判别平面上两个椭圆位置关系的代数条件

刘 洋 申立勇
(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

摘 要 在计算机动画、计算机图形学、计算机辅助设计、机器人等领域中,经常需要检测多个实体间的位置关系. 基于广义特征多项式的方法,给出判断平面上任意两个椭圆所有位置关系(分离、外切、相交、内切、内含等)的代数条件. 这些代数条件表示为由两椭圆确定的广义特征多项式的根的分布情况. 该判别方法简单、实用.

关键词 椭圆间的位置关系; 广义特征多项式; 碰撞检测
中图法分类号 TP391.41

An Algebraic Condition for Classifying the Positional Relationship of Two Planar Ellipses

Liu Yang Shen Liyong
(*Department of Mathematics, University of Science & Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract In many scientific fields such as computer animation, computer graphics, computer aided geometry design and robotics, it is very common to need detecting the positional relationship of several entities. Based on the generalized characteristic polynomial, we give an algebraic condition for detecting the positional relationship of two planar ellipses, namely, separation, exterior contact, intersection, interior contact or inclusion. The algebraic condition can be classified by the distribution of roots of the generalized characteristic equation. The criterion is simple, effective, and easier than other known methods.

Key words positional relationship of two ellipses; generalized characteristic polynomial; collision detection

1 引 言

在计算机动画、计算机图形学、计算机辅助设计、机器人等领域中,经常需要检测多个实体间的位置关系,如分离,包含,相切等状况. 二次曲线与曲面是常用的实体表示方式,检测二次曲线与曲面之间的相互位置关系是很有意义的. 常用的检测方法是用多面体逼近二次曲面体,然后通过检测两个近似多面体之间的关系来确定二次曲面体之间的关系[1]. 这种方法精度不高,并且随着多面体面数的增加而越来越复杂. 文献[1]通过计算二次曲面的交线来判断它们之间的相互位置关系,但该方法更复杂,且运算量更大. 王文平等[2]利用由二次曲面确定的广义特征多项式的根的分布给出了三维仿射空间中两个椭球相互分离及外切的代数条件. 该方法只需判断广义特征多项式的根的符号即可确定两个椭球是否分离,因而相当简单. 目前,两个椭球间及任意两个二次曲面间的任意位置关系(分离、外切、相交、内切、内含等)的代数条件还没有得到. 我们旨在拓展文献[3]中的方法来进一步解决一般二次曲线(曲面)相互间位置判定的问题. 首先给出平

原稿收到日期: 2002-08-28; 修改稿收到日期: 2002-10-21. 本课题得到国家自然科学基金(69603009, 19971087)、国家“九七三”数学机械化二级子课题(G199803600)和教育部博士点基金(20010358003)资助. 刘 洋,男,1978 年生,硕士研究生,主要研究方向为计算机辅助几何设计与计算机图形学. 申立勇,男,1977 年生,博士研究生,主要研究方向为计算机辅助几何设计与计算机图形学.

面上任意两椭圆间所有位置关系的代数条件.

2 基础知识

任意一条平面二次曲线 $\boldsymbol{A}$ 都可以表示为二次型的形式

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{X}=(x, y, 1)^{\mathrm{T}}$ 是平面上点的齐次坐标, $\boldsymbol{A}$ 是一个三阶对称方阵. 对于任意给定的二次曲线式(1), 若平面上的点 $\boldsymbol{X}=(x, y, 1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$, 则称点 $\boldsymbol{X}$ 在曲线 $\boldsymbol{A}$ 的内部; 若 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$, 则称点 $\boldsymbol{X}$ 在曲线 $\boldsymbol{A}$ 的外部; 若 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$, 则称点 $\boldsymbol{X}$ 在曲线 $\boldsymbol{A}$ 上. 平面上两个二次曲线 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的各种位置关系定义如下: 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 无交点且各在对方的外部, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分离; 若 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 的外部且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有切点, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 外切; 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有交点(非切点), 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相交; 若 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 的内部且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有切点, 则称 $\boldsymbol{A}$ 内切于 $\boldsymbol{B}$; 若 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 的内部, 且与 $\boldsymbol{B}$ 无交点, 则称 $\boldsymbol{A}$ 内含于 $\boldsymbol{B}$.

