

# 一个四翼混沌吸引子<sup>\*</sup>

王繁珍<sup>1)</sup> 齐国元<sup>2)</sup> 陈增强<sup>1)†</sup> 袁著祉<sup>1)</sup>

1) (南开大学信息技术科学学院自动化系, 天津 300071)

2) (天津科技大学电子信息与自动化学院, 天津 300222)

(2006 年 8 月 23 日收到; 2006 年 9 月 26 日收到修改稿)

在新的四维混沌系统中数值观察到四翼混沌吸引子, 然而, 通过进一步分析发现, 该四翼吸引子并非真实的, 实际上它是上、下两个共存的双翼混沌吸引子, 他们各自有独立的混沌吸引域, 由于其位置靠得太近和数值误差产生的一种假象. 通过引入一个线性状态反馈控制项, 系统的一些相似性被破坏, 受控系统能产生穿越上下吸引域界限的对角双翼混沌吸引子, 进一步, 随着动力学模态的演化, 上下混沌吸引子与对角混沌吸引子融合成一个真正的四翼混沌吸引子. 最后, 通过比较该四翼混沌吸引子的系统、Lorenz 系统、Chua 氏电路等混沌信号的频谱发现, 四翼混沌吸引子的系统信号具有极宽的频谱带宽, 该特性在通讯加密等工程应用中具有重要价值.

关键词: 四维混沌系统, 双翼吸引子, 四翼吸引子, 频谱分析

PACC: 0545, 0540

## 1. 引言

在工程领域中, 混沌动力学系统研究及其在保密通讯中的应用引起了极大的兴趣<sup>[1-8]</sup>, 因此, 生成具有复杂动力学特性和拓扑结构的混沌系统是研究和应用混沌的重要前提, 这方面的工作有两个发展方向: 一个方向是基于 Chua 电路来构建具有多卷波混沌吸引子的广义 Chua 电路, 例如, 利用一些非线性函数如线性分段函数<sup>[9,10]</sup>、阶梯函数<sup>[11]</sup>、迟滞函数<sup>[12]</sup>以及饱和函数<sup>[13]</sup>等来实现多种广义 Chua 电路. 研究发现广义 Chua 电路具有共同特性, 即非线性函数为非光滑函数, 不含有二次项; 子吸引子为卷状, 且卷的个数等于其平衡点的个数.

另一个研究方向是在 Lorenz 系统基础上构建新的三维混沌吸引子, 比如, Varčec 等<sup>[14]</sup>提出了广义 Lorenz 系统, Chen 和 Lü 等<sup>[15-18]</sup>发现 Lorenz 系统族, 以及 Celikovskiy 和 Chen 提出了广义 Lorenz 系统典型型, 该典型型覆盖了很宽泛的带有二次项的三维自治混沌系统. 这些系统具有鲜明的区别于广义 Chua 电路的共同特征, 即系统含有二次非线性项, 没有非光滑的函数; 系统产生蝴蝶形状两个子吸引子, 而有

三个平衡点, 即翼的个数与平衡点的个数不等.

目前, 在混沌电路工程领域中, 已经有许多技术利用非光滑非线性函数产生多卷混沌吸引子<sup>[9-13]</sup>. 然而, 如何用光滑非线性项产生多翼(超过两个)的混沌吸引子仍然存在着技术上的挑战. 尽管 Liu 和 Chen<sup>[19]</sup>构造了一个带有五个平衡点的三维自治系统能产生四翼(文中称四卷)混沌吸引子, 然而相同的作者在另一篇文献中说明了该四翼吸引子实际是不存在的, 它是同时存在的两个两翼混沌吸引子由于靠得太近和数值误差原因导致的一种数值假象<sup>[20]</sup>. Lü 等<sup>[18]</sup>生成了一个带有五个平衡点的三维系统, 该系统在控制条件下能产生一个真正的四翼混沌吸引子.

最近, Qi<sup>[21,23]</sup>等构造了一个新的四维自治混沌系统, 它的每个方程中含有三次非线性交叉乘积项. 在很宽的参数范围系统产生复杂的动力学特性, 包括混沌、两个共存双翼吸引子、Hopf 分岔、倍周期分岔、周期轨、汇和源等<sup>[21,23]</sup>.

