa_{(10)} T_p e^{\left(\frac{a(p)}{2} + \frac{c}{2}\right)\phi_\infty}.$$

On constate que si la tension T_p de p -brane est égale à (la valeur absolue) de sa charge par unité de volume μ_p , la masse \mathcal{M}_p et la charge électrique satisfont l'égalité

$$\mathcal{M}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_p| e^{\left(\frac{a(p)}{2} + \frac{c}{2}\right)\phi_\infty}. \quad (7.8)$$

Les équations du mouvement de $\mathcal{S}_{\text{prop}} + \mathcal{S}_{\text{cinétique}} + \mathcal{S}_{\text{couplage}}$ admettent aussi une solution solitonique de dimension $p' = 6 - p$ *non singulière* dans l'espace et porteuse d'une charge magnétique m_p . Cette solution a cette fois la symétrie $\mathbb{E}_{7-p} \times \text{SO}(3+p)$. Elle est décrite par la fonction harmonique $\tilde{H}(y)$ selon :

$$ds^2|_{\text{solitonique}} = \tilde{H}(y)^{-\frac{p+1}{8}} dx^2 + \tilde{H}(y)^{\frac{7-p}{8}} dy^2 \quad (7.9)$$

pour la métrique,

$$F_{(p+2)} = \sqrt{2} \kappa_{(10)} m_{p'} \text{Vol}(\mathbb{E}_{p+2})$$

pour le tenseur antisymétrique et

$$\exp\left(\frac{4}{p-3}(\phi - \phi_\infty)\right) = \tilde{H}(y) = 1 + C/y^{p+1} \quad \text{pour } p' \neq 7 \quad (7.10)$$

pour le dilaton⁶ et $\tilde{C} = 2\kappa_{(10)}^2 g_s^{-(3-p)/4} \mu_{p'}/(7-p)\text{Vol}_{8-p}$. Cette fois la relation entre la masse par unité de volume de la p' -brane $\mathcal{M}_{p'}$ et sa charge magnétique $m_{p'} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2} \kappa_{(10)} \mu_{p'}$ vaut

$$\mathcal{M}_{p'} = \frac{1}{\sqrt{2}} |m_{p'}| e^{-(\frac{p-3}{4} + \frac{c}{2})\phi_\infty}. \quad (7.11)$$

Nous venons de trouver une solution fondamentale, associée à une source ponctuelle dans l'espace, chargée électriquement et une solution solitonique chargée magnétiquement. Les charges de ces objets vérifient une règle de quantification à la Dirac [25,26,27]

$$\frac{1}{2\kappa_{(10)}^2} m_{p'} e_p = \mu_{p'} \mu_p = 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.12)$$

On constate aussi que les masses (7.8) et (7.11) ont un comportement inverse l'une de l'autre lorsque varie la valeur à l'infini du dilaton. Les charges sont reliées à leur masse par une relation du type *égalité de Bogomol'ny*. Cette égalité, pour les théories des champs supersymétriques, relie la masse des états BPS à leurs charges électrique Q_E et magnétique Q_M selon

$$\mathcal{M}^2 = \frac{1}{g^2} (Q_E^2 + Q_M^2).$$

Le parallèle avec les solutions solitoniques de la théorie des champs de jauge est en fait complet. La p -brane est la solution fondamentale singulière et la p' -brane le soliton dual. La solution de p -brane avec $p' = 1$ et $c = 2$ (donc non chargée sous les champs Ramond), joue un rôle particulier. Je désignerai par la suite cette solution par *supercorde* ou *F-corde* suivant le contexte. En réexprimant les masses des solitons dans les unités de masse de

⁶ Le cas $p' = 7$ est dual à celui $p = -1$. Pour $p = -1$ la 'membrane' est réduite à un point de l'espace-temps. Cette solution instantonique sera étudiée plus en détail dans la section 28. Nous supposons pour l'instant que $p > -1$.

la supercorde⁷ T_s et en posant $g_s = \exp(\phi_\infty)$, on trouve que pour une p -brane chargée électriquement $\mathcal{M}_p = T_s/g_s^{1-c/2}$ et pour une p -brane chargée magnétiquement $\mathcal{M}_{p'} = T_s/g_s^{1+c/2}$. Ainsi, dans la limite de couplage faible $g_s \rightarrow 0$ les objets perturbatifs sont ceux dont la masse tend vers zéro ou reste finie. Comme c vaut soit zéro soit deux selon l'origine de la $p+1$ -forme à laquelle il est couplé, l'objet perturbatif est la 1-brane qui couple à la deux-forme du secteur Neveu-Schwarz et les autres objets de taille différente avec une masse en $1/g_s$ et $1/g_s^2$ se découplent dans cette limite. Cette supercorde porte les nombres quantiques associés à P_μ dans les anticommutateurs entre les supercharges. Pour $p=1$ et $c=0$, nous avons une autre solution de 1-brane chargée cette fois sous la deux-forme du secteur Ramond, représentée par Z_μ^{ij} dans (6.5). Sa masse vaut cette fois $\mathcal{M}_1 = T_s/g_s$, cet état découple donc dans la limite perturbative de la théorie. Ces deux cordes se réinterpréteront comme un doublet du groupe de symétrie non perturbatif de la théorie de type IIB. Je reviendrai sur tout ceci dans la section 15.

Nous obtenons ainsi la généralisation à un couplage à la gravitation des phénomènes de dualité constatés sur les théories de jauge : la théorie possède un couple formé d'une solution chargée électriquement et d'une solution chargée magnétiquement, qui échangent leur rôle lorsque l'on passe d'un régime de couplage faible à un régime de couplage fort. Avec l'expérience de l'étude des dualités en théories des champs, nous savons que la structure quantique de ces configurations duales ne peut être bien étudiée que dans le cadre d'une formulation supersymétrique. Je vais présenter maintenant une formulation des solutions précédentes avec une extension maximale de la supersymétrie d'espace-temps. Les conditions de compatibilité entre ces solutions et la supersymétrie d'espace-temps justifieront l'harmonie des solutions ainsi que les égalités entre la masse et les charges de ces objets.

8. Formalisme supersymétrique

L'espace (plat) de Minkowski à dix dimensions est maintenant muni de N_{10} coordonnées fermioniques supplémentaires $z^M = (X^\mu, \theta_\alpha^A)$ ($\mu = 0, \dots, 9$, $A = 1, \dots, N_{10}$ et $\alpha = 1, \dots, 32$). Ces coordonnées θ^A satisferont toujours la condition de réalité de Majorana. Je préciserai lorsque la condition de Weyl sera aussi imposée. La généralisation supersymétrique de (7.3) prend la même forme avec cette fois [64,65,66,67]

$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_a \theta^B \delta_{AB}. \quad (8.1)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, nous désirons que l'action (7.3) soit invariante sous les transformations de supersymétrie

⁷ À partir de maintenant, je noterai $T_s = 1/(2\pi\alpha')$ la tension de la supercorde fondamentale et T_p sera réservé aux solutions de Dp-brane.

$$\delta_{\text{susy}} X^\mu = \frac{1}{2} i \bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A, \quad \delta_{\text{susy}} \theta^A = \epsilon^A \quad (8.2)$$

où les paramètres ϵ^A sont des *spineurs constants* de même nature que les coordonnées fermioniques θ^A . Lorsque l'espace est courbe les paramètres des transformations de supersymétrie sont des spineurs de Killing relativement à la métrique riemannienne sous-jacente. La variation de l'action (7.3) sous une transformation de supersymétrie (8.2) doit être compensée par l'ajout d'un terme de Wess-Zumino fermionique

$$S_{\text{WZ,fermion}} = T_p \int_{\Sigma_{p+1}} A_{(p+1)}^{\text{fermion}}, \quad (8.3)$$

avec le tenseur de courbure associé à la superforme $dA_{(p+1)}^{\text{fermion}} = H_{(p+2)}^{\text{F}}$:

$$H_{(p+1)}^{\text{F}} = \frac{i}{2(p+2)!} \Pi^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \Pi^{\mu_{p+2}} d\bar{\theta}^A \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_{p+2}} d\theta^A.$$

Le terme (7.2), exprimé en terme des supercoordonnées (8.1), est invariant sous la transformation de supersymétrie (8.2). On impose aussi que l'action $\mathcal{S}_{\text{cinétique}} + \mathcal{S}_{\text{couplage}}$ soit invariante sous la reparamétrisation fermionique engendrée par un spineur d'espace-temps $\kappa^A(\sigma)$, scalaire de la surface d'univers [67,52,68]

$$\begin{aligned} \delta_\kappa X^\mu &= i \bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta_\kappa \theta^A \\ \delta_\kappa \theta^A &= (1 + \mathbb{G}) \kappa^A \end{aligned} \quad (8.4)$$

où

$$\mathbb{G} = \frac{(-1)^{(p-1)(p+2)/4}}{(p+1)! \sqrt{-\gamma}} \Pi^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \Pi^{\mu_{p+1}} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}.$$

Cette symétrie n'est réalisée que si les tenseurs de courbure des $p+1$ -formes intervenant dans les termes de Wess-Zumino bosoniques (7.2) et fermioniques (8.3) sont égaux et $N_{10} \leq 2$. Ces deux termes se combinent en une même superforme pour donner le terme de Wess-Zumino supersymétrique complet. En résulte l'égalité entre la tension de p -brane et sa charge sous la $p+1$ -forme : $T_p = \mu_p$. Avec quelques manipulations algébriques sur les matrices de Dirac, on vérifie que $\mathbb{G}^2 = 1$ ainsi le projecteur $1 + \mathbb{G}$ permet d'éliminer la moitié des degrés de liberté des coordonnées fermioniques.

Comptons maintenant les degrés de liberté bosoniques et fermioniques, afin de vérifier que cette solution est bien supersymétrique d'espace-temps. Ce n'est pas *a priori* évident, car nous n'avons vérifié pour l'instant que l'invariance du lagrangien $\mathcal{S}_{\text{cinétique}} + \mathcal{S}_{\text{couplage}}$ sous une supersymétrie de la surface d'univers de la p -brane. Dans la jauge statique, une p -brane possède $9-p$ degrés de liberté bosoniques issus des multiplets scalaires (les coordonnées transverses), et il reste $p+1-2$ degrés de liberté physiques complémentaires dont l'origine diffère selon l'objet considéré, pour un total de $9-p+p+1-2 = 8$ degrés de

liberté bosoniques. Ces degrés de liberté complémentaires ne sont pas nécessaires pour la supercorde ; ils sont issus des multiplets supersymétriques de la théorie superconforme de surface d'univers de dimension six pour la 5-brane de type Neveu-Schwarz [69,70] et sont représentés par les degrés de liberté du champ de jauge abélien de la théorie de surface d'univers pour une Dp -brane (*confer* le lagrangien de Dirac-Born-Infeld (15.1)). Les degrés de liberté fermioniques sont maintenant donnés par $16 \times N_{10}$ (sous les conditions de Weyl et Majorana), dont la moitié est absorbée dans la transformation kappa. Et enfin l'équation du mouvement des fermions en élimine encore une moitié, ce qui donne $8 = \frac{1}{4} 16 \times N_{10}$. Ainsi le nombre maximal de supersymétries de ces théories est $N_{10} = 2$. Dans le cas particulier de la supercorde, on peut décomposer les champs suivant la chiralité de $SO(1,1)$ et n'imposer les conditions de supersymétrie que sur la partie de chiralité gauche des coordonnées bosoniques, ce qui divise par deux le nombre de degrés de liberté bosoniques et ainsi $N_{10} = 1$.

On peut, dans ce formalisme supersymétrique, refaire les calculs de la section 7. Nous avons déjà constaté que la symétrie kappa (de façon équivalente la supersymétrie d'espace-temps) impose l'égalité entre la tension et la charge du soliton sous la $p + 1$ -forme, d'où découlent les égalités (7.8) et (7.11). Enfin, l'harmonicité des fonctions $H(y)$ et $\tilde{H}(y)$ des solutions (7.6) et (7.9) découle de l'existence de spineurs de Killing, générateurs des transformations de supersymétrie. Ces sont ces conditions de supersymétrie qui réduisent la détermination de la métrique aux seules fonctions harmoniques $H(y)$ et $\tilde{H}(y)$ [32].

Les champs de la théorie de surface d'univers d'un soliton supersymétrique sont issus des modes zéros bosoniques et fermioniques associés à cette solution. Dans le cas où le soliton préserve un certain nombre de supersymétrie ces champs se placent dans des multiplets supersymétriques, c'est ce que retranscrit le précédent comptage des degrés de liberté bosoniques et fermioniques. L'origine de ces modes zéros est souvent difficile à déterminer, les cas des 5-brane du secteur Neveu-Schwarz de la théorie hétérotique et des théories de type II ont été les premiers compris. Callan, Harvey et Strominger, [69,70], ont pu montrer que la structure de la théorie de la surface d'univers de ce soliton est réalisée par une théorie superconforme en dimension six, avec $(0, 1)$ supersymétries pour la NS5-brane de théorie de supercorde hétérotique, $(0, 2)$ supersymétries pour celle de la théorie de type IIA et $(1, 1)$ supersymétries pour celle de la théorie de type IIB [69]. Il aura fallu attendre la remarque de Polchinski sur la quantification des modes zéros des Dp -branes chargées sous les champs du secteur Ramond par des petites supercordes ouvertes, pour comprendre que les multiplets bosoniques des ces D-branes sont complétés par les degrés de liberté d'un champ de jauge abélien.

Afin de comprendre d'où peuvent surgir ces degrés de liberté supplémentaires et comment ils s'arrangent dans les multiplets de supersymétrie, je vais analyser brièvement les nombres de charges de supersymétries préservées par de telles solutions.

9. Conditions de saturation BPS

Les solutions de p -brane exhibées dans la section précédente, brisent l'invariance par translation de l'espace-temps \mathcal{M}_{10} mais conservent la structure $\mathbb{E}_{p+1} \times \text{SO}(9-p)$. Elles respectent surtout en partie les symétries de l'algèbre supersymétrique. Un spineur de Killing global ϵ^A de (8.2) qui respecte cette symétrie se décompose en un spineur ε^A du groupe des rotations $\text{SO}(1, p)$ de la surface d'univers de la p -brane et un spineur η^A de l'espace transverse : $\epsilon^A = (\varepsilon^A, \eta^A)$. La condition de chiralité $\Gamma_{11}\epsilon^A = \epsilon^A$ se scinde en

$$\begin{aligned}\Gamma^{0\cdots p}\varepsilon^A &= \pm\varepsilon^A \\ \Gamma^{(p+1)\cdots 9}\eta^A &= \pm\eta^A.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Les chiralités de ε^A et η^A sont corrélées par celle de ϵ^A . Comme la solution est invariante sous la symétrie kappa (8.4), elle ne fait intervenir seulement que la moitié des degrés de liberté spinoriels. On dit qu'elle brise la moitié des supersymétries. Ce phénomène aurait pu être anticipé dans la section 6, lorsque j'ai motivé l'existence de telles solutions par la présence de charges centrales dans les anticommutateurs des charges spinorielles. En effet, les représentations massives de masse M de l'algèbre de super-Poincaré avec une charge centrale vérifiant $M^2 \simeq \mu_p^2$ ((7.8) et (7.11) dans un autre système d'unité), ont une dimension moitié de celles sans charge centrale (voir section 10). Des états donnés par de telles représentations sont appelés des *états BPS* saturant la moitié des supersymétries ou en raccourci des *états 1/2-BPS*. Ainsi la présence d'un objet de dimension cinq, est compatible avec la moitié des symétries de l'algèbre de super-Poincaré si la charge μ_5 de (6.3) est reliée à la masse \mathcal{M}_5 de (7.8) selon $\mathcal{M}_5 \sim |\mu_5|$ et le spineur de Killing de (8.2) ϵ vérifie (9.1) avec $p = 5$.

Comme dans la suite de ce mémoire, notre objet de référence sera la supercorde, puisqu'il est pratique de désigner les paramètres de supersymétrie suivant une décomposition cohérente avec l'existence d'un tel objet. Une corde rigide (pour l'instant) de la théorie $N_{10} = 2$ est invariante sous $\mathbb{E}_2 \times \text{SO}(8)$, donc le spineur ϵ^A se décompose en un couple $\epsilon^A \stackrel{\text{def}}{=} (\epsilon_L, \epsilon_R)$ de spineurs de $\text{SO}(8)$, indexés selon leur chiralité L gauche et droite R sous $\text{SO}(1,1)$.⁸

La solution précédente pour la 5-brane vérifie

$$\begin{aligned}\Gamma^{0\cdots 5}\epsilon_L &= \pm\epsilon_L \\ \Gamma^{0\cdots 5}\epsilon_R &= \pm\epsilon_R,\end{aligned}\tag{9.2}$$

pour une théorie $N_{10} = 2$. Une solution qui vérifie ces conditions sera appelée une 5-brane de Neveu-Schwarz ou *NS5-brane*. On conserve la moitié des degrés de liberté gauches et

⁸ La même dénomination sera utilisée pour les supercharges de l'algèbre de supersymétrie. Une transformation infinitésimale de supersymétrie est donnée par $\epsilon_L Q_L$ et $\epsilon_R Q_R$.

droits de façon indépendante. Dans le cas $N_{10} = 2$ l'indépendance des conditions de chiralité sur les spineurs ϵ_L et ϵ_R implique que cette configuration des champs est donnée par une charge centrale dans le commutateur des supercharges $\{Q_L, Q_L\}$ et $\{Q_R, Q_R\}$. Avec la condition supplémentaire $\epsilon_L = \epsilon_R$ pour une théorie $N_{10} = 1$, cette solution correspond à la charge centrale de (6.1).

Les autres solutions de p -branes sont associées aux charges centrales qui apparaissent dans les anticommutateurs $\{Q_L, Q_R\}$. Les relations de compatibilité de ces solutions avec l'algèbre de supersymétrie s'écrivent alors

$$\epsilon_R = \Gamma^{0 \cdots p} \epsilon_L. \quad (9.3)$$

Une telle solution sera par la suite appelée p -brane de Dirichlet ou Dp -brane. Contrairement à la condition supersymétrique précédente, lorsque $N_{10} = 2$ celle-ci préserve une sous-algèbre de super-Poincaré $N_{10} = 1$. Le paramètre des transformations supersymétrique de cette algèbre ϵ_L est associé à la supercharge $Q_L + \Gamma^{0 \cdots p} Q_R$. Afin de comprendre comment ces états se placent dans les représentations de l'algèbre de super-Poincaré, je vais donner les différentes représentations de ces algèbres supersymétriques avec des charges centrales. Ce sera aussi l'occasion de fixer la terminologie utilisée par la suite.

10. Représentations de l'algèbre de super-Poincaré

Les états de champs caractérisés par les nombres quantiques associés aux charges centrales des algèbres (6.1), (6.4), (6.5) et (6.6) sont donnés par des représentations massives particulières de l'algèbre de super-Poincaré. Comme la discussion précédente le montre, les valeurs des charges centrales dépendent des valeurs moyennes dans le vide des différents champs qui caractérisent le vide quantique de notre théorie, noté symboliquement par $Z(\langle\phi\rangle)$. Les différentes solutions présentées dans la section 7 vérifient l'égalité classique de Bogomol'ny-Prasad-Sommerfeld (BPS) : Masse = $Z(\langle\phi\rangle)$ (voir les équations (7.8) et (7.11)). La masse de ces états n'est pas corrigée quand on quantifie la théorie car lorsque la théorie quantique possède toujours une supersymétrie, les corrections quantiques qui modifieraient cette relation sont incompatibles avec les dimensions des représentations auxquelles appartiennent ces états BPS. Ces représentations sont supposées stables lorsque l'on varie les valeurs moyennes des champs dans le vide. Dans le cas de la théorie des supercordes, tous les paramètres de la théorie étant donnés par de telles valeurs moyennes, l'étude des connexions entre ces différents vides est bien réalisée par ces états BPS et les rend indispensables dans l'étude des effets perturbatifs et non perturbatifs. Je vais donc donner les principales représentations de l'algèbre de super-Poincaré. Je réexprime les algèbres dans le vocabulaire de la supersymétrie étendue à quatre dimensions. Comme expliqué précédemment les cas en dimension dix s'en déduisent par le procédé de réduction dimensionnelle.

L'algèbre la plus générale étendue à $I, J = 1, \dots, N_4$ supercharges s'écrit [63]

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = \epsilon_{\alpha\beta} \bar{Z}^{IJ} \\ \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} &= \delta^{IJ} 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Les indices $\alpha, \beta = 1, 2$ non pointés appartiennent à la représentation complexe de $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ et ceux pointés $\dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2$ à la représentation complexe conjuguée inéquivalente. Et $\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu$ est le coefficient de Clebsch-Gordan de la décomposition du produit tensoriel de $Q \otimes \bar{Q}$ en la représentation vectorielle P_μ de $\text{SO}(1, 3)$.

Je rappelle d'abord les résultats dans le cas où les charges centrales Z et \bar{Z} sont nulles [63, 55], les représentations massives sont données dans le repère où la particule est au repos $P = (-M, 0)$,

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 0 \\ \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} &= 2\delta^{IJ} \delta_{\alpha\dot{\beta}} M. \end{aligned}$$

On définit les opérateurs de création et d'annihilation normalisés

$$a_\alpha^I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2M}} Q_\alpha^I, \quad a_\alpha^{\dagger I} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2M}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I.$$

En agissant sur le vide de $|\Omega\rangle$ annihilé par les a_α^I , on crée un espace de Fock de dimension totale 2^{2N_4} . Si le vide a un spin j , et que l'on agit sur celui-ci avec n opérateurs de création et m opérateurs de destruction, on obtient un état de spin $j + n - m$.

Pour les représentations des particules de masse nulle, le repère de repos est donné par $P = (-E, 0, 0, E)$. Dans ce cas les générateurs de l'algèbre sont donnés par

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 0 \\ \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} &= 2\delta^{IJ} \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On définit cette fois les opérateurs de création et d'annihilation normalisés

$$a^I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2E}} Q_1^I, \quad a^{\dagger I} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2E}} \bar{Q}_1^I.$$

En agissant sur le vide de $|\Omega\rangle$ annihilé par a^I , on crée un espace de Fock de dimension totale 2^{N_4} .

Je passe maintenant au cas avec des charges centrales. En agissant sur les indices I, J par une rotation de $U(N_4)$ il est toujours possible de se ramener à la forme canonique ($a = 1, 2$ et $m = 1, \dots, \lfloor N_4/2 \rfloor$)

$$\begin{aligned}
Z^{a\,m} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \text{Diag}(z_1, \dots, z_{\frac{N_4}{2}}) && \text{pour } N_4 \text{ pair} \\
Z^{a\,m} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \text{Diag}(z_1, \dots, z_{\lfloor \frac{N_4}{2} \rfloor}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{pour } N_4 \text{ impair.}
\end{aligned}$$

Les relations d'anticommution se réécrivent alors

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha^{a\,m}, Q_\beta^{b\,n}\} &= z_m \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ab} \delta^{mn} \\
\{Q_\alpha^{a\,m}, \bar{Q}_\beta^{b\,n}\} &= 2M \delta^{mn} \delta^{ab} \delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

On définit les opérateurs de création et d'annihilation selon $a_\alpha^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_\alpha^{1m} + \epsilon_{\alpha\beta} Q_\beta^{2m}]$ et $b_\alpha^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_\alpha^{1m} - \epsilon_{\alpha\beta} Q_\beta^{2m}]$. Ils vérifient les relations d'anticommution

$$\begin{aligned}
\{a_\alpha^m, a_\beta^n\} &= \{a_\alpha^m, b_\beta^n\} = \{b_\alpha^m, b_\beta^n\} = 0 \\
\{a_\alpha^m, a_\beta^{\dagger n}\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{mn} (2M + z_n), \quad \{b_\alpha^m, b_\beta^{\dagger n}\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{mn} (2M - z_n).
\end{aligned}$$

La positivité de l'énergie impose la positivité des membres de droite des deux dernières équations : $2M \geq \text{Max}(z_n)$. Cette équation est connue sous la nom d'inégalité de Bogomol'ny-Prasad-Sommerfeld. On s'aperçoit que lorsque M est égale à un certain nombre de charges centrales, disons p , les opérateurs b^m et $b^{\dagger m}$ avec $m = 1, \dots, p$ se découplent. L'espace de Fock est alors de dimension $2^{2(N_4-p)}$. Lorsque $p = N_4/2$, la représentation associée dite *multiplet court* ou *1/2-BPS*, est de même dimension que les représentations de masse nulle. Ce fait remarquable permet de réinterpréter les D(-1)-branes qui sont des états 1/2-BPS de la théorie $N_{10} = 2$ chirale en terme de la représentation de masse nulle du supergraviton pour la théorie $N_{11} = 1$ (voir la section 22). Je donne la terminologie que j'utiliserai par la suite [71]. Pour la théorie $N_4 = 8$ (ou $N_{10} = 2$ ou $N_{11} = 1$) dont le fondamental est supposé être porteur d'un spin j il peut y avoir jusqu'à quatre charges centrales $z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq z_4$. J'appelle *multiplets longs* les représentations massives sans saturation de la borne de Bogomol'ny $2M > z_i$. Ce multiplet brise totalement la supersymétrie et contient $2^{15} \times (2j+1)$ états bosoniques. J'appelle *multiplets intermédiaires* les représentations massives avec saturation de la borne de Bogomol'ny pour $2M = z_1 > z_{2,3,4}$, pour $2M = z_{1,2} > z_{3,4}$ et pour $2M = z_{1,2,3} > z_4$. Ces multiplets brisent respectivement sept, six et cinq supercharges et contiennent donc $2^{13} \times (2j+1)$, $2^{11} \times (2j+1)$ et enfin $2^9 \times (2j+1)$ états bosoniques. Viennent ensuite les *multiplets courts* caractérisés par $2M = z_{1,2,3,4}$. Ils brisent la moitié des supersymétries et contiennent $2^8 \times (2j+1)$ degrés de liberté bosoniques. Et pour finir, nous avons les *multiplets de masse nulle* qui contiennent $2^8 \times (2j+1)$ degrés de liberté bosoniques.

Ces différents multiplets interviennent dans les calculs de lagrangiens effectifs par l'intermédiaire de supertraces calculées relativement à une représentation $[j]$ de l'état fondamental [55,72]. Un exemple important, utilisé dans le chapitre V, est la contribution

à l'action effective à une boucle de la théorie de supergravité des diagrammes couplant à quatre champs de jauge externe ou gravitationnels. Par exemple, pour une théorie des champs de super Yang-Mills (SYM) cette contribution s'écrit [73]

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{Str} \left((tQ^a F_a)^4 e^{-tS_{\text{SYM}}} \right). \quad (10.2)$$

t est le paramètre de Schwinger de la boucle. Le champ de Yang-Mills F_a et les charges Q^a sont choisis dans la représentation adjointe du groupe de jauge. Enfin Str est la trace supersymétrique, différence des contributions bosoniques et fermioniques : $\text{Str}(f) = \text{tr}_{\text{boson}}(f) - \text{tr}_{\text{fermion}}(f)$. Chacune des traces tr étant calculées dans la représentation adjointe pour la partie de jauge et avec sommation sur tous les états massifs et non massifs qui courent dans la boucle. Dans les cas des (super)cordes, comme le champ F couple selon un effet Landau, ce calcul se ramène à une supertrace sur la puissance quatrième de l'hélicité des particules qui parcourent la boucle [59,74,75]. Définissons d'abord la supertrace sur l'hélicité λ relativement à la représentation $[j]$

$$B_{2n}([j]) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Str}_{[j]} (\lambda^{2n}) = \text{tr}_{[j]} \left((-1)^{2\lambda} \lambda^{2n} \right). \quad (10.3)$$

En fait, jusqu'à un ordre donné n , qui dépend du type de multiplet considéré, $B_{2n}([j])$ est nul ! C'est l'un des effets magiques de la supersymétrie. Bien sûr, l'égalité entre les degrés de liberté fermioniques et bosoniques donne $B_0([j]) \equiv 0$ pour toute représentation $[j]$. Pour une théorie $N_4 = 4$, on constate aisément que $B_n([j]) = 0$ pour $n = 0, 2$ et quelque soit la représentation choisie, que $B_4 = 0$ pour n'importe quel multiplet long ou intermédiaire (ici $2M = z_1 > z_2$), que $B_4([j]) = (-1)^{2j} \frac{3}{2} (2j+1)$ pour un multiplet court et enfin que $B_4 \neq 0$ pour un multiplet de masse nulle [55,72]. Ainsi pour une théorie $N_4 = 4$, ne contribuent au calcul de l'action effective (10.2) que des multiplets courts et de masse nulle. Et bien que dans la limite perturbative de la théorie, ne contribuent que les particules de masse nulle chargées sous le groupe de jauge, dans la limite non perturbative, les états non perturbatifs chargés présents dans les multiplets courts contribuent aussi à l'amplitude (10.2). Ainsi dans le régime de couplage fort, des états perturbatifs deviennent les états fondamentaux de la théorie des champs qui parcourent la boucle de (10.2). J'aurai l'occasion de donner d'autres exemples de ce phénomène dans le chapitre V.

