

LISTA 03 - OTIMIZAÇÃO

ALUNO: PEDRO HENRIQUE C PAULO

LIMITE: 06/06/2023

QUESTÃO 01

Resolver problema OCP pelo método da penalidade para:

$$\min f(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$\text{s.t.: } x - 3 = 0$$

com $r_0 = 1$; $\beta = 10$ e $x_0 = 0$

Solução: Pelo método da penalidade:

$$\phi(x) = x^2 - 4x + 8 + \frac{1}{2} r_i (x - 3)^2$$

O mínimo de ϕ é atingido quando:

$$\nabla \phi = \frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + r_i x - 3r_i = 0$$

Passo 1: $r_i = r_0 = 1$; $x_0 = 0$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + x - 3 = 0$$

$$3x = 7 \therefore \boxed{x = \frac{7}{3}}$$

$$\text{Passo 2: } x_0 = \frac{7}{3}; \quad r_1 = \beta r_0 = 50$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + 10x - 30 \therefore$$

$$12x = 34 \quad | \quad x = \frac{34}{12}$$

$$\text{Passo 3: } x_0 = \frac{34}{12}; \quad r_2 = \beta^2 r_0 = 100$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + 100x - 300 \therefore 102x = 304$$

$$x = \frac{304}{102}$$

Comentário: A solução ANALÍTICA DO PROBLEMA

É TRIVIAL E DADA PELA RESTRIÇÃO $x = 3$. ANALISANDO A SÉRIE obtida, ATÉ O 3º PASSO:

$$\frac{3+4}{1+2}, \quad \frac{30+4}{10+2}, \quad \frac{300+4}{100+2}, \quad \dots \quad \frac{3 \cdot 10^n + 4}{1 \cdot 10^n + 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$$

Questão 02 | Obter condições KRT e solução (x^*, λ^*, μ^*) do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.t.:} \quad -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

Solução Dado o LAGRANGIANO:

$$L(x, \lambda, \mu) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2) + \mu(x_2 - x_1^2)$$

As condições KRT são passadas por:

$$\text{I} \quad \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0$$

$$\text{II} \quad h(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \quad \therefore x_1 + x_2 = 2$$

$$\text{III} \quad c(x) = x_2 - x_1^2 \leq 0$$

$$\text{IV} \quad \lambda^* \text{ qualquer}$$

$$\text{V} \quad \mu^* \geq 0$$

$$\text{VI} \quad \lambda^* h = 0 \quad \text{Redundante com II}$$

$$\text{VII} \quad \mu^* c = 0$$

Desenvolvendo o lagrangeano:

$$\text{VIII} \quad 2(x_1 - 1) + \lambda + 2\mu x_2 = 0 \quad \therefore x_1 = \frac{\lambda - 2}{2(\mu - 1)}$$

$$\text{IX} \quad 2(x_2 - 2) + \lambda + \mu = 0 \quad \therefore x_2 = \frac{4 - \lambda - \mu}{2}$$

Aplicando ambas as equações acima em II:

$$\text{X} \quad \frac{\lambda - 2}{2(\mu - 1)} + \frac{4 - \lambda - \mu}{2} = 2$$

EXPLORANDO A CONDIÇÃO

$$\text{XI} \quad \mu^*(c(x^*)) = 0 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\lambda^* = 0} \text{XI} \\ \xrightarrow{c^* - x_2 - x_2^2 = 0} \text{XII} \end{array}$$

ASSUMINDO XI COMO VERDADE E VOLTANDO A EQ. X:

$$\frac{-\lambda^* - 2}{-2} + \frac{4 - \lambda^*}{2} = 2$$
$$6 - 2\lambda^* = 4 \quad \boxed{\lambda^* = 1}$$

VOLTANDO A VIII e IX: $x_1 = 1/2$

$$x_2 = 3/2$$

CONFERINDO CONTRA III: $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 0$ NÃO VIÁVEL!