本文在四维混沌系统中数值观察到四翼混沌吸引子, 然而, 通过进一步分析发现, 该四翼吸引子并非真实的, 实际上它是上、下两个共存的混沌吸引子, 他们各自有独立的混沌吸引域, 由于其位置靠得

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60374037, 60574036), 高等学校博士学科点专项学科基金(批准号: 20050055013), 天津市科技发展基金(批准号: 07JCYBJC05800)和教育部重点基金(批准号: 2007005)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人: E-mail: chenzzq@nankai.edu.cn

太近和数值误差产生的一种假象.通过引入一个线性状态反馈控制项,系统的一些相似性被破坏,受控系统能产生穿越上下吸引域的界限的主对角和次对角混沌吸引子,进一步,随着参数的演化,上下混沌吸引子与对角混沌吸引子融合成一个真正的四翼混沌吸引子.最后,通过对四翼混沌吸引子进行频谱分析,并与 Lorenz 系统、Chua 氏电路和 Li 等<sup>[18]</sup>构造的四翼混沌吸引子信号的频谱比较,产生四翼混沌吸引子的信号具有极宽的频谱带宽,这是通讯加密等工程应用所期望的极好的动力学特性.

2. 四维混沌系统的基本特性及伪四翼吸引子

Qi 等<sup>[21]</sup>提出的四维自治混沌系统的动力学方程描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4, \\ \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1 x_2 x_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $x=[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  是状态变量,  $a, b, c, d$  是正值参数.文献[23]给出了这个混沌系统的基本特

性,即

1)该系统每个方程中包含一个三次交叉乘积项,该系统轨道关于坐标平面  $x_1-x_2$  和  $x_3-x_4$  以及原点具有完美的对称性.

2)系统共有九个平衡点  $S_i, i=0, 1, \cdots, 8$ , 根据平衡点的线性化特性共分成三类,每一类具有相同的一组的线性化特征值和特征向量,其中  $S_{1,2,3,4}$  为第一类,  $S_{5,6,7,8}$  为第二类,  $S_0$  为第三类.众所周知, Lorenz 系统和 Chen 系统,甚至 Lorenz 系统族都是三个平衡点,根据平衡点的线性化特性可分成两类<sup>[15-17]</sup>.

3)在相应的参数范围中,根据轨道的其相空间几何位置,系统能出现二个同时共存的对称双翼混沌吸引子,称为上吸引子和下吸引子,即系统有两个独立的不变吸引域.注意到这种动力学行为不同于只有一个双翼的混沌吸引子的 Lorenz 系统族.

本文中我们观察到另一个新的动力学现象,系统能产生四翼混沌吸引子.取参数为  $a=25, b=2, c=15, d=35$ , 图 1(a), (b)为系统轨迹的相平面图,系统轨迹能从上半区域或下半区域自由地穿越界面  $x=0$  而进入对面,并且该四翼混沌吸引子不依赖于初值的选取.

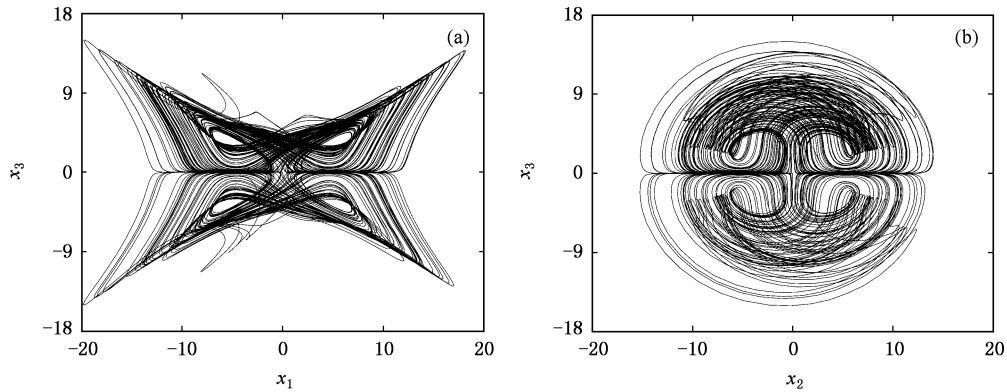
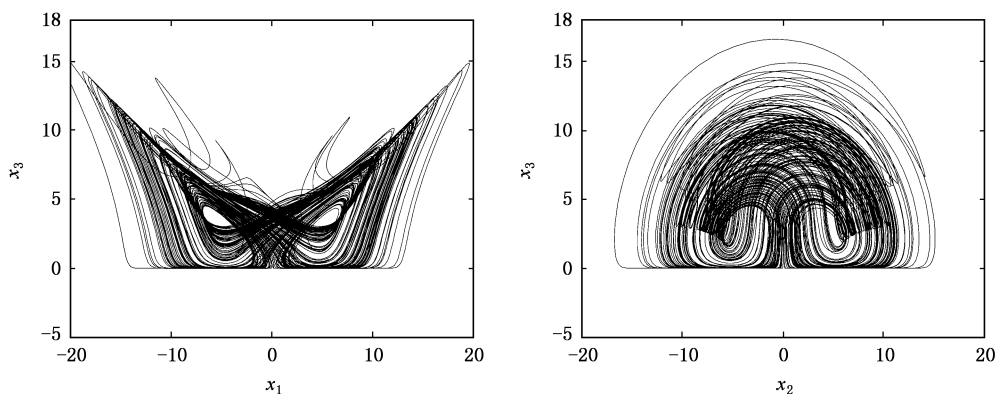