11. Modes zéros et quantification

Les solutions précédemment calculées sont des sources chargées magnétiquement ou électriquement des équations classiques de la supergravité. Elles ne dépendent que des coordonnées transverses y^i et brisent la symétrie sous le groupe de super-Poincaré de l'espace-temps \mathcal{M}_{10} . Cette brisure de symétrie donne naissance à des paramètres dont la variation ne change pas l'énergie du système. La quantification de cette solution revient

(entre autres) à décomposer les coordonnées transverses en modes propres pour l'opérateur différentiel qui donne les équations du mouvement. Dans cette décomposition apparaît une fonction propre associée à la valeur propre nulle de cet opérateur différentiel : $m_0^i(X^i)$. C'est un *mode zéro* [76,70]. Ce mode zéro est d'énergie nulle mais dépend non seulement des degrés de liberté de translation transverse à la p -brane, mais encore de tous les paramètres dont dépendent les familles de solutions solitoniques. Les modes zéros décrivent les mouvements physiques du système suivant les directions spéciales qui ne nécessitent pas d'énergie supplémentaire. Pour quantifier correctement ce système, il est nécessaire de transformer ces modes zéro en des variables dynamiques par une dépendance en les coordonnées σ^a de la surface d'univers de la p -brane : $m_0^i(X^i(\sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} m_0^i(\sigma)$. Ainsi un champ général s'écrit $\phi(X^a, m_0^\alpha(\sigma))$. Ces modes zéro paramétrisent l'espace des modules des configurations des solutions solitoniques. Pour des configurations avec au moins deux solitons, la variation de l'énergie d'une telle configuration avec m_0 est

$$\delta_{m_0} E = \frac{1}{2!} g_{\alpha\beta} \delta m_0^\alpha \delta m_0^\beta + \dots \quad (11.1)$$

La dérivée seconde de l'énergie par rapport aux modules donne une métrique de l'espace des modules, munissant celui-ci d'une structure riemannienne. Les solutions de soliton sont représentées par des géodésiques. Les fluctuations autour de la solution $\phi(x, m_0^\alpha)$ sont décrites par un modèle sigma

$$\mathcal{S} \sim \int d^{p+1}\sigma \left(\frac{1}{2!} g_{\alpha\beta} \partial_a m_0^\alpha \partial_b m_0^\beta g^{ab} + \mathcal{O}((\delta m_0)^4) \right) .$$

Dans le cadre des théories des champs supersymétriques, apparaissent également des modes zéros fermioniques, partenaires supersymétriques des modes zéros bosoniques précédemment évoqués. On peut montrer que l'espace des modules de ces théories présente une structure supersymétrique et la géométrie d'un espace kählerien (pour $N_{\text{susy}} = 2$) ou hyperkählerien (pour $N_{\text{susy}} = 4$) [77,78]. À cette action doivent être ajoutés les termes d'interaction issus des différents couplages présents dans l'action initiale des solitons [79,80]. Quantifier ces fluctuations revient en particulier à déterminer les corrections quantiques à la métrique $g_{\alpha\beta}$. Une fois encore, si la théorie possède suffisamment de supersymétries ($N_{\text{susy}} \geq 4$), la métrique n'est pas corrigée. Nous verrons des exemples explicites de ces phénomènes dans le chapitre V. De façon générale, on développe l'énergie d'interaction entre deux solitons à un ordre donné en δm_0^α . À l'ordre zéro, dans les systèmes avec de la supersymétrie, on constate une annulation de la force statique entre solitons de même nature. L'ordre $(\delta m_0^\alpha)^n$ auquel commence ce développement dépend de la supersymétrie. Plutôt que de faire une théorie générale de ces phénomènes, je renvoie le lecteur à la section 16 où il pourra trouver des exemples précis où je relie l'ordre n au nombre de supersymétries de la théorie (voir les équations (17.6), (17.7) et (17.8)).

• Retour sur les solutions de p -brane

Les solutions solitoniques (9.2) et (9.3) brisent la moitié des supersymétries. Dans le cas des théories avec $N_{10} = 2$, les fluctuations fermioniques sont données par les seize modes zéros fermioniques. Ces modes zéros se partagent en huit opérateurs de création et annihilation avec lesquels on construit l'espace de Fock de dimension 2^8 associé au vide quantique contenant la solution solitonique. Ceci se réinterprète maintenant comme la manifestation de la saturation maximale de l'égalité BPS, donnant un état de multiplet court ou 1/2-BPS. Si l'on se souvient qu'un état de p -brane doit être considéré comme enroulé sur un tore de dimension p (*confer* section 6), on conçoit facilement que cet état est donné par le volume de ce tore multiplié par la charge de la p -brane (voir (6.3)), ce qui correspond bien à l'égalité $M = z_{1,2,3,4}$ des états 1/2-BPS. En plus des solutions présentées dans les équations (7.7) et (7.10), on trouve des configurations multicentrales données par [32]

$$H(y) = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{(y - y_i)^{7-p}},$$

typiques de l'équilibre statique entre plusieurs p -brane parallèles. La stabilité d'une telle solution nécessite que la force d'interaction entre les p -branes soit nulle. J'expliquerai dans la section 16 que ceci est une conséquence de la supersymétrie du problème.

Dans le cas de la supercorde hétérotique, la solution de NS5-brane (9.2) porte également des nombres quantiques associés aux degrés de liberté de jauge. On peut montrer que cette solution de p -brane n'est pas seulement valable dans la limite des grandes tailles caractéristiques et la limite infrarouge des théories de supercordes, mais qu'elle est exacte car décrite par un modèle sigma non linéaire avec $(0, 1)$ supersymétrie sur sa surface d'univers de dimension six. Pour le cas de la NS5-brane des théories de type IIA et IIB avec $N_{10} = 2$, on obtient cette fois un modèle sigma en dimension six avec respectivement $(0, 2)$ et $(1, 1)$ supersymétries. La détermination de ces théories suit les règles générales expliquées précédemment, la structure différentielle de la variété étant construite au moyen des modes zéros de la solution solitonique. Ces modes zéros fermioniques permettent de construire la structure différentielle voire (hyper)kählerienne de l'espace des modules. Ce sont par exemple les conditions de chiralité des modes zéros fermioniques qui différencient les théories de type IIA et IIB.

Nous avons vu que les configurations de Dp -brane (9.3) préservent une sous-algèbre supersymétrique $N_{10} = 1$. Cela veut dire que les fluctuations quantiques autour de cette solution s'interpréteront en termes des représentations de cette algèbre. Celles-ci appartiennent aux représentations massives de la théorie $N_{10} = 1$. Mais quel genre de théorie quantique est-ce ? Est-ce une théorie des champs de type supergravité ou autre ? Je vais dans le chapitre suivant expliquer que ces Dp -branes n'interviennent pas dans des processus perturbatifs de la théorie des supercordes, et que leurs excitations sont celles de petites supercordes ouvertes accrochées sur la surface d'univers de la Dp -brane. Les fluctuations de la membrane seront donc représentées par les modes d'oscillations massifs ou non de ces petites supercordes. Le reste de ce mémoire est consacré à l'exposition de cette vision et de ses conséquences sur notre compréhension de la physique quantique à très courte échelle.

12. La supercorde comme objet fondamental

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les théories de supergravité avec une ou deux supersymétries admettent comme solution une supercorde dont la masse ne tend pas vers l'infini dans la limite de couplage faible $g_s \rightarrow 0$. Pour les théories $N_{10} = 2$, elle est décrite par une action somme de la contribution (7.1) et du terme de Wess-Zumino supersymétrique (7.2) + (8.3). Une théorie $N_{10} = 1$ offre en revanche deux possibilités : la théorie de supercorde ouverte, dite de type I, est obtenue par projection de celle de type IIB respectivement à la symétrie de renversement de l'orientation Ω sur la surface d'univers de la corde. Cette projection est représentée sur les états fermioniques par un opérateur qui commute avec celui associé à la projection GSO $(1 - (-)^F)/2$. Comme on tronque la théorie quantique de type IIB, il est nécessaire de vérifier que cette construction ne contient pas d'anomalies. Les conditions d'annulation d'anomalies gravitationnelles et de Yang-Mills imposent l'existence de degrés de liberté de jauge dans le groupe $SO(32)$ et l'ajout des états tordus sous l'action de Ω (les *crosscaps*) [34,53,54,81]. Les degrés de liberté de jauge sont portés par des charges, les facteurs de Chan-Paton, appartenant à la représentation vectorielle **32** de $SO(32)$, placées aux extrémités libres de la corde. Le couplage au champ de jauge se fait alors par l'intermédiaire du bord $\partial\Sigma_2$ selon

$$\mathcal{S}_{\text{jauge}}^{\text{type I}} = Q \int_{\partial\Sigma_2} d\sigma^a \left(\partial_a x^\mu A_\mu - \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu \right). \quad (12.1)$$

La deuxième théorie avec $N_{10} = 1$ a déjà été abordée dans la section 8, lorsque que j'ai analysé la possibilité de n'identifier que les degrés de liberté bosoniques de chiralité gauche avec les degrés de liberté fermioniques. Encore une fois, l'annulation des anomalies impose que cette théorie contient des degrés de liberté de jauge représentés par trente deux fermions de chiralité droite λ^A couplés selon [52]

$$\mathcal{S}_{\text{kac-moody}}^{\text{het}} = T_s \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \lambda^A \bar{\partial} \lambda^B \delta_{AB}. \quad (12.2)$$

Cette théorie de supercordes, dite hétérotique, est décrite par le lagrangien somme du terme de Nambu-Goto (7.1), des termes de Wess-Zumino (7.2) + (8.3) et du terme de couplage de jauge $\mathcal{S}_{\text{kac-moody}}$. Si la quantification d'un objet étendu est *a priori* difficile même dans le formalisme (7.3), le cas de la (super)corde $p' = 1$ se singularise par la présence d'un énorme groupe de symétrie de la théorie sur la surface d'univers, les symétries conformes, qui rend l'action (7.3) facilement quantifiable. On a vu au début de la section 7 que cette action

est classiquement équivalente à l'action de Nambu-Goto. Vérifier l'équivalence quantique entre deux formulations fonctionnelles revient à déterminer les normalisations des deux intégrales fonctionnelles. Les subtilités de ces calculs apparaissent généralement dans les normalisations des différents modes zéros. Plutôt que d'en faire une théorie générale, je reviendrai sur ces problèmes lorsqu'ils se poseront, notamment dans les sections où j'étudierai les transformations de dualité entre la théorie hétérotique et de type I dans la section 21. À partir de maintenant, je me placerai le plus souvent dans le formalisme de Polyakov.

13. Jauge du cône de lumière

Les équations du mouvement déduites de la variation des actions précédentes sont non linéaires. Heureusement, il est encore possible de fixer une jauge dite *jauge du cône de lumière* :

$$\Gamma^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^0 \pm \Gamma^9)$$

$$\Gamma^+ \theta^A = 0 \quad \text{pour } A = 1, 2.$$

qui élimine la moitié des degrés de liberté fermioniques et linéarise les équations du mouvement [52]. Ces degrés de liberté éliminés sont ceux qui sont projetés par la symétrie kappa (8.4). Dans cette jauge la métrique de la surface d'univers de la supercorde se réduit à la métrique plate $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$. Et $X^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^9) = x^+ + p^+ \sigma^0$ est une fonction linéaire du temps sur la surface d'univers. Cette jauge permet de décomposer $\text{SO}(1,9)$ en $\mathbb{E}_2 \times \text{SO}(8)$. Les coordonnées fermioniques θ^A se transforment selon les représentations spinorielles de chiralité opposée $\mathbf{8}_s$ et $\mathbf{8}_c$ de $\text{SO}(8)$. Les coordonnées bosoniques X^i ($i = 1, \dots, 8$) se transforment selon la représentation vectorielle $\mathbf{8}_v$ de $\text{SO}(8)$. Par convention θ^1 appartiendra toujours à la représentation $\mathbf{8}_s$, θ^2 sera dans $\mathbf{8}_s$ aussi pour les théories de type IIB et de type I et sera dans $\mathbf{8}_c$ pour la théorie de type IIA. Comme dans cette jauge, les équations du mouvement pour les champs sont linéaires la quantification de la théorie se fait en développant les champs en mode d'oscillation. Pour les détails, je renvoie le lecteur aux ouvrages de base [7]. Je vais me concentrer sur les caractéristiques particulières du formalisme que j'utiliserai dans la suite.

- Action de la supercorde

Pour les supercordes de type II, l'action de la supercorde dans la jauge du cône de lumière s'écrit

$$\mathcal{S}_{\text{l.c.}} = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \left(T_s \partial_a X^i \partial^a X^i - i \bar{\mathcal{S}}^a \rho \cdot \partial \mathcal{S}^a \right).$$

$\rho^{0,1}$ sont les matrices de Pauli habituelles. On remarquera que le choix de la jauge du cône de lumière a éliminé le terme quartique des fermions. J'ai défini les nouvelles coordonnées

fermioniques $S \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{T_s p^+} \theta^1$ et $\bar{S} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{T_s p^+} \theta^2$, normalisées de manière à ce que leurs modes zéros vérifient les relations d'anticommutation habituelles de l'algèbre de super-Poincaré.⁹ Elles ont été regroupées dans le spineur de $\text{SO}(1,9)$ $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} (S, \bar{S})$. Comme la jauge du cône de lumière ressemble à la jauge statique utilisée précédemment, on interprète cette décomposition du spineur de Majorana-Weyl, \mathcal{S} , comme relative à la chiralité gauche et droite de la surface d'univers de la supercorde. Si nous considérons une théorie des supercordes fermées, les fermions vérifient les conditions de périodicité

$$S^{Aa}(\sigma^1, \sigma^0) = S^{Aa}(\sigma^1 + \pi, \sigma^0).$$

Si l'on identifie les valeurs des spineurs S^1 et S^2 en $\sigma^1 = 0$ et π , la supersymétrie est réduite à $N_{10} = 1$, on obtient la théorie des supercordes de type I.

De l'analyse de l'algèbre de super-Poincaré en présence d'une supercorde ouverte de type I, on déduit que les supercharges sont données par

$$Q^a = \sqrt{2p} S_0^a, \quad Q^{\dot{a}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \gamma_{a\dot{a}}^i \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_{-n}^a \alpha_n^i.$$

On remarque que l'une des deux supercharges est proportionnelle au mode zéro du spineur S de la théorie de type I, alors que l'autre supercharge est une somme du produit des modes zéros fermioniques et bosoniques. Ceci n'est que la manifestation de la brisure de la symétrie sous l'algèbre de super-Poincaré : la symétrie brisée par la supercorde est réalisée non linéairement et celle préservée est donnée par les modes zéros fermioniques associés (voir la section 11). Les théories de supercordes fermées sont obtenues par produit tensoriel de deux algèbres $N_{10} = 1$ avec des chiralités gauche et droite opposées pour la théorie de type IIa et identiques pour celle de type IIb.

• Spectre de masse nulle

Le spectre de masse nulle de la théorie est déduit de l'action des supercharges sur le vide de la théorie. Les fermions S^a sont choisis dans la représentation $\mathbf{8}_s$ de $\text{spin}(8)$. Ainsi [52] les théories de type I et hétérotiques contiennent le multiplet de la supergravité $N_{10} = 1$ composé du graviton $g_{\mu\nu}$, du dilaton ϕ , d'un tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ pour l'hétérotique et de $C^{(1)}$ pour la théorie de type I et enfin d'un dilatino et d'un gravitino. Ces théories contiennent aussi des bosons de jauge A_μ^a ($a = 1, \dots, 496$) et leurs partenaires supersymétriques. La théorie de type IIa contient le graviton, le dilaton, une un-forme $C^{(1)}$, une deux-forme $B_{\mu\nu}$, une trois-forme $C^{(3)}$, deux dilatini et deux gravitini. Enfin, la théorie de type IIb contient le graviton, le dilaton, une zéro-forme $C^{(0)}$, deux deux-formes $C^{(2)}$ et $B_{\mu\nu}$, une quatre-forme $C^{(4)}$ avec courbure autoduale, deux dilatini et deux gravitini. Toutes ces théories ont en commun le graviton et le dilaton.

⁹ Je prends comme convention $\{S^{Aa}, S^{Bb}\} = \delta^{AB} \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma')$, ainsi les modes zéros de ces fermions donnent une représentation de l'algèbre de Dirac en dimension dix. On remarquera l'absence de π contrairement aux conventions du Green-Schwarz-Witten [52].

14. Formalisme covariant

La quantification de la corde dans le formalisme covariant permet d'introduire des degrés de liberté fermioniques autrement que selon le procédé précédent. On ne se place plus cette fois dans la jauge du cône de lumière, on considère un formalisme explicitement covariant de Lorentz. La partie bosonique de l'action dans ce formalisme est

$$\mathcal{S}_{\text{Bos}} = \frac{T_s}{2} \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}.$$

La partie fermionique est, elle, décrite par des fermions de Neveu-Schwarz-Ramond (NSR)

$$\mathcal{S}_{\text{Fer}} = i \frac{T_s}{2} \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \bar{\psi}^\mu \rho \cdot \partial \psi^\nu \eta_{\mu\nu}.$$

Les variables ψ^μ sont des fermions réels de la surface d'univers de la corde. Ils appartiennent à la représentation vectorielle de $\text{SO}(1,9)$. Ces degrés de liberté vérifient bien des relations d'anticommutation canoniques

$$\{\psi_A^\mu, \psi_B^\nu\} = \frac{1}{T_s} \eta^{\mu\nu} \delta_{AB} \delta(\sigma - \sigma')$$

Ce formalisme est invariant sous les transformations de supersymétrie $N_2 = 1$ de la surface d'univers $\delta_{\text{susy}} X^\mu = i\bar{\epsilon}\psi^\mu$ et $\delta_{\text{susy}} \psi^\mu = \frac{1}{2}\rho \cdot \partial X^\mu \epsilon$. La quantification de la corde dans ce formalisme nécessite d'annuler l'anomalie conforme. Les bosons X^μ ont une dimension conforme 1 et les fermions 1/2, ainsi l'anomalie conforme de ce système (en tenant compte des fantômes bosoniques et fermioniques associés aux invariances par reparamétrisation¹⁰) vaut $15 - 10 \times 1 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$. La variation de l'action $\mathcal{S}_{\text{NSR}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_{\text{Bos}} + \mathcal{S}_{\text{Fer}}$ par rapport à la métrique de la surface d'univers γ donne le tenseur énergie impulsion

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \frac{2}{T_s} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{NSR}}}{\delta \gamma^{ab}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{4} \partial^\lambda X^\mu \partial_\lambda X_\mu \eta_{ab} + \frac{i}{2} \bar{\psi}^\mu \rho_{[a} \partial_{b]} \psi_\mu \end{aligned}$$

son partenaire supersymétrique, le supercourant, obtenu par la variation de l'action par rapport au gravitino est

$$T_{F a} = \frac{1}{4} \rho^b \rho_a \psi^\mu \partial_b X_\mu \quad (14.1)$$

Les invariances par reparamétrisations de la corde permettent d'identifier la métrique du modèle sigma de la corde à la métrique conformément plate $\gamma_{ab} = \text{Diag}(-1, 1)$. Le choix de

¹⁰ Normalement, il y a des (super)fantômes qui tiennent compte des invariances par reparamétrisation de la théorie sur la surface d'univers de la supercorde. Je ne les écris pas mais j'en tiens compte lors des décomptes des degrés de liberté physiques.

cette jauge impose les contraintes de Virasoro¹¹ $T_{ab} \equiv 0$ et $T_{F a} \equiv 0$. La conservation de ces courants de Noether dépend des équations du mouvement. Les équations du mouvement de la supercorde sont obtenues par variation de l'action de l'action $\mathcal{S}_B + \mathcal{S}_F$. Je m'intéresse pour l'instant à la partie bosonique de l'action. La variation de l'action bosonique \mathcal{S}_{Bos}

$$\delta \mathcal{S}_{\text{Bos}} = T_s \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \delta X^\mu \partial_a \partial^a X_\mu + T_s \int_{\partial \Sigma_2} d\sigma^a \delta X^\mu \epsilon_{ab} \partial^b X_\mu.$$

doit être nulle. L'annulation du premier terme donne l'équation du mouvement $\partial_a \partial^a X^\mu = 0$ pour les coordonnées X^μ qui sont donc des fonctions harmoniques des coordonnées σ^a . Le deuxième terme donne les conditions au bord que doivent vérifier ces coordonnées. Pour une corde fermée, il n'y a pas de bord et donc, le second terme est identiquement nul. Pour une corde ouverte, on doit l'annuler à chaque bord. On peut choisir soit une condition au limite de surface libre telle que la dérivé normale soit nulle au bord de la surface [34]

$$\epsilon_{ab} \partial^b X^\mu = 0 \quad (14.2)$$

dite *condition de Neumann* ou une condition de bord fixée par une contrainte de type *Dirichlet*

$$\delta X^\mu = 0 \quad (14.3)$$

La condition de Neumann respecte l'invariance de Poincaré et donc la conservation du tenseur énergie-impulsion. Celle de Dirichlet brise cette invariance et il y a une possibilité de perte d'impulsion pour les directions parallèles au bord de la surface. C'est l'indication de la présence d'un objet étendu sur lequel s'appuie la corde. C'est aussi l'origine de la dénomination *Dp-brane* introduite au chapitre précédent, le D se réfère aux conditions de Dirichlet. Le variation de la partie fermionique \mathcal{S}_{Fer} est

$$\delta \mathcal{S}_{\text{Fer}} = iT_s \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \delta \psi^\mu \rho \cdot \partial \psi_\mu + \int_{\partial \Sigma_2} d\sigma^a \epsilon_{ab} \delta \psi^\mu \rho^b \psi_\mu. \quad (14.4)$$

Le premier terme donne l'équation du mouvement $\rho \cdot \partial \psi^\mu = 0$. Et le second terme, les conditions aux limites sur les fermions. Dans la suite, je paramétrise la surface d'univers de la corde avec les variables $\tau \in [0, 2\pi]$ pour ce que j'appelle le temps et $\sigma \in [0, 2\pi]$ pour la coordonnée le long de la corde fermée ou $\sigma \in [0, \pi]$ pour une corde ouverte. Il est aussi pratique d'introduire les coordonnées de la quantification radiale définies par $\ln(z) \stackrel{\text{def}}{=} i(\tau + \sigma)$ et $\ln(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} i(\tau - \sigma)$, les fermions se décomposant alors en une partie gauche ψ^μ et une partie droite $\bar{\psi}^\mu$. Relativement à ce système de coordonnées, le terme de bord de la variation de l'action fermionique donne $\psi(0, \tau) = \bar{\psi}(0, \tau)$ et $\psi(\pi, \tau) = \pm \bar{\psi}(\pi, \tau)$.

¹¹ Ces relations sont classiques, il est entendu que la version quantique de ceci est $T_{ab}|\text{Vide}\rangle = 0$. Les conditions de périodicité classiques que l'on écrira sur le supercourant seront quantifiées en demandant qu'elles annulent le fondamental de la théorie.

La première condition est une convention reportant le choix des conditions aux bords sur le signe de la seconde équation. Les équations du mouvement pour les fermions impliquent la conservation de la partie fermionique du tenseur énergie-impulsion. Le supercourant doit vérifier les conditions de périodicité

$$\begin{aligned} T_F(0, \tau) &= \bar{T}_F(0, \tau) \\ T_F(\pi, \tau) &= \pm \bar{T}_F(\pi, \tau). \end{aligned} \tag{14.5}$$

Bien plus que les conditions relatives aux fermions ψ^μ , c'est (14.5) qui conditionne les propriétés supersymétriques, de notre théorie. Tout comme la non conservation du tenseur énergie-impulsion est le signal de la brisure de l'invariance de Poincaré, la non conservation du supercourant est le signal de la brisure de la supersymétrie d'espace-temps. Dans une théorie supersymétrique le supercourant est toujours conservé indépendamment des conditions de bords pour les bosons et les fermions. Lorsque le supercourant est périodique, le signe choisit dans (14.5) est $+$ et le secteur de la théorie appelé *secteur de Ramond* (R) alors que le choix du signe $-$ correspond à un secteur antisymétrique appelé *secteur de Neveu-Schwarz* (NS). Dans le cas d'une théorie de supercordes fermées, les conditions de périodicité du supercourant gauche T_F et droit \bar{T}_F peuvent être choisies indépendamment. Ces choix correspondent aux différentes structures de spin, NS-NS, R-R, NS-R et R-NS, existantes sur la surface d'univers de la supercorde. De plus, la présence d'un tachyon dans le spectre de ces théories et le souhait d'une théorie supersymétrique d'espace-temps, nécessite de tronquer le spectre par la projection GSO. Pour les détails, je renvoie le lecteur aux ouvrages de référence [7]. Les états de masse nulle énumérés dans la section précédente sont issus des secteurs NS-NS pour le graviton, le dilaton et le tenseur antisymétrique de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$, du secteur R-R pour les formes antisymétriques notées $C^{(p)}$, et enfin des secteurs R-NS et NS-R pour les partenaires supersymétriques de ces bosons.

- Couplages aux champs Ramond

Le couplage de ces états de masse nulle à une supercorde est donné par l'opérateur de sommet [35,34,82]

$$V_{RR} \sim \mathbb{F}_{ab} \int d^2\sigma S^a (\Gamma^0 \bar{S})^b e^{ip \cdot X}.$$

S et \bar{S} sont les fermions en jauge du cône de lumière, \mathbb{F}_{ab} est la polarisation de l'état Ramond émis. Dans une base de l'algèbre de Dirac définie en dimension dix, le tenseur de polarisation se décompose selon

$$\mathbb{F}_{ab} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} F_{\mu_1 \dots \mu_k} (\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k})_{ab}.$$

Les conditions de chiralité sur les spineurs se retranscrivent en $\Gamma_{11}\mathbb{F} = \pm\mathbb{F}\Gamma_{11} = \mathbb{F}$. Le choix du signe est $+$ pour la théorie de type IIa et $-$ pour celle de type IIb. Ce qui donne pour les coefficients $F_{(k)}$

$$F^{\mu_1 \dots \mu_k} = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}}{(10-k)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{10}} F_{\mu_{k+1} \dots \mu_{10}},$$

ou dans le langage des formes différentielles $F_{(k)} = \pm \star F_{(10-k)}$. Les conditions de Virasoro (l'équation du mouvement des champs $C^{(p)}$) impliquent que $(p_\mu \Gamma^\mu) \mathbb{F} = \mathbb{F} (p_\mu \Gamma^\mu) = 0$, qui se réécrivent $dF_{(k)} = d \star F_{(k-1)} = 0$. On voit donc que localement ces polarisations sont les tenseurs de courbure associés aux potentiels vecteurs représentés par les champs Ramond $F_{(p+2)} = dC^{(p+1)}$. Comme seuls les tenseurs de courbure apparaissent dans les opérateurs de sommet de ces états Ramond, il n'est pas possible de créer ces derniers par un processus perturbatif en théorie des supercordes. Si l'on se réfère à la discussion du chapitre précédent, les objets chargés sous ces champs sont les membranes étendues Dp -branes. Une deux-forme de type Ramond couple à un objet de dimension un, mais ce n'est pas la supercorde perturbative car l'émission d'un état chargé sous le champ Ramond viole la conservation indépendante des nombres fermioniques de chiralité gauche et droite, ce qui est impossible puisque ces nombres sont conservés ordre par ordre dans la série perturbative.

15. Structure des Dp -branes

On avait remarqué dans la section 9 que les solutions des Dp -branes chargées sous les champs Ramond préservent une sous-algèbre $N_{10} = 1$. La quantification des modes zéros de cette algèbre est, en fait, une théorie de supercordes ouvertes dont les extrémités sont contraintes à évoluer sur la surface d'univers de la Dp -brane [33]. Je considère donc que le vide quantique contient une solution de Dp -brane. Dans ce vide annihilé par la moitié des supercharges, la quantification de ces supercordes ouvertes réalisera la théorie de la surface d'univers de ces Dp -branes.

• Coordonnées et conditions aux limites

En présence d'un objet étendu de dimension $p+1$ localisé en $X^{p+1} = \dots = X^9 = 0$, les coordonnées bosoniques vérifient des conditions aux bords de type Neumann (14.2) pour les indices $\mu = 0, \dots, p$ et de type Dirichlet (14.3) pour les $9-p$ coordonnées transverses $X^{i=p+1, \dots, 9}$. Les conditions sur les fermions seront issues des conditions de périodicité du supercourant. La décomposition en modes d'une coordonnée $X^{\mu=0, \dots, p}$ vérifiant les conditions de Neumann aux deux extrémités libres de la supercorde, (secteur NN) est [33]

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\alpha' p^\mu \ln(z\bar{z}) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m} (z^{-m} + \bar{z}^{-m}).$$

x^μ et p^μ sont des modes zéros associés à la position et à l'impulsion du centre de masse de la supercorde. Les modes α_m^μ vérifient les relations de commutation

$$[x^\mu, p^\mu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}.$$

Dans le secteur ND, les coordonnées $X^{i=p+1, \dots, 9}$ qui satisfont des conditions de Dirichlet en $\sigma = 0$ et des conditions de Neumann en $\sigma = \pi$ se décomposent en

$$X^i = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{\alpha_r^i}{r} (z^{-r} - \bar{z}^{-r}).$$

On constate cette fois que les modes sont des demi-entiers et qu'il n'y a pas de modes zéros. Enfin, il existe des supercordes ouvertes dont les deux extrémités sont fixées sur la surface de la $p+1$ -brane. Les coordonnées X^i de ces cordes vérifient des conditions de Dirichlet aux deux extrémités tandis que les coordonnées X^μ sont dans le secteur NN. Les coordonnées de type Dirichlet-Dirichlet DD se décomposent en

$$X^i = -i\frac{\delta x^i}{2\pi} \ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m} (z^{-m} - \bar{z}^{-m})$$

δx^i est un mode zéro de translation représentant la distance entre les deux extrémités $\sigma = 0$ et $\sigma = \pi$. Le développement se fait en modes entiers.

La masse d'un état excité bosonique est donnée par $M_B^2 = -p^\mu p_\mu = M_0^2 + \frac{1}{\alpha'} (a_B + \sum_{n=1}^{\infty} n N_n \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} r N_r)$ où $N_{n,r}$ est le nombre d'occupation du niveau excité caractérisé par n et r . a_B est l'intercept, l'énergie de point zéro des bosons physiques : $a_B = (p-1) \times (-\frac{1}{24}) + (9-p) \times (\frac{1}{48})$. Et M_0^2 est la masse des cordes tendues entre deux conditions de Dirichlet $M_0^2 = -(\delta x^i/\pi)^2 (1/2\alpha')^2$. Les conditions de Dirichlet ne changent pas les conditions aux limites des (super)fantômes associés aux symétries (super)conformes car elles sont compatibles avec les invariances par reparamétrisation de la corde.

