LISTA 03 - OTIMIZAÇÃO

ALUNO: PEDRO HENRIQUE C PAULO

LIMITE: 06/06/2023

QUESTÃO 01

Resolver problema OCR pelo método da penalidade para:

$$\min f(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$s.t.: \quad x - 3 = 0$$

com $r_0 = 1$; $\beta = 10$ e $x_0 = 0$

SOLUÇÃO: Pelo método da penalidade:

$$\phi(x) = x^2 - 4x + 8 + \frac{1}{2} r_i (x-3)^2$$

O mínimo de ϕ é atingido quando:

$$\boxed{\underset{\sim}{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + r_i x - 3r_i = 0}$$

PASSO 1: $r_i = r_0 = 1$; $x_0 = 0$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + x - 3 = 0$$

$$3x = 7 \therefore \boxed{x = \frac{7}{3}}$$

PASSO 2: $x_0 = \frac{7}{3}$; $r_1 = \beta r_0 = 10$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + 10x - 30 \therefore$$

$$12x = 34 \therefore \boxed{x = \frac{34}{12}}$$

PASSO 3: $x_0 = \frac{34}{12}$; $r_2 = \beta^2 r_0 = 100$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x - 4 + 100x - 300 \therefore \quad 102x = 304$$

$$\boxed{x = \frac{304}{102}}$$

COMENTÁRIO: A SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA É TRIVIAL E DADA PELA RESTRIÇÃO $\boxed{x = 3}$. ANALISANDO A SÉRIE OBTIDA, ATÉ O 3° PASSO:

$$\frac{3+4}{1+2}, \quad \frac{30+4}{10+2}, \quad \frac{300+4}{100+2} \quad \dots \quad \frac{3 \times 10^n + 4}{1 \times 10^n + 2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 3$$

QUESTÃO 02 Obter condições KKT e solução (x^*, λ^*, μ^*) do seguinte problema:

$$\begin{cases} \min\ f(x) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 \\ \text{s.t.:}\quad -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ \qquad x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO DADO O LAGRANGEANO:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + \lambda(x_1+x_2-2) + \mu(x_2 - x_1^2)$$

AS CONDIÇÕES KKT SÃO DADAS POR:

I $\left.\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0$

II $h(x^*) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \therefore x_1 + x_2 = 2$

III $c(x^*) = x_2 - x_1^2 \leq 0$

IV λ^* qualquer

V $\mu^* \geq 0$

~~VI $\lambda^* h = 0$~~ Redundante com II

VII $\mu^* c = 0$

Destrinchando o lagrangeano:

$$\text{VIII} \quad 2(x_1 - 1) + \lambda + 2\mu x_1 = 0 \therefore x_1 = \frac{\lambda - 2}{2(\mu - 1)}$$

$$\text{IX} \quad 2(x_2 - 2) + \lambda + \mu = 0 \therefore x_2 = \frac{4 - \lambda - \mu}{2}$$

Aplicando ambas as equações acima em II

$$\text{X} \quad \frac{\lambda - 2}{2(\mu - 1)} + \frac{4 - \lambda - \mu}{2} = 2$$

EXPLORANDO A CONDIÇÃO

$$\text{VII} \quad \mu^*(c(x^*)) = 0$$

$\mu^* = 0$ XI

$c^* = x_2 - x_1^2 = 0$ XII

ASSUMINDO XI COMO VERDADE E VOLTANDO A EQ. X:

$$\frac{-\lambda^* - 2}{-2} + \frac{4 - \lambda^*}{2} = 2$$

$$6 - 2\lambda^* = 4 \therefore \boxed{\lambda^* = 1}$$

VOLTANDO A VIII e IX:

$x_1 = 1/2$

$x_2 = 3/2$

CONFERINDO CONTRA III: $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 0$ NÃO VIÁVEL!