图 1 观察的四翼混沌吸引子  $a=25, b=2, c=15, d=35$ . (a)  $x_1-x_3$  平面投影; (b)  $x_2-x_3$  平面投影

通过进一步的研究发现,被观察到的四翼混沌吸引子也是一种数值假象,实际系统有两个吸引子,他们的位置靠得太近,几乎都任意地接近他们的边界并且切于边界,由于数值误差原因导致该轨道不断地穿越边界,因此独立的上下混沌吸引子混合到一起.当 Runge-Kutta 法的采样步长取为 0.001, 相对误差和绝对误差均取为  $10^{-9}$  时,在相同的一组参数下,根据初值的选取区域系统只能出现上双翼混沌

吸引子或下双翼混沌吸引子,图 2 为观察到上双翼混沌吸引子.

尽管系统(1)是一个连续系统,但其数值解(如 Runge-Kutta 法)是离散的,当混沌吸引子轨道极其接近并且切于上下吸引子边界时,极其微小的数值误差将导致变量  $x_3$  从本来的正值变为错误的负值,反之亦然,加之该混沌对数值的微小变化极其敏感,从而导致四翼吸引子的出现.

图2 观察的上双翼混沌吸引子  $a=25, b=2, c=15, d=35$ 

### 3. 真正的四翼混沌吸引子观察及其分析

#### 3.1 不能产生四翼的原因和新的系统

自然地有这样一个疑问, 该四维混沌系统能否产生一个真正的四翼混沌吸引子? 仔细分析发现, 系统(1)不能产生四翼的原因在于,

1) 系统相对于  $x_1-x_2$  和  $x_3-x_4$  相平面分别都是对称的, 因此, 系统轨道不能穿越超平面  $x_3=0$  或  $x_4=0$ , 使系统有两个独立的吸引域;

2) 系统右边函数中的第三个和第四个方程具有相似性, 该相似性不利于系统动力行为形成一个四翼吸引子。

基于该分析, 我们试图在系统的第三个方程引入一个控制项以破坏这种对称性和相似性, 使轨道能相互穿越两个吸引域。引入控制项后系统(1)变为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4, \\ \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + ex_2 + x_1 x_2 x_4, \\ \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1 x_2 x_3.\end{aligned}\quad (2)$$

这里  $e$  为常参数。该控制项引出一些新的有意义的动力学特性和行为。

#### 3.2 新系统的对称性

**结论 1** 系统(2)关于原点对称性保持不变, 但是关于  $x_1-x_2$  和  $x_3-x_4$  的对称性消失。

**结论 2** 对于系统(2), 带有控制参数  $e$  的状态  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  对应于带有参数  $-e$  的状态  $[x_1, x_2, -x_3, -x_4]^T$ , 同时也对应于带有参数  $-e$

的状态  $[-x_1, -x_2, x_3, x_4]^T$ 。

实际上, 结论 2 通过下面两个变换容易得证

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4; e) &\rightarrow \\ (x_1, x_2, -x_3, -x_4; -e),\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4; e) &\rightarrow \\ (-x_1, -x_2, x_3, x_4; -e).\end{aligned}\quad (4)$$

表面上看结论 2 中的两个对应似乎是矛盾的, 实际上从系统(2)关于原点对称性可以理解, 由结论 1 下列变换成立:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, -x_3, -x_4; -e) &\rightarrow \\ (-x_1, -x_2, x_3, x_4; -e),\end{aligned}\quad (5)$$

再由(3)式容易得到(4)式。

#### 3.3 真正的四翼混沌吸引子

取参数  $a=50, b=4, c=13, d=20$ , 当  $e=0$ , 即系统(2)变为原系统(1)时, 其最大 Lyapunov 指数为 2.9269, 系统有两个共存的双翼混沌吸引子, 如图 3 所示, 上下两个吸引子轨道并不能穿越自身的吸引域进入对方吸引域。当  $e=\pm 6$ , 其最大 Lyapunov 指数变为 0, 系统(2)出现了一个新的周期轨道, 根据其几何位置, 称其为次对角周期轨( $e=6$ )和对角周期轨( $e=-6$ )。