两个二次曲线的位置关系可以通过所谓的广义特征多项式来研究. 设 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 及 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=0$ 是两条二次曲线, 定义二次曲线 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征多项式为 $f(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$; $f(\lambda)=0$ 称为关于二次曲线 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征方程. 两个二次曲线(曲面)的特征多项式可以用来帮助求解这两个二次曲线(曲面)的交点(线). 详细情况请参阅文献[1]. 本文将利用广义特征多项式确定两个椭圆的各种位置关系.

给定两个椭圆 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 及 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=0$, 在仿射变换下, 椭圆的拓扑性质不会改变[4], 并且关于两椭圆的广义特征多项式也不变, 因此, 可以将椭圆的方程简化为

$$\boldsymbol{A}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$\boldsymbol{B}: (x-x_c)^2+(y-y_c)^2=1.$$

其中, $0<a\leqslant b$, $1\leqslant b$ 对应的二次型为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -x_c\\ 0 & 1 & -y_c\\ -x_c & -y_c & x_c^2+y_c^2-1\end{pmatrix}.$$

于是, 关于两椭圆的广义特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-1+\frac{a^2y_c^2+b^2x_c^2-a^2-b^2-a^2b^2}{a^2b^2}\lambda+\frac{x_c^2+y_c^2-a^2-b^2-1}{a^2b^2}\lambda^2-\frac{1}{a^2b^2}\lambda^3.$$

为了得到两椭圆位置关系的条件, 我们先给出几个引理.

3 基本引理

引理 1.

(1) $f(0)<0$;

(2) 若 $0<a<b$, 则当 $x_c\neq0$ 时, $f(-a^2)<0$, $f(-a^2)=0$, 当且仅当 $x_c=0$;

(3) 若 $0<a<b$, 则当 $y_c\neq0$ 时, $f(-b^2)>0$, $f(-b^2)=0$, 当且仅当 $y_c=0$.

证明 容易验证 $f(-a^2)=\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)x_c^2$, $f(-b^2)=\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)y_c^2$, 由此易知结论成立. 证毕.

引理 2. 若 $0<a\leqslant b$, 则 $f(\lambda)=0$ 在 $[-b^2, -a^2]$ 中必有一根.

证明 由引理 1, 结论显然.

引理 3. 如果 $f(\lambda)=0$ 有一个二重根且其不为 $-a^2$ 和 $-b^2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有一个实切点.

证明 设 λ_0 为 $f(\lambda)=0$ 的二重根且其不为 $-a^2$ 和 $-b^2$. 由于 $\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的一阶子式的非常数公因子只能是 $\lambda+a^2$ 或 $\lambda+b^2$, 所以 λ_0 不是 $\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的一阶子式的非常数公因子的根, 因此矩阵 $\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的秩为 2, 即 $\ker[\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]$ 的维数为 1, 由于 $\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{I}-(-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}))$, $-\lambda_0$ 是 $-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的二重特征值, 故 $\ker[\lambda_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}]$ 维数为 1. 由 Jordan 标准型的理论可知[5], 存在实向量 $\boldsymbol{X}_0$ 和 $-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的广义特征向量 $\boldsymbol{X}_1$, 使得

$$(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_0=0, \text{且} (\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_0,$$

即 $(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{X}_1=0$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\lambda_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{X}_1=0$, 即 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 上的点; 再由 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\lambda_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_0=0$, 可见 $\boldsymbol{X}_0$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 上的点.

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 点的切线分别是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=0$ 和 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0=0$. 由于 $(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_0=0$, $-\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0$, 所以两根切线相同, 即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有实切点 $\boldsymbol{X}_0$. 证毕.

