МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет прикладной математики, информатики и механики
Кафедра вычислительной математики и информационных
прикладных технологий
Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе №3
«Решение систем линейных уравнений
с разреженной матрицей специального вида»
Вариант 15

Обучающиеся 3 курс, 3 группа, Петрина А.А.

Преподаватель к.ф.-м.н. Шабунина З.А.

Воронеж, 2021

1. *Постановка задачи*

Пусть имеется матрица и из нее известны только ненулевые значения, а также вектор правой части. Требуется найти решение этой матрицы.

Входные параметры:

n – размерность матрицы;

a, b, c – векторы для элементов матрицы A, расположенных на нижней кодиагонали, на главной диагонали и на верхней кодиагонали;

p, q – векторы для элементов n-ого и l-ого столбца матрицы;

f – вектор правой части системы уравнений.

Выходные данные:

IER 0 – ошибок нет.

IER 1 - встречено деление на 0.

delta – оценка точности.

rel_delta – относительная погрешность.

2. *Изначальные данные*

Система уравнений имеет следующий вид:

$p_1x_1 + a_1x_{n-1} + b_1x_n = f_1,$
$p_2x_1 + a_2x_{n-2} + b_2x_{n-1} + c_1x_n = f_2,$
. . .
$p_ix_1 + a_ix_{n-i} + b_ix_{n-i+1} + c_{i-1}x_{n-i+2} + q_ix_n = f_i, \quad i=3, \ldots ,n-2$
. . .
$p_{n-1}x_1 + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-2}x_n + q_{n-1}x_n = f_{n-1},$
$p_nx_1 + c_{n-1}x_n + q_nx_n = f_{n-1}.$
Матрица имеет следующий вид:

*								*	*
*							*	*	*
*						*	*	*	*
*					*	*	*		*
*				*	*	*			*
*			*	*	*				*
*		*	*	*					*
*	*	*	*						*
*	*	*							*
*	*								*

3. *Метод решения*

Символическое изображение алгоритма

*								*	*
*							*	*	*
*						*	*	*	*
*					*	*	*		*
*				*	*	*			*
*			*	*	*				*
*		*	*	*					*
*	*	*	*						*
*	*	*							*
*	*								*

Шаг 1 →

*								*	1
*							*	1	0
*						*	1	0	*
*					*	1	0		*
*				*	1	0			*
*			*	1	0				*
*		*	1	0					*
*	*	1	0						*
*	1	0							*
*	0								*

Шаг 2 →

*								0	*
*							0	1	*
*						0	1	0	*
*					0	1	0		*
*				0	1	0			*
*			0	1	0				*
*		0	1	0					*
*	0	1	0						*
0	1	0							*
1	0								*

Шаг 3 →

*								0	1
*							0	1	0
*						0	1	0	0
*					0	1	0		0
*				0	1	0			0
*			0	1	0				0
*		0	1	0					0
*	0	1	0						0
*	1	0							0
*	0								0

Шаг 4 →

0								0	1
0							0	1	0
0						0	1	0	0
0					0	1	0		0
0				0	1	0			0
0			0	1	0				0
0		0	1	0					0
0	0	1	0						0
0	1	0							0
1	0								0

4. *Описание алгоритма*

Шаг 1. Из уравнений со 2-ого по n-ое последовательно исключаем переменные $x_n,\ldots,x_2$ (т.е. из 2-ого уравнения исключаем переменную x_n, из 3-его - x_{n-1} и т.д.). При этом в каждом уравнении коэффициент при x_{n-i+1} для i=1,…,n делается равным 1.

Примечание: в псевдокоде не учитываются выравнивания коэффициентов.