Sur le bord induit par la présence de la D-brane, les supercourants vérifient la condition de réflexion $(T_F \pm \bar{T}_F)|_{\text{Bord}} = 0$. Cette condition provient de la condition de réflexion du gravitino sur le plan que définit l'objet étendu. Ce plan ne préserve que la moitié des supersymétries initiales de la théorie. Ces conditions fixent le développement en modes des fermions. Pour un choix de signe $+$ correspondant au secteur Ramond R , les fermions ψ^μ , des secteurs Neumann NN et DD, ont un développement en modes entiers

$$\psi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m^\mu (z^{-m} + \bar{z}^{-m})$$

et en modes demi-entiers pour les fermions $\psi^{i=p+1,\dots,9}$ du secteur DN

$$\psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} d_r^i (z^{-r} + \bar{z}^{-r}).$$

Dans le secteur Neveu-Schwarz *NS*, correspondant au choix du signe $-$ dans (14.5), les fermions ψ^μ des secteurs NN et DD ont un développement en modes demi-entiers

$$\psi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} d_r^\mu (z^{-r} + \bar{z}^{-r})$$

et dans le secteur DN, les fermions ψ^i ont un développement en modes entiers

$$\psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m^i (z^{-m} + \bar{z}^{-m}).$$

L'énergie de point zéro des fermions physiques est $a_R = (p-1) \times (\frac{1}{24}) + (9-p) \times (-\frac{1}{48})$ dans le secteur Ramond et $a_{NS} = (p-1) \times (-\frac{1}{48}) + (9-p) \times (\frac{1}{24})$. Ainsi, l'énergie de point zéro totale est $a_B + a_R = 0$ dans le secteur Ramond, et $a_B + a_{NS} = \frac{9-p}{8} - \frac{1}{2}$ dans le secteur Neveu-Schwarz. On constate que le fondamental du secteur Ramond est toujours de masse nulle alors que suivant le nombre de conditions mixtes de ND, l'énergie de point zéro peut être strictement positive dans le secteur Neveu-Schwarz. Dans ce cas ce secteur ne contient pas d'état de masse nulle. Selon la discussion de la section 11, les états dépendent des modes zéros bosoniques x^μ , p^μ et δx^i du système de Dp -branes et forment avec les modes zéros fermioniques des multiplets supersymétriques. Ces multiplets de mode zéros ont exactement la structure nécessaire pour que les D-branes complètent, à coté des états perturbatifs des supercordes, les représentations des groupes de dualité. L'unité des théories de supercordes surgit donc de la compréhension de la physique de couplage fort !

Je vais présenter maintenant la structure des D-branes des théories de type I et de type II, en montrant comment celles-ci s'insèrent dans la vision globale de la théorie des supercordes, représentée par la figure 1.

- D-branes de la théorie de type I

La théorie de type I perturbative brièvement présentée dans la section 12, contient uniquement des extrémités libres avec des conditions de Neumann. Dans le langage précédent, ces extrémités évoluent sur une D9-brane. On interprète naturellement l'indice de jauge par la présence de trente deux solutions de D9-branes. Une D9-brane est une membrane qui

rempli totalement l'espace-temps et couple à une dix-forme selon $\mu_{10} \int A^{(10)}$ sachant que les états tordus de crosscaps couplent à cette forme selon $-32\mu_{10} \int A_{(10)}$. Cette charge $32 = 2^5$ compte le nombre de modes zéros fermioniques qui couplent à cet état [54,81]. Comme une dix-forme de \mathcal{M}_{10} ne se propage pas, les équations du mouvement de cette charge imposent de mettre 32 D9-brane dans notre vide quantique pour compenser la fuite de charges sous A_{10} issues des états de crosscaps. Ces états tordus, appelés *9-plan d'orientifold*, sont vus comme des plans infinis de dimension dix qui ne portent pas de charge perturbative. Ils sont issus de l'action de la projection Ω . De tels états apparaîtront dès que nous introduiront une projection de type Ω dans la théorie (voir par exemple [83]).

De l'analyse précédente du spectre de masse nulle nous savons que la théorie de type I ne possède qu'un champ Ramond donné par une deux-forme. Il existe donc une solution de D1-brane chargée électriquement et une solution duale de D5-brane chargée magnétiquement relativement à ce champ. Le secteur non perturbatif de la théorie de type I est défini par rapport à un vide quantique contenant des configurations de D1-brane [38] et de D5-brane [84]. Je vais détailler les structures effectives de la D1-brane et de la D5-brane données par les excitations de masse nulle des supercordes ouvertes dans les différents secteurs de la théorie, R et NS avec les conditions aux limites DD, ND et NN. Ce sera l'occasion d'illustrer par un exemple précis la discussion générale sur les modes zéros des solitons du chapitre précédent.

Le spectre de masse nulle des supercordes accrochées à la surface d'univers de la D1-brane contient un boson vectoriel $A_\mu(x^0, x^1)$ et huit scalaires $\phi^i(x^0, x^1)$, obtenus par action d'un opérateur de création "fermionique" sur le fondamental du secteur NS : $d_{1/2}^\mu|0\rangle$ et $d_{1/2}^i|0\rangle$. Le boson vectoriel associé à l'opérateur de sommet $\int A_\mu \partial_t X^\mu$ (confer l'équation (12.1)) est éliminé par la projection $(1+\Omega)/2$ car la dérivée tangentielle au bord de la corde est impaire sous l'action du renversement de l'orientation de la surface d'univers. Les huit scalaires transverses $\phi^i(x^0, x^1)$ associés à l'opérateur de sommet $\int \phi_i \partial_n X^i$ subsistent car la dérivée normale est paire sous l'action Ω . La projection Ω élimine le boson de jauge du spectre. Il reste donc les huit coordonnées collectives bosoniques $\phi^i(x^{0,1})$ associées aux degrés de liberté de translation transverses, fonctions des modes zéros des coordonnées NN. Les modes zéros des coordonnées ψ^i (DD) donnent une représentation de l'algèbre de Clifford $\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2\eta^{ij}$ avec $(i, j) \in \{2, \dots, 9\}^2$, qui contient 2^8 états. Dans l'espace de ces états de masse nulle l'opérateur de projection GSO est représenté par $(-)^F = \Gamma^0 \dots \Gamma^9$ et l'opérateur de renversement d'orientation de la surface d'univers agit comme¹² $\Omega = -\Gamma^0 \Gamma^1$. C'est-à-dire qu'un fermion de masse nulle vérifie $S = \Gamma^0 \dots \Gamma^9 S = -\Gamma^0 \Gamma^1 S$. La première condition est le choix de la chiralité de $SO(1,9)$ et la seconde, celle de la surface d'univers. Ainsi, conformément à la décomposition de $SO(1,9)$ en $SO(1,1) \times SO(8)$, S est dans la

¹² Le fondamental Ramond dans le secteur NN est associé à la valeur propre -1 pour Ω , ce qui fixe les signes dans les expressions précédentes.

représentation $\mathbf{8}_+$ de chiralité gauche pour la surface d'univers de la D1-brane et possède $2^4/2 = 8$ degrés de liberté physiques.

Comme il y a aussi trente deux D9-branes dans notre vide, nous devons regarder le spectre de masse nulle des supercordes, accrochées entre la D1-brane et ces premières. Comme l'énergie de point zéro du secteur NS vaut $a_B + a_{NS} = 1/2$, il n'y a pas d'états de masse nulle dans ce secteur. Dans le secteur Ramond, les modes zéros fermioniques sont issus des coordonnées $\psi^{\mu=0,1}$ du secteur NN. Ces modes zéros fermioniques ont un indice vectoriel de $SO(32)$ issu des facteurs de Chan-Paton : $\lambda^A = (\psi_0^\mu|A\rangle, \psi_0^\mu|A\rangle)$. La projection GSO élimine la moitié de ces modes zéros : $\Gamma^{01}\lambda = \lambda$. λ est un fermion de chiralité droite de la théorie de la surface d'univers de la D1-brane.

En résumé, la D1-brane de type I est habillée de huit coordonnées bosoniques $\phi(x^0, x^1)$, d'un fermion transverse S dans $\mathbf{8}_+$ et de trente deux fermions de la surface d'univers λ^A . C'est la structure de la supercorde hétérotique avec un groupe de jauge $SO(32)$. La supercorde hétérotique possède aussi une projection GSO, qui est vue ici comme une holonomie \mathbb{Z}_2 autour des extrémités des cordes accrochées sur la D1-brane reliquat de la symétrie continue $U(1)$ associée au boson de jauge A_μ , éliminée par la projection de parité. L'holonomie autour d'une coordonnée de type Neumann est $+1$ et -1 autour d'une coordonnée de type Dirichlet. Nous sommes ici en présence d'une représentation de la corde hétérotique comme un soliton de la supercorde de type I [38].

Je vais, maintenant, décrire brièvement la quantification de la D5-brane de type I [84]. Cet objet est le dual magnétique de la D1-brane précédemment construite. On vient de voir que cette D1-brane est une version non perturbative (relativement à la supercorde de type I) de la supercorde hétérotique. Nous avons vu dans la section 7, que la corde hétérotique chargée électriquement sous la deux-forme de Neveu-Schwarz admet la NS5-brane comme solution solitonique duale chargée magnétiquement. Cette NS5-brane est une généralisation des solitons de 't Hooft-Polyakov à la supergravité $N_{10} = 1$ avec un groupe de jauge $SO(32)$. Comme tout soliton d'une théorie de jauge, celui-ci possède une taille caractéristique fixée par l'échelle de variation des champs de jauge qui le définissent. Cette taille, ρ , est de l'ordre de l'inverse de la tension de la corde hétérotique, soit en terme des variables de la corde de type I, $\rho \sim g_s/T_s$ est proportionnelle au rapport de la constante de couplage par la tension de la corde. Dans le secteur perturbatif de la corde de type I, cette solution non perturbative devient de taille caractéristique nulle donnée par la D5-brane de type I, habillée par les degrés de liberté d'hypermultiplet se transformant selon les représentations $(\mathbf{32}, \mathbf{2})$ de $SO(32) \times SU(2)$ de la NS5-brane [84].

Pour une D5-brane localisée en $x^6 = \dots = x^9 = 0$, quatre bosons de masse nulle $\phi^i(x^0, \dots, x^5)$ représentent ses fluctuations transverses. Les extrémités Dirichlet des supercordes accrochées par leur deux bouts sur la D5-brane, portent des facteurs de Chan-Paton

(indiqué par a) dans la représentation fondamentale d'un groupe G . Donc, ces états DD portent des degrés de liberté dans la représentation adjointe du groupe de jauge $\phi_{ab}^i(x^\mu)$. Ces champs couplent à la supercorde par une boucle de Wilson

$$\text{TrPexp} \left(\int_{\Sigma_6} \phi_{ab}^i(x^\mu) \partial_n X^i \right),$$

qui doit être invariante sous l'action de Ω . Comme sous l'action du renversement d'orientation de la corde ouverte la dérivée normale est paire et les charges de Chan-Paton échangées, il faut que ϕ_{ab} soit une matrice symétrique. Les groupes $\text{Sp}(n)$ possèdent justement une représentation adjointe symétrique. Compte tenu de la dualité présumée avec la NS5-brane, un choix naturel est $\text{Sp}(1)$, isomorphe à $\text{SU}(2)$. Les coordonnées transverses se transforment alors selon la représentation **2** de $\text{SU}(2)$. Les supercordes tendues entre la D5-brane et les D9-branes, habillent la D5-brane de deux modes zéros fermioniques (après projection GSO) se transformant selon les représentations **2** de $\text{SU}(2)$ et **32** de $\text{SO}(32)$, issues des degrés de liberté de jauge qui sont eux-mêmes issus des facteurs de Chan-Paton portés par les extrémités Dirichlet et Neumann des supercordes. Cette fois comme $p = 5$, l'énergie de point zéro dans le secteur Neveu-Schwarz est nulle. Nous obtenons donc, dans ce secteur (après projection GSO), deux degrés de liberté bosoniques qui forment, avec les fermions précédents un hypermultiplet se transformant sous les représentations (**32, 2**). Nous avons bien reconstruit la NS5-brane de la théorie hétérotique comme une D5-brane de la théorie de type I porteuse d'un groupe de jauge $\text{SU}(2)$. Comme ces solutions solitoniques sont compatibles avec la supersymétrie, il est possible de superposer, au même point, n configurations de D5-brane. Dans ce cas, les coordonnées transverses ϕ^i ont un indice supplémentaire qui indique sur quelle membrane la supercorde DD s'appuie. Cet indice se combine avec les facteurs de Chan-Paton et les hypermultiplets issus des états des supercordes tendues entre les D5-branes et le D9-branes, se combinent selon une représentation (**32, 2n**) de $\text{SO}(32) \times \text{Sp}(n)$.

- D-branes des théories de type II

La théorie de type IIa contient des Dp -branes de dimensions 0, 2, 4 et 6. Celle de type IIb contient le D-instanton avec $p = -1$, la D-corde de dimension un, la D3-brane autoduale, la D5-brane et la D7-brane duale du D-instanton (qui ne sera pas étudiée dans ce mémoire). Dans le secteur non perturbatif des cordes fermées, il n'y a pas de D9-brane donc les fluctuations de la D-brane viendront uniquement des modes zéros des petites supercordes ouvertes accrochées sur la D-brane. Le spectre bosonique de masse nulle est donné par un boson de jauge $A_\mu(x^0, \dots, x^p)$ et $9 - p$ scalaires transverses $\phi^i(x^0, \dots, x^p)$. L'intégration des modes massifs des supercordes accrochées sur la surface d'univers de la Dp -brane donne l'action de Dirac-Born-Infeld [85,86,87]

$$\mathcal{L}_{\text{DBI}} = T_p \int d^{p+1} \zeta e^{-\phi} [-\det(G_{ab} + \mathcal{F}_{ab})]^{\frac{1}{2}}. \quad (15.1)$$

$G_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}$ est la métrique induite sur la Dp -brane exprimée dans le repère du modèle sigma des cordes ouvertes et $\mathcal{F}_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{ab}$. $F = dA$ est le tenseur de courbure du champ $U(1)$ qui vit sur la D-brane. Les invariances par reparamétrisation sur le bord des supercordes accrochées sur la surface d'univers de la Dp -brane imposent de combiner le tenseur antisymétrique de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$ avec le champ de jauge $F_{\mu\nu}$ en un tenseur invariant $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sous les transformations $\delta B_{\mu\nu} = -\partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]}$ et $\delta F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu]}$. Le facteur $e^{-\phi} = 1/g_s$ traduit que cette action a été obtenue par un calcul de théorie des supercordes ouvertes à l'ordre du disque. Les conditions d'annulation des anomalies modifient aussi le couplage de la D-brane aux champs Ramond en

$$\mathcal{S}_{\text{couplage D-brane}} = \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C \wedge \text{Tr} \left[e^{iF/2\pi} \right] \sqrt{\hat{A}(R)}. \quad (15.2)$$

Dans cette expression $C = \sum_p C^{(p+1)}$ est la somme de toutes les champs Ramond et $\hat{A}(R)$ est l'invariant topologique *A-roof-genus* ou *genre A chapeau* [88,89]. Ces couplages entre les formes du secteur Ramond et le champ de F permettent de former des états liés entre des Dp' -branes et des Dp -branes si la différence $p' - p$ est un multiple entier de 2. Par exemple, La D2-brane de la théorie de type IIA couple à une D0-brane selon $\mathcal{L}_{\text{couplage}} \sim \mu_2 (C^{(2)} + C^{(0)} \wedge F)$. Par ce couplage, on décrit un état lié d'une D2-brane et d'une D0-brane. Le nombre de D0-brane est relié à la valeur du champ magnétique F_{12} présent sur la surface d'univers de la D2-brane. Un exemple important de ce type d'état lié est celui qui existe entre une corde fondamentale de type IIB et une D1-brane [30]. L'énergie de deux tels objets parallèles infinitésimalement proches est donnée par la somme de leurs tensions respectives, à savoir $E = (1 + 1/g_s)T_s$. Comme cette énergie est supérieure à celle de la valeur de l'état BPS de l'algèbre (6.5) chargé sous le champs Ramond $C^{(1)}$, cette configuration n'est pas supersymétrique. En fait, on peut dissoudre la corde fondamentale en un flux sur la D1-brane pour former un état lié 1/2-BPS de charge $(1, 1)$ sous les champs $B_{\mu\nu}$ et $C^{(1)}$ des secteurs Neveu-Schwarz et Ramond. L'excès initial d'énergie est transféré au champ F_{ab} qui vit sur la surface d'univers de la D1-brane. Tous ces phénomènes entrent de façon capitale dans la compréhension des états liés de D-branes et leur dynamique [35,80]. Je reviendrai sur cet aspect dans la chapitre V où j'étudierai le comportement des D-instantons en termes de modèle de super Yang-Mills supersymétrique.

Je vais maintenant détailler quelques propriétés remarquables de ces D-branes.

Chapitre IV

STATIQUE ET DYNAMIQUE DES D-BRANES

Nous venons de voir que la théorie de la surface d'univers des D-branes a une structure plus riche que celle des solutions de p -branes. Je vais raffiner la discussion précédente en considérant des configurations avec plusieurs D-branes euclidiennes enroulées sur des tores. Cela me permettra d'analyser les différentes conditions de brisure de la supersymétrie, ainsi que les différents régimes non perturbatifs accessibles par de telles configurations. Les D-branes sont reliées aux charges centrales des algèbres supersymétriques des théories de supergravité. Ces charges seront fonctions des modules des systèmes de D-branes comme par exemple, la vitesse relative de diffusion, ou la structure complexe du tore sur lequel on les enroule. Nous avons vu que pour une D-brane de la théorie de type II les degrés de liberté du champ de jauge $F_{\mu\nu}$ se combinent avec ceux du tenseur antisymétrique du secteur Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$. Comme une T-dualité selon une direction spatiale échange les degrés de liberté de ce tenseur antisymétrique avec ceux du graviton, on comprend que les configurations du champ de jauge $F_{\mu\nu}$ du lagrangien (15.1), sont en correspondance avec celles des champs de fond gravitationnels. Ainsi donner une vitesse à une D-brane se réinterprète par l'existence d'un champ électrique sur sa surface d'univers [75]. Ou encore, après une T-dualité, la structure kählerienne d'une D1-brane euclidienne, enroulée sur un cycle bidimensionnel exprimée en termes de la valeur moyenne dans le vide du champ antisymétrique du secteur Neveu-Schwarz est alors en correspondance avec les configurations du champ $F_{\mu\nu}$. Le formalisme étant plus simple dans le cas où l'on a un champ de jauge non nul, je vais donc traiter ce cas en expliquant les différences dans le cas des configurations avec des vitesses.

16. Géométrie des configurations de D-branes

Les configurations des D-branes dans le formalisme de la jauge du cône de lumière a été étudié en détail dans [90], on peut aussi consulter la prépublication récente [91]. Comme je n'aurai pas besoin de ce formalisme, je renvoie le lecteur à ces articles. Je vais plutôt me placer dans le formalisme covariant déjà utilisé dans le chapitre précédent. Une D-brane de type II possède un champ $U(1)$ abélien défini sur sa surface d'univers. Pour un champ constant on peut donc écrire un couplage du type de (12.1) [92]

$$\mathcal{S}_{\text{couplage}} = \frac{Q_1}{2} \int d\tau \, F_{\mu\nu} X^\mu \partial_\tau X^\nu|_{\sigma=0} + \frac{Q_2}{2} \int d\tau \, F_{\mu\nu} X^\mu \partial_\tau X^\nu|_{\sigma=\pi}$$

où, cette fois, les indices grecs $(\mu, \nu) \in \{0, \dots, p\}^2$ sont définis sur l'espace tangent à la surface d'univers de la D-brane et Q_1 et Q_2 sont les charges portées par chacun des bouts

de la supercorde. Selon la procédure de la section 14, les équations du mouvement de ces champs s'écrivent

$$\partial_\sigma X^\mu = \frac{Q_1}{T_s} F_\nu^\mu \partial_\tau X^\nu \quad \sigma = 0,$$

$$\partial_\sigma X^\mu = -\frac{Q_2}{T_s} F_\nu^\mu \partial_\tau X^\nu \quad \sigma = \pi.$$

En choisissant une configuration avec seulement un champ électrique dans la direction $\mu = 1$, $E = F_{01}$ et en introduisant les coordonnées $X^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^1)$, les conditions aux bords s'écrivent

$$\partial_\sigma X^\pm = \pm \beta_1 \partial_\tau X^\pm \quad \text{en } \sigma = 0, \quad (16.1a)$$

$$\partial_\sigma X^\pm = \pm \beta_2 \partial_\tau X^\pm \quad \text{en } \sigma = \pi, \quad (16.1b)$$

$$\partial_\sigma X^\mu = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi \text{ pour } \mu \in \{2, \dots, p\} \text{ et} \quad (16.1c)$$

$$X^i = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi \text{ pour } i \in \{p+1, \dots, 9\}. \quad (16.1d)$$

J'ai posé $\beta_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{1,2} E / T_s$. Les coordonnées non influencées par le champ électrique (16.1c, d) ont des développements en modes semblables à ceux donnés dans la section 15. Le développement en modes des coordonnées X^\pm relativement à la base orthonormée [92]

$$\phi_n^\pm(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{n \pm i\epsilon}} e^{-i(n \pm i\epsilon)\tau} \cos[(n \pm i\epsilon)\sigma \mp i \operatorname{argth}(\beta_1)],$$

où $\pi\epsilon = \operatorname{argth}(\beta_1) + \operatorname{argth}(\beta_2)$ est

$$X^\pm = x^\pm + i a_0^\pm \phi_0^\pm(\sigma, \tau) + i \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^\pm \phi_n^\pm(\sigma, \tau) - c.c.]. \quad (16.2)$$

Les modes a_n^\pm sont normalisés de façon à satisfaire les relations de commutation canoniques

$$[a_n^+, (a_n^-)^*] = [a_n^-, (a_n^+)^*] = -1, \quad [x^+, x^-] = \frac{-i}{T_s(\beta_1 + \beta_2)} \text{ et } (a_0^\pm)^* = \pm i a_0^\pm.$$

Sur l'expression de l'hamiltonien de ce système

$$L_{0\text{ bos}}^\pm = - \sum_{n=1}^{\infty} (n - i\epsilon) (a_n^+)^* a_n^- - \sum_{n=0}^{\infty} (n + i\epsilon) (a_n^-)^* a_n^+ + a_B^\pm,$$

on constate que les niveaux d'énergie sont décalés de $i\epsilon$ et que l'énergie résiduelle de point zéro vaut $a_B^\pm = -\frac{2}{24} + \frac{i}{2}\epsilon(1 - i\epsilon)$. Ici encore, comme le champ électrique couple aux bords de la (super)corde, sa présence ne modifie pas le système des fantômes associé aux invariances par reparamétrisation de la corde et comme les coordonnées X^\pm contribuent toujours à

deux unités de charge centrale et l'anomalie conforme s'annule toujours. Les partenaires supersymétriques des coordonnées X^\pm vérifient les conditions aux bords

$$\begin{aligned}\psi_R^\pm &= \frac{1 \pm \beta_1}{1 \mp \beta_1} \psi_L^\pm, \quad \sigma = 0 \\ (-1)^{a+1} \psi_R^\pm &= \frac{1 \mp \beta_2}{1 \pm \beta_2} \psi_L^\pm, \quad \sigma = \pi.\end{aligned}$$

Le signe $(-1)^{a+1}$ correspond au choix de conditions aux limites de type Ramond ou Neveu-Schwarz. Les autres coordonnées vérifient les conditions de la section 15. On constate que le supercourant T_F vérifie toujours les relations de périodicité (14.5) et n'est pas affecté par la présence du champ extérieur, ce qui est cohérent avec la supersymétrie compte tenu du fait que le gravitino, n'étant pas couplé au champ électrique E , ne voit pas ses conditions aux limites modifiées. Le développement en modes des coordonnées fermioniques est donné par

$$\psi_{R,L}^\pm = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{a+1}{2}} d_n^\pm \chi_{(n)R,L}^\pm(\sigma, \tau),$$

sur la base

$$\begin{aligned}\chi_{(n)R}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i(n \pm i\epsilon)(\tau - \sigma) \pm \operatorname{argth}(\beta_1)) \\ \chi_{(n)L}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i(n \pm i\epsilon)(\tau + \sigma) \mp \operatorname{argth}(\beta_1)).\end{aligned}$$

L'indice n est entier dans le secteur Ramond $a = 1$ et demi-entier dans le secteur Neveu-Schwarz $a = 0$. Les opérateurs d_n^\pm vérifient les relations d'hermiticité et d'anticommutation :

$$(d_n^\mu)^* = d_{-n}^\mu, \quad \{d_n^\mu, d_r^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{n+r}.$$

La partie fermionique de l'hamiltonien vaut

$$L_{0\text{ ferm}}^\pm = - \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{a+1}{2}} (n + i\epsilon) d_{-n}^- d_n^+ + a^\pm,$$

où l'énergie de point zéro résiduelle vaut $a_{\text{NS}}^\pm = -\frac{2}{48} - \frac{1}{2}\epsilon^2$ dans le secteur Neveu-Schwarz et $a_{\text{R}}^\pm = \frac{2}{24} - \frac{i}{2}\epsilon(1 - i\epsilon)$ dans le secteur Ramond. On constate encore que $a_{\text{B}}^\pm + a_{\text{R}}^\pm = 0$ conformément à la supersymétrie du problème.

On peut résumer les conditions de bord pour les fermions dues à la présence du champ électrique, par l'action de la matrice de rotation

$$\mathcal{M}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{1}{T_s} F\right) \left(1 - \frac{1}{T_s} F\right)^{-1}, \quad (16.3)$$

telle que

$$\begin{aligned}\psi_R^\mu &= \mathcal{M}(Q_1 F)^\mu_\nu \psi_L^\nu & \text{en } \sigma = 0, \\ (-1)^{a+1} \psi_R^\mu &= \mathcal{M}(Q_2 F)^\mu_\nu \psi_L^\nu & \text{en } \sigma = \pi.\end{aligned}\tag{16.4}$$

Afin de comprendre comment ces conditions se réécrivent sur les supercharges de l'algèbre, il est instructif d'examiner tout d'abord le cas de la D9-brane. Les coordonnées influencées par la présence du champ vérifient (16.4) et les autres les conditions de Neumann (16.1c). Le fondamental de la théorie est décrit par un état cohérent qui s'écrit comme une somme, sur les représentations de fantômes, de produits tensoriels d'opérateurs de sommet d'émission d'un photon d'impulsion nulle agissant sur un vide invariant conforme $|\Omega\rangle$. En oubliant les contributions des fantômes et en ne conservant que les termes nécessaires à ma discussion on obtient $|B\rangle_{\text{NS}} \sim \sum_{-\infty < s < \infty} [V_{Ls}^\mu V_{R-2-s}^\mu - \text{fantômes}] |\Omega\rangle$ ainsi qu'une expression correspondante pour le secteur Ramond. En absence de champ électrique, la supersymétrie de la théorie impose que les supercharges annihilent l'état de bord $(Q^a + \tilde{Q}^{\dot{a}})(|B\rangle_{\text{NS}} + |B\rangle_{\text{R}}) = 0$ [93]. En présence de champ, comme les fermions vérifient les conditions de bord tournées (16.4), l'opérateur de sommet d'émission d'un photon, écrit dans le secteur Neveu-Schwarz (et dans la représentation de fantôme -1) $V_{L,R}^\mu = \psi^\mu e^{-\phi} c$, subi aussi une rotation déterminée par la matrice $\mathcal{M}(F)$. Afin de préserver les conditions de supersymétrie, cette rotation doit être compensée par une rotation des supercharges [90,93]

$$(Q^a + \mathcal{M}(F)^\alpha_a \tilde{Q}^{\dot{a}}) |B\rangle_{\text{NS+R}} = 0.$$

La matrice de rotation des supercharges dans la représentation spinorielle, est donnée par

$$\mathcal{M}(F)_{a\dot{a}} = \prod_{i=0}^4 \frac{1}{1+f_i^2} (1 + f_i \Gamma^{2i+1}) \Gamma_{11},$$

pour une configuration où $F_{\mu\nu} = \text{diag}(F_1, \dots, F_5)$ avec

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & f_i \\ -f_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour une Dp-brane quelconque, localisée en $X^{p+1} = \dots = X^9 = 0$, les conditions de Dirichlet (16.1d) peuvent être vues comme déduites (formellement) d'une limite de champ infini dans (16.1a, b). Ainsi l'opérateur de rotation des supercharges en présence d'un champ électrique longitudinal à la Dp-brane s'écrit

$$\mathcal{M}(F)_{a\dot{a}} = \prod_{i=0}^{(p+1)/2} \frac{1}{\sqrt{1+f_i^2}} (1 + f_i \Gamma^{2i+1}) \left(\prod_{j=p+1}^9 \Gamma^{2i+1} \right) \Gamma_{11}.$$

Après quelques manipulations élémentaires sur les matrices gamma, les conditions de supersymétrie s'écrivent sur les supercharges

$$\left(Q^a + \mathcal{P}_p \mathcal{M}(F)_a^{\tilde{a}} \tilde{Q}^{\tilde{a}} \right) |B\rangle_{\text{NS+R}} = 0 \quad (16.5)$$

où cette fois $\mathcal{M}(F) = \prod_{0 \leq i \leq 4} \left(1/\sqrt{1+f_i^2} \right) (1 + f_i \Gamma^{2i 2i+1}) \Gamma^{0 \dots p+1}$ et

$$\mathcal{P}_p \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=p+1}^9 \Gamma^j \Gamma_{11} \quad (16.6)$$

est l'opérateur de parité induit par les conditions de Dirichlet.