引理 4. 当 $a< b$, $1< b$ 时, $-b^2$ 不可能是 $f(\lambda)=0$的重根

证明　用反证法 若$-b^2$ 为重根, 则 $f(\lambda)=0$ 的三个根为$-b^2, -b^2, -\frac{a^2}{b^2}$. 由引理 1 可知, 此时$y_c=0$, 再由三个根反求得 $x_c=\pm\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-1)/b^2}$, 为虚数, 与圆心是实数矛盾,　　证毕.

引理 5.

(1) 若 $a<1<b$, 则$-a^2$ 不可能为 $f(\lambda)=0$ 的重根

(2) 若 $1\leqslant a\leqslant b$ 且$-a^2$ 为 $f(\lambda)=0$ 的重根, 则

a　若 $a^2\leqslant b$, 则 $\boldsymbol{B}$ 内切于$\boldsymbol{A}$;

b. 若 $a^2> b$, 则 $\boldsymbol{B}$ 内含于$\boldsymbol{A}$.

证明. 若$-a^2$ 是 $f(\lambda)=0$ 的重根, 则 $f(\lambda)=0$ 的三根为$-a^2, -a^2, -\frac{b^2}{a^2}$. 由此可求得 $x_c=0$, $y_c=\pm\sqrt{(1-a^2)(a^2-b^2)/a^2}$.

当时 $a<1<b$, y_c 为虚数, 此时$-a^2$ 不能为 $f(\lambda)=0$的重根

当 $a^2\leqslant b$ 时, 通过解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=1\end{cases}$$

求得两个椭圆的交点为

$$x_0=\pm\sqrt{\frac{a^4-b^2}{a^2-b^2}},$$

$$y_0=-\frac{\sqrt{(1-a^2)(a^2-b^2)}}{a(a^2-b^2)}.$$

过该点的 $\boldsymbol{A}$ 的切线方程为$\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=0$, 过该点的 $\boldsymbol{B}$ 的切线方程为$\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=0$, 其中 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0, 1)$, $\boldsymbol{X}=(x, y, 1)$. 易验证 $a^2\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, 故 $\boldsymbol{X}_0$ 是两圆的公切点 可证$|y_c|\leqslant b$, 因此 $\boldsymbol{X}_0$ 是内切点

当 $a^2> b$ 时, 上述方程组无解. 再由$|y_c|\leqslant b$ 知$\boldsymbol{A}$ 内含于$\boldsymbol{B}$.　　证毕.

引理 6. 若 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 有公共的内点, 则 $f(\lambda)=0$ 没有正根

证明见文献[2].

引理 7. 如果 $f(\lambda)=0$ 有根属于$(-a^2, 0)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 内含于或内切于$\boldsymbol{A}$.

证明. 用反证法. 假设 $\boldsymbol{B}$ 不内含于也不内切于$\boldsymbol{A}$.

令 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的外点, 又是 $\boldsymbol{B}$ 的内点, 即 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0>0$, $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0<0$, 又设 $\lambda_0\in(-a^2, 0)$ 满足 $f(\lambda)=0$, 则 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_0=\lambda_0\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0<0$. 对任意方向 $\boldsymbol{X}_1=(x_1, y_1, 0)^{\mathrm{T}}$, 考虑直线 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_0+t\boldsymbol{X}_1=(x_0+tx_1, y_0+ty_1, 1)^{\mathrm{T}}$, 当 $t=0$时, $\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(t)=\lambda_0\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(t)<0$, 又知 $\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(t)$的二次项为$\left(x_1^2\left(1+\frac{\lambda_0}{a^2}\right)+y_1^2\left(1+\frac{\lambda_0}{b^2}\right)\right)t^2$, 当$|t|$足够大时, 其为正 因此 $\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(t)$至少有两个零点, 即直线 $\boldsymbol{X}(t)$和二次曲线 $\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(t)=0$ 有两个不同的交点. 由 $\boldsymbol{X}_1$ 的任意性, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=0$ 一定是一条封闭的二次曲线, 因而一定是椭圆. 因此 $\det(\lambda_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\neq0$, 这与 λ_0 是 $f(\lambda)=0$ 的根矛盾. 引理得证　　证毕.