受控系统在参数  $e=\pm 6$  时产生的能穿越界面  $x_3=0$  和  $x_4=0$  的两种周期轨是非常重要的, 随着参数的逐渐变化, 周期轨将有可能演化成对角双翼混沌。事实上, 仅调整参数  $b$  由 4 变为 4.2, 而其他参数不变, 最大 Lyapunov 指数为 0.6010, 系统(2)是混沌的, 如图 4(a), (b)所示。值得注意的是, 对角双翼混沌吸引子中存在着大量的对角流穿越着  $x_3=0$  和  $x_4=0$  界面, 这不同于非受控系统(1)轨道流不能

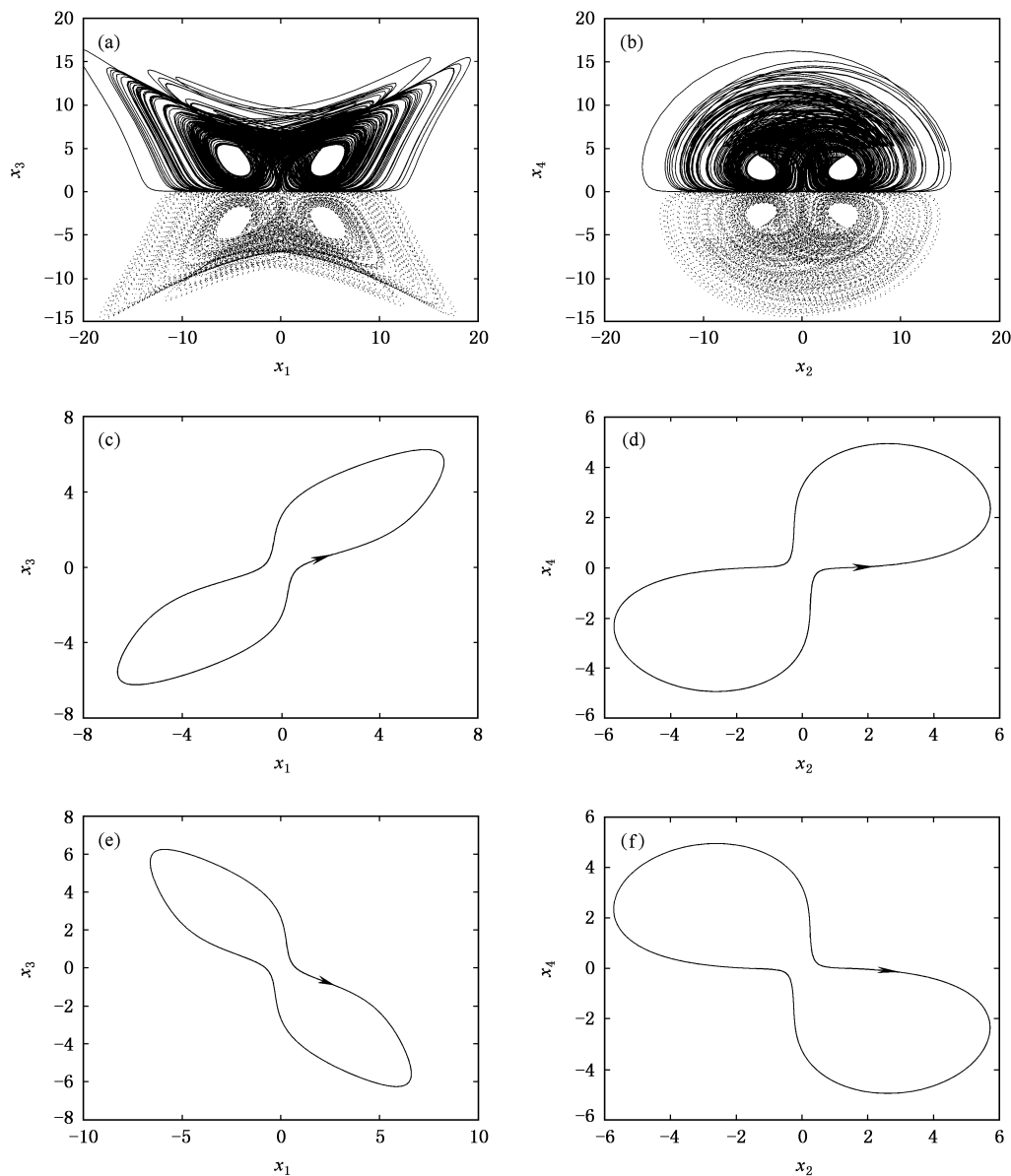


图 3 系统(2)的两个共存双翼吸引子  $e=0$  次对角周期轨  $e=6$ , 主对角周期轨  $e=-6$ ,  $a=50$ ,  $b=4$ ,  $c=13$ ,  $d=20$   