ALTERNATIVAMENTE:

$$x_2^* = x_1^{*2}$$

APLICANDO A CONDIÇÃO II

$$x_1^{*2} = 2 - x_1^* \quad \therefore \quad x_1^{*2} + x_1 - 2 = 0 \quad \begin{matrix} S = -1 \\ P = -2 \end{matrix}$$

R:

x_1	$x_2 = x_1^2$
1	1
-2	4

APLICANDO A FUNÇÃO AO PONTO 1, 1

$$f(x) = (\underbrace{1-1}_{0})^2 + (\underbrace{1-2}_{1})^2 = 1$$

USANDO VIII e IX PARA DETERMINAR μ^* e λ^*:

$$\lambda - 2\mu = 0 \quad \therefore \quad \mu = \frac{\lambda}{2}$$

$$-2 + \lambda + \mu = 0$$

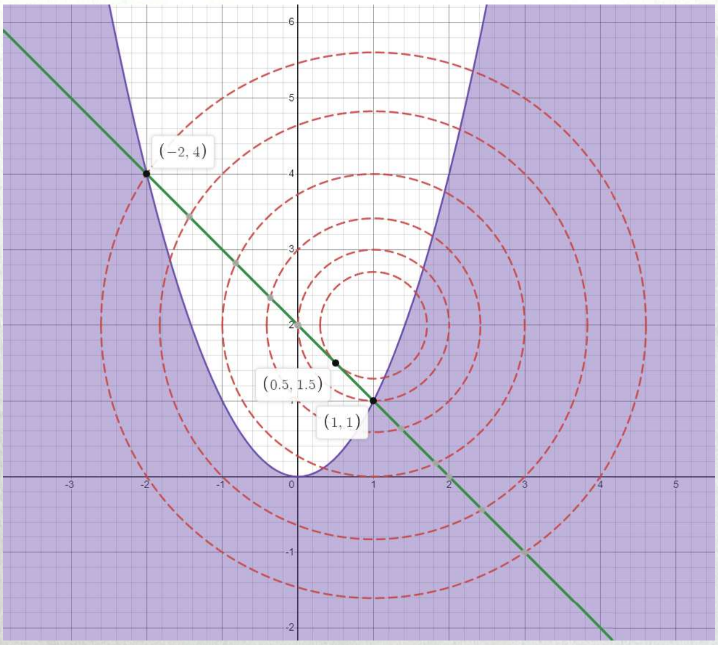
$$\frac{3}{2}\lambda = 2 \quad \therefore \quad \lambda = \frac{4}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3} \geq 0$$ (Atende a V)

APLICANDO A FUNÇÃO EM -2, 4

$$f(x) = (-2-1)^2 + (4-2)^2 = 9 + 4 = 13$$

Como $13 > 1$, o ponto anterior é o mínimo

$$\boxed{\begin{aligned} R:\quad x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 1 \\ \lambda^* &= \frac{4}{3} \\ \mu^* &= \frac{2}{3} \end{aligned}}$$



Questão 3 | Obter condições KKT para

$$\begin{cases} \min \ f(x) = -2x_1 - x_2 \\ \text{st.} \quad x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0 \\ \qquad\quad x_1^2 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\mathcal{L} = -2x_1 - x_2 + \lambda\left(x_1^2 - 2x_2\right) + \mu\left(x_1 + 2x_2 - 6\right)$$

Condições KKT

$\text{grad}\,\mathcal{L}[1] = -2 + 2\lambda x_1 + \mu = 0$ I

$\text{grad}\,\mathcal{L}[2] = -1 - 2\lambda + 2\mu = 0$ II

$h(x) = x_1^2 - 2x_2 = 0$ III

$c(x) = x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$ IV

λ^* qq V

$\mu^* \geq 0$ VI

$\lambda h = \lambda(x_1^2 - 2x_2) = 0$ VII

$\mu c = \mu(x_1 + 2x_2 - 6) = 0$ VIII

COMBINANDO I + $x_1 *$ II

$-2 - x_1 + \mu + 2\mu x_1 = 0 \therefore x_1 = \frac{\mu - 2}{1 + 2\mu}$ IX OK

INDO PARA VIII, TEMOS 2 OPÇÕES: $\mu = \frac{2 + x_1}{1 + 2x_1}$ X OK

$\mu = 0$ ou $x_1 + 2x_2 - 6 = 0$

COMEÇANDO POR $\mu = 0$, ISSO NOS LEVA A $x_1 = -2$

APLICANDO III:

$x_2 = \frac{x_1^2}{2} = 2$

VERIFICANDO CONTRA IV: $-2 + 4 - 6 = -4 < 0$ É CANDIDATO

ANALISANDO A SEGUNDA HIPÓTESE:

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

ADICIONANDO III:

$$x_1^2 + x_1 - 6 = 0 \therefore \begin{matrix} S = -1 \\ P = -6 \end{matrix} \quad x_1 = 2 \text{ ou } -3$$

PODEMOS USAR III PARA CALCULAR OS VALORES DE x_2:

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2}$$

x_1	x_2	μ
2	2	4/5
-3	9/2	1/5

μ PODE TAMBÉM SER CALCULADO PELA X. OS 3 PONTOS SÃO CANDIDATOS. AVALIANDO A FUNÇÃO:

$$f(-2, 2) = 4 - 2 = 2$$

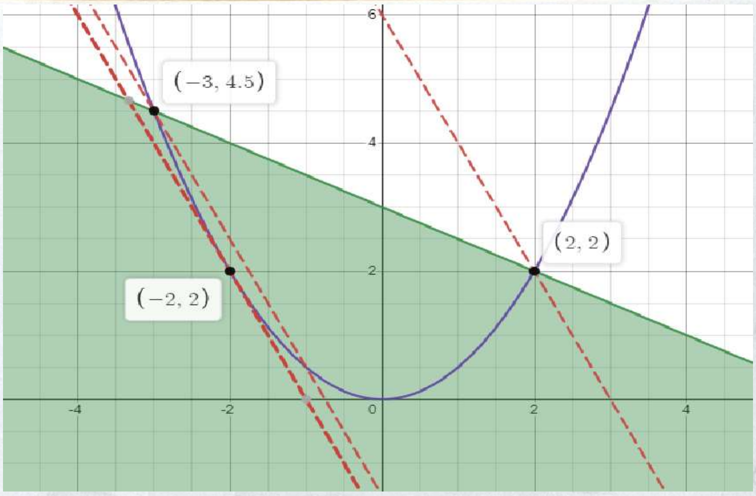
$$\boxed{f(2, 2) = -4 - 2 = -6} \longrightarrow \text{MÍNIMO}$$

$$f(-3, 9/2) = \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

POR FIM, USAMOS A II PARA DETERMINAR λ^*:

$$-1 - 2\lambda + \frac{8}{5} = 0 \qquad 2\lambda = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{\lambda = 3/10}$$



R: $x_1^* = 2$

$x_2^* = 2$

$\mu^* = 4/5$

$\lambda^* = 3/10$

QUESTÃO 4

OBTER KKT PARA:

$$\min f(x) = -\left[(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2\right]$$

$$st: \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0$$

SOLUÇÃO

$$\mathcal{L} = -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 + \mu\,(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

KKT:

$$-\cancel{2}(x_1+1) + \cancel{2}\mu x_1 = 0 \quad \text{I}$$

$$-\cancel{2}(x_2+1) + \cancel{2}\mu x_2 = 0 \quad \text{II}$$

$$\mu \geq 0 \quad \text{III}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \quad \text{IV}$$

$$\mu(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad \text{V}$$

Observado-se as equações I e II, conclui-se que:

$$\cancel{\lambda = \frac{x_1+1}{x_1} = \frac{x_2+1}{x_2}}$$

$$\lambda x_1 = x_1 + 1 \quad \therefore \quad x_1 = \frac{-1}{1-\lambda} \quad \text{VI}$$

$$\lambda x_2 = x_2 + 1 \qquad x_2 = \frac{-1}{1-\lambda} \quad \text{VII}$$

$$\boxed{x_1 = x_2} \quad \text{VIII}$$

ANALISANDO AGORA A CONDIÇÃO V, DESMEMBRAMOS:

$$\lambda = 0 \quad , \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

DA PRIMEIRA HIPÓTESE, AVALIAMOS:

$$x_1 = x_2 = -1$$

COMPARANDO COM III

$$1^2 + 1^2 - 2 = 0 \leq 0$$ É CANDIDATO

JÁ PARA A SEGUNDA HIPÓTESE:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

APLICANDO VIII:

$$2x_1^2 = 2 \quad \therefore \quad x_1^2 = 1 \qquad x_1 = \pm 1$$

DESTRINCHANDO OS CASOS POR MEIO DA EQ. VIII

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1$$

~~$x_1 = -1$, $x_2 = -1$~~ JÁ AVALIADO

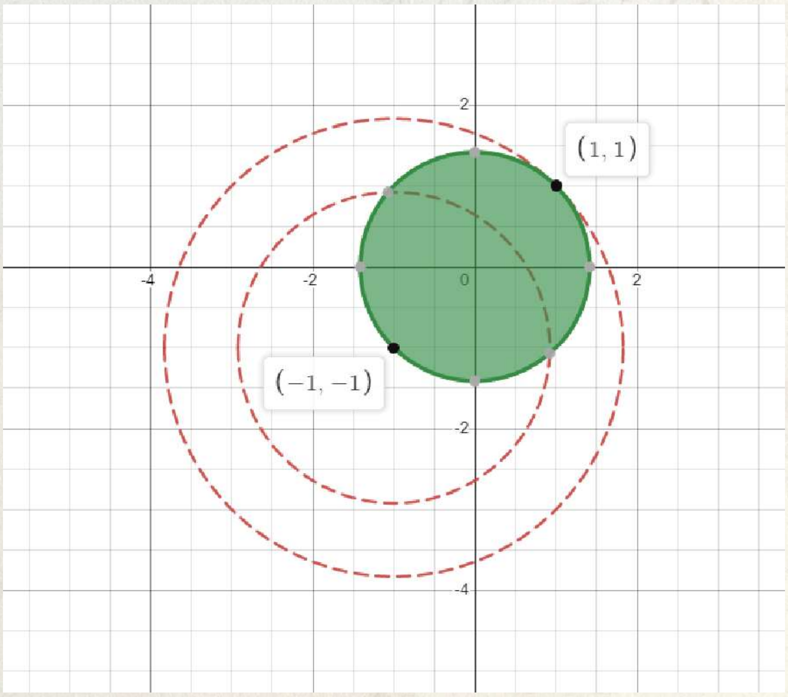
CALCULANDO μ PARA O NOVO PONTO $(1, 1)$

$$\mu \cancel{x_1}^{1} = \cancel{x_1} + 1^{2} \therefore \mu = 2 \quad \text{OK}, \geq 0$$

TEMOS 2 PONTOS CANDIDATOS. CALCULANDO A FUNÇÃO:

$$f(1,1) = -2^2 - 2^2 = -8 \longleftarrow \text{MÍNIMO.}$$

$$f(-1,-1) = 0^2 + 0^2 = 0$$



LOGO:

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$\mu = 2$

QUESTÃO 04

PROBLEMA OCR:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{st.} \quad \alpha x_1^2 + x_2 + 2 \leq 0$$

SOLUÇÃO: MONTANDO O KRT:

$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 + \mu(\alpha x_1^2 - x_2 + 2)$$

$$2x_1 + 2\mu\alpha x_1 = 0 \quad \text{I}$$

$$2x_2 - \mu = 0 \quad \text{II}$$

$$\alpha x_1^2 - x_2 + 2 \leq 0 \quad \text{III}$$

$$\mu \geq 0 \quad \text{IV}$$

$$\mu(\alpha x_1^2 - x_2 + 2) = 0 \quad \text{V}$$

Analisando o gradiente:

$$x_1(2 + 2\mu\alpha) = 0 \quad \text{VI}$$

$$\mu = 2x_2 \quad \text{VII}$$

Desmembrado os casos da equação VI:

$$\mu = 0 \quad \therefore \quad \alpha x_1^2 - x_2 + 2 = 0$$

PARTINDO DE $\mu = 0$, TEMOS A SOLUÇÃO

$$\cancel{x_1 = 0}$$
$$x_2 = 0 \longrightarrow \text{NÃO RESPEITA III PARA NENHUM } \alpha!$$