除了上面的几个引理外, 在下面的证明中我们还需要根的连续性定理[6], 即

命题　若 $a_j(t)$, $1\leqslant j\leqslant n$ 为定义在区间上的连续复值函数, 则多项式 $\lambda^n-a_1(t)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n(t)$的根 $\alpha_1(t)$, $\cdots$, $\alpha_n(t)$也是连续的复值函数

4　主要结果

根据第 3 节中的引理, 我们给出两椭圆位置关系的判别条件

定理 1. 若 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 是分离的, 则 $f(\lambda)=0$ 有两个不同的正根

证明见文献[2] 定理 4.

定理 2. 若 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 有实切点, 则 $f(\lambda)=0$ 有重根

证明　设$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 的实切点为$(a\cos\theta, b\sin\theta)$, 过该点作 $\boldsymbol{A}$ 的切线, 该切线也是过该点 $\boldsymbol{B}$ 的切线, 切线方程为$-ab+bx\cos\theta+ay\sin\theta=0$, 所以$B$ 的圆心坐标为

$$(a\cos\theta\pm\frac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},$$

$$b\sin\theta\pm\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}),$$

其中, "$\pm$"取"$+$"时表示 $\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{A}$ 各在切线的两侧, 取"$-$"时表示 $\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{A}$ 在切线的同侧. 容易计算出 $f(\lambda)=0$ 的根为

$$\lambda_1=(a^2-b^2)\cos^2\theta-a^2,$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2+(-a^2+b^2)\cos(2\theta)}}.$$

或

$$\lambda_1 = (a^2 - b^2)\cos^2\theta - a^2,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{\sqrt{2}ab\sqrt{a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos(2\theta)}}{-2a^2\sin^2\theta - 2b^2\cos^2\theta}.$$

即 $f(\lambda)=0$ 总有重根. 易见 $\pm$ 取 $+$ 时, 重根为正; $\pm$ 取 $-$ 时, 重根为负.

推论 1. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 外切 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有正重根.

证明. 由定理 2, 当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 外切时 $f(\lambda)=0$ 有正重根. 反之, 若 $f(\lambda)=0$ 有正重根, 则由引理 3 知, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有切点. 若为内切点, 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有公共的内部点, 这与引理 6 矛盾. 所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 外切.

定理 3. 如果 $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 中且 $a \neq b$, 则 $f(\lambda)=0$ 有三个负根, 其中有一个根属于 $[-b^2, -a^2)$, 两个根属于 $[-a^2, 0)$.

证明. $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的圆心在原点时, $f(\lambda)=0$ 的根为 $\lambda_1=-b^2$, $\lambda_2=-a^2$, $\lambda_3=-1$, 结论成立.

$\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的圆心在右半平面上且不在 x 轴上, 即 $x_c>0$, $y_c\neq 0$ 时, 首先考虑半径为 1 的初始圆 $\boldsymbol{B}_0$, 圆心为 $(\tilde{x}, 0)$, $\tilde{x}>0$. 因为 $\boldsymbol{B}_0$ 的圆心在原点时内含于 $\boldsymbol{A}$, 当 $\tilde{x}$ 足够小时, $\boldsymbol{B}_0$ 还是内含于 $\boldsymbol{A}$. 此时 $f(\lambda)=0$ 的根都是实根, 实际上可求出此时广义多项式的根为 $\alpha_1=-b^2$, $\alpha_{2,3}=\frac{1}{2}(-1-a^2+\tilde{x}^2 \mp \sqrt{-4a^2+(1+a^2-\tilde{x}^2)^2})$. 易证 $\alpha_2'(\tilde{x})>0$, $\lim\limits_{\tilde{x}\to 0}\alpha_2=-a^2$; $\alpha_3'(\tilde{x})<0$, $\lim\limits_{\tilde{x}\to 0}\alpha_3=-1$. 因此, 当 $\tilde{x}$ 足够小时, 即在 $\boldsymbol{B}_0$ 位置定理结论成立.