(a)  $x_1$ - $x_3$  平面投影,  $e=0$ ; (b)  $x_2$ - $x_4$  平面投影,  $e=0$ ; (c)  $x_1$ - $x_3$  平面投影,  $e=6$ ; (d)  $x_2$ - $x_4$  平面投影,  $e=6$ ;  
(e)  $x_1$ - $x_3$  平面投影,  $e=-6$ ; (f)  $x_2$ - $x_4$  平面投影,  $e=-6$

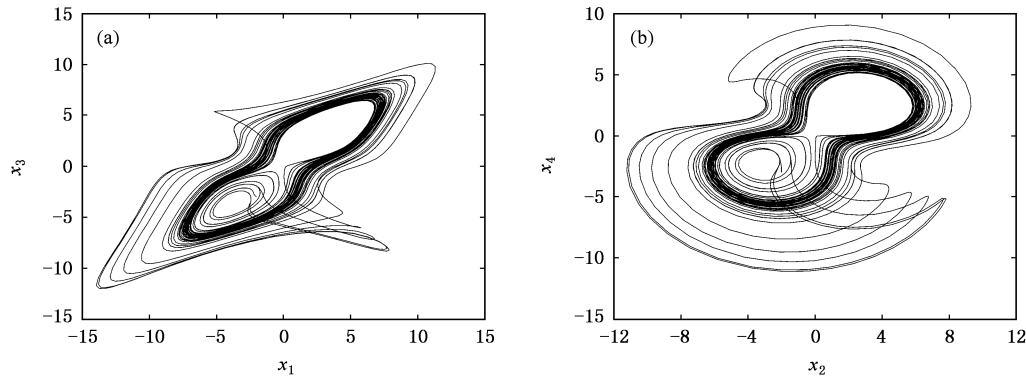


图 4 对角双翼混沌吸引子  $a=50$ ,  $b=4$ ,  $c=13$ ,  $d=20$ ,  $e=6$ . (a)  $x_1$ - $x_3$  平面投影; (b)  $x_2$ - $x_4$  平面投影

穿越而只能切于该界面，这一特性为受控系统产生真正的四翼混沌吸引子奠定了基础. 随着参数变化  $b=7$ ，最大 Lyapunov 指数为 5.1268，一个真正的四

翼混沌吸引子构建成功，如图 5(a)–(h)所示，注意到正是对角混沌流将上下混沌吸引子融合为一个整体形成具有四翼蝴蝶形混沌吸引子.

