

Chen's 混沌吸引子及其特征量^{*}

陆君安¹ 吕金虎² 陈士华¹

(1. 武汉大学数学与统计学院·武汉, 430072 2 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学所·北京, 100080)

摘要: 计算了 Chen's 混沌吸引子的 Lyapunov 指数, 关联维数, Kolmogorov 熵等混沌特征量. 采用两种不同的计算方法得到了一致的 Lyapunov 指数. 这从数值实验上有力地证实了 Chen's 吸引子是一个与 Lorenz 系统和 Rossler 系统均不拓扑等价的新的混沌吸引子.

关键词: 混沌吸引子; Lyapunov 指数; 关联维数; Kolmogorov 熵

文献标识码: A

Chen's Chaotic Attractor and Its Characteristic Quantity

LU Jun'an¹, LÜ Jinhu² and CHEN Shihua¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University · Wuhan, 430072, P. R. China;

2. Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Academia Sinica · Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract The quantified analysis to Chen's chaotic attractor is made. Its Lyapunov exponents, correlation dimension and Kolmogorov entropy are figured out. Especially the same result is gained in computing Lyapunov exponents by two different methods.

Key words: chaotic attractor; Lyapunov exponents; correlation dimension; Kolmogorov entropy

最近, 陈关荣教授在研究混沌的反控制过程中发现了一个新的混沌吸引子^[1~3] (图 1), 它是由如下三维系统产生

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - x + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

其中参数 $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$. 在 Matlab 上绘制 Chen's 混沌吸引子图如图 1.

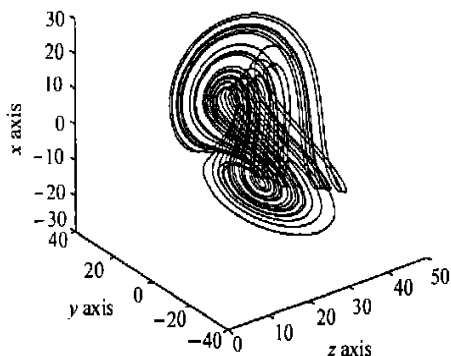


图 1 Chen's 吸引子

Fig. 1 Chen's attractor

陈关荣教授证明了该系统与 Lorenz 系统和 Ro-

ssler 系统均不拓扑等价. 本文对 Chen's 混沌吸引子进行定量研究, 着重利用定义^[4,5] 计算出它的全部 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数, 同时利用小数据量方法^[4] 计算出最大 Lyapunov 指数, 结果是完全一致的. 本文还计算了它的关联维数和 Kolmogorov 熵. 这些特征量均与 Lorenz 系统和 Rossler 系统不一样, 这与它们图形直观上的区别是相符的. 由于 Chen's 吸引子比 Lorenz 和 Rossler 吸引子在拓扑结构上更加复杂, 故在如保密通讯等工程应用中有更广阔的前景.

1 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数 (Lyapunov exponents and Lyapunov dimension)

1.1 定义法 (Method by definition)

取初值 $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, 积分时间步长 $h = 0.0001$. 用四阶 Runge-Kutta 法积分方程组 (1), 利用定义法, 除去前面 1×10^4 个点, 用后面 5×10^5 个点进行计算, 可以得到三个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 2.0274$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -12.0135$. Lyapunov 维数 $D_L = 2 + 2.0274/12.0135 = 2.1688$.

* 基金项目: 国家自然科学基金 (59879018) 和湖北省自然科学基金 (98J121) 资助项目.

收稿日期: 2000-06-28; 收修改稿日期: 2001-01-05.

表 1 利用定义法计算最大 Lyapunov 指数
Table 1 Computing the largest Lyapunov exponent using the method by definition