Quelques commentaires sont nécessaires avant de considérer des configurations générales avec plusieurs Dp-branes. On voit que la limite de champ fort $F_{01} \rightarrow \infty$, convertit les conditions de bord (16.1a, b) en celles (16.1d). C'est-à-dire que la direction X^1 vérifie maintenant une condition de type Dirichlet. En présence d'un champ électrique les coordonnées bosoniques ont des modes zéros espacés de $1/(T_s \beta)$ mais les coordonnées de type Neumann-Dirichlet n'en ont pas. Dans la limite de champ fort $F \rightarrow \infty$, la dégénérescence des modes zéros bosoniques, x^\pm , tend vers l'infini $T_s \beta \rightarrow \infty$, ce qui s'interprète comme la dégénérescence associée à l'infinité de choix pour la position de l'extrémité Dirichlet [94].

Une théorie de supercordes ouvertes est en fait un vide quantique contenant trente deux D9-branes, les autres configurations de D-branes se déduisant aisément par le procédé de T-dualité et/ou de limite de champ fort. En absence de champ électrique, le spineur de Killing (voir (9.3)) satisfait la condition de réflexion $(Q + \mathcal{P}_p \tilde{Q})\epsilon = 0$ sur le bord de la Dp-brane. Par exemple, la présence d'une D9-brane donne $(Q + \tilde{Q})\epsilon = 0$ ce qui constitue exactement la condition de supersymétrie des charges de la théorie de type I. Une telle condition doit être écrite pour chaque Dp-brane et le nombre de supersymétries préservées dépend de la compatibilité de ces contraintes. Plaçons, par exemple, une Dp-brane en $X^{p+1} = \dots = X^9 = 0$ et une Dp'-brane en $X^{p'+1} = \dots = X^9 = 0$ avec $p' \geq p$. Les supercharges vérifient les conditions

$$(Q + \mathcal{P}_p \tilde{Q})\epsilon = (Q + \mathcal{P}_{p'} \tilde{Q})\epsilon = 0.$$

Les conditions de chiralité imposent que la différence des dimensions $q = p' - p$ doit être paire. De plus la supersymétrie conservée correspond à la valeur propre +1 de l'opérateur de rotation $(\mathcal{P}_p)^{-1} \mathcal{P}_{p'} = \prod_{p+1 \leq j \leq p'} \Gamma^j \Gamma_{11}$. Cette condition impose que la différence des dimensions doit être un multiple de quatre $q \equiv 0 \pmod{4}$. Une analyse en modes des différentes coordonnées en tous points identique à celle menée dans la section 15, montre que l'énergie de point zéro dans le secteur Ramond est toujours nulle et que celle dans le secteur Neveu-Schwarz est $a_B + a_{\text{NS}} = \frac{p'-p}{8} - \frac{1}{2}$. On vérifie que pour une différence des dimensions égale à $q = 0$ et $q = 4$, il existe des états de masse nulle dans le spectre NS qui

pourront être des partenaires supersymétriques de ceux présents dans le spectre Ramond. Pour $q = 8$, la théorie préserve encore des supersymétries mais comme ce cas est délicat, il sera discuté plus tard (voir la section 17). Une configuration générale de D-branes non parallèles ayant p coordonnées communes est donnée par la relation sur les supercharges

$$(Q + \mathcal{P}_p \tilde{Q})\epsilon = (Q + \mathcal{P}_p \mathcal{M}(R) \tilde{Q})\epsilon = 0,$$

où $\mathcal{M}(R)$ est la matrice de rotation entre les D-branes, écrite dans la représentation spinorielle. L'expression de cette matrice de rotation est du même type que celle écrite pour l'action du champ électrique (16.3) en vertu de la correspondance entre les degrés de liberté du champ de jauge sur la D-brane et le champ antisymétrique. On conçoit aussi facilement que l'enroulement d'un système de D-branes sur des cycles inclus dans des variétés à holonomie non triviale se retranscrivent selon des conditions identiques sur les supercharges. Une étude générale de ces phénomènes dépasse le cadre de cette thèse. Le lecteur intéressé peut néanmoins consulter les articles [95,96].

Dans le chapitre II nous avons vu que, placer une D-brane plate brise la moitié de la supersymétrie et que le nombre de supersymétries supplémentaires brisées dépend de l'action de l'opérateur $\mathcal{M}(R)$. En terme de l'algèbre supersymétrique en dimension quatre, on brise la moitié des supersymétries $N_4 = 4$ si $\mathcal{M}(R)$ est l'identité et on brise un quart des supersymétries $N_4 = 2$ si $\mathcal{M}(R) = (\mathcal{P}_p)^{-1} \mathcal{P}_{p'}$ avec $p' - p = 4, 8$. Pour un système composé d'une D2-brane et d'une D0-brane distantes, comme $p' - p = 2$ la théorie n'est pas supersymétrique car il n'existe pas de spineur de Killing global compatible avec ces conditions. On constate quand même que l'énergie de point zéro dans le secteur Neveu-Schwarz $a_B + a_{NS} = -\frac{1}{4} + b^2/(4\pi\alpha')$ devient négative pour les petites valeurs de b^2 . C'est l'instabilité tachyonique de la théorie. Il a été réalisé dans les [35,94,97] que si l'on rapproche ces deux objets, *on peut vaincre l'instabilité tachyonique* et créer un état lié supersymétrique par l'inclusion d'une D0-brane dans une D2-brane. C'est le terme de couplage $C^{(0)} \wedge F$ de (15.2) qui permet l'existence de telles configurations. Le nombre de D0-brane est donné par la valeur du champ magnétique sur la D2-brane.

17. Interactions entre D-branes

Maintenant que nous avons analysé les configurations statiques de D-branes, on peut passer à l'étude de leurs interactions. Ce sera l'occasion de voir les propriétés particulières des systèmes supersymétriques et d'explorer les caractéristiques mathématiques des espaces des modules de tels solitons.

- Forces statiques : calcul en théorie des champs

Une Dp -brane couple au graviton, dilaton et au champ Ramond $C^{(p+1)}$ selon

$$\mathcal{S}_{\text{DBI}} + \mathcal{S}_{\text{couplage}} = T_p \int d^{p+1} \zeta e^{(p-3)\phi/4} \sqrt{-\det(\hat{g}_{\alpha\beta}^{\text{E}})} + \mu_p \int d^{p+1} \zeta C^{(p+1)}.$$

J'ai posé $F = 0$ puisque l'on n'échange pas ces champs pendant l'interaction. $g_{\alpha\beta}^{\text{E}}$ est la métrique induite dans le repère d'Einstein. Le lagrangien décrivant la propagation de ces champs est (*confer* (7.5))

$$\mathcal{S}_{\text{prop}} = \frac{1}{2\kappa_{(10)}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{\text{E}}} \left[R - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\phi} dB^2 - \sum_p \frac{1}{2(p+2)!} e^{\frac{3-p}{2}\phi} dC_{(p+2)}^2 \right].$$

L'énergie d'interaction entre deux Dp -branes parallèles distantes de b^2 est donnée à l'ordre le plus bas en la constante de couplage par l'échange du graviton, du dilaton et du champ Ramond

$$\mathcal{E}(r)\mathcal{T} = -2\kappa_{(10)}^2 \int d^{10}x \int d^{10}\tilde{x} \left[4j_\phi \Delta \tilde{j}_\phi - j_C \Delta \tilde{j}_C + T_{\mu\nu} \Delta^{\mu\nu, \rho\tau} \tilde{T}_{\rho\tau} \right].$$

j_ϕ , j_C et $T_{\mu\nu}$ sont les sources pour le dilaton, le champ Ramond et le graviton obtenues en linéarisant l'action de la surface d'univers de la D-brane. Δ et $\Delta^{\mu\nu, \rho\tau}$ sont respectivement les propagateurs scalaire du dilaton et du graviton en dimension dix et \mathcal{T} est le temps total d'interaction. De plus comme seulement une composante du champ Ramond couple à la D-brane statique, la structure tensorielle de $C^{(p+1)} = \star H$ a été ignorée (voir la section 7).

Pour une membrane plate, statique et localisée en $\delta(x^\perp)$, les sources s'écrivent $j_\phi = T_p \frac{(p-3)}{4} \delta(x^\perp)$ pour le dilaton, $j_C = \mu_p \delta(x^\perp)$ pour le champ Ramond et

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_p \delta(x^\perp) \times \begin{cases} \eta_{\mu\nu} & \text{pour } 0 \leq \mu, \nu \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour le tenseur énergie-impulsion. En choisissant la jauge de Donder pour le propagateur du graviton [98]

$$\Delta_{(d)}^{\mu\nu, \rho\tau} = (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\tau} + \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\rho} - \frac{2}{d-2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\tau}) \Delta_{(d)},$$

avec le propagateur scalaire en dimension d

$$\Delta_{(d)}(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ipx}}{p^2},$$

l'énergie d'interaction en dimension $d = 10$ s'écrit [34]

$$\mathcal{E}(r) = 2\text{Vol}_p \kappa_{(10)}^2 [\mu_p^2 - T_p^2] \Delta_{(9-p)}^E(r). \quad (17.1)$$

Vol_p est le volume de la Dp -brane et $\Delta_{(9-p)}^E(r)$ est le propagateur scalaire euclidien dans les $9 - p$ dimensions transverses. On constate que si $T_p^2 = \mu_p^2$, la force s'annule par une compensation entre l'interaction transmise par le champ Ramond et les interactions gravitationnelles. À la lumière de la discussion sur les effets de la symétrie kappa, on interprète cette condition comme issue de la supersymétrie de la théorie.

Étudions maintenant l'interaction entre deux D-branes statiques et parallèles mais de tailles différentes avec $0 < q < 8$. Cette fois le champ Ramond ne peut pas être échangé car une Dp -brane ne peut coupler à une p' -forme de Ramond avec $p' \neq p$ que si elle porte un champ $U(1)$ selon les couplages (15.2). Comme les D-branes sont distantes de b^2 , ce genre de couplage n'est pas permis. Les seuls champs échangés étant le graviton et le dilaton, l'énergie d'interaction vaut donc

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{4} T_p T_{p'} (p' - p - 4) \Delta_{(9-p')}^E.$$

On constate que la force d'interaction s'annule si $p' - p = 4$ sans avoir d'échange de champ Ramond ! Il s'avère que dans ce cas, l'interaction du dilaton est répulsive compensant celle du graviton. À la lumière du cas précédent, il est naturel de conjecturer encore un effet de supersymétrie. Pour clarifier ceci, je vais refaire les mêmes calculs dans le cadre de la théorie des supercordes. On constatera que lorsque la théorie présente suffisamment de supersymétrie, les précédents calculs de théorie des champs ne sont pas seulement une approximation des interactions valable pour les grandes séparations des D-branes mais sont exacts.

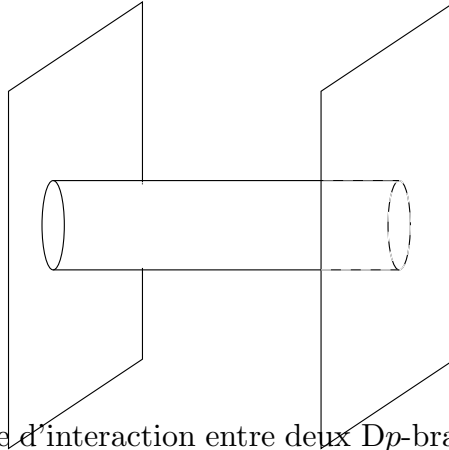


Fig. 2 Premier diagramme d'interaction entre deux Dp -branes parallèles vu comme l'échange d'une corde fermée dans le canal transverse ou comme un diagramme à une boucle de supercordes ouvertes dans le canal longitudinal.

• Forces statiques : calcul en théorie des supercordes

Comme la quantification des degrés de liberté des D-branes est réalisée par une théorie des supercordes ouvertes, les interactions entre ces objets sont aussi décrites en terme de diagrammes de supercordes ouvertes. À l'ordre le plus bas, l'énergie d'interaction est donnée par le diagramme à une boucle de la figure 2. Les états qui parcourent la boucle sont ceux des supercordes tendues entre les deux D-branes. L'énergie d'interaction vaut donc, en omettant les contributions des petites supercordes accrochées sur une même D-brane [33],

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r) &= -\frac{\text{Vol}_p}{2} \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{Stre}^{-\frac{\pi}{2}t(k^2+M^2)(2\alpha')} \\ &= -2 \times \frac{\text{Vol}_p}{2} (2\alpha')^{\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t} (2\pi^2 t)^{-(p+1)/2} e^{-\frac{b^2}{4\pi\alpha'}t} Z_B(it/2) Z_F(it/2),\end{aligned}\tag{17.2}$$

où la contribution des coordonnées bosoniques est

$$Z_B(it/2) = \eta^{-8}(it/2)$$

et celle des coordonnées fermioniques s'écrit comme une somme sur les structures de spin

$$Z_F(it/2) = \frac{1}{2} \sum_{s=1,2,3,4} (-1)^s \frac{\theta_s^4(it/2)}{\eta^4(it/2)}.$$

On remarquera le facteur 2 dans la seconde ligne de l'énergie d'interaction, qui tient compte des orientations possibles des supercordes tendues entre les D-branes. L'identité de Jacobi impliquant que $Z_F = 0$, l'amplitude est identiquement nulle par une compensation exacte entre des contributions bosoniques et fermioniques. Ceci est une manifestation de la saturation BPS constatée dans la section 9. Dans la limite de grande séparation $b^2 \rightarrow \infty$, ne contribuent à l'énergie d'interaction que les champs de masse nulle. Les contributions du graviton et du dilaton sont issues du secteur Neveu-Schwarz de la théorie correspondant aux termes $s = 2, 3$ dans Z_F et le champ Ramond aux termes $s = 1, 4$. Dans la limite $b^2 \rightarrow \infty$, qui correspond à $t \sim 0$, nous avons les approximations suivantes

$$Z_B(it/2) Z_F(it/2) \simeq (8 - 8) \times \left(\frac{t}{2}\right)^4 + \mathcal{O}(e^{-1/t}).$$

En utilisant la représentation intégrale pour le propagateur transverse

$$\Delta_{(d)}^E(r) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dl}{(2\pi^2 l)^{d/2}} e^{-r^2/2\pi l},$$

(17.2) donne

$$\mathcal{E}(r) = \text{Vol}_p(1-1)2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p}\Delta_{(9-p)}^E(b) + \mathcal{O}(e^{-b/\sqrt{\alpha'}}) .$$

On constate bien une annulation entre les contributions gravitationnelles et du champ Ramond, en identifiant la tension et la charge selon

$$T_p^2 = \mu_p^2 = \frac{\pi}{\kappa_{(10)}^2}(4\pi^2\alpha')^{3-p} .$$

L'origine de cette annulation est maintenant claire. Elle est issue de l'invariance de la théorie sous la supersymétrie $N_{10} = 1$ des supercordes ouvertes.

Réexaminons maintenant, le cas de l'interaction entre une Dp -brane et une Dp' -brane toujours parallèles mais avec $p' > p$. Cette fois au calcul de la supertrace dans (17.2) contribuent des états avec des conditions de Dirichlet à un bord et de Neumann à un autre bord. Nous avons vu dans la section 15 que les modes de ces états sont décalés de $3/2$ par rapport au modes Neumann-Neumann habituel. La fonction de partition des coordonnées bosoniques s'écrit alors en posant $q = p' - p$

$$Z_B(it/2) = \frac{1}{\eta^8} \left(\frac{\eta}{\Theta_4} \right)^{\frac{q}{2}} .$$

Le calcul de la contribution des coordonnées fermioniques demande un peu de soin. En effet, dans le secteur Ramond et Dirichlet-Neumann les fermions ont un développement en mode demi-entier. Nous perdons donc des modes zéros fermioniques dans le secteur de structure de spin impaire, mais dans ce secteur les super-fantômes ont toujours des modes zéros puisqu'ils ne sont pas influencés par les conditions de bord. Comme, dans chaque secteur, les super-fantômes éliminent deux degrés de liberté fermioniques *non tordus* par les conditions de bord, un comptage précis est nécessaire. Tant qu'il reste toujours deux coordonnées de type NN, il y a assez de modes zéros fermioniques pour compenser ceux des super-fantômes dans le secteur de structure de spin impaire. Le cas où cette compensation n'a plus lieu est délicat et sera discuté dans la section 19. Conformément à la discussion précédente, chaque coordonnée fermionique de type ND ou DN a ses modes décalés d'un demi entier. Le déterminant associé est donc une fonction thêta modifiée selon θ_3 devient θ_2 et θ_4 devient θ_1 et inversement. Ainsi la fonction de partition des coordonnées fermioniques vaut

$$Z_F(it/2) = \frac{1}{\eta^4} \left[\Theta_3^{4-q/2} \Theta_2^{q/2} - \Theta_2^{4-q/2} \Theta_3^{q/2} - \Theta_4^{4-q/2} \Theta_1^{q/2} \pm \Theta_1^{4-q/2} \Theta_4^{q/2} \right] . \quad (17.3)$$

Le signe \pm devant le dernier terme correspond au choix de la chiralité d'espace-temps des fermions. On se rend compte cette fois que l'amplitude ne s'annule que pour les valeurs de

$q = 0, 2, 4$ et $q = 8$ pour un choix correct du signe devant le dernier terme. On retrouve les valeurs de q pour lesquelles la configuration de D-branes préserve au moins $N_{10} = 1$ supersymétries (*confer* l'analyse des charges conservées de la section 16). Avant d'analyser ces phénomènes en termes de supercordes, vérifions bien que, pour $q = 2$ et 4, l'équilibre entre les configurations est dû à la compensation entre l'interaction du graviton et du dilaton. Pour ces valeurs de q , il existe toujours des fermions du secteur Ramond qui ont des modes zéros non compensés par les super-fantômes ($s = 1$ secteur NN et $s = 4$ secteur ND), et donc ces termes ne contribuent pas à l'amplitude. Il ne reste alors que le secteur Neveu-Schwarz et dans la limite de grande séparation $b^2 \rightarrow \infty$ seuls contribuent les champs de masse nulle de ce secteur à savoir, le graviton et le dilaton. Ceci confirme le calcul de théorie des champs.

• Diffusion de D-branes

Considérons maintenant une configuration avec une Dp -brane et une Dp' -brane parallèles en mouvement relatif selon la direction $\mu = 9$. Les coordonnées vérifient des conditions de bord du même style que celles en présence d'un champ électrique (16.1) à savoir [99]

$$X^9 - v_1 X^0 = \partial_\sigma (v_1 X^9 - X^0) \quad \text{en } \sigma = 0, \quad (17.4a)$$

$$X^9 - v_2 X^0 = \partial_\sigma (v_2 X^9 - X^0) \quad \text{en } \sigma = \pi, \quad (17.4b)$$

$$X^9 = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \quad (17.4c)$$

$$X^9 = b \quad \text{en } \sigma = \pi, \quad (17.4d)$$

enfin on impose les conditions de Neumann pour les coordonnées X^μ , $\mu \in \{2, \dots, p\}$ en $\sigma = 0$ et $\mu \in \{2, \dots, p'\}$ en $\sigma = \pi$, et celles de Dirichlet pour les coordonnées X^i , $i \in \{p+1, \dots, 8\}$ en $\sigma = 0$ et $i \in \{p'+1, \dots, 8\}$ en $\sigma = \pi$. Les équations (17.4a, b) sont le pendant, pour les vitesses, des équations aux limites (16.1a, b). Les équations associées aux fermions suivent la même analogie. Les développements en modes des coordonnées dans les directions 9 et 0 sont décalés de $i\epsilon$ avec $\pi\epsilon = \text{argth}(v_1) - \text{argth}(v_2)$. Mais cette fois, ces coordonnées bosoniques n'ont pas de modes zéro ($x^\pm = 0$). Les coordonnées des secteur Neumann-Dirichlet voient leurs modes décalés de $1/2$. Ces conditions de bord tournées modifient le nombre de modes zéros fermioniques. Dans le secteur Ramond, muni d'une structure de spin impaire ($s = 1$), les super-fantômes ont toujours deux mode zéros, lorsque leur contribution n'est plus compensée par la présence de modes zéros fermioniques, l'amplitude devient infinie (voir section 19). Pour les conditions aux limites (17.4), ce phénomène ne se produit pas et les fonctions de partition valent

$$Z_B(it/2) = \frac{1}{\eta^{8-q}} \times \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_1(\epsilon t/2)} \right) \times \left(\frac{\eta}{\Theta_4} \right)^{q/2}$$

pour les champs X et

$$Z_F(it/2) = \frac{1}{\eta^4} \times \left(\Theta_3^{3-q/2} \Theta_3(\epsilon t/2) \Theta_2^{q/2} - \Theta_2^{3-q/2} \Theta_2(\epsilon t/2) \Theta_3^{q/2} - \right. \\ \left. \Theta_4^{3-q/2} \Theta_4(\epsilon t/2) (i\Theta_1)^{q/2} \pm \Theta_1^{3-q/2} \Theta_1(\epsilon t/2) \Theta_4^{q/2} \right) \quad (17.5)$$

pour les champs ψ . Le développement de ces fonctions de partition en fonction de ϵ donne, pour $q = 0$

$$Z_B Z_F(it/2) = \frac{2}{\epsilon t} \left(\frac{2\pi^4}{3} \left(\frac{\epsilon t}{2} \right)^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \right), \quad (17.6)$$

pour $q = 4$

$$Z_B Z_F(it/2) = \frac{2}{\epsilon t} \left(2\pi^2 \left(\frac{\epsilon t}{2} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right), \quad (17.7)$$

et enfin pour $q = 2$

$$Z_B Z_F(it/2) = \frac{2}{\epsilon t} \frac{\Theta_1^4(it/4)}{\eta^9 \Theta_4} \left(4\pi^2 \left(\frac{\epsilon t}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right). \quad (17.8)$$

En raison de la correspondance entre les conditions aux limites concernant les champs électriques et celles concernant les vitesses relatives de D-branes, je vais commenter les calculs précédents dans le cas des coordonnées tordues par la présence d'un champ électrique. C'est la variation du paramètre ϵ et non pas la valeur du champ électrique (ou la vitesse relative) $\pi\epsilon \sim EQ/T_s$ qui est contrainte par la supersymétrie et permet d'explorer l'espace des modules des configurations de D-branes. Car le champ électrique couple aux coordonnées fermioniques des supercordes ouvertes accrochées sur la D-brane selon (12.1). C'est-à-dire que le champ influence les états de la supercorde ouverte par l'intermédiaire de leur hélicité λ selon un effet Landau. La masse d'un état excité de la supercorde ouverte au niveau N est $(2\alpha')M^2 = (b/\pi)^2(1/2\alpha') + N + (2n + 1 + 2\lambda)\epsilon$ en fonction du niveau de Landau n . L'énergie d'interaction entre les D-branes se réécrit

$$\mathcal{E}(r) = -\frac{\text{Vol}_p}{2} \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} e^{-\frac{\pi}{2}t(2\alpha')k^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\frac{b^2 t}{4\pi\alpha'}} \\ \sum_{l \geq 0} \frac{(-\pi t)^l}{l!} \text{Str} \left((\lambda\epsilon)^l e^{-\frac{\pi}{2}t(N+(2n+1)\epsilon)} \right).$$

Selon la discussion qui suit l'équation (10.2), l'ordre auquel commencera le développement en ϵ dépend des propriétés de l'algèbre supersymétrique préservée par la configuration de D-branes. Par exemple, dans le cas d'une diffusion de D-branes de mêmes tailles ($q = 0$)

comme la solution statique possède $N_4 = 4$ supersymétries, le développement (17.6) commence à l'ordre ϵ^4 . Ce qui signifie dans le langage de la section 11 que la métrique de l'espace des modules est plate et n'est pas quantiquement corrigée. On remarque aussi, indépendamment de toute limite de grande distance, l'absence des contributions des états massifs des supercordes ouvertes puisque le coefficient du terme en ϵ^4 ne fait pas intervenir de dépendance exponentielle en t [99]. C'est encore une conséquence de la supersymétrie, selon laquelle, seuls les états de masse nulle contribuent à cet ordre de la supertrace (voir les commentaires qui suivent (10.2)). En revanche, pour une théorie avec $N_4 = 2$ supersymétries, la métrique est corrigée comme le montre le développement (17.7), mais il y a suffisamment de supersymétrie dans le problème pour prévenir des corrections massives à ce terme [100]. Enfin, une configuration de D-branes ne partageant pas deux coordonnées, $q = 2$, ne possède que $N_4 = 1$ supersymétrie, ce qui suffit quand même à assurer l'équilibre statique entre les solitons bien que des corrections quantiques de l'espace des modules deviennent nécessaires. De plus, comme il y a trop peu de supersymétrie, les états massifs des supercordes accrochées entre les deux D-branes contribuent à l'amplitude, notamment le tachyon dont l'influence a été soulignée pour les systèmes avec $q = 2$ [101,94].

18. D0-brane et invariance de Lorentz

Je vais clore ce chapitre sur les propriétés dynamiques et statiques des D-branes par l'étude de la diffusion élastique de D0-branes en dimension neuf.¹³ Suite aux travaux de Witten sur la limite de couplage fort de la théorie de type IIa [40] et des résultats remarquables de Maldacena, Sen, Strominger et Vafa sur le comptage des états microscopiques des trous noirs par des configurations de D-branes, Banks, Fischler, Shenker et Susskind ont émis la conjecture que les degrés de liberté fondamentaux de la théorie M sont décrits uniquement par un système de D0-branes [51] (voir le chapitre V pour une description plus détaillée). Les propriétés remarquables des D-branes viennent de leur caractère supersymétrique tout comme pour les solutions de monopoles des théories de super Yang-Mills $N_4 = 4$. Je vais examiner les points communs et les différences entre ces solutions non perturbatives. La première différence est le comportement de leur masse puisque que les D-branes ont une masse inversement proportionnelle à la constante de couplage dans les unités de masse de l'objet fondamental, alors que les monopoles de Yang-Mills ont une masse inversement proportionnelle au carré de la constante de couplage. Ce n'est en fait qu'une manifestation du comportement différent des séries perturbatives de la théorie des supercordes et des théories de champs. Il existe de nombreuses indications que cette théorie des champs supersymétrique soit invariante sous la symétrie de S-dualité qui échange les monopoles avec les bosons de jauge [17]. En supposant cette dualité établie, je vais examiner la diffusion

¹³ Cette section est issue de discussions avec C. Bachas et M. Green

de deux monopoles magnétiques et je réexaminerai ensuite celle de D0-branes à la lumière de cette analyse.

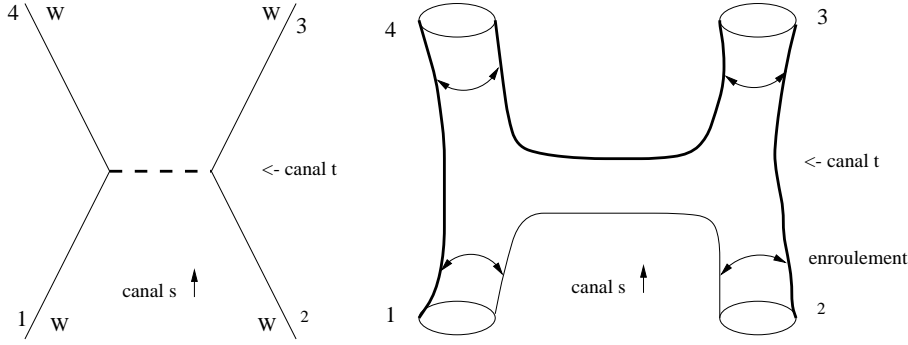


Fig. 3 a) Diagramme de diffusion de deux bosons W massifs de la théorie de jauge de super Yang-Mills $SU(2)$ brisée par un phénomène de Higgs en une théorie $U(1)$.

b) Diffusion de deux supercordes massives enroulées sur la cercle de compactification. Les flèches symbolisent les modes de Kaluza-Klein de la cordes.

• Système de Yang-Mills-Higgs

La force statique entre des solutions de monopoles de 't Hooft-Polyakov s'annule et l'énergie de diffusion a un comportement à faible vitesse en $(g_4 v)^2$, grâce aux effets conjugués de l'interaction électromagnétique transmise par le boson de jauge A_μ et de la répulsion due au boson de Higgs. Ceci est typique de la diffusion de solitons d'un système avec $N_4 = 4$ supersymétries. En vertu de la S-dualité (admise) de la théorie, l'énergie de diffusion de deux bosons de jauge massifs W^\pm doit se comporter de manière analogue. C'est ce que je vérifie ci-après.

