

# **Lista 03**

MEC 2403 - Otimização e Algoritmos para Engenharia Mecânica

**Pedro Henrique Cardoso Paulo**

[pedrorjpaolo.phcp@gmail.com](mailto:pedrorjpaolo.phcp@gmail.com)

Professor: Ivan Menezes



**PUC**  
RIO

Departamento de Engenharia Mecânica  
PUC-RJ Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
junho de 2023

# LISTA 03 - OTIMIZAÇÃO

ALUNO: PEDRO HENRIQUE C PAULO

LIMITE: 06/06/2023

## QUESTÃO 01

Resolver problema O.R. pelo método da penalidade para:

$$\min f(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$\text{s.t.: } x - 3 = 0$$

com  $r_0 = 1$ ;  $\beta = 50$  e  $x_0 = 0$

Solução: Pelo método da penalidade:

$$\phi(x) = x^2 - 4x + 8 + \frac{1}{2} r_i (x-3)^2$$

O mínimo de  $\phi$  é atingido quando:

$$\nabla \phi = \frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + r_i x - 3r_i = 0$$

Passo 1:  $r_i = r_0 = 1$ ;  $x_0 = 0$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + x - 3 = 0$$

$$3x - 7 \therefore x = \frac{7}{3}$$

$$\text{Passo 2: } x_0 = \frac{7}{3}; \quad r_1 = \beta r_0 = 50$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + 50x - 30 \therefore$$

$$52x = 34 \quad \boxed{x = \frac{34}{52}}$$

$$\text{Passo 3: } x_0 = \frac{34}{52}; \quad r_2 = \beta^2 r_0 = 200$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + 200x - 300 \therefore 202x = 304$$

$$\boxed{x = \frac{304}{202}}$$

**Comentários:** A solução analítica do problema

é trivial e dada pela restrição  $\boxed{x = 3}$ . Analisando a  
série obtida, até o 3º passo:

$$\frac{3+4}{1+2}, \quad \frac{30+4}{20+2}, \quad \frac{300+4}{200+2} \dots \quad \frac{3 \cdot 10^n + 4}{1 \cdot 10^n + 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$$

Questão 02 | Obter condições KRT e solução  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.t.:} \quad -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

Soluções Dado o LAGRANGIANO:

$$L(x, \lambda, \mu) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2) + \mu(x_2 - x_1^2)$$

As condições KRT são dadas por:

$$\text{I} \quad \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0$$

$$\text{II} \quad h(x^*) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \quad \therefore x_1 + x_2 = 2$$

$$\text{III} \quad c(x^*) = x_2 - x_1^2 \leq 0$$

IV  $\lambda^*$  qualquer

V  $\mu^* \geq 0$

VI  $\lambda^* h = 0$  Redundante com II

VII  $\mu^* c = 0$

Desenvolvendo o lagrangean:

$$\text{VIII} \quad 2(x_1 - 1) + \lambda + 2\mu x_2 = 0 \quad \therefore x_1 = \frac{\lambda - 2}{2(\mu - 1)}$$

$$\text{IX} \quad 2(x_2 - 2) + \lambda + \mu = 0 \quad \therefore x_2 = \frac{4 - \lambda - \mu}{2}$$

Aplicando ambas as equações acima em II

$$\text{X} \quad \frac{\lambda - 2}{2(\mu - 1)} + \frac{4 - \lambda - \mu}{2} = 2$$

EXPLORANDO A CONDIÇÃO

$$\text{XI} \quad \lambda^* = 0 \quad \text{XII}$$
$$\text{XII} \quad \mu^*(c(x^*)) = 0 \quad \text{XIII}$$
$$c^* - x_2 - x_2^{-2} = 0 \quad \text{XIV}$$

ASSUMINDO XII COMO VERDADE E VOLTANDO A EQ. X:

$$\frac{-\lambda^* - 2}{-2} + \frac{4 - \lambda^*}{2} = 2$$
$$6 - 2\lambda^* = 9 \quad \therefore \boxed{\lambda^* = 1}$$

VOLTANDO A VIII e IX:  $x_2 = 1/2$

$$x_2 = 3/2$$

CONFERINDO CONTRA III:  $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 0$  NÃO VIÁVEL?