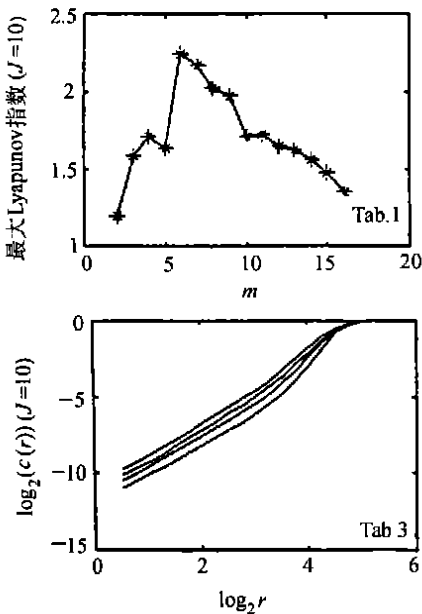
每次演化步数	总演化次数	最大 Lyapunov 指数
100	5000	2.0280
50	10000	2.0276
10	50000	2.0274
5	100000	2.0274

1.2 小数据量方法(Method for small data sets)

小数据量方法是一种计算最大 Lyapunov 指数的方法,它相对 Wolf 方法^[3]具有某些优点.取初值 $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0$, 积分时间步长 $h = 0.0001$. 用四阶 Runge-Kutta 法积分方程组(1), 采用文献[4]的小数据量方法, 除去前面 1×10^4 个点, 用后面 5×10^4 个点的变量 x 的时间序列计算, 每隔 10 步选一个点, 即 $\Delta t = 0.001, N = 5000$. 表 2 列出了不同的时间延迟 J 和嵌入维数 m 的最大 Lyapunov 指数的计算结果.

表 2 利用小数据量方法计算最大 Lyapunov 指数
Table 2 Computing the largest Lyapunov exponent by the method for small data sets

J	m	λ_1	J	m	λ_1
10	6	2.2433	8	8	2.2310
10	7	2.1677	9	8	2.1282
10	8	2.0247	10	8	2.0247
10	9	1.9742	11	8	1.9609



2 关联维数和 Kolmogorov 熵 (Correlation dimension and Kolmogorov entropy)

由 G-P 算法^[6,7]得到 K_2 熵和关联维数的关系式为

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{kJ} \log_2 \frac{c_m(r)}{c_{m+k}(r)}.$$

其中 $m, m+k$ 是嵌入维数, $c_m(r), c_{m+k}(r)$ 分别是嵌入维数为 $m, m+k$ 时的关联积分. 由最小二乘法同时回归计算出关联维数和 K_2 熵, 即

$$K_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta b_i}{kJ}.$$

其中 $\Delta b_i = b_i - b_{i+k}, b_i$ 和 b_{i+k} 分别是嵌入维数为 i 和 $i+k$ 时的最佳回归直线在 y 轴上的截距. 取初值 $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0$, 积分时间步长 $h = 0.0001$. 用四阶 Runge-Kutta 法积分方程组(1), 除去前面 1×10^4 个点, 用后面 5×10^4 个点的变量 x 的时间序列计算, $\Delta t = 0.001, N = 5000$. 利用前面计算最大 Lyapunov 指数的最佳延迟 $J = 10$, 嵌入维数 m 分别取 6, 7, 8, 9, 10 等计算的 $\log_2 r \sim \log_2 c(r)$ 关系如图 2(Tab.3); 取 $m = 8, J = 8, 9, 10, 11, 12$ 等计算的 $\log_2 r \sim \log_2 c(r)$ 关系如图 2(Tab.4)所示, 同时回归得到关联维数 $D = 2.3676, K_2 = 0.3647$.

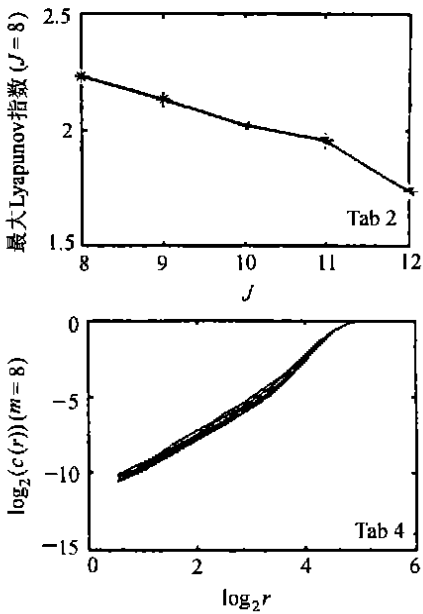


图 2 应用线性回归同时计算关联维数和Kolmogorov熵

Fig. 2 Computing correlation dimension and Kolmogorov entropy simultaneously by regression analysis