Je considère donc la diffusion de deux bosons W pour la théorie de jauge de super Yang-Mills $SU(2)$ brisée par un phénomène de Higgs en une théorie $U(1)$. Selon les conventions du livre d'Itzykson et Zuber [102], la partie bosonique du lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{SYM}} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{8} (\phi + \langle \phi \rangle)^2 \left[g_4^2 (A_\mu^3)^2 + 2g_4^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \right]$$

La masse des bosons W est $m = g_4 \langle \phi \rangle / 2$ et je définis les variables de Mandelstam en termes de la vitesse et de l'angle de diffusion comme suit :

$$\begin{aligned} s &= 4m^2 + s_4 = 4m^2 \frac{v^2}{1 - v^2}, \\ t &= t_4 = -2m^2 \frac{v^2}{1 - v^2} (1 + \cos \theta), \\ u &= u_4 = -2m^2 \frac{v^2}{1 - v^2} (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Je m'intéresse au diagramme de diffusion de deux bosons W donnant deux bosons W dont les polarisations sont transverses au plan de diffusion (voir la figure 3). L'amplitude (écrite dans le canal t) due à l'échange du photon est

$$\mathcal{A}_{\text{photon}} = -\frac{ig_4^2}{4} (\zeta_1 \cdot \zeta_4) (\zeta_2 \cdot \zeta_3) \frac{u - s_4}{t} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_r k_r \right),$$

Celle due à l'échange du boson de Higgs est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{higgs}} &= i \left(\frac{\langle \phi \rangle g^2}{2} \right)^2 \frac{(\zeta_1 \cdot \zeta_4) (\zeta_2 \cdot \zeta_3)}{t} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_r k_r \right) \\ &= \frac{ig_4^2}{4} \frac{4m^2}{t} (\zeta_1 \cdot \zeta_4) (\zeta_2 \cdot \zeta_3) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_r k_r \right) \end{aligned}$$

Enfin la contribution (essentielle) du terme de contact issu de l'interaction à quatre points est

$$\mathcal{A}_{\text{contact}} = \frac{2i}{2} \frac{g_4^2}{4} \left((\zeta_1 \cdot \zeta_2) (\zeta_3 \cdot \zeta_4) - (\zeta_1 \cdot \zeta_4) (\zeta_2 \cdot \zeta_3) \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_r k_r \right)$$

La contribution du processus sans renversement du spin issue de la somme des trois amplitudes précédentes est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{no-flip}} &= -\frac{ig_4^2}{4} (\zeta_1 \cdot \zeta_4) (\zeta_2 \cdot \zeta_3) \frac{u - s_4 + t - 4m^2}{t} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_r k_r \right) \\ &= \frac{i4m^2 g_4^2}{2} \frac{v^2}{1 - v^2} \frac{(\zeta_1 \cdot \zeta_4) (\zeta_2 \cdot \zeta_3)}{t} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_r k_r \right) \end{aligned} \tag{18.1}$$

On constate que l'amplitude s'annule bien comme $(g_4 v)^2$ à condition d'avoir tenu compte de la contribution du terme de contact dont la présence est capitale puisqu'elle provient de l'invariance de jauge locale de la théorie des champs.

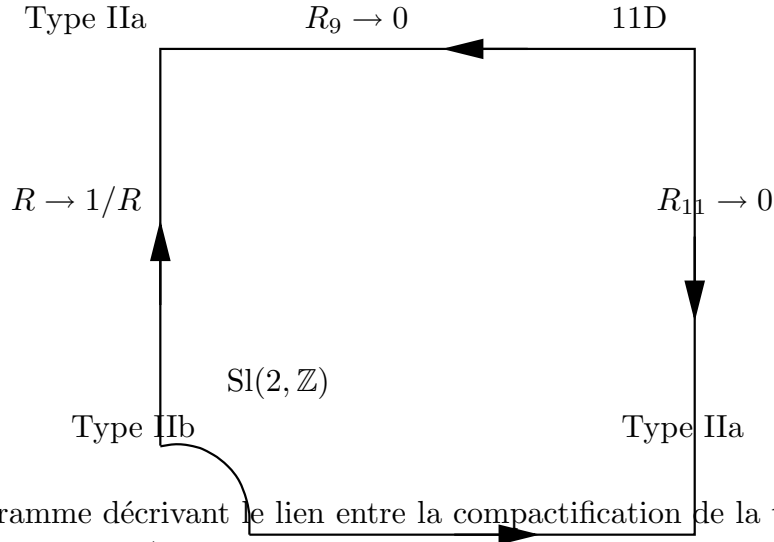


Fig.4 Diagramme décrivant le lien entre la compactification de la théorie M (coin en haut à droite) sur un deux tore de volume nul mais de structure complexe non triviale [103,29] et la théorie de type IIb en dimension dix. Les flèches indiquent une variation des rayons entre l'infini et zéro. Le coin en bas à gauche représente l'invariance sous le groupe de $Sl(2, \mathbb{Z})$ de la théorie de type IIb en dimension dix reliée à la non commutativité du diagramme.

- Diffusion de D0-branes

Comme pour la théorie de jauge précédente, la théorie de type IIb est supposée invariante sous la symétrie de S-dualité qui échange les supercordes fondamentales (les F-cordes) et les D1-branes (les D-cordes) [28,29,103]. Après avoir compactifié une dimension sur un cercle, les actions successives de la S-dualité et de la T-dualité suivant la direction compacte transforment la F-corde en une D0-brane (voir figure 4). On déduit des analyses précédentes que l'énergie d'interaction entre ces D0-branes se comporte à faible vitesse comme $\mathcal{E}(b) \sim v^4/(Rb^5)$. Une analyse précise de cette amplitude de diffusion indique que l'échelle caractéristique de cette diffusion est la longueur de Planck à onze dimensions $\ell_{11} = g_s^{1/3} \ell_s$ [40].

Après avoir compactifié une direction sur un cercle de rayon R , considérons la diffusion de deux supercordes massives de type II enroulées autour de ce cercle. La dynamique est définie par

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, \mathbf{k}, m), & p_2 &= (E, -\mathbf{k}, m), \\ -p_3 &= (E, -\mathbf{k}', m), & -p_4 &= (E, \mathbf{k}', m), \end{aligned}$$

avec $E = m/\sqrt{1-v^2}$, $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2}$ et $\mathbf{k}' = m\mathbf{v}'/\sqrt{1-v'^2}$ et $\alpha'^2 m^2 = (R - \alpha'/R)^2$. L'angle de diffusion est défini par $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = v^2 \cos \theta$, et les variables de Mandelstam en dimension dix par

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_2)^2 = \frac{4m^2 v^2}{1-v^2}, & t &= -(p_2 + p_3)^2 = -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2, \\ u &= -(p_1 + p_3)^2 = -(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2, \end{aligned}$$

les variables de Mandelstam en dimension neuf sont définies par $s_9 = s + 4m^2$, $t_9 = t$ et $u_9 = u = 4m^2 - s_9 - t_9$. L'amplitude de diffusion élastique de ces quatre moments d'enroulement est donnée par l'expression [52]

$$\mathcal{A} = \kappa_{(10)}^2 \mathbb{K} \times \frac{1}{stu} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{4}\alpha' s_9) \Gamma(1 - \frac{1}{4}\alpha' t) \Gamma(1 - \frac{1}{4}\alpha' u)}{\Gamma(1 + \frac{1}{4}\alpha' s) \Gamma(1 + \frac{1}{4}\alpha' t) \Gamma(1 + \frac{1}{4}\alpha' u)}, \quad (18.2)$$

où le facteur cinématique est toujours donné en terme du tenseur cinématique des supercordes ouvertes par [104]

$$\mathbb{K} = K_{A_1 A_2 A_3 A_4}(p_i) K_{B_1 B_2 B_3 B_4}(p_i) \zeta^{A_1 B_1} \zeta^{A_2 B_2} \zeta^{A_3 B_3} \zeta^{A_4 B_4}.$$

Enfin $\kappa_{(10)}$ est la constante de couplage des cordes fermées et $\zeta^{A_i B_i}$ la polarisation du i ème état entrant avec les indices A_i, B_i , vectoriels ou spinoriels selon que l'on considère un état bosonique ou fermionique. Pour des états externes bosoniques avec une polarisation $\zeta_i^{\mu_i \nu_i} = \zeta_i^{\mu_i} \tilde{\zeta}_i^{\nu_i}$, \mathbb{K} prend la forme factorisée $\mathbb{K} = K_{\text{ouverte}} \tilde{K}_{\text{ouverte}}$, en un produit de facteurs cinématiques de corde ouverte

$$\begin{aligned} K_{\text{ouverte}} &= K_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(p_i) \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_3^{\mu_3} \zeta_4^{\mu_4} \\ &= -\frac{1}{4} (st \zeta_1 \cdot \zeta_3 \zeta_2 \cdot \zeta_4 + su \zeta_2 \cdot \zeta_3 \zeta_1 \cdot \zeta_4 + tu \zeta_1 \cdot \zeta_2 \zeta_3 \cdot \zeta_4 \\ &\quad + \frac{1}{2} s (\zeta_1 \cdot k_4 \zeta_3 k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_4 + \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_3 \\ &\quad + \zeta_1 \cdot k_3 \zeta_4 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_3 + \zeta_2 \cdot k_4 \zeta_3 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_4) \\ &\quad + \frac{1}{2} t (\zeta_2 \cdot k_1 \zeta_4 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_1 + \zeta_3 \cdot k_4 \zeta_1 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_4 \\ &\quad + \zeta_2 \cdot k_4 \zeta_1 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_1 \zeta_4 \cdot k_2 \zeta_2 \cdot \zeta_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} u (\zeta_1 \cdot k_2 \zeta_4 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_2 + \zeta_3 \cdot k_4 \zeta_2 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_4 \\ &\quad + \zeta_1 \cdot k_4 \zeta_2 \cdot k_3 \zeta_3 \cdot \zeta_4 + \zeta_3 \cdot k_2 \zeta_4 \cdot k_1 \zeta_1 \cdot \zeta_2) . \end{aligned}$$

Comme je veux comparer cette expression avec celle obtenue pour une diffusion de D-branes, je vais examiner son comportement à faible vitesse, v , en considérant que la diffusion s'effectue sans renversement des spins des particules $\zeta^1 = \zeta^4$ et $\zeta^2 = \zeta^3$ (avec les mêmes conditions pour les grandeurs tildées) et de telle sorte que les impulsions sont orthogonales aux polarisations et à la direction de compactification. Les cas de la diffusion avec renversement des spins revient à considérer des états initiaux et finaux contenant des modes zéros fermioniques supplémentaires ou encore des effets de spin dans la diffusion de D-branes [105,106,107]. Pour des conditions de polarisations orthogonales des états incidents, l'amplitude (18.2) se réduit à

$$\mathcal{A}_{\text{no-flip}} = \zeta_1 \cdot \zeta_4 \zeta_2 \cdot \zeta_3 \tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\zeta}_4 \tilde{\zeta}_2 \cdot \tilde{\zeta}_3 f(v, t).$$

Le comportement à faible vitesse de cette amplitude est donné par

$$f(v, t) \sim \frac{su}{t} = - \left(\frac{16m^4 v^4}{(1-v^2)^2 t} + \frac{4m^2 v^2}{1-v^2} \right). \quad (18.3)$$

La transformée de Fourier du premier terme de cette expression, qui exhibe le pôle du canal t ,

$$\mathcal{E}(v, b) \propto \frac{1}{R} \int d^7 \Delta e^{i\mathbf{b} \cdot \Delta} \sim \frac{1}{R} \int_0^\infty dt t^{5/2} e^{-b\sqrt{t}} f(v, t) \sim \frac{v^4}{Rb^5}, \quad (18.4)$$

reproduit l'énergie d'interaction des D0-branes en dimension neuf déduite de (17.2) et (17.6) pour les grandes séparations b . La transformation exacte contient des corrections exponentiellement décroissantes qui sont importantes seulement pour les très faibles valeurs du paramètre d'impact. Ces contributions donnent lieu à des corrections au terme en v^4 qui ne sont pas distinguables des autres contributions non perturbatives. On constate de plus la présence d'un terme de contact dans (18.3), quadratique en la vitesse de diffusion, dont la transformée de Fourier donne $\hat{A}_{\text{contact}} \sim v^2 \delta(b)$. En fait, ce terme de contact est une approximation des contributions des états massifs et la fonction $\delta(b)$, une approximation de $\exp(-be^{\phi^B/4}/l_s)$ qui contient les effets de l'extension de la corde (en terme la constante de couplage de la corde de type IIB dans les unités du repère d'Einstein). Pour un processus de diffusion de D-cordes, cet effet devient important pour des échelles de l'ordre de $b_{\text{D-corde}} = e^{\phi^B/2}/l_s$ dans les unités du repère sigma des F-cordes. Après une T-dualité ce terme de contact devient important dans un processus de diffusion de D0-branes pour une échelle de l'ordre de la racine carrée de la longueur d'onde de Compton d'une D0-brane, $b_{\text{D0-brane}} \sim e^{\phi^A/2}$ (en terme de la constante de couplage de type IIA). Cette distance est inférieure à la longueur de Planck à onze dimensions mais bien supérieure à la longueur d'onde de Compton des D0-branes à l'échelle de laquelle les phénomènes de création de paires apparaissent. Comme dans le cas de la théorie de jauge, ce terme de contact n'est pas tant la signature d'une nouvelle échelle que la retranscription de l'invariance de Lorentz de la théorie. En effet, un choix judicieux des polarisations élimine ce terme de contact en conservant une énergie de diffusion quartique en la vitesse de diffusion :

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= \zeta^4, \quad \zeta^2 = \zeta^3, \quad \zeta^1 \cdot \zeta^2 = 0 \\ (\tilde{\zeta}^1 \cdot \tilde{\zeta}^3)(\tilde{\zeta}^2 \cdot \tilde{\zeta}^4) &= (\tilde{\zeta}^1 \cdot \tilde{\zeta}^4)(\tilde{\zeta}^2 \cdot \tilde{\zeta}^3) \\ (\tilde{\zeta}^1 \cdot \tilde{\zeta}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (18.5)$$

Ce choix de polarisation qui restreint le nombre de modes zéros fermioniques reproduit le comportement de la diffusion de D0-branes sans spin. Cette interprétation du terme de contact est cohérente avec les analyses des couplages spin-orbite pour les D0-branes des prépublications [105,106,107]. Lors de la diffusion de supercordes hétérotiques massives en dimension neuf, l'analyse de [108] montre que l'amplitude de diffusion est bien en v^2 sans terme contact. Ce qui est cohérent avec l'existence de moitié moins de modes zéros fermioniques pour la corde hétérotique fondamentale.

19. Système 08

Dans les analyses des configurations supersymétriques de D-branes précédentes, j'ai systématiquement écarté le cas de D-branes ne partageant pas huit coordonnées, $q = 8$. Bien que ce cas particulier ne soit pas directement relié à la discussion principale de ce mémoire, l'importance de ce système dans la construction du secteur non perturbatif des théories de type I et hétérotique justifie que l'on s'y arrête un peu. Le lecteur peut bien sûr ignorer cette section. La discussion qui va suivre est inspirée des articles suivants [109,110,111,112,113,114,115,116,117] et les références qu'ils contiennent.

Un tel système est représenté, par exemple, par le couple formé d'une D0-brane et d'une D8-brane pour la théorie de type IIA et du couple constitué de la D1-brane et la D9-brane pour la théorie de type IIB. Pour un tel système, l'opérateur de rotation $\prod_{1 \leq j \leq 8} \Gamma^j \Gamma_{11}$ admet la valeur propre $+1$ et préserve seize supercharges réelles. Comme on s'attend à trouver les propriétés des systèmes avec $N_4 = 4$ supersymétries, on explore l'espace des modules de cette configuration au moyen du paramètre ϵ selon la procédure de la section 17. Tout d'abord, si cette configuration possède $N_4 = 4$ supersymétries, la force statique calculée dans le cadre de la théorie des supercordes doit s'annuler selon l'identité de Jacobi. Mais la fonction de partition fermionique (17.3) avec $q = 8$ ne s'annule que pour le choix correct de signe négatif du terme de structure de spin impaire. Au niveau de la théorie effective des champs, l'annulation de la force statique résulte de la compensation entre l'échange du graviton, du dilaton et du potentiel créé par la constante cosmologique et la tension de la supercorde ouverte tendue entre la D0-brane et la D8-brane [118]. La valeur de la constante cosmologique dépend de la présence de D8-branes placées à l'infini. Une analyse précise de la mécanique quantique des modes zéros de ce système montre que le choix du signe de la structure de spin impaire dans (17.3) est relié à la position de la D0-brane par rapport à celle de la D8-brane et des D8-branes à l'infini [117]. Comme la D8-brane sépare l'espace en deux régions distinctes (gauche et droite), c'est la répartition du nombre de D8-branes à l'infini et la position de la D0-brane qui détermine la supersymétrie et en particulier le choix du signe dans (17.3). L'analyse naïve conduit à la conclusion que le système perd ses propriétés supersymétriques quand la particule traverse la D8-brane ! En fait, il n'en est rien. Lorsque la D0-brane traverse la D8-brane, on doit considérer un nouveau fondamental supersymétrique pour la théorie qui contient une supercorde tendue entre la D8-brane et la D0-brane.

Examinons la diffusion d'une D0-brane et d'une D8-brane, dans le cadre de la théorie de supercordes ouvertes de type Ia, déduite de la théorie de type IIA par une construction de type orbifold version T-duale de celle utilisée pour construire la théorie de type I [119]. Comme pour son partenaire T-dual la théorie de type I, la consistance quantique de cette théorie nécessite d'introduire le secteur supplémentaire des états de crosscaps porteurs d'une charge $-8\mu_8$ sous le champ $C^{(8)}$. Ici encore, la multiplicité de la charge $8 = 2^3$ compte le nombre de modes zéros fermioniques portés par cet état. Par analogie avec les

charges Ramond portées par des D-branes, on imagine ces charges de crosscaps portées par des plans d'orientifold de dimension huit, les $\Omega 8$ -branes. L'annulation des charges Ramond globales impose que le vide de la théorie contienne deux plans d'orientifold et seize D8-branes ainsi que leurs images miroir par rapport aux plans d'orientifold. L'analyse de la mécanique quantique d'une D0-brane dans ce vide quantique est plus facile que l'analyse précédente. Car bien que les modes zéros des super-fantômes ne soient plus compensés par les termes de structure de spin impaire donnant lieu à un terme infini dans (17.5), $\infty \times (\Theta_1(\epsilon t/2)/\Theta'_1)$, les contributions de structures de spin impaires des plans d'orientifold et des D8-branes et leurs images compensent exactement ce terme. En sommant les contributions des plans d'orientifold et des D8-branes, nous avons déjà tenu compte de tous les états de supercordes ouvertes tendues entre ces plans et la D0-brane, et lorsque la D0-brane évolue, on ne fait que répartir différemment ces supercordes. Alors que, dans le cas précédent, lorsque la D0-brane était entre la D8-brane à l'infini et la D8-brane nous avions une compensation des deux infinités dans le secteur de structure de spin impaire mais lorsque la D0-brane traverse le plan elle ne sent plus l'influence de la D8-brane à l'infini et l'amplitude de diffusion subit un saut brutal.

Ces phénomènes de création de cordes interviennent de façon capitale dans l'analyse des théories des champs supersymétriques en termes d'intersections et d'échanges de D-branes [120]. Je ne développerai pas ce point dans la suite de ce mémoire, mais je renvoie le lecteur aux références citées au début de cette section.

Chapitre V

QUELQUES TESTS DES CONJECTURES DE DUALITÉ

Les chapitres précédents ont été consacrés à la présentation des caractéristiques physiques des solitons des théories des supercordes. Les conjectures de dualité font jouer un rôle équivalent à tous ces différents objets, pourvus qu'ils saturant les inégalités BPS, en les plaçant dans des multiplets des représentations des groupes de dualité. Maintenant que nous avons une compréhension plus précise de la structure des théories effectives qui décrivent leurs propriétés physiques, je peux présenter des calculs intervenant dans l'étude de certains tests des conjectures de dualité. Malgré l'apparente cohérence du système bâti au moyen des transformations de dualités, (*confer* la figure 1), elles ne sont toujours que conjecturales. On ne sait pas encore si tous les degrés de liberté fondamentaux de la théorie quantique à fort couplage gravitationnel ont été trouvés. La nécessité d'inclure les degrés de liberté des D-branes dans le vide quantique de la théorie semble moins claire, comme le fait remarquer C. Bachas dans [82], que pour les solutions monopolaires de Dirac des théories de champs de jauge, dont l'inclusion dans le vide de la théorie est imposée par l'unitarité de la théorie.

Je vais présenter quelques calculs de contributions non perturbatives pour les théories de type I et de type IIB. Dans un premier temps, ces contributions seront obtenues par usage des transformations de dualités sur des expressions calculées dans le cadre des supercordes perturbatives. J'en déduirai des règles semi-classiques des calculs instantoniques, et je vérifierai la cohérence des transformations de dualités données par [30,40,121]. Ces règles seront ensuite justifiées par un calcul direct dans le cadre d'une formulation matricielle de la théorie des supercordes non perturbatives.

20. Lagrangien effectif et contributions non perturbatives

Comme dans le cas de la théorie de super Yang-Mills $N_4 = 2$ avec un groupe de jauge $SU(2)$, étudiée par Seiberg et Witten dans [15,16], les symétries de dualité s'analysent en termes de lagrangien effectif (plus exactement, dans ce cas, d'action wilsonienne) à laquelle contribuent soit les états perturbatifs dans le régime de couplage faible, soit les contributions des monopoles dans le régime de couplage fort. La mise en correspondance de ces contributions par les transformations de dualité, repose sur les propriétés supersymétriques des états considérés. Dans le secteur perturbatif de la théorie, les contributions à l'action effective sont données par celles des configurations perturbatives qui saturant tous les modes zéros fermioniques du vide considéré. Comme celui-ci préserve la moitié des supersymétries de la théorie, contribuent les configurations qui saturant tous ces modes zéros. Le passage dans le régime de couplage fort par une transformation de dualité, met ces contributions

en correspondance avec des configurations non perturbatives qui saturent aussi la moitié des modes zéros fermioniques. Si la théorie est invariante sous cette transformation et les grandeurs calculées ne sont pas corrigées lors de ces transformations de dualité, on peut mettre ainsi cette symétrie de la théorie en évidence.

Pour tester ce genre de phénomène dans le cadre des théories de supercordes, je vais étudier les contributions des lagrangiens effectifs qui saturent *tous* les modes zéros fermioniques du vide de la théorie des supercordes. Plus précisément, je vais me concentrer sur les contributions proportionnelles $\mathcal{R}^{2n}\mathcal{F}^{2p}$ avec $n + p = 2$, où \mathcal{R} représente la courbure gravitationnelle et \mathcal{F} celle de Yang-Mills,¹⁴ déduites des amplitudes à une boucle pour la supercorde hétérotique ou à l'ordre des arbres et à une boucle pour les théories de type II. Comme les modes zéros associés à un vide supersymétrique, se répartissent dans des multiplets de l'algèbre supersymétrique préservée par la théorie, les contributions perturbatives à l'action effective se ramènent alors à un calcul de supertrace, comme dans (10.2). Comme nous voulons étudier le comportement de ces contributions sous les transformations de dualité, il est capital qu'elles ne reçoivent pas de corrections (ou que de telles corrections puissent être comprises, voir la discussion à la fin de la section 21). Pour cela, je me concentrerai sur des contributions qui sont reliées par des transformations de supersymétrie aux termes d'annulation d'anomalie. Ces termes ne recevant des contributions qu'à un ordre donné dans la série perturbative des supercordes, les grandeurs supersymétriquement reliées ne reçoivent donc pas de contributions d'ordres en boucle différents. Sans ce genre d'argument, un tel théorème de non renormalisation est difficile à atteindre.

Génériquement, les contributions non perturbatives sont données par des configurations instantoniques obtenues en enroulant les solutions solitoniques de D-branes, des chapitres précédents, sur des cycles euclidiens de la variété de compactification. C'est-à-dire, que l'on opère une rotation de Wick pour la théorie de la surface d'univers de ce soliton. Par exemple, dans le cas des termes en \mathcal{R}^4 de la théorie de type IIB, les contributions non perturbatives sont données par une amplitude à quatre points à l'ordre d'une boucle, dans laquelle tournent des D1-branes euclidiennes.

Je vais, dorénavant, me concentrer sur les contributions des actions effectives qui font intervenir les états 1/2-BPS qui saturent la moitié des modes zéros fermioniques de la théorie. C'est-à-dire que les parties perturbatives de ces contributions saturent les 8 modes zéros fermioniques des théories de supercordes $N_4 = 4$ hétérotiques et de type I et les 16 modes zéros fermioniques de la théorie de supercorde $N_4 = 8$ de type IIB.

En prenant comme référence les théories des supercordes perturbatives hétérotique et de type II, je vais donc présenter les grandeurs utilisées pour tester les dualités.

¹⁴ La structure tensorielle de ces contributions est précisée dans l'écriture des courants qui couplent la supercorde aux champs de fond. La notation fait référence au nombre de modes zéros fermioniques absorbés par les courants.

• Champs de fond et modes zéros

La partie fermionique de l'action des rotations de Lorentz sur les états de masse nulle de la théorie des supercordes, est représentée par l'opérateur

$$R_0^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} S_0^a \gamma_{ab}^{ij} S_0^b. \quad (20.1)$$

construit uniquement à partir des modes zéros des fermions S_0 [52,122]. Il agit sur un état de masse nulle bosonique dans la représentation $\mathbf{8}_v$ de $\text{SO}(8)$, selon $R_0^{ij} |k\rangle = \delta^{jk} |i\rangle - \delta^{ik} |j\rangle$ et sur un état fermionique dans la représentation $\mathbf{8}_c$ par $R_0^{ij} |\dot{a}\rangle = -\frac{1}{2} \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{ij} |\dot{b}\rangle$. Pour les théories $N_{10} = 2$, nous devons considérer l'opérateur $R_0^{ij} \otimes \tilde{R}_0^{ij}$ construit comme un produit tensoriel des opérateurs formés respectivement avec les fermions de chiralité gauche S et droite \bar{S} . Considérons maintenant une théorie de supercorde en espace courbe, c'est-à-dire une configuration où les champs de la métrique ont une valeur moyenne dans le vide non nulle. Le couplage au champ de fond gravitationnel représenté par le tenseur de courbure de Riemann $\mathcal{R}_{[ij][kl]}$, est donné par le courant

$$j_{\text{grav}}^{\text{II}} = \frac{1}{16\pi} \mathcal{R}_{[ij][kl]} R_0^{ij} \tilde{R}_0^{kl}$$

pour une théorie de type II et par

$$j_{\text{grav}}^{\text{het}} = -\frac{i}{4\pi} \mathcal{R}_{[ij][kl]} R_0^{ij} x^k \bar{\partial} x^l$$

pour une théorie hétérotique. Pour la supercorde hétérotique, le couplage à un champ de fond de jauge \mathcal{F}_{ij}^A non abélien est donné par le courant

$$j_{\text{jauge}}^{\text{het}} = -\frac{i}{4\pi} \mathcal{F}_{ij}^\alpha R_0^{ij} {}^t \lambda T_\alpha \lambda.$$

Ces expressions contiennent 8 et 16 modes zéros fermioniques respectivement pour les théories hétérotiques et de type II. Dans le cas hétérotique, ces couplages font intervenir des courants de théorie de surface d'univers, $x^k \bar{\partial} x^l$ et ${}^t \lambda T_A \lambda$. Ceci est dû à ce que la corde hétérotique n'est supersymétrique que dans le secteur de chiralité gauche de la théorie de sa surface d'univers et donc ne possède pas de modes zéros fermioniques de chiralité droite. Il y a bien sûr des couplages supplémentaires avec plus de fermions et des dérivées d'ordre plus élevé des champs de fond, mais ne considérant que des amplitudes avec 8 modes zéros fermioniques pour la corde hétérotique et 16 pour celles de type II et des configurations quasi-statiques pour les champs de fond, ces corrections n'interviendront pas. L'action effective pour la théorie hétérotique déduite du diagramme à une boucle avec quatre gravitons et/ou bosons de jauge est donnée par l'action effective suivante, écrite dans la jauge du cône du lumière, [122]

$$\mathcal{L}_{\text{effectif}}(\mathcal{F}, \mathcal{R}) = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}S \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}h e^{-S_E(\mathcal{F}, \mathcal{R})} \quad (20.2)$$

calculée sur le tore. Les coordonnées bosoniques X^i et fermioniques S^a ont des conditions périodiques autour du tore, λ représente les fermions de l'algèbre de courant et h la métrique de la théorie de la surface d'univers. L'action S_E est celle du modèle sigma bidimensionnel défini sur le tore de paramètre modulaire $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ (selon les notations de [122,123])

$$S_E = \frac{T_s}{2} \int d^2\sigma \left[\frac{1}{\tau_2} g_{ij}(X) \partial X^i \bar{\partial} X^j - \lambda^A \bar{\mathcal{D}} \lambda_A - S^a D S_a - \frac{1}{8} \tau_2 F_{ij}^{AB} S^a \gamma_{ab}^{ij} S^b \lambda_A \lambda_B \right],$$

avec $\bar{\mathcal{D}} \lambda_A = \bar{\partial} \lambda_A - i A_i^{AB} \bar{\partial} X^i \lambda^B$ et $D S_a = \partial S_a + \frac{1}{4} \omega_{lk}^j(X) \partial X^l \delta_{ij} \gamma_{ab}^{ik} S^b$. Dans la limite de petit volume $\tau_2 \rightarrow 0$, l'intégrale fonctionnelle est dominée par les solutions classiques représentées par les modes zéros des champs

$$\begin{aligned} X^i &= x_0^i + \sqrt{\tau_2} X'^i \\ S^a &= \sqrt{\frac{i T_s}{2 \tau_2}} S_0^a + \sqrt{\frac{1}{T_s}} S'^a, \end{aligned}$$

et dans la jauge $A_i = 0$, le développement de S_E à l'ordre quadratique en les fluctuations des champs donne l'action de la supercorde hétérotique écrite dans la jauge du cône de lumière couplée aux champs de fond par les courants définis ci-dessus (en oubliant les primes)

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^2\sigma \left[T_s \partial X^i \bar{\partial} X^i - S^a \partial S^a - T_s \lambda^A \bar{\partial} \lambda_A + j_{\text{grav}}^{\text{het}} + j_{\text{jauge}}^{\text{het}} \right]. \quad (20.3)$$

La supersymétrie d'espace-temps restreint les fermions S^a à être périodiques autour du tore. L'intégrale fonctionnelle (20.2) donne

$$\mathcal{L}_{\text{effectif}} = \int dx_0^i dS_0^a \mathbb{Z} \left(\mathcal{R}_{[ij][kl]} R_0^{kl} x^k \bar{\partial} x^l, \mathcal{F}_{ij}^{AB} R_0^{ijt} \lambda T_\alpha \lambda \right). \quad (20.4)$$

Il reste à intégrer la fonction de partition, \mathbb{Z} , sur les modes zéros bosoniques et les 8 modes zéros fermioniques. Cette intégration sélectionne les contributions des états 1/2-BPS qui contribuent aux termes en $\mathcal{R}^{2n} \mathcal{F}^{2p}$ avec $p + n = 2$ de $\mathbb{Z}(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.¹⁵ Ces contributions sont données par la fonction modulaire de poids zéro,¹⁶ \mathcal{A} , appelée *genre elliptique*

¹⁵ La condition BPS ne contraint que le coté supersymétrique de la supercorde hétérotique, laissant la possibilité de toute une tour d'états BPS de masses en α' -entier, issus des excitations de la partie non supersymétriques de la supercorde.