ALTERNATIVAMENTE:

$$x_2^* = x_1^{*^2}$$

APLICANDO A CONDIÇÃO II

$$x_0^{*^2} = 2 - x_1^* \quad : \quad x_0^{*^2} + x_1 - 2 = 0 \quad P = -2$$

$$S = -1$$

$$\begin{array}{cc|c} & x_1 & x_2 = x_1^2 \\ R: & 1 & 1 \\ & -2 & 4 \end{array}$$

APLICANDO A FUNÇÃO AO PONTO $\underline{1}, \underline{1}$

$$f(x) = (\underline{1}/\underline{1})^2 + (\underline{1}/\underline{2})^2 = \underline{1}$$

USANDO VII e VIII PARA DETERMINAR μ^* e λ^*

$$\lambda - 2\mu = 0 \quad \therefore \mu = \frac{\lambda}{2}$$

$$-2 + \lambda + \mu = 0$$

$$\frac{3}{2}\lambda = 2 \quad \therefore \lambda = \frac{4}{3}, \mu = \frac{2}{3} \geq 0 \quad (\text{Abaixo II})$$

APLICANDO A FUNÇÃO EM $-2, 4$

$$f(x) = (-2 - \underline{1})^2 + (4 - \underline{2})^2 = 9 + \underline{4} = \underline{13}$$

(Como $13 > 1$, o ponto anterior é o mínimo)

$$R: x_1^* = 1$$

$$x_2^* = 1$$

$$\lambda^* = \frac{4}{3}$$

$$\mu^* = \frac{2}{3}$$

ADICIONAR GRÁFICO

Questão 3 | Obter condições KKT para

$$\begin{cases} \min f(x) = -2x_1 - x_2 \\ \text{st. } x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0 \\ \quad x_1^2 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$L = -2x_1 - x_2 + \lambda (x_1^2 - 2x_2) + \mu (x_1 + 2x_2 - 6)$$

Condições KKT

$$\text{grad } L[1] = -2 + 2\lambda x_1 + \mu = 0 \quad I$$

$$\text{grad } L[2] = -1 + 2\lambda + 2\mu = 0 \quad II$$

$$h(x) = x_1^2 + 2x_2 = 0 \quad III$$

$$c(x) = x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0 \quad IV$$

$$\lambda^* \neq 0 \quad V$$

$$\mu^* \geq 0 \quad VI$$

$$\lambda h = \lambda(x_1^2 - 2x_2) = 0 \quad VII$$

$$\lambda c = \lambda(x_1 + 2x_2 - 6) = 0 \quad VIII$$

COMBINANDO I + II + III

$$-2 - x_1 + \mu + 2\lambda x_1 = 0 \quad \therefore x_1 = \frac{\mu - 2}{1 + 2\lambda} \quad IX$$

INDO PARA VIII, TEMOS 2 OPÇÕES:

$$\mu = \frac{2 + x_1}{1 + 2x_1} \quad X \quad OR$$

$$\mu = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

CONEGANDO POR $\mu = 0$, ISSO NOS LEVA A $x_1 = -2$

APLICANDO III:

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2} = 2,$$

VERIFICANDO CONTRA IV: $-2 + 4 - 6 = -4 < 0$ É CANDIDATO

ANALISANDO A SEGUNDA HÍPOTESE:

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

ADICIONANDO III:

$$x_2^2 + x_1 - 6 = 0 \quad \therefore \quad s = -1 \quad x_1 = 2 \quad \omega \quad -3 \\ p = -6$$

PODEMOS USAR III PARA CALCULAR OS VALORES DE x_2 :

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2} \quad \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \mu \\ 2 & 2 & 4/5 \\ -3 & 9/2 & 1/5 \end{array}$$

μ PODE TAMBÉM SER CALCULADO PELA X. OS 3 PONTOS SÃO CANDIDATOS. ANALISANDO A FUNÇÃO:

$$f(-2, 2) = 4 - 2 = 2$$

$$\boxed{f(2, 2) = -4 - 2 = -6} \rightarrow \text{MÍNIMO}$$

$$f(-3, 9/2) = \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

POR FIM, USAMOS A II PARA DETERMINAR λ^* :

$$-1 - 2\lambda + \frac{8}{5} = 0 \quad 2\lambda = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{\lambda = 3/10}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R: \quad x_1^* &= 2 \\ x_2^* &= 2 \\ \mu^* &= 4/5 \\ \lambda^* &= 3/10 \end{aligned}}$$