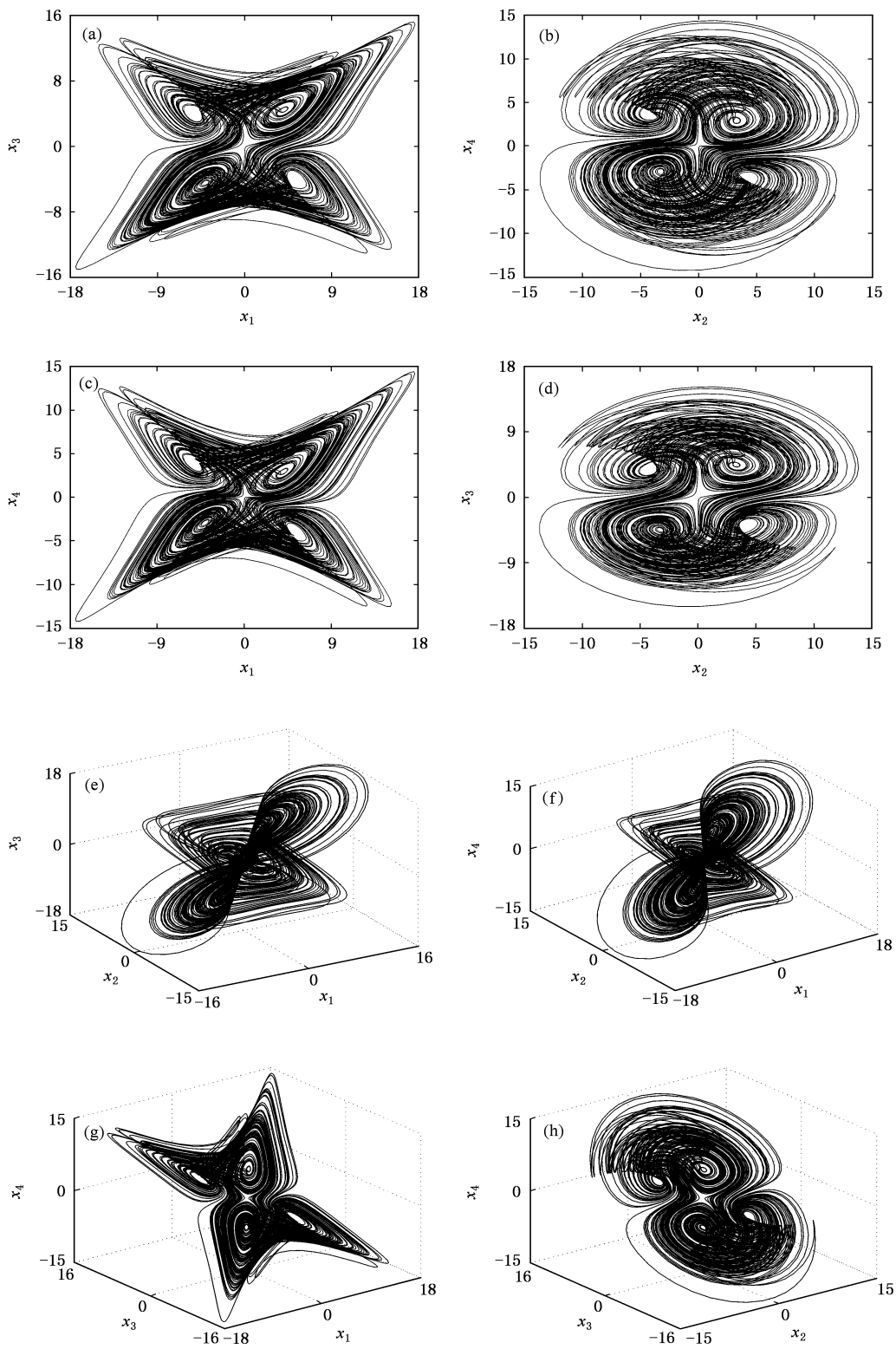


图5 真正的四翼混沌吸引子  $a=50, b=7, c=13, d=20, e=6$ . (a)  $x_1$ - $x_3$  平面投影; (b)  $x_2$ - $x_4$  平面投影; (c)  $x_1$ - $x_4$ 平面投影; (d)  $x_2$ - $x_3$  平面投影; (e)  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$  三维空间图; (f)  $x_1$ - $x_2$ - $x_4$  三维空间图; (g)  $x_1$ - $x_3$ - $x_4$  三维空间图; (h)  $x_2$ - $x_3$ - $x_4$  三维空间图

4. 频谱分析

众所周知,许多基于混沌的加密方案以不同的方式受到了攻击,原因之一在于一些简单的混沌信号的随机性和混乱度不够高<sup>[24,25]</sup>,这一点可以从这些混沌信号具有较窄的频谱带宽反映出来.

图 6(a),(b)为 Lorenz 系统和 Chua 氏电路的频谱图.这里为了便于比较,用 Runge-Kutta 法数值求解所有的系统,其采样步长为 0.001 s,运行时间为

0—50 s,计算的频谱均被单位标准化,大于单位谱值的 1/10 频谱范围作为该信号的频谱带宽,这是由于幅值相对较低的频谱的信号对加密意义很小,可以通过滤波等简单方法提取信息.

显然, Lorenz 系统和 Chua 氏电路的频谱带宽均小于 0—3 Hz,这里只给出  $y$  变量,因为  $x$  与  $y$  对称,频谱相同, $z$  变量频谱更窄一些.最近, Lü 等<sup>[20]</sup>生成了一个带有 5 个平衡点的三维系统,该系统在控制条件下能产生一个真正的四翼混沌吸引子,图 6(c),(d)为该系统在四翼吸引子状态下的频谱图,其