¹⁶ Une régularisation des divergences tachyoniques dans le secteur gravitationnelle qui respecte l'invariance modulaire est supposée. En fait le choix de configurations de champs de fond telles que $\text{tr}_{\text{Fund}} F^2 = \text{tr} R^2$ est en fait suffisant [124,125].

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mathcal{F}) = \int dS_0^a \mathbb{Z} \left(\mathcal{R}_{[ij][kl]} R_0^{ij} x^k \bar{\partial} x^l, \mathcal{F}_{ij}^{AB} R_0^{ij} \right) \quad (20.5)$$

Une expression explicite de cette fonction pour les modèles hétérotiques $\text{SO}(32)$ et $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ peut être trouvée dans la référence [122,124]. La saturation de tous les modes zéros fermioniques de la supercorde hétérotique perturbative restreint (20.4) à ne recevoir des contributions que des états BPS de la corde hétérotique, rendant cette grandeur topologique. Comme ces contributions sont supersymétriquement reliées aux termes d'annulation d'anomalie, elles ne sont donc pas renormalisées et seule la contribution à une boucle est à considérer [72,121,122]. L'action effective (perturbative) se réécrit alors comme une supertrace intégrée sur la paramètre de Schwinger comme dans (10.2). La fonction \mathcal{A} est la fonction de partition qui compte le nombre d'état 1/2-BPS de la supercordes. Ces considérations se généralisent immédiatement au cas des termes en \mathcal{R}^4 de la théorie de type II. Cette fois la supersymétrie du problème restreint $\mathcal{A} \equiv 1$.

Le caractère topologique du genre elliptique \mathcal{A} est une justification de la validité du calcul dans la limite de faible volume. Cette propriété sera utilisée pour obtenir les contributions non perturbatives à l'action effective en $\mathcal{R}^{2n} \mathcal{F}^{2p}$ avec $n + p = 2$ dans le cadre des modèles matriciels des théories de supercordes non perturbatives (voir la section 26 et *seq.*).

21. Dualité hétérotique/type I

Dans la section 15, j'ai présenté des arguments en faveur de la correspondance de dualité non perturbative entre la théorie de type I et la théorie hétérotique avec un groupe de jauge $\text{SO}(32)$. Je présente ici un calcul explicite où cette conjecture de dualité est testée et confirmée [126].

La contribution à l'action effective à une boucle du terme en \mathcal{F}^4 d'une théorie avec $N_4 = 4$ supersymétries n'est due qu'aux états de masse nulle et aux états 1/2-BPS des multiplets courts chargés. Les transformations de dualité mettent en correspondance, ces contributions avec les calculs perturbatifs de supercordes. Nous constaterons que le dénombrement des contributions instantoniques est donné par les mêmes règles que celles qui régissent les contributions perturbatives. Comme le calcul hétérotique se réduit à la simple contribution perturbative à une boucle et comme ne contribuent que les états de masse nulle et 1/2-BPS perturbatifs de cette théorie, le résultat est donné par un calcul de théorie des champs (*confer* l'équation (10.2) et voir la discussion de la section 23)

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = t_8 \text{tr} F^4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{Str} (t^4 e^{-tS}),$$

où la supertrace est calculée, sur les multiplets chargés de la théorie $N_4 = 4$, la trace tr est calculée dans la représentation fondamentale du groupe de jauge et $t_8 \sim \text{Tr}(R_0)^4$ est

le tenseur antisymétrique de rang huit construit à partir des modes zéros fermioniques (voir appendice 9A du tome II du livre [52]). En se plaçant en dimension huit et après une transformation de S-dualité, dans les variables de la supercorde ouverte fondamentale, cette supertrace se sépare en une contribution perturbative due aux états de Kaluza-Klein de la corde

$$\mathcal{L}_{\text{eff pert}}^{\text{type I}} = -\frac{V^{(10)}}{2^{10}\pi^6} t_8 \text{tr} F^4 \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{n^i \neq 0} e^{-2\pi G_{ij} n^i n^j / t}$$

et (en dimension supérieure à cinq) une contribution non perturbative due seulement aux configurations des D1-branes euclidiennes (puisque la corde de type I ne possède pas de corrections instantoniques induites par le diagramme du tore, souvenir que cette théorie est une tronquation de la théorie de type IIb [127])

$$\mathcal{L}_{\text{inst}}^{\text{type I}} \sim \sum_{\text{multi-instantons}} e^{-S_{\text{classique}}} \int \mathcal{D}(X')^i \mathcal{D}S^a e^{-S_E} (j_{\text{grav,jauge}})^4. \quad (21.1)$$

Les configurations de multi-instantons sont classifiées par le nombre, N , d'instantons et leur orientation, o , dans le réseau de compactification. Comme la D1-brane représente la supercorde hétérotique comme un objet non perturbatif de la théorie des supercordes ouvertes, dans la limite de couplage fort la contribution principale est (21.1) qui doit être reproduite par un calcul perturbatif en théorie hétérotique. Un calcul explicite confirme ceci et par conséquent la dualité hétérotique/type I. Les corrections instantoniques de la surface d'univers pour des compactifications toroïdales de la supercorde hétérotique à l'action effective à quatre points prennent la forme générale d'une somme sur les contributions des sous-tores de dimension deux [122,126]

$$\mathcal{L}_{\text{inst}}^{\text{het}} \sim -V^{(10)} \sum_o \sum_N \frac{e^{2i\pi N T_s T^o}}{T_2^o} \mathcal{H}_N[\mathcal{A}](U^o).$$

Dans cette expression obtenue par intégration de (20.4), o indice les orientations inéquivalentes du plan bidimensionnel qui définit le sous-tore bidimensionnel dont T^o et U^o sont les modules induits. Enfin \mathcal{H}_N est l'opérateur de Hecke de niveau N dont l'action sur cette fonction modulaire est donnée par

$$\mathcal{H}_N[\mathcal{A}](z) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{kp=N \\ 0 \leq j < p}} \mathcal{A}\left(\frac{kz+j}{p}\right).$$

Une transformation de S-dualité met ces contributions en correspondance avec les corrections de la D1-brane euclidienne enroulée sur un cycle à deux dimensions du côté type I.

Ne conservant que le terme en $\text{tr}(F^4)$ et en oubliant les contributions des corrections en boucles autour de l'instant, (21.1) de la théorie sur un deux-tore s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{eff non pert}}^{\text{Type I}} = -\frac{V^{(10)}}{2^9 \pi^6} t_{8\text{tr fund}} F^4 \sum_{N \geq 1} \frac{e^{2i\pi N T_{(0,1)} T}}{N T_2}. \quad (21.2)$$

De ce calcul, nous déduisons la règle semi-classique de comptage des contributions des D1-branes euclidiennes, à savoir, qu'elles sont données par toutes les applications supersymétriques de la surface d'univers de la D1-brane sur le tore de compactification modulo les reparamétrisations de cette première et que les secteurs contenant des instantons avec des orientations différentes ne contribuent pas [126]. C'est-à-dire, que l'on doit dénombrer les contributions instantoniques de D-branes euclidiennes de la suivant les mêmes règles que celles utilisées pour les instantons de la surface d'univers des supercordes perturbatives. Cette règle sera justifiée par un calcul quantique direct des contributions de D1-branes euclidiennes dans la section 26. Bien que nous ne disposions pas de méthode fonctionnelle quantique pour calculer ces contributions à partir de l'action de Dirac-Born-Infeld, on peut quand même vérifier que l'expression (21.2) possède les caractéristiques attendues pour de telles contributions. Tout d'abord, le facteur exponentiel est typique de la contribution d'un objet étendu, *id est*, en exponentielle du volume occupé. Ensuite, le dénominateur $N T_{(0,1)} T_2$ représente le volume de D1-brane de tension $T_{(0,1)} = 1/g_s$ enroulée N fois autour du tore. Ce facteur, issu de l'intégration des modes zéros bosoniques, reproduit la normalisation de la mesure de l'intégrale fonctionnelle dans le formalisme de Dirac-Born-Infeld. Un calcul quantique direct dans le formalisme de Dirac-Born-Infeld est justement difficile à cause des problèmes de définition de la mesure d'intégration.

Les lois de correspondance entre les champs de la théorie de type I et ceux hétérotiques sont déduites d'une identification des lagrangiens effectifs [38,121]. Cette correspondance revient à évaluer les tensions de la supercorde hétérotique et de la D1-brane, les constantes de couplage de jauge et enfin les champs modulo de possibles redéfinitions locales des champs. On pourrait se demander si une telle transformation peut être quantiquement corrigée. Une telle modification se verrait par une correction de la masse de Planck. Or pour la classe des contributions instantoniques qui saturent tous les 8 modes zéros fermioniques de la supercorde de type I et hétérotique, la masse de Planck n'est pas corrigée. Contrairement au cas de la théorie de type I $N_4 = 1$ compactifiée en dimensions quatre, pour laquelle la masse de Planck et la constante de jauge reçoivent une correction à une boucle des états BPS des hypermultiplets et des multiplets vectoriels [128]. Du côté hétérotique bien que le comptage des modes zéros permettent aussi une telle correction, celle-ci n'existe pas [129].

22. Autodualité de la théorie de type IIB

Les mêmes arguments peuvent être appliqués à l'étude de l'autodualité de la théorie de type IIB. Considérons, cette fois, l'action effective à une boucle à l'ordre R^4 , *id est*, huitième en les dérivées du champ gravitationnel. L'expression

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{type IIB}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{Str} \left((t R^{ijkl} M_{ij} \tilde{M}_{kl})^4 e^{-tS} \right)$$

fait intervenir les états (perturbatifs) de masse nulle et des multiplets courts de la théorie de supergravité $N_4 = 8$. M_{ij} et \tilde{M}_{ij} sont les générateurs des transformations de Lorentz. Les contributions non perturbatives, en dimension huit, sont déduites d'une action de la transformation de S-dualité sur cette supertrace. Les contributions totales sont données par celles des cordes de type (p, q) euclidiennes enroulées sur le tore de compactification et des D(-1)-branes ou D-instantons. Ces états couplent respectivement aux champs Ramond $C^{(0)}$ et $C^{(2)}$. Les contributions des D1-branes peuvent être déduites de celles des cordes fondamentales par une transformation de dualité couplage faible/couplage fort. L'expression finale obtenue par complétion sous l'action du groupe complet des symétries non perturbatives de U-dualité est

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{type IIB}} = \frac{\alpha'^3}{3 \cdot 2^8 \kappa_{(10)}^2} \int d^8 x \sqrt{-\det(g^{(8)})} t_8 t_8 R^4 E_{3/2}(\rho),$$

où $\rho \stackrel{\text{def}}{=} C^{(0)} + i/g_s$ et $E_{3/2}$ est la série d'Eisenstein de poids 3/2 qui est une somme sur tous les états de masse nulle et 1/2-BPS qui tournent dans la boucle

$$\begin{aligned} E_{3/2}(\rho) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \frac{1}{(t_n M n)^{3/2}} \\ &\sim \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-t(m_i G^{ij} m_j)}. \end{aligned}$$

L'intégrale est exprimée en terme d'une matrice G^{ij} qui contient tous les degrés de liberté des champs de fond gravitationnels et de Ramond auxquels couplent les états qui contribuent à l'amplitude. Une transformation de T-dualité selon une direction compacte transforme ces deux degrés de liberté en ceux de la un-forme de Ramond $C^{(1)}$ de la théorie de type IIA. Witten a montré dans [40] que la limite non perturbative de cette théorie est la théorie de supergravité $N_{11} = 1$ en dimension onze dont les degrés de liberté de la métrique sont constitués de ceux de la métrique, du dilaton et du champ $C^{(1)}$ de la théorie de type IIA. Cette identification permet de réorganiser ces contributions en \mathcal{R}^4 en une supertrace exprimée en termes de degrés de liberté de la métrique de la supergravité à onze dimension compactifiée sur un trois-tore [127]. Ainsi, le poids modulaire 3/2 de la fonction d'Eisenstein apparaît clairement comme la combinaison d'un t^4 issu du couplage à

la courbure et d'un $1/t^{9/2}$ qui vient de l'intégration des neuf moments non compacts, alors que l'origine de ce poids est beaucoup plus obscur en dimension dix, puisqu'il caractérise la répartition des masses des états qui contribuent à l'action effective. Cette identification n'est pas surprenante si nous nous souvenons qu'un multiplet court 1/2-BPS et un multiplet de masse nulle possède les même degrés de liberté, et que la limite de couplage fort de la théorie de type IIB, après T-dualité, est donnée par cette théorie. Le raisonnement est identique à celui fait dans le cadre de la dualité hétérotique/type I à la différence près que la fonction $\mathcal{A} = 1$ car le courant $j_{\text{grav}}^{\text{II}}$ ne contient pas de degrés de liberté d'algèbre de courant.

23. Théories des champs ou de supercordes ?

J'ai beaucoup insisté sur le fait que les diverses contributions (perturbatives) des termes en $\mathcal{R}^{2n} \mathcal{F}^{2p}$, avec $n + p = 2$, se réduisent à un calcul de théorie des champs. Comme les théories de champs sont divergentes dans la limite ultraviolette, il est capital de ne pas oublier l'origine "cordiste" de ces expressions. En effet, la théorie des supercordes fermées est naturellement régularisée à courte distance par l'extension de la corde. Comme cette régularisation respecte la supersymétrie de la théorie, nous en déduisons une prescription de régularisation de la théorie des champs. Du côté type I, les états massifs ne contribuent pas à l'action effective précédemment considérée, car ils appartiennent à des multiplets longs et la régularisation ultraviolette est donnée par l'annulation des diagrammes en forme de têtard associées à l'anneau et au ruban de Möbius [59]. Dans le cas des théories de supercordes fermées, c'est l'action conjuguée des états d'enroulement BPS (perturbatifs) et le paramètre de coupure naturel de la corde, qui donne le résultat régularisé de la théorie des champs supersymétrique [126,130].

Dans le cadre des calculs des corrections de seuil en \mathcal{R}^4 dans la théorie de type IIB, l'invariance par T-dualité de l'amplitude à une boucle force l'existence du terme proportionnel au volume du cercle de compactification, Vol_2 , inclus dans le deux-tore de compactification de la supergravité

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{3 \cdot 2^8 \kappa_{(11)}^{2/3}} \int d^9 x \sqrt{-\det(G^{(9)})} t_8 t_8 R^4 \frac{2\pi^2}{3} \text{Vol}_2.$$

Ces grandeurs sont exprimées dans le système d'unité de la supergravité en dimension onze. Seul ce terme "survit" dans la limite de décompactification, $\text{Vol}_2 \rightarrow \infty$, prédisant la contribution

$$\mathcal{L}_{R^4} = \frac{\pi^2}{9 \cdot 2^7 \kappa_{(11)}^{2/3}} \int d^{11} x \sqrt{-\det(G^{(11)})} t_8 t_8 R^4$$

au lagrangien de la supergravité. Ce terme a pour origine l'invariance par inversion des rayons de compactification du spectre de masse $\alpha'^2 m^2 = (R - \alpha'/R)^2$ de la théorie des

cordes. Ce phénomène est purement quantique comme le montre la présence de $\alpha'^{-1} \propto \hbar$ dans la formule de masse. Quelle confiance pouvons nous faire à ce calcul ? Il a été argumenté dans [131] que cette contribution est supersymétriquement reliée au terme $C^{(3)} \wedge X_8$ présent dans l'action effective de la supergravité en dimension onze [39] ; il est aussi présent dans l'amplitude à une boucle de la théorie de type IIA [132] et intervient dans les mécanismes d'annulation d'anomalies gravitationnels [61,133]. Cette contribution en \mathcal{R}^4 semble donc être une correction quantique au lagrangien de la théorie de supergravité en dimension onze.

Les calculs des précédentes contributions non perturbatives confirment les conjectures de dualité. En fait, la structure de l'espace des modules des configurations de D-branes est assez difficile à déterminer et souvent seules quelques règles semi-classiques de comptage des contributions peuvent être extraites après un certain nombre de transformations de dualité. Par exemple, dans [134], l'étude des singularités de l'espace des modules d'hypermultiplets, montre qu'il faut sommer les contributions de D-branes enroulées sur des cycles évanescents, sans devoir tenir compte d'une structure supposée plus compliquée des configurations multi-instantoniques. De même, les auteurs de [135] constatèrent qu'il faut sommer les configurations d'enroulement multiples de la membrane de la théorie M comme les configurations sans enroulement. Enfin le même phénomène fût constaté dans [126] pour les contributions des D1-branes à la partie non perturbative de l'amplitude en \mathcal{F}^4 de la théorie de type I. Dans tous ces cas, il semble que les modes zéros supplémentaires apparaissant dans les configurations avec des instantons multiples ne contribuent pas. Ces recettes semi-classiques se résument en : (a) il n'y a qu'une seule contribution pour chaque point selle avec une configuration fixée de charges dont le poids classique est l'exponentiel du facteur de volume déduit de l'action de Dirac-Born-Infeld (15.1) et (b) le facteur de dégénérescence compte les contributions avec un nombre fixé de modes zéros fermioniques issus des points fixes de l'espace des modules associé.

24. Théorie de super Yang-Mills et quantification des D-branes

Dans l'article [30], Witten argumente que la physique à basse énergie d'une Dp -brane est décrite par un modèle super Yang-Mills avec $N_{10} = 1$ réduit dimensionnellement à $p + 1$ dimensions [35]. Ce modèle est déduit du développement à l'ordre quadratique en le champ de jauge $U(1)$ du lagrangien de Dirac-Born-Infeld (15.1). Dans cette représentation, une configuration avec N Dp -branes est décrite par l'extension du modèle de super Yang-Mills à un groupe de jauge $U(N)$. Les composantes des coordonnées matricielles de ce modèle représentent alors les masses des excitations des petites supercordes ouvertes tendues entre les Dp -branes. Je ne vais pas développer ici la théorie générale de cette description, je vais seulement exposer ce que je pense être les qualités principales de cette description pour ensuite l'appliquer au calcul des contributions non perturbatives en théorie hétérotiques

et en théorie de type IIB [82,136]. Le lecteur intéressé par les détails de cette description de la physique non perturbative par le modèle de super Yang-Mills peut consulter le cours écrit par W. Taylor [137].

Considérons des Dp -branes presque plates placées dans un espace plat pour lequel $B_{\mu\nu} = 0$, on peut alors développer l'action (15.1) à l'ordre quadratique en les fluctuations transverses à la D-brane selon $G_{ab} \simeq \eta_{ab} + \partial_a X^i \partial_b X^i + \mathcal{O}((\partial X)^4)$ pour obtenir

$$\mathcal{S} = -T_p \text{Vol}_{p+1} e^{-\phi} - \frac{1}{4g_{\text{SYM}}^2} \int d^{p+1} \zeta \left(F^2 + \frac{2}{(2\pi\alpha')^2} \partial_a X^i \partial^a X^i + \right) + \mathcal{O}(F^4).$$

La constante de couplage de cette action de super Yang-Mills vaut

$$g_{\text{SYM}}^2 = \frac{e^\phi}{4\pi^2 \alpha'^2 T_p} = \frac{g_s}{\sqrt{\alpha'}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{p-2}. \quad (24.1)$$

Les termes cinétiques des coordonnées transverses X^i sont exactement les termes produits par réduction dimensionnelle à $p+1$ dimensions de l'action de Yang-Mills dix dimensionnelle. La complétion supersymétrique de cette action est obtenue par réduction de l'action supersymétrique

$$S_{10} = \frac{1}{g_{\text{SYM}}^2} \int d^{10} \zeta \left(-\frac{1}{4} F^2 + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi \right).$$

Cette description correspond à une seule Dp -brane placée dans l'espace-temps. Lorsque l'on a plusieurs Dp -branes placées au même point, les modes d'excitations des petites supercordes ouvertes indicés par un facteur de Chan-Paton associé à la D-brane sur laquelle s'appuie la supercorde, étendent la symétrie du modèle super Yang-Mills de $U(1)$ à $U(N)$ [30]. Le lagrangien pertinent est alors obtenu par réduction de

$$\mathcal{S}_{\text{SYM}} = \frac{1}{g_{\text{SYM}}^2} \int d^{10} \zeta \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F^2 + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi \right),$$

avec $F = dA - i[A, A]$, $D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - i[A_\mu, \Psi]$. Les champs A_μ et Ψ étant dans la représentation adjointe de $U(N)$, et Ψ étant un spineur de Majorana-Weyl de $SO(1,9)$. Ce lagrangien est invariant sous les transformations de supersymétries

$$\begin{aligned} \delta_{\text{susy}} A_\mu &= \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma_\mu \Psi \\ \delta_{\text{susy}} \Psi &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \epsilon. \end{aligned} \quad (24.2)$$

La réduction dimensionnelle de cette action donne la description d'un état de N Dp -branes superposées

$$\mathcal{S}_{\text{branes}} = \frac{1}{4g_{\text{SYM}}^2} \int d^{p+1}\zeta \text{Tr} \left(-F^2 - \frac{2}{(2\pi\alpha')^2} (DX^i)^2 + \frac{2}{(2\pi\alpha')^2} [X^i, X^j]^2 \right. \\ \left. + \frac{i}{2(2\pi\alpha')^2} \bar{\Psi} \Gamma^a D_a \Psi + \frac{i}{2(2\pi\alpha')^2} \bar{\Psi} \Gamma^i [X_i, \Psi] \right). \quad (24.3)$$

Les indices i et j sont toujours pris transverses à la Dp -brane $i, j = p+1, \dots, 9$. Comme la réduction dimensionnelle n'a pas brisé de supersymétries, l'espace de Fock des états de (24.3) est de même dimension que celui associé aux fluctuations autour des configurations de D-branes. Bien que cette description ne soit valable que pour des champs statiques, elle apporte un éclairage nouveau sur la structure des configurations de Dp -branes et la structure de leur espace des modules et les règles semi-classiques (a) et (b).

25. Théorie de super Yang-Mills et espace des modules

Le lagrangien (24.3) décrit le couplage entre les degrés de liberté de jauge sur la D-brane et les coordonnées transverses à celle-ci. Ces coordonnées évoluent dans le potentiel $V = \text{Tr} ([X^i, X^j]^2 + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^i [X_i, \Psi])$. Une configuration classique correspond à une solution statique des équations du mouvement pour lesquelles le potentiel s'annule. Ce qui signifie que le tenseur de courbure électromagnétique s'annule et que les champs fermioniques et les coordonnées bosoniques transverses sont constants et simultanément diagonalisés en

$$X^i = \text{Diag} (x_1^i, \dots, x_N^i).$$

Selon l'analyse de [30], on vérifie que les termes hors diagonaux donnent les distances respectives entre les D-branes et que l'espace des modules classique est le quotient

$$(\mathbb{R}^{9-p})^N / S_N, \quad (25.1)$$

laissé invariant par les transformations adjointes qui réalisent les permutations des valeurs propres des X^i . Si l'on se rappelle que le champ de jauge est constitué des modes zéros des petites supercordes ouvertes qui fluctuent autour de la D-brane [34], on conçoit qu'au niveau quantique, les configurations d'états liés de Dp -branes sont données par les configurations de flux du champ de jauge. La connexion entre les configurations spatiales et celles de ce champ de jauge se fait par l'intermédiaire des commutateurs présents dans les dérivées covariantes de (24.3). Comme je l'ai souligné précédemment, une compréhension directe des modes zéros des configurations de D-brane est difficile, surtout parce que les états qui contribuent aux actions effectives discutées dans les chapitres précédents sont soupçonnés être des configurations singulières de l'espace des modules. En effet, dans le cas des enroulements multiples de D-branes rencontrées dans [126,131,134,135] les modes

zéros bosoniques naïfs ont disparus et c'est le nombre de modes zéros fermioniques qui conditionne leur contribution ou non de ces états à l'action effective. Nous verrons par la suite que la présence du champ de jauge "éclate" ces singularités et permet de les identifier plus facilement. Un autre avantage de cette description par un modèle super Yang-Mills est que le comportement de cette théorie des champs sous l'évolution du groupe de renormalisation est assez bien connue (voir par exemple les travaux de Seiberg [138]), et on espère que dans un cas suffisamment supersymétrique les grandeurs pertinentes sont protégées. Dans le système d'unité de (24.1) et pour $p = 1$, on voit que la limite infrarouge $g_{\text{SYM}} \rightarrow \infty$ de la théorie de super Yang-Mills est équivalente à la limite de faible volume $\alpha' \rightarrow 0$ de la surface d'univers de (24.3). Cette limite donnée par l'annulation du potentiel V , est en fait un modèle sigma non linéaire sur l'espace orbifold (25.1) [139,140,141]. Les coordonnées sur cette espace sont les valeurs propres des matrices X^i et Ψ diagonalisées simultanément, modulo le groupe des permutations. Ces permutations représentent l'action des matrices du groupe de Weyl de $U(N)$ sur les champs adjoints de la théorie. C'est ainsi que surgit la connection entre les modes zéros et les configurations de jauge du modèle super Yang-Mills. Les deux règles (a) et (b) se réduisent finalement à comprendre ces configurations de jauge, et la supersymétrie du problème garantit la validité du calcul pour toutes valeurs de la constante de couplage.

Je vais illustrer ceci en réexaminant dans ce langage les contributions non perturbatives des théories de type I et de type II discutées à la fin de la section 17. Ce qui va suivre a été brièvement exposé dans la section 3 de [82] pour le cas type I et dans [136] pour le cas type IIB. Tout cela fait l'objet d'une publication à paraître [142].

26. Modèle sigma matriciel

En dimension inférieure à dix les contributions de D-branes euclidiennes peuvent toujours se réinterpréter après quelques opérations de T-dualité dans le langage d'un gaz de D0-branes. J'userai assez librement de cette image très commode. Les interactions entre ces D0-branes sont données par de petites supercordes ouvertes qui, pour le cas qui nous intéresse, vérifient des contraintes dues à la projection de parité Ω . Les interactions de ce gaz de D0-branes sont décrites par le modèle super Yang-Mills précédent. Les termes hors diagonaux des coordonnées matricielles donnent les interactions entre les D-branes et ce modèle est restreint par les symétries du problème. Les contributions non perturbatives sont données par la fonction modulaire (presque)holomorphe \mathcal{A} . La presque holomorphie de cette fonction en la constante de couplage de la supercorde, ainsi qu'en la structure complexe du tore de compactification sont autant d'arguments en faveur de l'invariance de \mathcal{A} sous les transformations de S-dualité. En fait, comme le montrent les auteurs de [143,144], cette fonction est un invariant topologique du modèle sigma en champ extérieur (voir le chapitre VI pour une extension de ces idées). Fort de cette remarque, je vais donc

me placer dans le cadre de la théorie des supercordes matricielles initialement conçue par Dijkgraaf, Verlinde et Verlinde dans [140] et étendue au cas hétérotique avec un groupe de jauge $SO(32)$ par [145,146,147].¹⁷ Les vides de la théorie des supercordes sont classés par l'entier N qui représente le nombre de D0-branes. Le lagrangien du modèle sigma hétérotique est une extension du lagrangien en jauge de cône de lumière (20.3) avec des coordonnées matricielles dans la représentation symétrique de $SO(2N)$ ¹⁸ pour X^i et S_a , dans la représentation anti-symétrique pour A_α et $S_{\dot{a}}$ et dans la représentation vectorielle pour les fermions de l'algèbre de courant. Ce modèle est déduit du modèle super Yang-Mills en dimension onze défini sur l'espace orbifold produit d'un cercle et d'un intervalle $S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$. Les projections d'orbifold obligent les facteurs de Chan-Paton des supercordes tendues entre les D0-branes à être dans $SO(2N)$ et les fermions de l'algèbre de courant sont issus du secteur tordu de la théorie. La supercorde hétérotique perturbative est obtenue avec $N = 1/2$. Le lagrangien correspondant avec un couplage aux champs de fond gravitationnels et de jauge s'écrit

$$S_{\text{matrice}}^{\text{het}} = \int d^2\sigma \text{Tr} \left[-\frac{1}{4g_{\text{SYM}}^2} F^2 + T_s D_\alpha \mathbf{X}^i D^\alpha \mathbf{X}^i + \mathbf{S}_a D_\alpha \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_{\dot{a}} \bar{D}_\alpha \mathbf{S}_{\dot{a}} + T_s {}^t \lambda^A \bar{D} \lambda_A + \right. \\ \left. + g_{\text{SYM}}^2 [\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j]^2 + \mathbf{X}^i \gamma_{a\dot{a}}^i \mathbf{S}_a \mathbf{S}_{\dot{a}} \right]. \quad (26.1)$$

La transposition ${}^t \lambda$ porte sur les indices de $SO(2N)$. Cette description se voulant une version non perturbative de la théorie des supercordes fondamentales, les normalisations des termes cinétiques des coordonnées transverses sont choisies identiques à celle de la supercorde dans le formalisme de la jauge du cône de lumière. Dans ce système d'unité obtenu après l'échange d'une des directions de compactification de la supercorde avec celle de la théorie M [140], la relation entre la constante de couplage de super Yang-Mills et celle des supercordes est donnée par

$$\alpha' g_{\text{SYM}}^2 g_s^2 = 1. \quad (26.2)$$

Grâce aux propriétés topologiques du calcul comme expliqué dans la section 20, je me place maintenant dans la limite de faible volume du tore du précédent modèle sigma $\alpha' \rightarrow 0$ qui correspond, en vertu de la relation (26.2), à la limite infrarouge du modèle super Yang-Mills associé à la supercorde hétérotique non perturbative. Dans cette limite le champ de

¹⁷ Le lecteur peut consulter aussi [148,149,150] pour une vision un peu différente de ce formalisme.

