

Lista 00

MEC 2403 - Otimização e Algoritmos para Engenharia Mecânica

Pedro Henrique Cardoso Paulo

pedrorjpaulo.phcp@gmail.com

Professor: Ivan Menezes



Departamento de Engenharia Mecânica
PUC-RJ Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
março, 2023

1 Questão 01

Para a questão 1 é solicitado calcular o gradiente e a matriz hessiana da função $f(x)$, dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3x_2^2x_3 - 6x_1 \log x_2 x_3^4 + x_1^{-1}x_2^3 - x_1^2\sqrt{x_2} \quad (1)$$

As derivadas de primeira ordem dessa função são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 9x_1^2x_2^2x_3 - 6x_3^4 \log x_2 - x_1^{-2}x_2^3 - 2x_1\sqrt{x_2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1^3x_2x_3 - 6x_1x_2^{-1}x_3^4 + 3x_1^{-1}x_2^2 - \frac{x_1^2}{2\sqrt{x_2}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_1^3x_2^2 - 24x_1x_3^3 \log x_2 \quad (4)$$

Já as derivadas segundas são dadas por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 18x_1x_2^2x_3 + 2x_1^{-3}x_2^3 - 2\sqrt{x_2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_1^3x_3 + 6x_1x_2^{-2}x_3^4 + 6x_1^{-1}x_2 + \frac{x_1^2}{4x_2\sqrt{x_2}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -72x_1x_3^2 \log x_2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_2} = 18x_1^2x_2x_3 - 6x_2^{-1}x_3^4 - 3x_1^{-2}x_2^2 - \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_3} = 9x_1^2x_2^2 - 24x_3^3 \log x_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2x_3} = 6x_1^3x_2 - 24x_1x_2^{-1}x_3^3 \quad (10)$$

A partir dessas derivadas, definimos o gradiente (∇f) e a Hessiana (\mathbf{H}) como:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

2 Questão 02

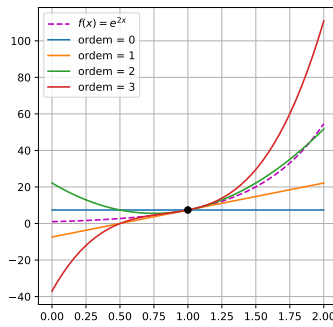
O enunciado solicita classificar a matriz abaixo segundo sua positividade:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

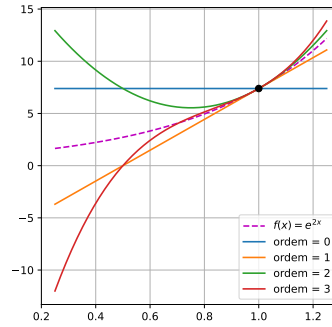
A determinação da positividade da matriz será feita por meio de seus autodeterminantes. Caso os 3 autodeterminantes da matriz sejam positivos, sabe-se que ela será positiva definida. Caso eles alternem entre valores positivos e negativos, sabe-se que ela será negativa definida. Caso contrário, nada pode-se afirmar. Calculando o primeiro:

$$|3| = 3$$

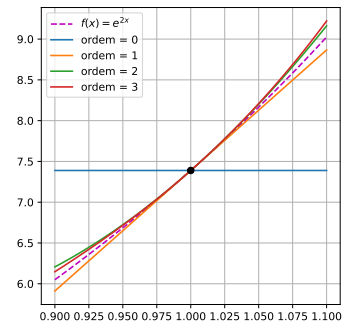
Calculando o segundo:



(a) $x \in [0, 2]$



(b) $x \in [0.25, 1.25]$



(c) $x \in [0.9, 1.1]$

Figura 1: Função $f(x) = e^{2x}$ e seus polinômios de Taylor

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Calculando o terceiro:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Como nenhum dos padrões descritos foi respeitado, a matriz não é nem positiva definida e nem negativa definida, ou seja, a matriz apresenta autovalores positivos e negativos

3 Questão 03