ALTERNATIVAMENTE:

$$x_2^* = x_1^{*^2}$$

APLICANDO A CONDIÇÃO II

$$x_1^{*^2} = 2 - x_2^* \quad : \quad x_1^{*^2} + x_2 - 2 = 0 \quad P = -2 \quad S = -1$$

$$\begin{array}{cc|c} R: & x_1 & x_2 = x_1^2 \\ & 1 & 1 \\ & -2 & 4 \end{array}$$

APLICANDO A FUNÇÃO AO PONTO 1, 1

$$f(x) = (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{2})^2 = 1$$

USANDO VIII e IX PARA DETERMINAR  $\mu^*$  e  $\lambda^*$

$$\lambda - 2\mu = 0 \quad : \quad \mu = \frac{\lambda}{2}$$

$$-2 + \lambda + \mu = 0$$

$$\frac{3}{2}\lambda = 2 \quad : \quad \lambda = \frac{4}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3} \geq 0 \quad (\text{A condição II})$$

APLICANDO A FUNÇÃO EM -2, 4

$$f(x) = (-2 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 9 + 4 = 13$$

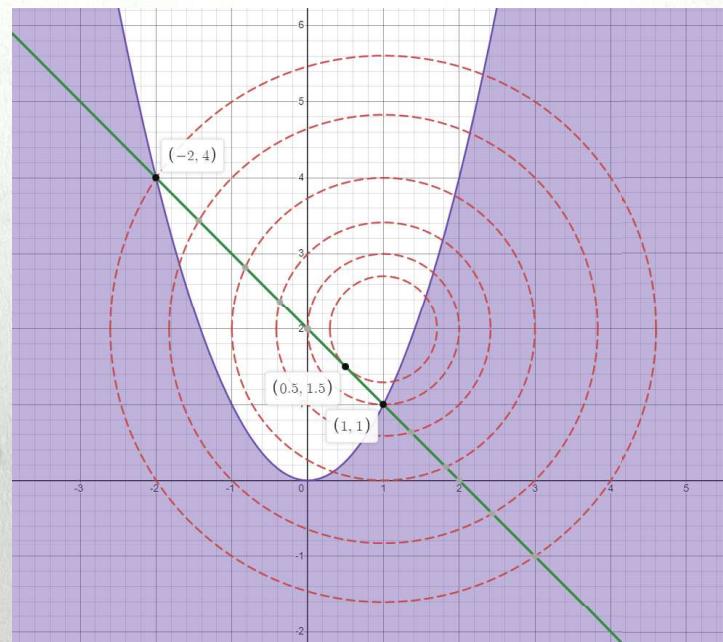
Como 13 > 1, o ponto anterior é o mínimo

$$R: x_1^* = 1$$

$$x_2^* = 1$$

$$\lambda^* = \frac{4}{3}$$

$$\mu^* = \frac{2}{3}$$



Questão 3 | Obter condições KKT para

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = -2x_1 - x_2 \\ \text{st. } x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0 \\ \quad x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Solução:

$$L = -2x_1 - x_2 + \lambda (x_1^2 - 2x_2) + \mu (x_1 + 2x_2 - 6)$$

Condições KKT

$$\text{grad } L[1] = -2 + 2\lambda x_1 + \mu = 0 \quad I$$

$$\text{grad } L[2] = -1 + 2\lambda + 2\mu = 0 \quad II$$

$$h(x) = x_1^2 + 2x_2 \cancel{+} = 0 \quad III$$

$$c(x) = x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0 \quad IV$$

$$\lambda^* \neq 0 \quad V$$

$$\mu^* \geq 0 \quad VI$$

$$hh = h(x_1^2 - 2x_2) = 0 \quad VII$$

$$hc = h(x_1 + 2x_2 - 6) = 0 \quad VIII$$

COMBINANDO I +  $x_1 \neq II$

$$-2 - x_1 + \mu + 2\mu x_1 = 0 \quad : \quad x_1 = \frac{\mu - 2}{1 + 2\mu} \quad IX$$