3 结论 (Conclusions)

本文对混沌反控制过程中发现的新的混沌吸引子——Chen's 吸引子进行分析, 将它与另外两个著名的 Lorenz 和 Rossler 吸引子进行比较, 不难发现和

它们有相似之处,但也有独特之处.陈关荣证明了系统(1)与 Lorenz 系统和 Rossler 系统均不拓扑等价. Chen's 吸引子的定性分析如分岔,通向混沌的途径等可见文献[9].而混沌吸引子的特征量是研究吸引子的一个十分重要的方面,本文利用定义和小数据量方法计算了 Chen's 吸引子的全部 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数,由最小二乘法同时回归计算出关联维数和 K_2 熵.这从数值实验上有力地证实了 Chen's 吸引子是一个新的混沌吸引子.

参考文献(References)

- [1] Chen G and Lai D. Feedback anticontrol of discrete-chaos [J]. Int. J. of Bifur. Chaos, 1998, 8(7): 1585—1590
- [2] Chen G and Ueta T. Yet another Chaotic attractor [J]. Int. J. of Bifur. Chaos, 1999 9(6): 1465—1466
- [3] Wang Xiaofan. Chen's attractor—a new Chaotic attractor [J]. Control Theory and Applications, 1999 16(5): 779 (in Chinese)
- [4] Rosenstein M T, Collins J J and de Luca C J. A practical method for

calculating largest Lyapunov exponents from small data sets [J]. Physica D, 1993, 65(1): 117—134

- [5] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica D, 1985, 16: 285
- [6] Grassberger P and Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors [J]. Physica D, 1983 9: 189—208
- [7] Abraham N B, Albano A M, Das B, et al. Calculating the dimension of attractors from small data sets [J]. Phys. Lett. A, 1986, 114: 217
- [8] Chen Shihua and Lu Jun'an. Introduction to Chaotic Dynamics [M]. Wuhan: Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering Press, 1998 (in Chinese)
- [9] Chen G and Ueta T. Bifurcation of Chen's equation [J]. Int. J. Bifur. Chaos, 2000 10(8): 1917—1931

本文作者简介

陆君安 1945 年生.教授.博士生导师.从事混沌控制与同步、复杂系统建模及偏微分方程数值计算方面的研究.

吕金虎 1974 年生.博士研究生.从事混沌时间序列,动力系统 & 非线性控制系统的研究.

陈士华 1961 年生.博士.副教授.从事非线性科学研究.

(上接第 307 页)

恒定切厚时的控制效果无明显差别,但在变切厚切削时,变结构控制器的控制效果则明显强于 PID 控制器.

以上结果表明,当磁悬浮主轴处于复杂加工工况时,变结构控制器是非常合适的选择,因此具有十分广泛的工程应用前景.

参考文献(References)

- [1] Dussaux M. The industrial applications of the active magnetic bearings technology [A]. 2nd International Symposium on Magnetic Bearing [C], Tokyo 1990, 33—38
- [2] Bleuler H, Gahley C, Herzog R, et al. Application of digital signal processors for industrial magnetic bearings [J]. IEEE Trans. Control Systems Technology, 1994 2(4): 280—289
- [3] Oguchi K and Okada K. Contactless starting and positioning of a steel

ball in single-axis magnetic suspension device by variable structure control [A]. 3rd International Symposium on Magnetic Bearing [C], Washington, 1992, 60—69

- [4] Nonami K and Yamaguchi H. Robust control of magnetic bearing systems by means of sliding mode control [A]. 3rd International Symposium on Magnetic Bearing [C], 1992 537—546
- [5] Nonami K, Wang J W, Sampei M, et al. Active vibration control of a flexible rotor using H_{∞} control theory [J]. JSME International Journal, Series C, 1992, 35(3): 393—399
- [6] Liu Y S, Huang T, Zhang D W. Variable structure control of high speed AMB-milling spindle [A]. 3rd Junior Conf. of China Mechanical Engineering Academy [C], Beijing, 1998 (in Chinese)
- [7] Gao W B. Theory and Design of Variable Structure Control [M]. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese)

本文作者简介

刘迎澍 1971 年生.工学博士.主要从事振动、噪声主动控制及汽车、摩托车电子方面的研究.