现在构造动圆 $\boldsymbol{B}(t)$, $t\in[0,1]$ 保持 $\boldsymbol{B}(t)$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 中, 且 $t\neq 0$ 时, 圆心不与坐标轴接触. 动圆的起始位置为 $\boldsymbol{B}_0$, 终止位置为 $\boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{B}$. 令 $f(\lambda; t)=0$ 表示与 $\boldsymbol{A}$ 和动圆 $\boldsymbol{B}(t)$ 相关的广义特征多项式, $\alpha_i(t)$, $i=1,2,3$ 是 $f(\lambda; t)=0$ 的三个根.

假设存在 $t_0\in[0,1]$, 使得 $f(\lambda; t_0)=0$ 的根不满足定理结论. 由引理 2, 对任意 t, $f(\lambda; t)=0$ 都有一负根 $\alpha_1\in[-b^2, -a^2]$; 当 $\boldsymbol{B}(t)$ 的圆心不在坐标轴上时, 该根属于 $(-b^2, -a^2)$; 再由根的连续性和三根之积为 $-a^2b^2$, 可推出下面几种情况:

(1) 若 $t\in[0,1]$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$ 总为实的, 则动圆移动的过程中 $f(\lambda; t)=0$ 必有一个根经过 $-a^2$ 或 0. 由引理 1 知, 若 $f(\lambda; t)=0$ 有一根为 $-a^2$, 则 $x_c=0$, 这与 $\boldsymbol{B}(t)$ 的构造矛盾. 若 $f(\lambda; t)=0$ 有根为 0, 由于 $f(\lambda; t)=0$ 的末项系数非 0, 所以也不可能.

(2) 若 $\boldsymbol{B}(t)$ 移动过程中使 $\alpha_2(t_0)$ 和 $\alpha_3(t_0)$ 变为一对共轭虚根, 则存在一个最小的 $t_{\min}\in(0,1]$ 满足 $\Delta(t_{\min})=(\alpha_2(t_{\min})-\alpha_3(t_{\min}))^2=0$, 即 $f(\lambda; t_{\min})=0$ 有重实根 $\alpha_2(t_{\min})=\alpha_3(t_{\min})$; 且当 $t\neq 0$ 时, 由于 $\boldsymbol{B}(t)$ 圆心不与坐标轴接触, 所以重根不会是 $-a^2$ 或 $-b^2$. 由引理 1 和引理 3 知, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}(t_{\min})$ 有切点, 这与 $\boldsymbol{B}(t)$ 的构造矛盾. 所以 $\boldsymbol{B}$ 的圆心在右半平面上且不在 x 轴上时, 定理成立.

当 $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的圆心在左半平面上且不在 x 轴上时, 证明同(2).

当 $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的圆心在 x 轴上且不在原点时, 类似上述可构造动圆方法证明, 此时构造动圆 $\boldsymbol{B}(t)$ 使它沿 x 轴移动即可, 同时注意 $f(\lambda, t)=0$ 有一根为 $-b^2$, 且由引理 4 知 $-b^2$ 不会为重根.

现在只需要考虑下面情况:

$\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的圆心在 y 轴上, 此时 $f(\lambda)=0$ 有一根 $-a^2$.

当 $a^2>b$ 时, 若 $-a^2$ 为 $f(\lambda)=0$ 的重根, 则根据三个根之积为 $-a^2b^2$ 就可得到三个根满足定理结论. 若 $-a^2$ 不是重根, 令 $\boldsymbol{B}(0)$ 的圆心为 (ε, y_c), $\varepsilon>0$ 足够小, 使得 $\boldsymbol{B}(0)$ 内含于 $\boldsymbol{A}$. 由于圆心在右半平面上, 前面已证此时定理成立. 令动圆移动轨迹平行于 x 轴(这样在动圆移动过程中不会出现 $-a^2$ 为重根情况), 然后如上面(1), (2)证明.

当 $a^2\leqslant b^2$ 时, 证明同上, 且不会有 $-a^2$ 和 $-b^2$ 为重根的情况. 证毕.