INDO PARA VII, TEMOS 2 OPÇÕES:

$$\mu = \frac{2 + x_1}{1 + 2x_1} \quad X \quad OR$$

$$\mu = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

COMEÇANDO POR  $\mu = 0$ , ISSO NOS LEVA A  $x_1 = -2$

APLICANDO III:

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2} = 2,$$

VERIFICANDO CONTRA IV:  $-2 + 4 - 6 = -4 < 0$  É CANDIDATO

AVALIANDO A SEGUNDA HIPÓTESE:

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

ADICIONANDO III:

$$x_2^2 + x_1 - 6 = 0 \quad \therefore \quad s = -1 \quad x_1 = 2 \approx -3 \\ p = -6$$

PODEMOS USAR III PARA CALCULAR OS VALORES DE  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2}$$

$x_1$	$x_2$	$\mu$
2	2	4/5
-3	9/2	1/5

$\mu$  PODE TAMBÉM SER CALCULADO PELA X. OS 3 PONTOS SÃO CANDIDATOS. AVALIANDO A FUNÇÃO:

$$f(-2, 2) = 4 - 2 = 2$$

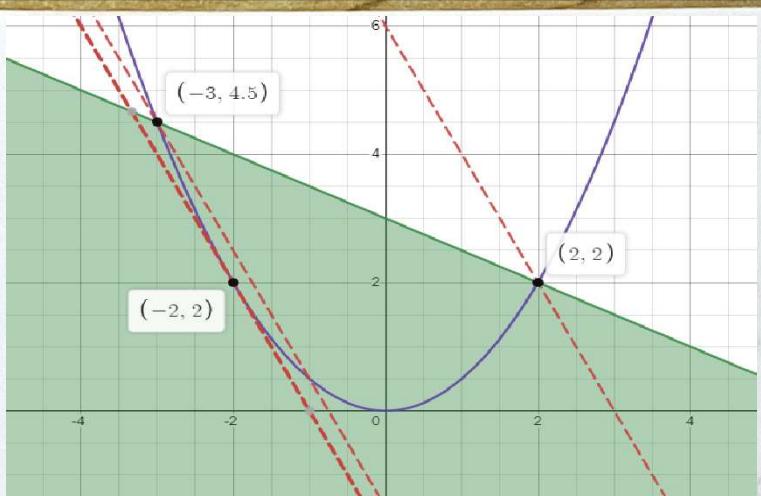
$$\boxed{f(2, 2) = -4 - 2 = -6} \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$f(-3, 9/2) = \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

Por fim, usamos a II PARA DETERMINAR  $\lambda^*$ :

$$-1 - 2\lambda + \frac{8}{s} = 0 \quad ; \quad 2\lambda = \frac{3}{s}$$

$$\boxed{\lambda = 3/50}$$



$$R: x_1^* = 2$$

$$x_2^* = 2$$

$$\lambda^* = 4/5$$

$$\mu^* = 3/10$$

Questão 9

OBTER KKT PARA:

$$\min f(x) = -[(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2]$$

$$\text{st: } x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0$$

Solução

$$L = - (x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 + \lambda (x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

KKT:

$$-2(x_1+1) + 2\lambda x_1 = 0 \quad \text{I}$$

$$-2(x_2+1) + 2\lambda x_2 = 0 \quad \text{II}$$

$$\lambda > 0 \quad \text{III}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \quad \text{IV}$$

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad \text{V}$$

Observando -se as equações I e II, conde -se que:

$$\cancel{Mx_1 = x_1 + 1} \quad \cancel{Mx_2 = x_2 + 1}$$

$$Mx_1 = x_1 + 1 \quad \therefore \quad x_1 = \frac{-1}{1-M} \quad \text{VII}$$

$$Mx_2 = x_2 + 1 \quad x_2 = \frac{-1}{1-M} \quad \text{VIII}$$

ANALISANDO AGORA A CONDIÇÃO II, DESMEMBRAMOS:

$$M = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

DA PRIMEIRA HIPÓTESE, AVALIAmos:

$$x_1 = x_2 = -1$$

COMPARANDO COM III

$$1^2 + 1^2 - 2 = 0 \leq 0 \quad \text{É CANDIDATO}$$

JÁ PARA A SEGUNDA HIPÓTESE:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

APLICANDO VIII:

$$2x_1^2 = 2 \quad \therefore \quad x_1^2 = 1 \quad x_1 = \pm 1$$

DISTRINCHANDO OS CASOS POR MEIO DA EQ. VIII

$$x_1 = 1, x_2 = 1$$

$$\underline{x_1 = -1, x_2 = -1} \text{ JÁ AVALIADOS}$$

CALCULANDO  $\lambda$  PARA O NOVº PONTO  $(1, 1)$

$$\lambda x_1^2 = \cancel{x_2 + 1}^2 \therefore \lambda = 2 \text{ OK, } \geq 0$$

TEMOS 2 PONTOS CANDIDATOS. CALCULANDO A FUNÇÃO:

$$f(1, 1) = -2^2 - 2^2 = -8 \leftarrow \text{MÍNIMO.}$$

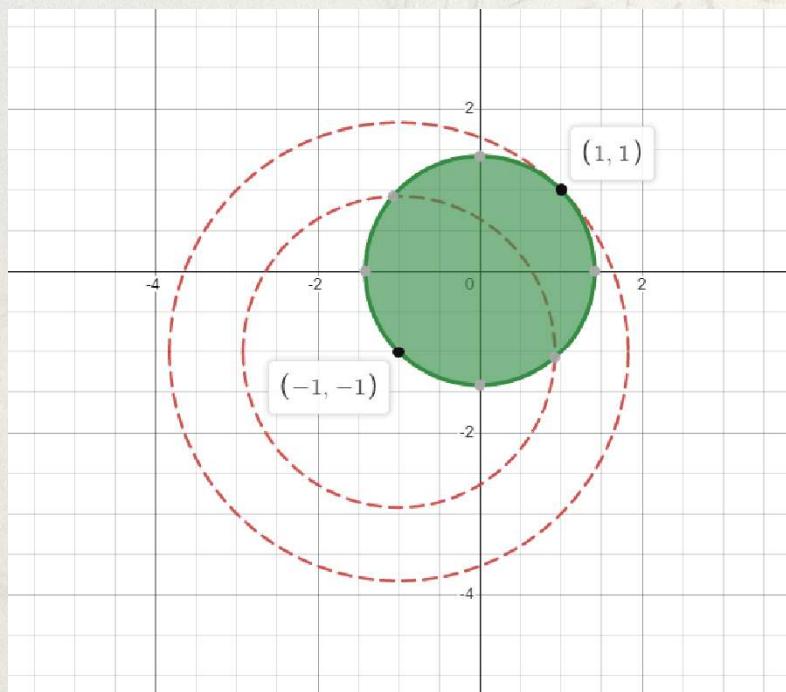
$$f(-1, -1) = 0^2 + 0^2 = 0$$

Logo:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$\lambda = 2$$



QUESTÃO 04

PROBLEMA ORC:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{st. } \alpha x_1^2 + x_2 + 2 \leq 0$$

Solução: Montando o KRT:

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \lambda (\alpha x_1^2 + x_2 + 2)$$

$$2x_1 + 2\lambda \alpha x_1 = 0 \quad \text{I}$$

$$2x_2 - \lambda = 0 \quad \text{II}$$

$$\alpha x_1^2 + x_2 + 2 \leq 0 \quad \text{III}$$

$$\lambda > 0 \quad \text{IV}$$

$$\lambda (\alpha x_1^2 + x_2 + 2) = 0 \quad \text{V}$$

Analisando o gradiente:

$$x_1 (2 + 2\lambda \alpha) = 0 \quad \text{VI}$$

$$\lambda = 2x_2 \quad \text{VII}$$

Desmembrando os termos da equação II:

$$\lambda = 0 \quad \therefore \quad 2x_1^2 - x_2 + 2 = 0$$

PARTINDO DE  $\lambda = 0$ , TEMOS A SOLUÇÃO

$$\begin{array}{l} \cancel{x_1 = 0} \\ x_2 = 0 \end{array} \longrightarrow \text{NÃO ESPECIA III PARA NENHUM } \lambda^0$$