¹⁸ Un vide non perturbatif avec N D1-brane de type I est décrit par une théorie $SO(N)$. La branche de Higgs du modèle restreint les degrés de liberté de jauge au sous-groupe $U(N/2)$ si N est pair ou $\mathbb{Z}_2 \times U((N-1)/2)$ pour N impair, car seules les excitations des supercordes entre les D1-branes et le plan d'orbifold comptent. Par commodité d'écriture je remplace N par $2N$.

jauge découple et ne subsistent que les degrés de liberté d'un modèle sigma matriciel de la supercorde hétérotique. Je considère en fait un tel modèle dans une configuration avec des valeurs moyennes dans le vide pour les champs de fond gravitationnels et de jauge. Le modèle sigma s'écrit alors

$$S_{\text{matrice}}^{\text{het}} = \int d^2\sigma \text{Tr} [T_s \partial \mathbf{X}^i \bar{\partial} \mathbf{X}^i + \mathbf{S}_a \partial \mathbf{S}_a + T_s {}^t \lambda^A \bar{\partial} \lambda_A + j_{\text{grav}} + j_{\text{jauge}}] . \quad (26.3)$$

Les couplages aux champs de fond se font par l'intermédiaire de l'opérateur R_0

$$R_0^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} \mathbf{S}_0^a \gamma_{ab}^{ij} \mathbf{S}_0^b$$

devenu une matrice carrée $2N \times 2N$ et des courants

$$\begin{aligned} j_{\text{grav}}^{\text{het}} &= -\frac{i}{4\pi} \mathcal{R}_{[ij][kl]} R_0^{ij} \mathbf{X}^k \bar{\partial} \mathbf{X}^l \\ j_{\text{jauge}}^{\text{het}} &= -\frac{i}{4\pi} \mathcal{F}_{ij}^\alpha R_0^{ij} {}^t \lambda T_\alpha \lambda. \end{aligned}$$

L'espace des modules de cette limite est un espace orbifold construit comme un produit symétrisé de \mathbb{R}^8 [140,141]

$$(\mathbb{R}^8)^N / \mathcal{S}_N \quad (26.4)$$

paramétrisé par les configurations des coordonnées qui annulent le potentiel de (26.1). Ces coordonnées sont alors simultanément diagonalisées

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^i &= U \text{diag}(X_1^i, \dots, X_N^i) U^{-1} \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{S}^a &= U \text{diag}(S_1^a, \dots, S_N^a) U^{-1} \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{aligned} \quad U \in U(N) \subset SO(2N) \quad (26.5)$$

modulo des transformations unitaires U dans le groupe de Weyl de $U(N)$ sous-groupe de $SO(2N)$ qui paramétrisent les secteurs de la limite infra-rouge du modèle. Les coordonnées matricielles transverses sont périodiques modulo une permutation de leurs valeurs propres représentée par l'action de U [145,146]. La périodicité des fermions est une conséquence de la supersymétrie d'espace-temps du modèle.

Pour la supercorde de type II dans un vide contenant des D1-branes et des D-instantons le modèle sigma correspondant à des coordonnées matricielles dans l'adjointe de $U(N)$. La limite infrarouge du modèle donne l'extension matricielle suivante du modèle sigma de la supercorde de type II dans la jauge du cône de lumière

$$S_{\text{E}}^{\text{matrice}} = \int dt \int_0^{2\pi} d\sigma \text{Tr} [T_s \partial \mathbf{X}^i \bar{\partial} \mathbf{X}^i + \mathbf{S}_a \partial \mathbf{S}_a + \bar{\mathbf{S}}_a \bar{\partial} \bar{\mathbf{S}}_a + j_{\text{grav}}^{\text{II}}] . \quad (26.6)$$

La limite infrarouge est un espace orbifold symétrique $(\mathbb{R}^8)^N/S_N$ paramétrisé par

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^i &= U \text{diag}(X_1^i, \dots, X_N^i) U^{-1} \\ \mathbf{S}^a &= U \text{diag}(S_1^a, \dots, S_N^a) U^{-1} \end{aligned} \quad U \in U(N). \quad (26.7)$$

Les couplages des divers modèles sigma avec les champs de fond ne sont bien définis que dans cette limite infrarouge où les coordonnées sont diagonales. L'analyse des interactions non perturbatives en dehors de ce point fixe pose le problème de la définition d'une action avec des coordonnées non commutantes [151]. Je n'aurai pas à examiner ce cas dans ce chapitre bien qu'il serait très intéressant de pouvoir donner une telle formulation de la théorie.

Je vais étudier un peu plus précisément les secteurs de l'espace de Hilbert associés à cet orbifold symétrique.

- Flux de 't Hooft

La projection de parité de la théorie de type I, ou de façon équivalente celle de l'orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 de compactification du modèle super Yang-Mills, élimine les degrés de liberté de jauge sur la surface d'univers de la D1-brane contrairement à celles de la théorie de type II (voir section 15). Je vais étudier les secteurs de la théorie de super Yang-Mills pour la théorie de type II, ceux de la théorie hétérotique sont obtenus en oubliant les degrés de liberté de champs électromagnétiques sur la D1-brane.

En décomposant le champ de jauge sur $U(1)$ et sur $SU(N)$ $A_\mu = A_\mu^{U(1)} \mathbb{I} + A_\mu^{SU(N)}$, la partie $SU(N)$ vérifie les conditions de périodicité, modulo les transformations de jauge [152,153],

$$\begin{aligned} A_i^{SU(N)}(z + a_j) &= g_j^{-1} A_i^{SU(N)} g_j + g_j^{-1} \partial_i g_j \\ A_i^{U(1)}(z + a_j) &= A_i^{U(1)} - 2\pi m_{ij}/N. \end{aligned}$$

$a_{1,2}$ sont les vecteurs de base du réseau du tore (voir figure 5) et m_{ij} des entiers. Les éléments g_i de $SU(N)$ vérifient les relations de cocycle

$$g_1(a_2)g_2(0) = g_2(0)g_1(a_2)\omega \quad (26.8)$$

où $\omega \in \mathbb{Z}_N$, centre de $SU(N)$. Afin que les transformations précédentes réalisent une transformation de jauge $U(N)$ bien définie, on pose $\omega = \exp(2i\pi m_{ij}/N)$. L'action sur les coordonnées se fait selon

$$\begin{aligned} X^i(z + a_1) &= g_1(z)^{-1} X^i(z) g_1(z) \\ X^i(z + a_2) &= g_2(z)^{-1} X^i(z) g_2(z) \end{aligned} \quad (26.9)$$

La prise de la limite infrarouge n'est correctement définie que dans les secteurs où l'action de g ne dépend pas de z . Ainsi si q est l'ordre de ω et $N = N'q$ alors la limite infrarouge est donnée par les conditions de cyclicité suivantes (dans le cas où $g_2 = 1$ et $g(z) = g_1(z)$)

$$g(U)^q = g(0)^q$$

$$X^i(z+q) = g(0)^{-q} X^i(z) g(0)^q.$$

g^q appartient au groupe de Weyl de $U(N/q)$ ($N=qN'$) dont l'action est globale. On peut réinterpréter ce résultat en disant que ce secteur contient des supercordes de longueur q . L'action adjointe du groupe de jauge se décompose alors en $SU(q) \otimes U(N')$ et la structure d'orbifold des modes zéros de ces longues supercordes est maintenant [153]

$$(\mathbb{R}^8)^{N'}/S_{N'}.$$

Dans le cas de la corde hétérotique il n'est pas possible de mettre de tels flux de 't Hooft sur le tore à cause de la projection \mathbb{Z}_2 et le cocycle est donc trivial $\omega = 1$. Les coordonnées bosoniques vérifient toujours les relations de cyclicité (26.9) relativement à l'action globale du groupe des permutations S_N .

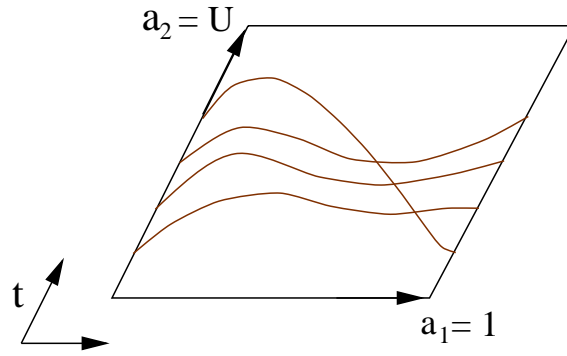


Fig. 5 Si le tore muni d'une structure complexe U est paramétrisé par $z = \sigma + Ut$ avec σ et t variant dans $[0, 1]$, un secteur de la théorie où les coordonnées sont identifiées modulo une permutation d'ordre quatre peut être représenté comme indiqué sur la figure.

• Structure de l'orbifold

Selon [139,140,145,146] l'espace de Hilbert, \mathbb{H}_N , du modèle sigma défini sur l'orbifold (26.4) se décompose en une somme directe de secteurs $\mathbb{H}_{[g]}$ indicés par la classe de conjugaison $[g]$ de la permutation des valeurs propres représentée par la matrice U dans (26.5) et (26.7). Comme chaque permutation du groupe symétrique S_N se caractérise par sa décomposition en cycles disjoints de longueur n $[g] = [1^{N_1}, 2^{N_2}, \dots, N^{N_N}]$ avec $\sum_{1 \leq n \leq N} n N_n = N$, l'espace de Hilbert $\mathbb{H}_{[g]}$ se factorise en un produit tensoriel d'espace de Hilbert $\mathbb{H}_{(n)}$ associés aux cycles élémentaires :

$$\mathbb{H}_{[g]} = \bigotimes_{n>0} S^{N_n} \mathbb{H}_{(n)}$$

$$S^N \mathbb{H} = \left(\underbrace{\mathbb{H} \otimes \dots \otimes \mathbb{H}}_{N \text{ fois}} \right).$$

Chaque sous-espace $\mathbb{H}_{(n)}$ est donné par n champs de la théorie de surface d'univers avec les conditions de périodicité suivantes (toujours dans le cas $g_2 = 1$ et $g = g_1(z)$ qui brise l'invariance modulaire) :

$$\begin{aligned} X_M^i(z + 2\pi) &= +X_{M+1}^i(z) \\ S_M^a(z + 2\pi) &= +S_{M+1}^a(z) \\ \lambda_M^A(z + 2\pi) &= (\pm 1)\lambda_{M+1}^A(z) \end{aligned} \quad M \in \{1, \dots, n\} \text{ et } n+1 = 1.$$

Le signe ± 1 donne les secteurs périodiques et antipériodiques nécessaires à la construction des degrés de liberté de jauge $\text{SO}(32)$ de la corde hétérotique [145,146]. Les combinaisons linéaires

$$\begin{aligned} Z_M^i &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k \frac{M}{n}} X_k^i \\ \Sigma_M^a &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k \frac{M}{n}} S_k^a \\ \Lambda_M^A &= (\pm 1) \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k \frac{M}{n}} \lambda_k^A \end{aligned} \quad M \in \{1, \dots, n\}$$

diagonalisent ces conditions de périodicité en celles d'un orbifold \mathbb{Z}_n

$$\begin{aligned} Z_M^i(z + 1) &= e^{-2i\pi \frac{M}{n}} Z_M^i(z) \\ \Sigma_M^a(z + 1) &= e^{-2i\pi \frac{M}{n}} \Sigma_M^a(z) \\ \Lambda_{A,M}^{(A),(P)}(z + 1) &= e^{-2i\pi \frac{M}{n}} \Lambda_{A,M}^{(A),(P)}(z) \end{aligned} \quad M \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (26.10)$$

Sur cette réécriture, on voit immédiatement que l'on a 8 zéros fermioniques. Ainsi un élément générique de l'espace de Hilbert $\mathbb{H}_{[g]}$ contient $8 \times \sum_{1 \leq n \leq N} N_n$ modes zéros fermioniques. Comme je suis intéressé par des contributions qui ne contiennent que 8 tels modes zéros (voir (20.5)), ne contribueront à l'action effective que les états invariants sous la permutation cyclique maximale $[g] = [N^1]$ autour des *deux cycles* du tore. La fonction de partition fait aussi intervenir l'opérateur de projection associé à la structure d'orbifold : $\text{Tr}(\mathcal{P}q^H)$. Si la projection \mathcal{P} est représenté par la permutation η_2 , le nombre de modes zéros fermioniques est donné par $8 \times \sum_n N_n$ où cette fois la somme est sur la décomposition de η_2 en cycles disjoints. Il faut encore une fois que η_2 soit restreint à être un cycle de longueur maximale.

Le cas de la supercorde de type II est identique. Les coordonnées fermioniques de chiralité droite \bar{S} vérifient les mêmes conditions de périodicité et ainsi, un point générique de l'espace des modules en possède $16 \times \sum_n N_n$. La contribution à l'action effective est obtenue par intégration sur les 16 modes fermioniques en restreignant, encore une fois, la contribution aux états invariants sous la permutation complète $[g] = [N^1]$.

27. Application à la supercorde hétérotique matricielle

Pour des raisons de clarté je vais d'abord considérer le cas où le nombre d'enroulement de la D1-brane, N , est un nombre premier pour ensuite traiter celui où il admet des diviseurs. Dans le langage des orbifolds la fonction de partition reçoit des contributions des états tordus invariants sous les opérateurs d'orbifold et la projection des états non tordus [154]. La fonction de partition doit être calculée dans le secteur Ramond de la théorie qui contient les modes zéros fermioniques. Le secteur de structure de spin impaire du formalisme covariant correspond à l'intégration de l'amplitude (20.5) sur les fermions périodiques de la jauge de cône de lumière [122]. La contribution des états tordus s'écrit donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{Ramond}}[q^H]_{\text{twisted}} &= \frac{1}{N!} \sum_{\omega=[N^1]} \sum_{\substack{\eta \\ \eta\omega=\omega\eta}} \eta \square_{\omega} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\omega=[N^1]} \sum_{n=0}^{N-1} \omega^n \square_{\omega} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_0^n \square_{\omega_0}. \end{aligned} \quad (27.1)$$

\square représente l'intégrale fonctionnelle (20.2),

$$\eta \square_{\omega} = \int_{\text{tore}} \mathcal{D}X \mathcal{D}S^a \mathcal{D}\lambda e^{-S_{\text{E}}^{\text{matrice}}} \quad (27.2)$$

pour des conditions de périodicités autour du tore spécifiées par l'action des opérateurs ω et η . La première ligne de (27.1) est la définition de la fonction de partition, la seconde vient de que l'on ne considère que les éléments η qui commutent avec le cycle de longueur N ω et enfin la troisième ligne découle du fait qu'il y a $(N-1)!$ tels cycles. On choisit ω_0 comme représentant de la classe d'équivalence $[N^1]$.

Selon les règles élémentaires des orbifolds, pour tous $0 \leq k < N$ l'intégrale fonctionnelle exprimée en terme des fonctions theta de Jacobi donne

$$\begin{aligned} \omega^k \square_{\omega} &= \int dS_0^a \prod_{\alpha} (ix_{\alpha}/2\pi) \prod_{M=0}^{N-1} \left(\frac{\eta(U)}{\theta_1(ix_{\alpha}/2\pi + UM/N + k/N|U)} \right) \times \\ &\quad \times \sum_{a,b=0,1} \prod_{\beta} \prod_{M=0}^{N-1} \left(\frac{\theta_{ab}(iy_{\beta}/2\pi + UM/N + k/N|U)}{\eta(U)} \right) \\ &= \int dS_0^a \prod_{\alpha} \left(\frac{(ix_{\alpha}/2\pi)\eta(U/N)}{\theta_1(ix_{\alpha}/2\pi + k/N|U/N)} \right) \sum_{a,b=0,1} \prod_{\beta} \left(\frac{\theta_{ab}(iy_{\beta}/2\pi + k/N|U/N)}{\eta(U/N)} \right) \end{aligned}$$

La première ligne a été transformée en la seconde à l'aide de l'identité suivante

$$\prod_{n>0} \prod_{M=0}^{N-1} \left(1 - e^{2i\pi U \frac{n+M}{N}}\right) = \prod_{n>0} \left(1 - e^{2i\pi U \frac{n}{N}}\right).$$

L'intégration sur les 8 modes zéros fermioniques donne

$$\omega^k_{\omega} \square = \mathcal{A} \left(\frac{U+k}{N} \right) \quad (27.3)$$

et la contribution des états tordus à la fonction de partition (27.1) s'écrit

$$\text{Tr}_{\text{Ramond}}[q^H]_{\text{twisted}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A} \left(\frac{U+k}{N} \right)$$

La contribution du secteur non tordu de l'espace de Hilbert projeté par l'action du cycle ω vaut

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{Ramond}}[q^H]_{\text{untwisted}} &= \frac{1}{N!} \sum_{[\omega]=[N^1]} \omega_{\mathbb{I}} \square \\ &= \frac{1}{N} \omega_0 \square_{\mathbb{I}}. \end{aligned}$$

Des calculs identiques à ceux faits pour établir (27.1) donnent cette fois

$$\text{Tr}_{\text{Ramond}}[q^H]_{\text{untwisted}} = \frac{1}{N} \mathcal{A}(NU).$$

Ainsi la contribution non perturbative à l'action effective de la théorie de type I des contributions des D1-branes pour un nombre d'enroulement $N > 0$ premier vaut

$$\mathcal{L}_{1 \text{ boucle}}^{\text{eff}}(N) \Big|_{\text{nonperturb.}} = \int dx_0^i \frac{1}{N} \left[\mathcal{A}(NU) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A} \left(\frac{U+k}{N} \right) \right] e^{-S_{\text{classique}}} \quad (27.4)$$

Passons maintenant au cas où $N = n_1 n_2$ se décompose en un produit d'entiers. Comme nous avons cette fois des secteurs nouveaux dans l'espace de Hilbert, il est nécessaire de recommencer le comptage des modes zéros fermioniques. On peut décomposer les N valeurs propres des coordonnées matricielles en n_2 paquets de n_1 coordonnées avec une action de la matrice U de (26.5) et (26.7) représentant l'action de la permutation η_1 à l'intérieur des paquets de longueur n_1 composée avec celle de la permutation η_2 sur les n_2 paquets. Par un raisonnement identique à celui fait précédemment, les états avec 8 modes zéros fermioniques sont ceux invariants sous l'action de l'opérateur d'orbifold où η_1 est un cycle

de longueur n_1 et η_2 un cycle de longueur n_2 . La fonction de partition calculée dans ce secteur est

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Ramond}}[q^H]_{\mathrm{new twisted}} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{k=0}^{n_1-1} \eta_2 \eta_1^k \square_{\eta_1} \quad (27.5)$$

La normalisation de cette somme résulte de la combinaison $\frac{1}{N!} \times N! / (n_1 n_2!) \times (n_2 - 1)! = 1/n_1 n_2$ qui tient compte du cardinal des éléments commutants avec η_2 de l'orbite de η_1 sous la conjugaison et du nombre de façon $(n_2 - 1)!$ de réaliser la projection associée à η_2 . Compte tenu de tout ceci, on obtient

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Ramond}}[q^H]_{\mathrm{new twisted}} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{k=0}^{n_1-1} \mathcal{A}\left(\frac{n_2 U + k}{n_1}\right). \quad (27.6)$$

Les contributions non perturbatives à l'action effective pour tout N se regroupent en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{het}} &= \int dx_0^i \sum_{N>0} \frac{1}{N} \left[\mathcal{A}(NU) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{A}\left(\frac{U+j}{N}\right) + \sum_{\substack{n_1 n_2 = N \\ (n_1, n_2) \neq (1,1)}} \sum_{j=0}^{n_1-1} \mathcal{A}\left(\frac{n_2 U + j}{n_1}\right) \right] \\ &= \int dx_0^i \sum_{N>0} \mathcal{H}_N[\mathcal{A}](U) e^{-S_{\mathrm{classique}}} \end{aligned} \quad (27.7)$$

Ces différentes contributions pour chaque valeur de N se somment en

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{het}} \sim -V^{(8)} \sum_{N>0} e^{2i\pi N T_s T} \mathcal{H}_N[\mathcal{A}](U).$$

Nous venons de retrouver les contributions non perturbatives des D1-branes euclidiennes à l'action effective de type I pour les termes avec 8 modes zéros fermioniques. Ce calcul quantique direct nous renseigne sur la structure de l'espace des modules des instantons par la condition sur les modes zéros fermioniques qui restreint fortement les états qui contribuent à cette action effective. Enfin ayant ramené ce calcul à un calcul d'orbifold la normalisation absolue de la fonction partition est déterminée sans équivoque, ce qui permet de s'affranchir du difficile problème de la quantification de la mesure dans le formalisme de Dirac-Born-Infeld.

28. Application à la supercorde de type IIB matricielle

Passons maintenant au calcul des contributions de seuil au terme en $t_8 t_8 R^4$ pour la théorie de type IIB. Nous devons cette fois saturer les 16 modes zéros fermioniques sans possibilité d'introduire des degrés de liberté d'algèbre de courant. Ceci est visible directement sur

l'expression du courant $j_{\text{grav}}^{\text{II}}$ de (26.6) mais provient surtout de ce que les conditions de saturation BPS des supercordes fermées agissent sur les parties de chiralité gauche et droite des états de l'espace de Fock. La fonction modulaire \mathcal{A} se réduit alors à la constante un : $\mathcal{A} = 1$. En dimension huit, les contributions non perturbatives sont celles des D-instantons et des cordes de type (p, q) , états liés de p supercordes fondamentales et de q D1-branes. Avant la prise de la limite infrarouge nous devons cette fois tenir compte de la possibilité de flux de 't Hooft non triviaux pour la théorie de jauge définie sur le tore ($\omega \neq 1$ dans (26.8)). Les différents secteurs associés à ces flux donnent, soit les contributions de D-instantons soit celles des D1-branes euclidiennes. Les D-instantons viennent des secteurs où sans conditions de flux de 't Hooft avant la prise de la limite infrarouge, celles des cordes de type (p, q) sont données par les configurations avec des flux. Comme un tel état lié est donné par la quantification du champ électrique [30], je vais me placer dans le formalisme hamiltonien où apparaît naturellement cette variable.

- Contributions des cordes de type (p, q)

Un vide contenant q D1-branes enroulées plusieurs fois autour du tore, est donné par le lagrangien de Dirac-Born-Infeld

$$\mathcal{L}_{\text{DBI}} = \frac{q}{g_s} \sqrt{\det(\hat{G} + \mathcal{F})} + iq \left(C^{(2)} + C^{(0)} \wedge F \right) \quad (28.1)$$

En passant dans le formalisme hamiltonien on trouve

$$\mathcal{H} = EF_{12} - i\mathcal{L}_{\text{DBI}} = i\sqrt{\det \hat{G}} \sqrt{(E + C^{(0)})^2 + \frac{q^2}{g_s^2}} + (qC^{(2)} - EB_{12}). \quad (28.2)$$

Dans cette expression \hat{G} est la métrique induite définie par les enroulements des q D1-branes considérées comme une seule grande D1-brane de volume $\det \hat{G} = NT_2$. Cet état décrit un état lié q D1-branes et E supercordes fondamentales de tension $T_{(E,q)}$. La valeur de E est définie par le flux du moment conjugué à A_1 , intégré sur un cycle non contractible du tore. Comme je considère des configurations de flux réparties de façon homogène sur le tore, ajouter à E un multiple entier de q ne fait que décaler la position du paquet de q D1-brane. Ainsi E est restreint à prendre des valeurs entières premières relativement à q [30]. En tenant compte de ces conditions, l'intégration de (26.6) selon la procédure expliquée dans le cadre hétérotique donne

$$\mathcal{L}^{\text{dim}} \Big|_{(p,q)} = t_8 t_8 R^4 \times \frac{V^{(8)}(2\pi)^2}{3 \cdot 2^8 \kappa_{(10)}^2} \sum_{(E=p) \wedge q=1} \sum_N \mathcal{H}_N(1) e^{-2\pi N T_{(p,q)} T_2 + 2i\pi N \int (qC^{(2)} - pB_{12})}$$

et la contribution sans flux

$$\mathcal{L}^{8 \text{ dim}}|_{(0,1)} = t_8 t_8 R^4 \times \frac{V^{(8)}(2\pi)^2}{3 \cdot 2^8 \kappa_{(10)}^2} \sum_N \mathcal{H}_N(1) e^{-2\pi N T_{(0,1)} T_2 + 2i\pi N \int C^{(2)}}$$

Ces deux contributions se somment en l'expression suivante

$$S^{8 \text{ dim}} = t_8 t_8 R^4 \times \frac{V^{(8)}(2\pi)^2}{3 \cdot 2^8 \kappa_{10}^2} \left(\sum_{(s,m) \neq (0,0)} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|m|} e^{-2\pi |m| |r+s\rho| T_2 - 2i\pi m (sC^{(2)} - rB_{12})} \right) \quad (28.3)$$

Ce qui après une resommation de Poisson sur l'entier r donne les contributions

$$\mathcal{L}^{8 \text{ dim}} = t_8 t_8 R^4 \times \frac{V^{(8)}(2\pi)^2}{3 \cdot 2^8 \kappa_{(10)}^2} \sum_{m \neq 0} \sum_{n, n^{ij}} \frac{|m| e^{-\phi}}{\sqrt{\det(\hat{G} + \hat{\mathcal{F}})}} K_1 \left(2\pi |m| e^{-\phi} \int \sqrt{\det(\hat{G} + \hat{\mathcal{F}})} \right) e^{2i\pi m \int \hat{C}^{(2)} + C^{(0)} \hat{\mathcal{F}}},$$

obtenues dans les articles [127,131].