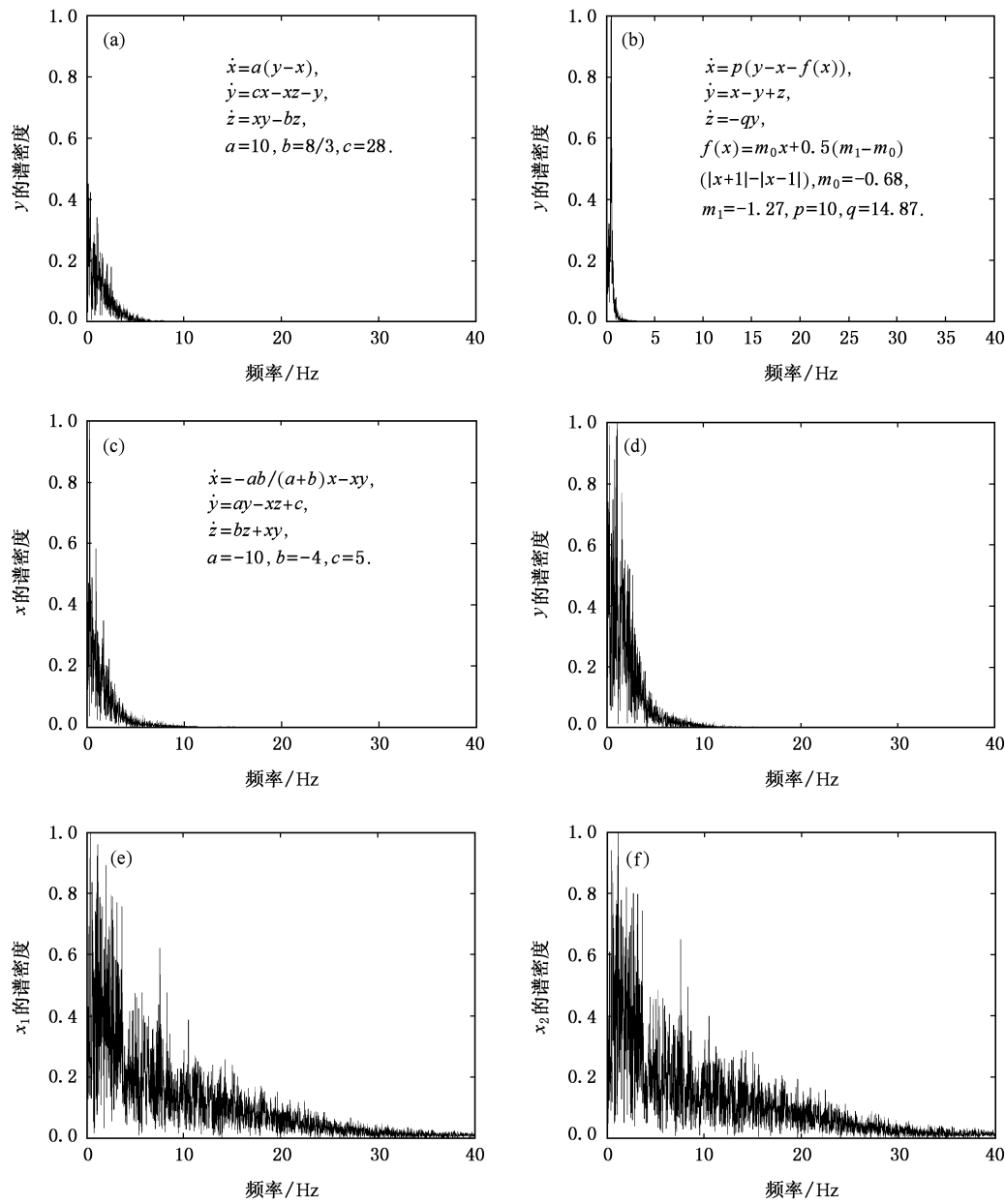


图 6 Lorenz 系统(a); Chua 氏电路(b); Lü 等构造的四翼混沌吸引子(c)  $x$  变量; (d)  $y$  变量, 具有四翼混沌吸引子的新系统(2); (e) 变量  $x_1$ ; (f) 变量  $x_2$  的频谱比较图

频谱带宽在  $0 \sim 5$  Hz 之间. 这些信号不能完全覆盖通讯应用中的有用信息, 一旦调制的信息不截获, 极有可能将覆盖的信息提取, 文献 [24, 25] 也给出了这一结论. 通常我们采用模拟电路实现混沌信号通过扩频能实现几 kHz, 甚至达到几 MHz, 但受系统信号本身带宽限制, 电路信号带宽仍然较窄. 为比较系统本身的频谱性能, 这里只讨论通过数值实现系统的信号频谱带宽.

当系统(2)的参数取  $a=14$ ,  $b=43$ ,  $c=-1$ ,  $d=16$ ,  $e=4$  时, 其轨道形成四翼混沌吸引子, 其信号  $x_1$  和  $x_2$  的频谱图如图 6(c), (d) 所示. 注意  $x_1$  和  $x_2$  的带宽大约是  $0 \sim 25$  Hz, 是 Lorenz 系统信号带宽的 8 倍左右.