Logo, A solução RESIDE EM:

$$2x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \quad \text{VII}$$

Substituindo  $\lambda$  de VI por VII:

$$2x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2 + 2x_1^2$$

~~$$x_1(2 + 4x_1^2) = 0$$~~

Resolvendo:

$$x_1(2 + 8\lambda + 4\lambda^2x_1^2) = 0 \xrightarrow{x_1 = 0} 2 + 8\lambda + 4\lambda^2x_1^2 = 0$$

$$x_1^2 = \frac{-2 - 8\lambda}{4\lambda^2}$$

MANTENDO OS PONTOS E CALCULANDO SEU  $x_2$  FOR VIII:

$$\begin{array}{ll} x_1 & x_2 \\ 0 & 2 \\ \pm \sqrt{\frac{-2 - 8\lambda}{4\lambda^2}} & 2 - \frac{(2 + 8\lambda)}{4\lambda} \end{array}$$

PARA HAVER APENAS O PONTO  $0, 2$  COMO SOLUÇÃO, DEVEMOS GARANTIR QUE NÃO HAJA OUTRAS RAÍZES, OU SEJA:

$$\frac{-2 - 8x}{9x^2} \leq 0$$

$$8x \geq -2 \quad -\frac{1}{4}$$

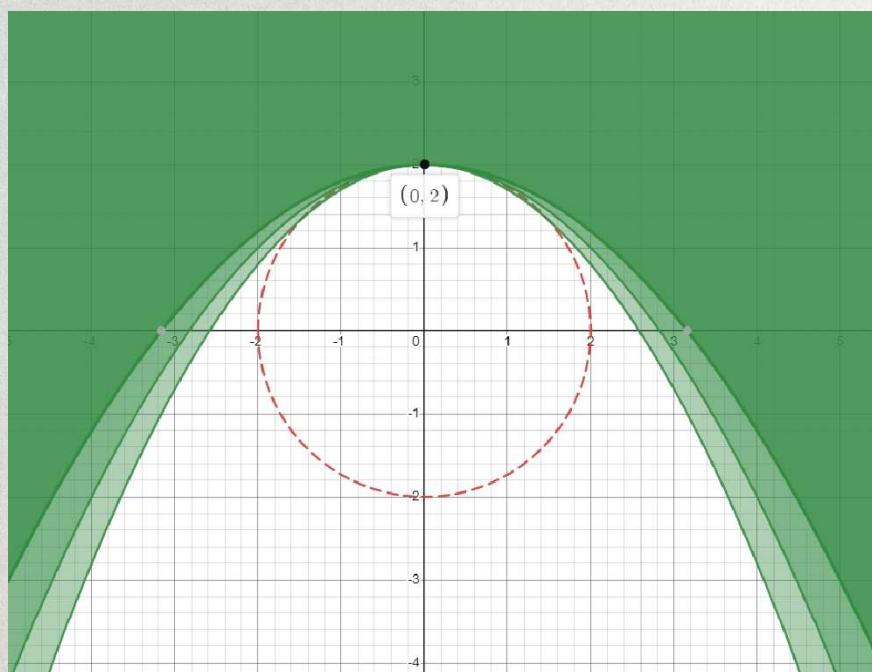
$x \geq -\frac{1}{4}$

Questão a)

PARA ESSE PONTO,  $M$  É CALCULADO PELA EQ. VII:

$M = 2x_2 = 4 \geq 0 \quad \text{OK?}$

Questão b)



São apresentadas as curvas para  $a = -0.3, -0.25$  e  $-0.2$ . A partir do  $0.25$  o contorno da região viável intersecta o círculo que tangencia o ponto  $[0,2]$ , de modo que há solução nas curvas de nível mais internas.

## A Gráficos iterativos

Os gráficos forma gerados usando a calculadora online Desmos. Caso seja do interesse ver e interagir, visitar:

- **Questão 2:** [Clique aqui](#)
- **Questão 3:** [Clique aqui](#)
- **Questão 4:** [Clique aqui](#)
- **Questão 5:** [Clique aqui](#)