Псевдокод Шага 1.

```
нц
        r=1/B[i]
        B[i]=1
        A[i] *= r;
        P[i] *= r;
        F[i] *= r;
        P[i + 1] -= C[i] * P[i];
        B[i + 1] -= C[i] * A[i];
        F[i + 1] -= C[i] * F[i];
        C[i]=0
        Если i>=2
            Q[i] *= r;
            Q[i + 1] -= C[i] * Q[i];
кц
```

<u>Шаг 2</u>. Коэффициент при x_1 приведем к 1, и исключим из (n-1) уравнения переменную x_1. Из уравнений с (n-1)-ого по 1-ое последовательно исключаем переменные $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (т.е. из (n-1)-ого уравнения исключаем переменную x_1, из (n-2)-ого – x_2 и т.д.).

Псевдокод Шага 2.

```
//при этом коэффициент при xi (i=1,…,n-1) не нужно приводить к 1
Нц
         r = 1 / B[n];
        B[n] = 1;
        F[n] *= r;
        Q[n] *= r;
        Q[n - 1] -= P[n - 1] * Q[n];
        F[n - 1] -= P[n - 1] * F[n];
        P[n - 1] = 0;
        P[i] -= A[i] * P[i + 1];
        Q[i] -= A[i] * Q[i + 1];
        F[i] -= A[i] * F[i + 1];
        A[i] = 0;
кц
```

Шаг 3. Из уравнений со 2-ого по n-ое исключаем x_n.

Псевдокод Шага 3.

нц

```
r = 1 / B[1];
B[1] = 1;
P[1] *= r;
F[1] *= r;

P[i] -= Q[i] * P[1];
F[i] -= Q[i] * F[1];
Q[i] = 0;
```

кц

Шаг 4. Из уравнений с (n-1)-ого по 1-ое исключаем переменную x_1.

Псевдокод Шага 4.

нц

```
r = 1 / B[n];
B[n] = P[n] = 1;
F[n] *= r;

F[i] -= P[i] * F[n];
P[i] = 0;
```

Кц

Шаг 5. Находим оценку точности. Для этого сгенерируем вектор из единиц(Xgenerate), умножим его на матрицу А. Таким образом, получим вектор правой части. Используя описанный выше алгоритм (шаг 1 - шаг 4) найдем решение системы и запишем его в вектор X. Оценку точности найдем как

max|X[i]-Xgenerate[i]| по всем i=1,…,n.

Шаг 6. Находим относительную погрешность. Для этого сгенерируем вектор из случайных значений(Xgenerate), умножим его на матрицу А и получим вектор правой части. После чего с помощью описанного выше алгоритма находим решение этой системы и запишем его в вектор X. Таким образом, относительную погрешность вычислим как

Max| $\frac{X[i]-Xgenerate[i]}{Xgenerate[i]}$|, если |Xgenerate[i]|>q,   по всем i=1,…,n.

Max| X[i]-Xgenerate[i]|, если |Xgenerate[i]|<=q.

5. *Подсчет количества операций*

Посчитаем количество операций умножения и деления. Количество операций 1 шага –(n-2)*11+9 , шага 2 –(n-2)*4+7 , шага 3 –(n-1)*3+4 , шага 4 –(n-1)*2+3 . Тогда общее количество операций умножения и деление равно 20*n-12 . Так как в результате работы алгоритма мы получили единицы на побочной диагонали, то количество операций обратного хода равно 0.

6. Тестирование

№ теста	Размерность системы	Диапазон значений элементов матрицы	Средняя относительная погрешность системы	Среднее значение оценки точности
1	N=50	(-30;30)	1,89E-13	4,80E-15
2	N=50	(-300;300)	2,04E-12	4,55E-14
3	N=50	(-3000;3000)	1,12E-11	5,68E-15
4	N=500	(-30;30)	4,77E-13	6,82E-15
5	N=500	(-300;300)	1,24E-11	3,11E-14
6	N=500	(-3000;3000)	3,25E-10	3,64E-14
7	N=5000	(-30;30)	1,80E-13	1,05E-13
8	N=5000	(-300;300)	2,26E-12	1,81E-14
9	N=5000	(-3000;3000)	5,92E-12	3,49E-15