• Contributions des D-instantons

Le cas des D-instantons est un peu plus délicat, car les fluctuations autour des D-instantons sont données par le modèle de super Yang-Mills U(N)

$$Z_{\text{D-instantons}} = \int \prod_{\substack{0 \leq \mu \leq 9 \\ \alpha, A}} dX_A^\mu d\Psi_A^\alpha \exp \left\{ -\text{Tr} \left([X^\mu, X^\nu]^2 + i\Psi[\Gamma \cdot X, \Psi] \right) \right\}.$$

obtenu par réduction dimensionnelle à zéro dimension du lagrangien décadimensionnel de super Yang-Mills U(N) $N_{10} = 1$ [30]. La trace Tr et les commutateurs sont calculés relativement aux indices du groupe U(N). X^μ et Ψ^μ sont pris dans la représentation adjointe de U(N). Les spineurs sont des spineurs réels de Majorana-Weyl. Les difficultés viennent de l'analyse de modes zéros des configurations multi-instantoniques. Celles-ci s'étudient plus facilement en terme des configurations du champ de jauge de Yang-Mills obtenu après la compactification de ce modèle sur un deux-tore. Contrairement au cas précédent, il nous faut conserver tous les degrés de liberté de jauge, il ne peut donc pas exister de flux de 't Hooft. La compactification de ce modèle sur un deux-tore donne le lagrangien de super Yang-Mills U(N) suivant

$$S = \int d^2\sigma \text{Tr} \left\{ \frac{g_s^2}{4} F^2 + T_s \sum_{i=2}^9 (D_0 X^i)^2 + T_s \sum_{i=2}^9 (D_1 X^i)^2 + \sum_{i<j} \frac{1}{g_s^2} [X^i, X^j]^2 + \right. \\ \left. + \Psi \Gamma^0 D_0 \Psi + \Psi \Gamma^1 D_1 \Psi + \frac{1}{g_s} \Psi [\Gamma \cdot X, \Psi] \right\} \quad (28.4)$$

avec $F \stackrel{\text{def}}{=} D_{[0} A_{1]} = \partial_{[0} A_{1]} + i[A_0, A_1]$ et les coordonnées $\sigma^{0,1}$ varient dans $[0, 1]$. Comme, je ne fixe pas de conditions de flux de 't Hooft, je conserve ainsi toutes possibilités de transformation de jauge et les champs $A_{0,1}$ jouent un rôle équivalent aux coordonnées transverses X^i et Ψ . Pour cela, il est nécessaire de les normaliser comme ces coordonnées en multipliant $A_{0,1}$ par le facteur $1/g_s$, avant de prendre la limite infrarouge du modèle. La limite infrarouge $g_s \rightarrow 0$ donne un modèle sigma d'orbifold décrit par le lagrangien

$$S = \int d^2\sigma \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_{[0} A_{1]})^2 + T_s \sum_{i=2}^9 (\partial_\alpha X^i)^2 + \Psi \Gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi \right\} \quad (28.5)$$

L'espace des modules est paramétrisé par les conditions

$$\begin{aligned} [X^i, X^j] &= 0 && \text{pour } 2 \leq i, j \leq 9 \\ [A_{0,1}, X^i] &= 0 && \text{pour } 2 \leq i \leq 9 \\ [\Psi, X^i] &= 0 && \text{pour } 2 \leq i \leq 9 \\ [\Psi, A_{0,1}] &= 0. \end{aligned}$$

L'intégrale fonctionnelle contribuant à l'amplitude avec seize modes zéros fermioniques est donnée par

$$Z = \int_{\text{périodique}} \frac{\mathcal{D}A}{\text{Vol}(\mathcal{G})} \mathcal{D}X \mathcal{D}\Psi \delta(A_\sigma^{(0)}) \prod_{I=1}^8 \delta(X_I^{(0)}) \prod_{\alpha} \Psi_\alpha^{(0)} e^{-S}. \quad (28.6)$$

$\text{Vol}(\mathcal{G})$ représente le volume du groupe de jauge $U(N)$, $X_I^{(0)}$ les modes zéros bosoniques, $\Psi_\alpha^{(0)}$ ceux des fermions qui satisfont des conditions périodiques autour du tore et $A_\sigma^{(0)}$ ceux du champs de jauge. Ces modes zéros sont normalisés selon

$$\Psi_\alpha^{(0)} = \frac{\text{Tr} \int d^2\sigma \Psi_\alpha(t)}{\sqrt{TLN}}, \quad X_I^{(0)} = \frac{\text{Tr} \int d^2\sigma X_I(t)}{\sqrt{TLN}}$$

L'intégration des degrés des champs de Higgs bosoniques et fermioniques se compensent exactement. Reste à intégrer le champ de jauge. Pour cela en voyant le tore comme un cylindre recollé avec chaque bout portant une représentation de $U(N)$ donnée par la boucle de Wilson (dans la jauge $A_0 = 0$)¹⁹

¹⁹ Je remercie Ivan Kostov qui a très activement participé au calcul suivant.

$$U = \text{Texp} \left[\int_0^L d\sigma A_\sigma(0, \sigma) \right] = V \text{diag}(e^{i\theta_j}) V^{-1}, \quad U' = \text{Texp} \left[\int_0^L d\sigma A_\sigma(L, \sigma) \right] = V' \text{diag}(e^{i\theta'_j}) V'^{-1}$$

La fonction partition sur le cylindre de rayon L et de longueur T développée sur les caractères de $U(N)$ [155,156,157]

$$Z = \sum_R \chi_R(U) e^{-\frac{1}{2} T L C_2(R)} \chi_R(U'^*)$$

avec

$$\chi_R(U) = \frac{\det(e^{ip_r \theta_s})}{\Delta(\theta)} \quad \text{et} \quad \Delta(\theta) = \prod_{r < s} 2 \sin \left(\frac{1}{2} (\theta_r - \theta_s) \right).$$

Pour une représentation R de $U(N)$ caractérisée par les entiers $\{p_r\}_{r=1}^N$. Le recollement du cylindre en le tore et l'intégration sur les matrices unitaires avec la mesure $dU = \prod_{1 \leq k \leq N} d\theta_k \Delta^2(\theta)$ donnent

$$Z = \frac{1}{N!} e^{\frac{TL}{24} N(N^2-1)} (-1)^N \sum_{\rho \in \mathcal{S}_N} (-1)^{\#-cycles} \prod_{\text{cycles de } \rho} Z_{U(1)}(TL|c|). \quad (28.7)$$

On constate que la fonction de partition $U(N)$ se réécrit comme une somme alternée de produit, factorisé suivant la décomposition en cycle de ρ , de fonction de partition $U(1)$ sur des tores d'aire effective $TL \times \text{longueur des cycles de la permutation } \rho$

$$Z_{U(1)}(TL|c|) = \sqrt{2\pi} \int_{\text{périodique}} \mathcal{D}\theta e^{-\frac{1}{2} \int d^2 \sigma \dot{A}_1^2} \delta \left(\frac{\int_0^{mT} d\tau \int_0^{nL} d\sigma A_1(\tau)}{\sqrt{LTN}} \right).$$

La contribution avec seize modes zéros fermioniques correspond aux cycles de longueur maximale. La sommation des différentes contributions après avoir divisé par $(-1)^{N-1} \times \exp(TLN(N^2-1)/24)$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{2\pi T}} \sqrt{N} \sum_{N=mn} \frac{1}{m^2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2} N T L p^2}. \quad (28.8)$$

avec $\theta = \int_0^{nL} d\sigma A_1$. La limite de volume infinie, $L, T \rightarrow \infty$, dans l'expression précédente correspond bien au facteur de mesure conjecturé dans [158,159], entre crochets $[\dots]$ dans l'expression totale suivante de l'action effective des termes en \mathcal{R}^4 dans un fond de D-instantons

$$\mathcal{L}_{\text{D-inst}} = \frac{8\pi}{3 \cdot 2^8 \kappa_{(10)}^2} \int d^{10}x t_8 t_8 R^4 \sqrt{\rho_2} \sum_{N \geq 1} (e^{2i\pi N \rho} + c.c.) \left[\sqrt{N} \sum_{N=mn} \frac{1}{m^2} \right] \left\{ \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4\pi N \rho_2)^k} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2}) k!} \right) \right\} .$$

Les champs de l'action (28.4) ayant été normalisés selon les unités du repère sigma de la supercorde, l'intégration sur la modes zéros bosoniques donne le facteur de “volume” transverse au tore de compactification $\int d^8x$ et l'intégration des modes zéros de translation associés au champ de jauge donne un facteur de volume du tore de compactification. Les termes entre accolades $\{\dots\}$ sont issus des contributions en boucles autour de l'instanton.

Chapitre VI

PERSPECTIVES

« *Que ce soit la fin du livre – mais non la fin de la recherche* » disait Saint Bernard de Clairvaux. En effet nous sommes encore loin d’avoir une compréhension parfaite de la structure de l’espace des modules de la théorie des supercordes. Par exemple, la théorie de type IIB occupe toujours une position particulière au sein de l’espace des modules la théorie M. Sa description actuelle par une compactification de la supergravité en dimension onze sur un deux-tore de volume nul mais de structure complexe non triviale comme proposée par Aspinwall [103] et Schwarz [29] est assez mystérieuse. Le point délicat est l’origine de la chiralité sans faire appel à une compactification sur des surfaces de type orbifold. En effet, il est assez facile d’obtenir un spectre chiral en compactifiant la supergravité définie en dimension onze sur une variété à bord, malheureusement les conditions aux limites brisent des symétries, rendant ce procédé caduque pour obtenir la théorie de type IIB. Une compréhension plus approfondie de la symétrie d’autodualité de cette théorie et des configurations de 3-branes devraient apporter des informations sur la symétrie de dualité de la théorie de jauge de super Yang-Mills quadridimensionnelle avec $N_4 = 4$ supersymétries.

De plus il est nécessaire de comprendre la définition de la théorie M en espace courbe. Une ligne d’étude serait de regarder une version matricielle du modèle sigma non linéaire de la théorie des supercordes pour une configuration non triviale des champs de fond. Contrairement à l’étude menée dans le chapitre V, des problèmes d’ordre d’opérateurs surviennent dans l’écriture du modèle sigma correspondant. Ces problèmes ont été abordés par M. Douglas *et al.* dans [151] pour des configurations de D-branes sur des variétés kähleriennes. La localisation des interactions de jauge aux extrémités des supercordes ouvertes reliant les D-branes restreint les possibilités de couplages dans l’action effective, mais d’autres contraintes géométriques doivent être trouvées.

Enfin la description des contributions non perturbatives par un modèle de type super Yang-Mills à la Dijkgraaf, Verlinde et Verlinde [140,141] ou à la Banks, Fischler, Shenker et Susskind [51] doit permettre un contrôle des calculs non perturbatifs. En effet, une transformation de Nicolai [160] permet de réécrire la fonction de partition d’un modèle de type super Yang-Mills comme un indice de Witten [161]. Comme les grandeurs de la théorie des supercordes sont données par des valeurs moyennes dans le vide de champs, on peut espérer que les contributions ainsi calculées aient un comportement contrôlable lorsque ces valeurs moyennes sont modifiées. Un formalisme un peu plus général que celui présenté dans les références [140,141] n’est malheureusement pas encore disponible [162].

Références

- [1] Particle Physics data booklet Juillet 1994 extrait de *Review of Particle Properties* Phys. Rev. **D50** (1994) 1173.
- [2] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & sons, 1972.
- [3] E. Kolb et M. Turner *The Early Universe* et *The Early Universe reprints*, Addison-Wesley, Redwood City, 1988.
- [4] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.
- [5] A. Salam et E. Sezgin *Supergravities in Diverse Dimensions. Vol 1,2*, Singapore : World Scientific.
- [6] *Dual theory* Physics report reprints book series, ed. M. Jacob North Holland 1974 ; J. Scherk, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 123.
- [7] M. Green, J. Schwarz et E. Witten *Superstring Theory*, Cambridge University Press 1985 ; D. Lüüst et S. Theisen *Lectures on String Theory*, Springer Lecture notes in physics 1989 ; E. D'Hoker et D.H. Phong *The Geometry of String Perturbation Theory*, Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 917.
- [8] P. Ramond, Phys. Rev. **D3** (1971) 2415.
- [9] A. Neveu et J. Schwarz, Nucl. Phys. **B31** (1971) 86.
- [10] F. Gliozzi, J. Scherk et D. Olive, Phys. Lett. **65B** (1975) 282 ; Nucl. Phys. **B122** (1976) 253.
- [11] E. Cremmer, B. Julia et J. Scherk, Phys. Lett. **76B** (1978) 409.
- [12] E. Cremmer et B. Julia, Phys. Lett. **80B** (1978) 48 ; Nucl. Phys. **B159** (1979) 141.
- [13] L. Alvarez-Gaumé et E. Witten, Nucl. Phys. **B243** (1984) 269 ; M. Green et J. Schwarz Phys. Lett. **149B** (1984) 117 ; D. Gross, J. Harvey, E. Martinec et R. Rohm, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253 ; *ibid.* **B267** (1986) 75.
- [14] A. Sen, Phys. Lett. **329B** (1994) 217, hep-th/9402032.
- [15] N. Seiberg et E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 16, hep-th/9407087.
- [16] N. Seiberg et E. Witten, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484, hep-th/9408099.
- [17] C. Montonen et D. Olive, Phys. Lett. **72B** (1977) 117.
- [18] P. Goddard et D. Olive, Rep. Prog. Phys. **41** (1978) 1357.
- [19] E. Cremmer, S. Ferrara et J. Scherk, Phys. Lett. **74B** (1978) 61.
- [20] E. Cremmer et J. Scherk, Phys. Lett. **74B** (1978) 341.
- [21] A. Font, L. Ibañez, D. Lüüst et F. Quevedo, Phys. Lett. **249B** (1990) 35.
- [22] S. Rey, Phys. Rev. **D43** (1991) 526.
- [23] A. Giveon, M. Porrati et E. Rabinovici, Phys. Rept. **244** (1994) 77, hep-th/9401139.
- [24] C. Hull et P. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep-th/9410167.
- [25] P. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A133** (1931)
- [26] R. Neipomechie, Phys. Rev. **D31** (1985) 1921.
- [27] C. Teitelboim, Phys. Lett. **167B** (1986) 63.
- [28] J. Schwarz, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269.
- [29] J. Schwarz, Phys. Lett. **360B** (1995) 13, hep-th/9508143.
- [30] E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335, hep-th/9510135.
- [31] J. Schwarz, *Lectures on Superstring and M-theory dualities*, hep-th/9607201.
- [32] M. Duff, R. Khuri et J. Lu, Phys. Rept. **259** (1995) 213, hep-th/9412184.

- [33] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.
- [34] J. Polchinski, S. Chaudhuri et C.V Johnson, *Notes on D-branes*, hep-th/9602052.
- [35] J. Polchinski, *TASI Lectures on D-branes*, hep-th/9611050.
- [36] A. Klemm, W. Lerche et P. Mayr, Phys. Lett. **357B** (1995) 313, hep-th/9506112.
- [37] I. Antoniadis et H. Partouche, Nucl. Phys. **B460** (1996) 470, hep-th/9509009.
- [38] J. Polchinski et E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 525, hep-th/9510169.
- [39] M. Duff, J. Liu et R. Minasian, Nucl. Phys. **B452** (1995) 261, hep-th/9506126.
- [40] E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.
- [41] A. Strominger et C. Vafa, Phys. Lett. **379B** (1996) 99, hep-th/9601029.
- [42] J. Maldacena, *Black Holes in String Theory*, PhD Thesis, Princeton University, hep-th/9607235 constitue un bon résumé de la description des trous noirs maximalement supersymétriques.
- [43] C. Misner, K. Thorn et J. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman 1973.
- [44] D. Christodolou, Phys. Rev. Lett. **25** (1970) 1596.
- [45] D. Christodolou et R. Ruffini, Phys. Rev. **D4** (1971) 3552.
- [46] R. Penrose et R. Floyd, Nature **229** (1971) 77.
- [47] S. Hawking, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 1344.
- [48] B. Carter, Nature **238** (1972) 71.
- [49] J. Bardeen, B. Carter et S. Hawking, Comm. Math. Phys. **31** (1973) 161.
- [50] J. Bekenstein, Phys. Rev. **D12** (1975) 3077.
- [51] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker et L. Susskind, Phys. Rev. **D55** (1997) 511, hep-th/9610043.
- [52] M. Green, J. Schwarz et E. Witten *Superstring theory*, Cambridge University Press 1985.
- [53] M. Green et J. Schwarz, Phys. Lett. **149B** (1984) 117 ; *ibidem* **151** (1985) 21.
- [54] G. Pradisi et A. Sagnotti, Phys. Lett. **216B** (1989) 59.
- [55] E. Kiritsis, *Introduction to Superstring Theory*, hep-th/9709062.
- [56] W. Lerche, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B55** (1997) 83, hep-th/9611190, et les références de cet article.
- [57] J-L. Gervais et B. Sakita, Nucl. Phys. **B34** (1971) 632.
- [58] M. Abe et N. Sakai, Prog. Theor. Phys. **80** (1988) 162.
- [59] C. Bachas et C. Fabre, Nucl. Phys. **B476** (1996) 418, hep-th/9605028.
- [60] K. Dienes, Phys. Rept. **287** (1997) 447, hep-th/9602045 pour un exposé pédagogique des problèmes relatifs à l'unification. On peut aussi consulter le chapitre III de la thèse C. Fabre *Unification et dualité en théorie des cordes ouvertes* thèse de l'université de Paris VI juin 1997.
- [61] P. Hořava et E. Witten, Nucl. Phys. **B475** (1996) 94, hep-th/9603142.
- [62] P. Townsend, *p-Brane Demoncracy*, comptes rendus des conférences PASCOS et John Hopkins du mois de mars 1995, hep-th/9507048.
- [63] J. Wess et J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton series in physics 1992.
- [64] M. Green et J. Schwarz, Phys. Lett. **136B** (1984) 367 ; Nucl. Phys. **B243** (1984) 285.
- [65] J. Hughes, J. Liu et J. Polchinski, Phys. Lett. **180B** (1986) 370.

- [66] E. Bergshoeff, E. Sezgin et P. Townsend, Phys. Lett. **189B** (1987) 75.
- [67] A. Achucarro, J. Evans, P. Townsend et D. Wiltshire, Phys. Lett. **198B** (1987) 441.
- [68] P. Townsend *Four lectures on M-theory*, cours donné à l'école d'été de l'ICTP à Trieste en juin 1996, hep-th/9612121.
- [69] C. Callan, J. Harvey, A. Strominger, Nucl. Phys. **B359** (1991) 611 ; *ibidem* **367** (1991) 60.
- [70] J. Harvey, *Magnetic Monopoles, Duality, and Supersymmetry*, hep-th/9603086.
- [71] S. Ferrara, C. Savoy et B. Zumino, Phys. Lett. **100B** (1981) 393.
- [72] C. Bachas et E. Kiritsis, F^4 Terms in $N=4$ String Vacua, Comptes rendus de l'école de printemps de Trieste d'avril 1996, hep-th/9611205.
- [73] V. Kaplunovski, Nucl. Phys. **B307** (1988) 145 ; *erratum ibid.* **B382** (1992) 436, hep-th/9205070.
- [74] S. Ferrara, M. Porrati et V. Telegdi, Phys. Rev. **D46** (1992) 3529.
- [75] C. Bachas, *A way to break supersymmetry*, dans les comptes rendus de la 5ème conférence Hellénique sur les particules élémentaire, donnée à Corfu en septembre 1995, hep-th/9503030.
- [76] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland.
- [77] L. Alvarez-Gaumé et D. Freedman, Comm. Math. Phys. **80** (1981) 443.
- [78] B. Zumino, Phys. Lett. **87B** (1979) 203.
- [79] E. Witten, J. Geom. Phys. **15** (1995) 215 , hep-th/9410052.
- [80] M. Douglas, hep-th/9604198.
- [81] J. Polchinski et Y. Cai, Nucl. Phys. **B296** (1988) 91.
- [82] C. Bachas, *Heterotic versus Type I*, compte rendu de conférence donnée à Strings '97 à Amsterdam en juin 1997 et à HEP-97 à Jerusalem en août 1997, hep-th/9710102.
- [83] E. Gimon et J. Polchinski, Phys. Rev. **D54** (1996) 1667, hep-th/9601038.
- [84] E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 541, hep-th/9511030.
- [85] E. Fradkin et A. Tseytlin, Phys. Lett. **158B** (1985) 316.
- [86] J. Dai, R. Leigh et J. Polchinski, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2073.
- [87] R. Leigh, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2767.
- [88] M. Douglas, hep-th/9512077
- [89] M. Green, G. Moore et J. Harvey, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 47, hep-th/9605033.
- [90] M. Green et M. Gutperle, Nucl. Phys. **B476** (1996) 484 , hep-th/9604091.
- [91] A. Tseytlin, hep-th/9802133.
- [92] C. Bachas et M. Porrati, Phys. Lett. **296B** (1992) 77, hep-th/9209032.
- [93] A. Abouelsaoud, C. Callan, C. Nappi et S. Yost, Nucl. Phys. **B280** (1987) 599.
- [94] E. Gava, K. Narain et M. Sarmadi, Nucl. Phys. **B504** (1997) 214, hep-th/9704006.
- [95] V. Balasubramanian, R. Leigh, Phys. Rev. **D55** (1997) 6415, hep-th/9611165.
- [96] M. Douglas, hep-th/9703056.
- [97] J. Polchinski et A. Strominger, Phys. Lett. **388B** (1996) 736, hep-th/9510227.
- [98] M. Veltman dans *Méthodes en théorie des champs*, Les houches 1975. R. Balian et J Zinn-Justin eds. North-Holland/World Scientific.
- [99] C. Bachas, Phys. Lett. **374B** (1996) 37, hep-th/9511043.
- [100] M. Douglas, D. Kabat, P. Pouliot et S. Shenker, Nucl. Phys. **B485** (1997) 85, hep-th/9608024.

- [101] T. Banks et L. Susskind, *Brane - Anti-Brane Forces*, hep-th/9511194.
- [102] C. Itzykson et J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill 1985.
- [103] P. Aspinwall, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B46** (1996) 30, hep-th/9508154
- [104] T. Kawai, D. Lewellen et S. Tye, Nucl. Phys. **B269** (1986) 1.
- [105] J. Harvey, *Spin dependence of D0-branes interactions*, compte rendu de conférence donnée à String '97 à Amsterdam en juin 1997, hep-th/9706039.
- [106] P. Kraus, hep-th/9709199.
- [107] J. Morales, C. Scrucca et M. Serone, hep-th/9801183.
- [108] J. Gauntlett, J. Harvey, M. Robinson et D. Waldram, Nucl. Phys. **B411** (1994) 461, hep-th/9305066.
- [109] U. Danielsson et G. Ferretti, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 4581, hep-th/9610082.
- [110] S. Kachru et E. Silverstein, Phys. Lett. **396B** (1997) 70, hep-th/9612162.
- [111] D. Lowe, Nucl. Phys. **B501** (1997) 134, hep-th/9702006.
- [112] T. Banks, N. Seiberg et E. Silverstein, Phys. Lett. **401B** (1997) 30, hep-th/9703052.
- [113] C. Bachas, M. Douglas et M. Green, hep-th/9705074.
- [114] U. Danielsson, G. Ferretti, I. Klebanov, Phys. Rev. **D79** (1997) 1984, hep-th/9705084.
- [115] O. Bergman, M. Gaberdiel et G. Lifschytz, Nucl. Phys. **B509** (1998) 194, hep-th/9705130.
- [116] O. Bergman, M. Gaberdiel, G. Lifschytz, hep-th/9711098.
- [117] C. Bachas, M. Green et A. Schwimmer, hep-th/9712086.
- [118] E. Bergshoeff, M. de Roo, M. Green, G. Papadopoulos et P. Townsend, Nucl. Phys. **B470** (1996) 113, hep-th/9601150.
- [119] O. Bergman, M. Gaberdiel et G. Lifschytz, Nucl. Phys. **B509** (1998) 194, hep-th/9705130.
- [120] A. Hanany et E. Witten, Nucl. Phys. **B492** (1997) 152, hep-th/9611230.
- [121] A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B467** (1996) 383, hep-th/9512081.
- [122] W. Lerche, Nucl. Phys. **B308** (1988) 102.
- [123] E. Fradkin et A. Tseytlin, Phys. Lett. **158B** (1985) 316 ; *ibidem* **160** (1985) 69.
- [124] W. Lerche, B. Nilsson, A. Schellekens et N. Warner, Nucl. Phys. **B299** (1988) 91.
- [125] E. Kiritsis et C. Kounnas, Nucl. Phys. **B442** (1995) 472, hep-th/9501020 ; Nucl. Phys. [Proc. Suppl.] **41** (1995) 331, hep-th/9410212 ; hep-th/9507051.
- [126] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. Obers et P. Vanhove, Nucl. Phys. **B509** (1998) 33, hep-th/9707126.
- [127] B. Pioline et E. Kiritsis, Nucl. Phys. **B508** (1997) 509, hep-th/9707018.
- [128] I. Antoniadis, C. Bachas, C. Fabre, H. Partouche et T. Taylor, Nucl. Phys. **B489** (1997) 160, hep-th/9608012.
- [129] I. Antoniadis, E. Gava et K. Narain, Phys. Lett. **283B** (1992) 209, hep-th/9203071.
- [130] M. Green, M. Gutperle et P. Vanhove, Phys. Lett. **409B** (1997) 177, hep-th/9706175.
- [131] M. Green et P. Vanhove, Phys. Lett. **408B** (1997) 122, hep-th/9704145.
- [132] C. Vafa et E. Witten, Nucl. Phys. **B447** (1995) 261, hep-th/9505053.
- [133] J. Blum et J. Harvey, Nucl. Phys. **B416** (1994) 119, hep-th/9310035.
- [134] H. Ooguri et C. Vafa, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3296, hep-th/9608079.
- [135] K. Becker, M. Becker et A. Strominger, Nucl. Phys. **B456** (1995) 130, hep-th/9507158.

- [136] P. Vanhove, *BPS Saturated Amplitudes and Non-perturbative String Theory*, compte rendu de conférence donnée à Cargèse en mai 1997, hep-th/9712079.
- [137] W. Taylor *Lecture on D-branes, Gauge Theory and M(atrices)*, cours donné à l'école d'été de Trieste en juin 1997, hep-th/9801182.
- [138] N. Seiberg, *Notes on Theories with 16 Supercharges*, notes des cours présentés lors des écoles de Jérusalem en janvier 1997 et de Trieste en mars 1997, hep-th/9705117.
- [139] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde et H. Verlinde, *Comm. Math. Phys.* **185** (1997) 197, hep-th/9608096.
- [140] R. Dijkgraaf, E. Verlinde et H. Verlinde *Matrix String Theory*, *Nucl. Phys.* **B500** (1997) 43, hep-th/9703030.
- [141] R. Dijkgraaf, E. Verlinde et H. Verlinde, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **62** (1998) 348, hep-th/9709107.
- [142] C. Bachas et P. Vanhove, *On the rules of D-branes Calculus*, CPTH/S587.1297.
- [143] O. Alvarez, T. Killingback, M. Mangano et P. Windey, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **1A** (1987), compte rendu de conférence donné à Irvine en Californie en janvier 1987 ; *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 1.
- [144] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **109** (1987) 525 ; *The Dirac Operator in Loop Space* dans P. Landweber *Elliptic curves and modular forms in algebraic topology*, *Lectures Notes in Mathematics*, Springer Verlag, 1988.
- [145] D. Lowe, *Phys. Lett.* **403B** (1997) 243, hep-th/9704041.
- [146] S. Rey, *Nucl. Phys.* **B502** (1997) 170, hep-th/9704158.
- [147] P. Hořava, *Nucl. Phys.* **B505** (1997) 84, hep-th/9705055.
- [148] T. Banks, N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B497** (1997) 41, hep-th/9702187.
- [149] L. Motl, hep-th/9701025.
- [150] T. Banks et L. Motl, hep-th/9703218.
- [151] M. Douglas, A. Kato et H. Ooguri, hep-th/9708012.
- [152] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 141.
- [153] F. Hacquebord et H. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B508** (1997) 609, hep-th/9707179.
- [154] P. Ginsparg *Applied Conformal Field Theory* Les Houches session XLIX, *Champs Cordes et phénomènes Critiques* ed. E. Brézin et J. Zinn-Justin Elsevier Science Publisher B.V. 1989
- [155] C. Itzykson et J-B. Zuber, *J. Math. Phys.* **21** 3 (1980) 411.
- [156] J. Minahan et A. Polychronakos, *Phys. Lett.* **312B** (1993) 155, hep-th/9303153.
- [157] M. Douglas, hep-th/9303159.
- [158] M. Green et M. Gutperle, *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 195, hep-th/9701093.
- [159] M. Green et M. Gutperle, hep-th/9711107.
- [160] H. Nicolai, *Phys. Lett.* **89B** (1980) 341 ; *Nucl. Phys.* **B176** (1980) 419.
- [161] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski et G. Thompson, *Phys. Rept.* **209** (1991) 129.
- [162] P. Vanhove, travail en cours.

DE LA PHYSIQUE NON PERTURBATIVE

Compte-rendu de conférence.

Journées des Jeunes Chercheurs à Autrans, décembre 1996.

BPS SATURATED AMPLITUDES AND
NON PERTURBATIVE STRING THEORY

Compte-rendu de conférence.

Cargèse Mai 1997.

DINSTANTONS STRINGS AND M THEORY
Physics Letter **408B** (1997) 122

ONE LOOP IN ELEVEN SUPERGRAVITY
Physics Letter **409B** (1997) 177

HETEROTIC TYPE I DUALITY AND D BRANE INSTANTONS
Nuclear Physics **B509** (1998) 33

ON RULES OF D BRANES CALCULUS
CPTH-S587.1297

Cette thèse expose mes travaux sur la structure non perturbative de la théorie des supercordes. L'exposé commence par une présentation des divers objets étendus solitoniques des théories effectives de supergravité. Ces solutions étendues de dimension $p = 0, \dots, 9$, dites de p -branes, correspondent à des configurations instantoniques de ces théories des champs effectives des théories de supercordes. Après avoir présenté les relations entre ces différentes solutions, je me spécialise sur la solution particulière de la supercorde représentée par la 1-brane porteuse d'une charge associée au champ antisymétrique de Neveu-Schwarz. Cette supercorde est dès alors considérée comme l'objet fondamental perturbatif de la théorie des cordes. Sont ensuite exposées les relations entre les solutions étendues précédemment trouvées et les Dp -branes du secteur non perturbatif de cette théorie des supercordes ; ainsi que différentes configurations statiques et dynamiques des ces objets, en vue d'une compréhension de la structure globale du régime non perturbatif de la théorie des supercordes. Ces résultats sont appliqués à l'étude d'exemples précis de correspondances de couplage faible-couplage fort entre le régime perturbatif d'une formulation de la théorie des supercordes et le régime non perturbatif d'une autre formulation. On étudie ainsi la correspondance de dualité entre la théorie de supercordes ouvertes de type I et celle hétérotique avec un groupe de jauge $SO(32)$; mais aussi la symétrie d'autodualité sous le groupe $Sl(2, \mathbb{Z})$ de la théorie de supercordes fermées de type IIB. De ce dernier calcul est déduite une prescription de régularisation de la divergence ultraviolette de l'amplitude d'interaction de quatre gravitons à l'ordre d'une boucle, calculée dans le cadre de la supergravité en dimension onze. Ce qui confirme le rôle de cette théorie comme théorie effective de la théorie M. Ce mémoire s'achève par un calcul inédit des contributions instantoniques d'espace-temps pour les théories de type I et de type IIB, effectué dans le cadre d'une formulation matricielle des effets non perturbatifs de la théorie des supercordes.

Mots clés : supercordes, supersymétrie, phénomènes non perturbatifs, interactions fondamentales, unification.

This PhD dissertation contains an account of my works on the non-perturbative structure of the superstring theory. Firstly, I introduce the solitonic p -brane solutions of the supergravity theories. These solutions represented by extended objects of dimension p are generalization of the 't Hooft-Polyakov instantonic solutions to theories with gravitation. Then, the NS1-brane, the solution charged under the Neveu-Schwarz 2-form, corresponding to the superstring is considered as a fundamental object. The connection between these solutions and the non-perturbative solutions of Dp -branes is exposed. Static and dynamical configurations of D-branes are analyzed in order to understand the structure of the non-perturbative string theory. These results are then applied to study of the non-perturbative correspond between the type I and $SO(32)$ heterotic string theory, and the self-duality under the $Sl(2, \mathbb{Z})$ group of the type IIB string. Are deduced precise rules for the instantonic computations are deduce, and a regularization of the ultraviolet divergences of the four gravitons one-loop amplitude computed in the framework of the eleven dimensional supergravity. Which confirms its rôle in the framework of M-theory. A direct computation space-time instantonic contributions for these superstrings theories is done in the new framework of the matrix string theory.

Key words : superstring theory, supersymetrie, non perturbative contributions, fundamental interactions, unification.