推论 2. 若 $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 且 $a=b$, 则 $f(\lambda)=0$ 有两个根属于 $[-a^2, 0)$.

证明. 当 $a=b$ 时, 显然 $-a^2$ 为 $f(\lambda)=0$ 的根, 且另两个根之积为 a^2. 由 $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 知 $a<1$, 所以这两个根中必有一个根绝对值小于等于 a^2. 现在只需证明两个根为负根即可, 直接计算这两个根为 $\frac{1}{2}(-1-a^2+x_c^2+y_c^2\pm(-4a^2+(1+a^2-x_c^2-y_c^2)^2)^{1/2})$.

由于 $x_c^2+y_c^2<(a-1)^2$, 易证这两个根都为负.

定理 4. 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分离 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有相异正根.

证明. 综合引理 6, 定理 1, 定理 2, 不难得到.

下面进一步讨论两椭圆相交、内切及内含的情况. 我们分两种情况讨论.

(1) $1<a<b$.

此时有如下结果:

a. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有内切点 $\Leftrightarrow$ 它们的广义特征多项式 $f(\lambda)=0$ 有负重根.

证明. 必要性由引理 3, 4, 5 和推论 2 得到; 充分性由定理 2 和推论 2 得到.

b. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 仅有两个交点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有共轭虚根.

证明. 依然利用前面的动圆移动法. 选取初始圆 $\boldsymbol{B}_0$ 的圆心为 $(0, \pm b)$, 计算此时 $f(\lambda, 0)=0$ 的根为 $\lambda_1=-a^2$, $\lambda_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4b^2}}{2}$, 后两个根为一对共轭虚根, 即对初始圆 $\boldsymbol{B}_0$ 命题成立. 由 $\boldsymbol{B}_0$ 移动到 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}(t)$ 保持与 $\boldsymbol{A}$ 仅有两个交点且无切点. 假设在 $\boldsymbol{B}(t=1)=\boldsymbol{B}$ 时, $f(\lambda, 1)=0$ 没有两个虚根, 则必有三个实根. 由根的连续性, 一定存在 $t_0\in[0, 1]$, 使得 $\alpha_2(t_0)=\alpha_3(t_0)$ 为 $f(\lambda; t_0)=0$ 的实重根, 则 $\boldsymbol{B}(t_0)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有实切点, 这与动圆的构造矛盾, 所以 $f(\lambda; t)=0$ 恒有共轭虚根. 上述结论对 $1< a< b$ 也成立, 因为从共轭虚根到实根的转化过程中不能出现重根. 证毕.

c. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有 4 个交点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有三个相异的实根, 且小于或等于 $-a^2$.

证明. 证明同 b, 只要取初始圆圆心为 $(0, 0)$ 即可.

d. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有两个交点和一个内切点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有一个负重根, 且三个根都小于或等于 $-a^2$.

证明. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有内切点, 则 $f(\lambda)=0$ 有一个负重根; 由引理 6, 7 知三个根小于或等于 $-a^2$.

(2) $1\leqslant a\leqslant b$.

此时有如下结果:

a. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 仅有两个交点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有共轭虚根.

证明. 同(1)中的分析.

b. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有两个交点和一个内切点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有一个负重根, 三个根都小于或等于 $-a^2$ 且至多一个根为 $-a^2$.

证明. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有内切点知, $f(\lambda)=0$ 有一个负重根; 再由引理 7 知, 三个根都小于或等于 $-a^2$, 且这种情况下, $a\neq b$ (否则 $\boldsymbol{A}$ 也为圆, 无法满足有两个交点和一个切点). 若 $f(\lambda)=0$ 有根为 $-a^2$, 则 $x_c=0$, $y_c=b-1$ 或 $-b+1$. 解方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{XAX}^{\mathrm{T}}=0\\ \boldsymbol{XBX}^{\mathrm{T}}=0\end{cases}$, 要求有三个实根, 则一定有 $a^2< b$, 且三个根为 $-a^2, -b, -b$.

c. $\boldsymbol{B}$ 内切于 $\boldsymbol{A}$, 有且仅有一个内切点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有负重根 $\in(-a^2, 0)$, 或者 $a^2=b$, 三个根都为 $-a^2$.