QUESTÃO 4

OBTER KKT PARA:

$$\min f(x) = -[(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2]$$

$$\text{s.t.: } x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0$$

SOLUÇÃO

$$L = -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

KKT:

$$-2(x_1+1) + 2\mu x_1 = 0 \quad \text{I}$$

$$-2(x_2+1) + 2\mu x_2 = 0 \quad \text{II}$$

$$\mu > 0 \quad \text{III}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \quad \text{IV}$$

$$\mu(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad \text{V}$$

Observando-se as equações I e II, conclui-se que:

$$\cancel{Mx_1 = x_1 + 1} \quad \cancel{Mx_2 = x_2 + 1}$$

$$Mx_1 = x_1 + 1 \quad \therefore x_1 = \frac{-1}{1-M} \quad \text{VII}$$

$$Mx_2 = x_2 + 1 \quad x_2 = \frac{-1}{1-M} \quad \text{VIII}$$

$$\boxed{x_1 = x_2} \quad \text{VIII}$$

ANALISANDO AGORA A CONDIÇÃO II, DESMEMBRAMOS:

$$M = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

DA PRIMEIRA HIPÓTESE, ANALIZAMOS:

$$x_1 = x_2 = -1$$

COMPARANDO COM III

$$1^2 + 1^2 - 2 = 0 \leq 0 \quad \text{É CANDIDATO}$$

JÁ PARA A SEGUNDA HIPÓTESE:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

APLICANDO VII:

$$2x_1^2 = 2 \quad \therefore x_1^2 = 1 \quad x_1 = \pm 1$$

DESTRINCHANDO OS CASOS POR MEIO DA EQ. VIII

$$x_1 = 1, x_2 = 1$$

$$\underline{x_1 = -1, x_2 = -1} \quad \text{JÁ ANALIADOS}$$

CALCULANDO λ PARA O NOV@ PONTO $(1, 1)$

$$\lambda x_2^2 = \cancel{x_2 + 1}^2 \therefore \lambda = 2 \quad \text{OK}, \geq 0$$

TEMOS 2 PONTOS CANDIDATOS. CALCULANDO A FUNÇÃO:

$$f(1, 1) = -2^2 - 2^2 = -8 \leftarrow \text{MÍNIMO.}$$

$$f(-1, -1) = 0^2 + 0^2 = 0$$

Logo:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$\lambda = 2$$

GRÁFICO

Desmembrando os termos da equação II:

$$\lambda = 0 \quad \therefore \quad 2x_1^2 - x_2 + 2 = 0$$

PARTINDO DE $\lambda = 0$, TEMOS A SOLUÇÃO

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \rightarrow \text{NÃO RESPEITA III PARA NENHUM } \alpha,$$

Logo, A SOLUÇÃO RESIDE EM:

$$\alpha x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \quad \text{III}$$

Substituindo λ de II por III:

$$\alpha x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2 + \alpha x_1^2$$

~~$$x_1(1 + 4\alpha x_2) = 0$$~~

Resolvendo:

$$x_1(1 + 8\alpha + 4\alpha^2 x_1^2) = 0 \quad \xrightarrow{x_1 = 0} \quad 1 + 8\alpha + 4\alpha^2 x_1^2 = 0$$
$$x_1^2 = \frac{-1 - 8\alpha}{4\alpha^2}$$

MANTENDO OS PONTOS E CALCULANDO SEU x_2 TERÁ VIII:

$$\begin{array}{ll} x_1 & x_2 \\ 0 & 2 \\ \pm \sqrt{\frac{-1-8\alpha}{4\alpha^2}} & 2 - \frac{(1+8\alpha)}{4\alpha} \end{array}$$

PARA HAVER APENAS O PONTO 0, 2 COMO SOLUÇÃO, DEVEMOS GARANTIR QUE NÃO HAJA OUTRAS RAÍZES, OU SEJA:

$$\frac{-1 - 8x}{9x^2} \leq 0$$

$$8x \geq -1$$

$$\boxed{x \geq -\frac{1}{8}}$$

Questão a)

PARA ESSE PONTO, μ É CALCULADO PELA EQ. VII:

$$\boxed{\mu = 2x_2 = 4 \geq 0 \quad OK!}$$

Questão b)

GRÁFICO