## 5. 结 论

新的四维混沌系统只能产生两个共存的上下双翼混沌吸引子, 它们各自有独立的吸引域, 系统轨道不能从一个吸引域穿越界限到另一个吸引域而产生四翼混沌吸引子. 本文将一个简单的控制引入到该四维系统, 控制项的引入破坏了原系统的部分对称性, 在不同的参数下系统产生了能穿越上下吸引域的对角周期轨或对角双翼混沌吸引子, 进一步产生了真实的四翼混沌吸引子, 因为它将上下双翼混沌吸引子和对角双翼混沌吸引子融为一体. 该四翼混沌吸引子具有非常宽的频谱, 对保密通信、流体混合等基于混沌的实际应用具有重要价值.

- 
- [1] Lu J, Xi Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 274
  - [2] Chen G, Dong X 1998 *From chaos to order: methodologies, perspectives and applications* (Singapore: World Scientific)
  - [3] Chen G, Lü J 2003 *Dynamical analysis, control and synchronization of the generalized lorenz systems family* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族动力学分析、控制与同步 (北京: 科学出版社)]
  - [4] Wang P J, Wu G Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3034 (in Chinese) [王培杰、吴国祯 2005 物理学报 **54** 3034]
  - [5] Hao J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 [郝建红、李伟 2005 物理学报 **54** 3491]
  - [6] Wang J, Chen Z, Yuan Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216
  - [7] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强等 2006 物理学报 **55** 4005]
  - [8] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Gu Q L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1306 (in Chinese) [高铁杠、陈增强、袁著祉、顾巧论 2004 物理学报 **53** 1306]
  - [9] Chua L O, Roska T 1993 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **1** **40** 147
  - [10] Suykens J A K, Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **1** **40** 861
  - [11] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J, Ozoguz S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 23
  - [12] Lü J, Han F, Yu X, Chen G 2004 *Automatica* **40** 1677
  - [13] Lü J, Chen G, Yu X 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** **51** 2476
  - [14] Varčáček A, Čelikovský S 1996 *Control Systems: From linear analysis to synthesis of chaos* (London: Prentice-Hall)
  - [15] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465
  - [16] Ueta T, Chen G 2000 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10** 1917
  - [17] Lü J, Chen G, Cheng D, Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
  - [18] Lü J, Chen G, Cheng D 2004 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** 1507
  - [19] Liu W, Chen G 2003 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13** 261
  - [20] Liu W, Chen G 2004 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** 1395
  - [21] Qi G, Du S, Chen G, Chen Z, Yuan Z 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 1671
  - [22] Qi G, Chen G, Zhang Y 2006 *Phys. Letters A* **352** 386
  - [23] Zhang Y H, Qi G Y, Liu W L, Yan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3307 (in Chinese) [张宇辉、齐国元、刘文良、阎彦 2006 物理学报 **55** 3307]
  - [24] Li S, Álvarez G, Chen G 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **25** 109

# On a four-winged chaotic attractor<sup>\*</sup>

Wang Fan-Zhen<sup>1)</sup> Qi Guo-Yuan<sup>2)</sup> Chen Zeng-Qiang<sup>1)†</sup> Yuan Zhu-Zhi<sup>1)</sup>

1) (*Department of Automation, College of Information Technological Science, Nankai University, Tianjin 300071, China*)

2) (*College of Electronic Information and Automation, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China*)

(Received 23 August 2006; revised manuscript received 26 September 2006)

## Abstract

A four-winged chaotic attractor was first observed numerically in a new 4-dimensional system. However, it was found to be a numerical artifact upon further analysis. It actually consists of two (upper and lower) coexisting double-wing chaotic attractors with domains of attraction independent of each other. The reason leading to the confusion is that both double-wing attractors are arbitrarily close to each other so as to cause a numerical error as well as a misunderstanding. By adding a simple linear state feedback term to the system, some similarities of the system are destroyed, then the controlled system is able to generate diagonal double chaotic attractor which can cross the boundary between the upper and lower attractive domains. With the evolution of dynamical modes, the upper and the lower double-wing chaotic attractors as well as diagonal chaotic attractor are merged into a true four-winged chaotic attractor. At last, the frequency spectrum analysis shows that the four-winged chaotic attractor has extremely wide frequency bandwidth compared with that of the Lorenz system and Chua circuit, which is important in practical applications in communication encryption etc.

**Keywords:** four-dimensional chaotic system, double-wing chaotic attractor, four-winged chaotic attractor, frequency analysis

**PACC:** 0545, 0540

---

<sup>\*</sup>Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60374037, 60574036), by the Doctoral Program of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20050055013), by Science and Technology Development Foundation of Tianjin, China (Grant No. 07JCYBJC05800) and by the Key Foundation of the Education Ministry of China (Grant No. 2007005).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: chenqz@nankai.edu.cn