证明. 首先易知 $1< a\leqslant b$, 否则不能满足条件: $\boldsymbol{B}$ 内切于 $\boldsymbol{A}$ 有且仅有一个内切点.

当 $a=b$ 时, 可知 $x_c^2+y_c^2=(a-1)^2$, $f(\lambda)=0$ 三个根分别为 $-a, -a, -a^2$; 又 $a> 1$, 知命题成立.

当 $a< b$ 时, 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有内切点, 所以 $f(\lambda)=0$ 有负重根.

当 $\boldsymbol{B}$ 的圆心不在 y 轴上时, 若 $f(\lambda)=0$ 的三个根都小于或等于 $-a^2$, 由 x_c 不为 0, 可将 $\boldsymbol{B}$ 微移, 保持圆心不过坐标轴, 使得 $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 中. 由定理 3, $f(\lambda)=0$ 的两个根属于 $[-a^2, 0]$, 这说明移动过程中一定有中间状态使得 $f(\lambda)=0$ 有根为 $-a^2$, 这与移动要求矛盾; 故一定有根属于 $[-a^2, 0]$. 由 x_c 不为零, 当 $a\neq b$ 时不会有根为 $-a^2$, 所以一定有根 $\in(-a^2, 0)$, 再由引理 1 可知, 此根一定就是上述的负重根, 命题成立.

当 $\boldsymbol{B}$ 的圆心在 y 轴上时, 则 $x_c=0$, $y_c=b-1$ 或 $1-b$. 解方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{XAX}^{\mathrm{T}}=0\\ \boldsymbol{XBX}^{\mathrm{T}}=0\end{cases}$, 要求解唯一则一定有 $a^2> b$ (否则不会有且只有一个内切点), 因此, $f(\lambda)=0$ 三个根为 $-a^2$, $-b$, $-b$, 命题仍成立.

d. $\boldsymbol{B}$ 内切于 $\boldsymbol{A}$, 有两个内切点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 的根为 $-a^2, -a^2, \dfrac{b^2}{a^2}$, 且 $a^2\neq b$.

证明. $x_c=0$ (由对称性), 故 $f(\lambda)=0$ 必有根 $-a^2$; 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有内切点, $f(\lambda)=0$ 有负重根. 又 $f(\lambda)=0$ 的三个根积为 $-a^2b^2$, 如果 $-a^2$ 不是重根, 则三个根必为 $-a^2, -b, -b$, 又由 $x_c=0$ 可推出 $y_c=b-1$ 或 $-b+1$. 此时只有一个内切点, 所以 $-a^2$ 定为重根. 由引理 5, $a^2< b$, $f(\lambda)=0$ 的根为 $-a^2, -a^2, -\dfrac{b^2}{a^2}$.

e. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有 4 个交点 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有三个相异的且都小于或等于 $-a^2$ 的负根.

证明. 类似(1)c 的证明, $f(\lambda; t)=0$ 恒有三个相异的负根. 由引理 6, 7, 这三个负根都小于或等于 $-a^2$, 由引理 5, 可知至多一个根为 $-a^2$.

f. $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 中 $\Rightarrow f(\lambda)=0$ 有三个不同的负根, 其中两个属于 $[-a^2, 0]$; 或者 $a^2> b$ 且根分别为 $-a^2, -a^2, -\dfrac{b^2}{a^2}$.

证明. 由定理 3 易得.

根据上面的分析与定理, 可得到下面的结论:

定理 5. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个椭圆, $f(\lambda)=0$ 是它们的广义特征多项式, 则

(1) $\boldsymbol{B}$ 内含于 $\boldsymbol{A}$ 中 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有三个不同的负根, 两个属于 $[-a^2, 0)$; 或者 $a^2>b$ 且根分别为 $-a^2, -a^2, -\frac{b^2}{a^2}$

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 仅有两个交点 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有共轭虚根

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有 4 个交点 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有三个相异的实根, 且都小于或等于 $-a^2$, 至多一个为 $-a^2$.