LOGO, A SOLUÇÃO RESIDE EM:

$$\alpha x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \quad \text{VIII}$$

Substituindo μ de VI por VII:

$$\alpha x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2 + \alpha x_1^2$$

$$x_1 (1 + 4\alpha x_2) = 0$$

Resolvendo:

$$x_1 = 0$$

$$x_1 (1 + 8\alpha + 4\alpha^2 x_1^2) = 0 \longrightarrow 1 + 8\alpha + 4\alpha x_1^2 = 0$$

$$x_1^2 = \frac{-1 - 8\alpha}{4\alpha^2}$$

MANTENDO OS PONTOS E CALCULANDO SEU X_2 POR VIII:

x_1	x_2
0	2
$\pm\sqrt{\frac{-1-8\alpha}{4\alpha^2}}$	$2 - \frac{(1+8\alpha)}{4\alpha}$

PARA HAVER APENAS O PONTO 0,2 COMO SOLUÇÃO, DEVEMOS GARANTIR QUE NÃO HAJA OUTRAS RAÍZES, OU SEJA:

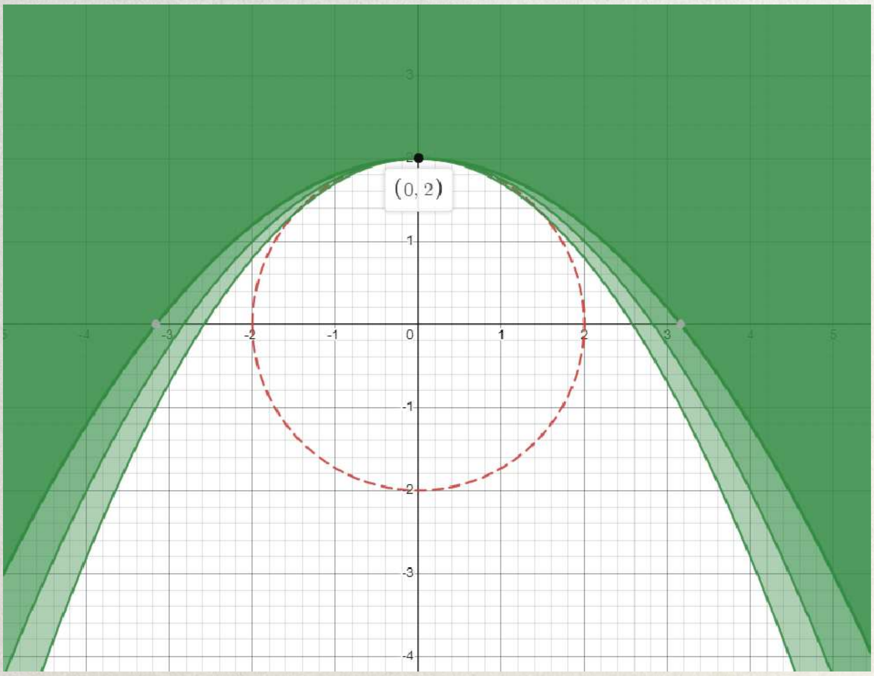
$$\frac{-1-8\alpha}{\cancel{4}\alpha^2} \leq 0$$

$$8\alpha \geq -1 \quad -1/4$$

$$\boxed{\alpha \geq -\cancel{1}/8}$$ Questão a)

PARA ESSE PONTO, μ É CALCULADO PELA EQ. VII:

$$\boxed{\mu = 2x_2 = 4 \geq 0 \quad \text{OK!}}$$ QUESTÃO b)



São apresentadas as curvas para a = -0.3, -0.25 e -0.2. A partir do 0.25 o contorno da refgiâo viável intersecta o círculo que tangencia o ponto [0,2], de modo que há solução nas curvas de nível mais internas.