(4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有两个交点和一个内切点 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有一个负重根, 且三个根都小于或等于 $-a^2$, 至多一个为 $-a^2$, 或者 $a^2=b$ 时, 三个根都为 a^2.

(5) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 只有一个内切点 $\Leftrightarrow f(\lambda)=0$ 有负重根 $\in(-a^2, 0)$, 或者 $a^2=b$ 时, 三个根都为 a^2.

(6) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有两个内切点 $\Leftrightarrow a^2\leqslant b$ 且 $f(\lambda)=0$ 的根为 $-a^2, -a^2, -\frac{b^2}{a^2}$, 且 $a^2\neq b$.

(7) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 重合 $\Leftrightarrow a=b=1$, $f(\lambda)=0$ 的根为 $-1, -1, -1$.

5 示 例

下面我们用几个具体示例来验证代数判断条件的有效性. 考虑第 2 节中定义的椭圆 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 以及它们的特征多项式 $f(\lambda)$.

(1) 当 $a=2$, $b=4$, $x_c=6$, $y_c=5$ 时, $f(\lambda)=0$ 的三个根分别为 51.476 3, $-11.583\,6$, 0.107 332. 有两个相异的正根, 由定理 4 知, 椭圆 $\boldsymbol{A}$ 和椭圆 $\boldsymbol{B}$ 是分离的;

(2) 当 $a=2$, $b=3$, $x_c=1$, $y_c=2$ 时, $f(\lambda)=0$ 的三个根分别为 -6.0, $-1.5-1.936\,49i$, $-1.5+1.936\,49i$, 有共轭虚根, 由定理 5(2) 知, 椭圆 $\boldsymbol{A}$ 和椭圆 $\boldsymbol{B}$ 有两个交点.

(3) 当 $a=1/2$, $b=3$, $x_c=1/2$, $y_c=2$ 时, $f(\lambda)=0$ 的三个根分别为 -1.5, $-4.137\,46$ $-0.362\,541$, 有三个不同负根, 且不大于 $-a^2=-0.25$, 由定理 5(3) 知, 椭圆 $\boldsymbol{A}$ 和椭圆 $\boldsymbol{B}$ 有 4 个交点.

6 结 论

给定平面上两个椭圆, 本文给出了利用关于两个椭圆的广义特征多项式来判别两椭圆位置关系的代数条件. 在实际应用中, 根据给出的两个椭圆方程, 经过仿射变换得到简化形式下的二次型, 计算关于这两个椭圆的广义特征多项式, 再利用本文的结论即可判断它们之间的位置关系. 本文的方法简单、实用.

进一步的工作将讨论任意两条二次曲线及两个二次曲面位置关系的代数条件.

参 考 文 献

[1] Joshua Zer Levin. Mathematical models for determining the intersections of quadric surfaces [J]. Computer Graphics and Image Processing(11), 1979, 11(1): 73~87

[2] Wenping Wang, Jiaye Wang, Myung-Soo Kim. An algebraic condition for the separation of two ellipsoids [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(6): 531~539

[3] R bhatia. Matrix Analysis [M], New York: Springer-Verlag, 1997

[4] Nankai University Editors for Introduction to Analytical Geometry of Three Dimensions. Introduction to Analytical Geometry of Three Dimensions [M], 2nd ed. Beijing: High Education Press, 1989(in Chinese)
(南开大学《空间解析几何引论》编写组. 空间解析几何引论(第 2 版))[M], 北京: 高等教育出版社, 1989)

[5] G Strang. Linear Algebra and Its Applications [M], 3rd ed, San Diego, CA: Harcourt brace Jovanovich, 1988

[6] Josef Hoschek, Dieter Lasser. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design [M], Massachusetts: A K Peters Wellesley, 1993. 505~547