

PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Domácí úkoly 1S – 4S

Zadání 120

JMÉNO STUDENTKY/STUDENTA:

VOJTĚCH PROKOP

OSOBNÍ ČÍSLO:

PRO 0255

JMÉNO CVIČÍCÍ/CVIČÍCÍHO:

MGR. ADÉLA VRTKOVÁ

	DATUM ODEVZDÁNÍ	HODNOCENÍ
DOMÁCÍ ÚKOL 1:		
DOMÁCÍ ÚKOL 2:		
DOMÁCÍ ÚKOL 3:		
DOMÁCÍ ÚKOL 4:		
CELKEM:	-----	

Ostrava, AR 2020/2021

Popis datového souboru

Běžné zářivky trpí efektem pomalého nabíhání, tedy plného výkonu dosáhnou až po jisté době provozu. Toto chování je ovlivněno okolní teplotou, což v praxi znamená, že v chladném prostředí může zářivkám trvat výrazně déle než dosáhnou maximálního výkonu.

Pro test náběhu zářivek na plný světelný výkon bylo vybráno celkem 350 zářivek od čtyř různých výrobců (Amber, Bright, Clear, Dim). Všechny zářivky měly deklarovaný maximální světelný tok 1000 lm. U každé zářivky byl změřen světelný tok po 30 sekundách od zapnutí, nejprve při teplotě 22 °C a poté při teplotě 5°C.

V souboru [ukol_X.xlsx](#) jsou pro každou z testovaných zářivek uvedeny následující údaje:

- pořadové číslo zářivky,
- výrobce – Amber (A), Bright (B), Clear (C), Dim (D),
- naměřený světelný tok v lumenech při okolní teplotě 5°C,
- naměřený světelný tok v lumenech při okolní teplotě 22°C.

Obecné pokyny:

- Úkoly zpracujte dle obecně známých typografických pravidel.
- Všechny tabulky i obrázky musí být opatřeny titulkem.
- Do úkolů nekládejte tabulky a obrázky, na něž se v doprovodném textu nebudete odkazovat.
- Bude-li to potřeba, citujte zdroje dle mezinárodně platné citační normy ČSN ISO 690.

Úkol 1

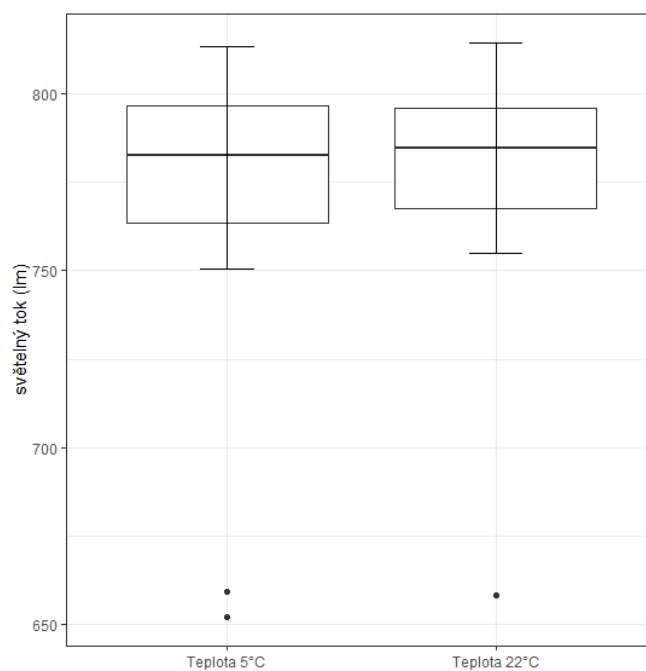
- Pomocí nástrojů explorační analýzy analyzujte světelný tok zářivek výrobce Amber po 30 sekundách od zapnutí při teplotách 5°C a 22°C. Data vhodně graficky prezentujte (krabicový graf, histogram, q-q graf) a doplňte následující tabulky a text.

Výsledky popisné statistiky lze vidět v Tab. 1 a jejich vizualizaci na Obr. 1, Obr. 2 a Obr. 3.

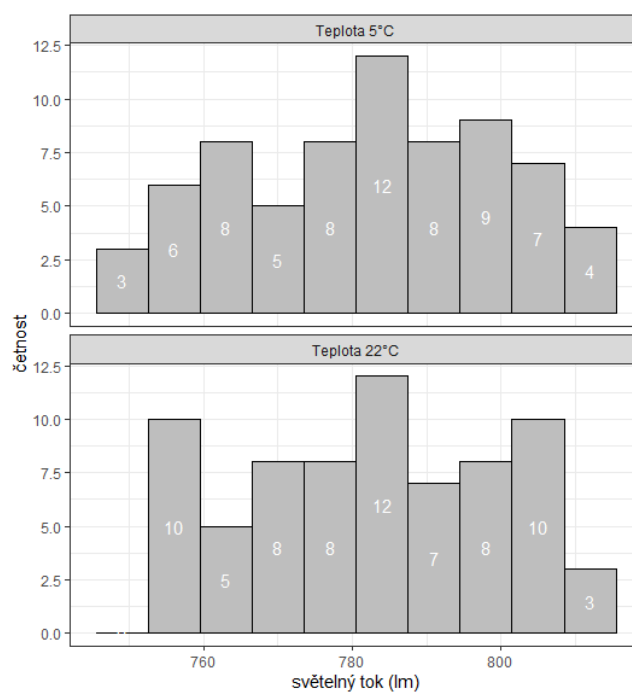
Tab. 1: Světelný tok (lm) zářivek Amber v závislosti na teplotě (souhrnné statistiky)

Světelný tok zářivek Amber (lm)			Po odstranění odlehlých pozorování	
	5°C	22°C	5°C	22°C
rozsah souboru	72	72	70	71
minimum	652,1	658,3	750,3	754,9
dolní kvartil	763,4	767,4	767,2	767,8
Medián	782,5	784,6	782,8	785,1
Průměr	778,6	781,0	782,1	782,7
horní kvartil	796,7	795,9	797,0	796,0
maximum	813,4	814,4	813,4	814,4
směrodatná odchylka	27,1	22,5	17,5	17,1
variační koeficient (%)	3,5	2,9	2,2	2,2
šikmost	-2,5	-2,2	-0,1	-0,1
špičatost	9,5	10,5	-1,1	-1,1
Identifikace odlehlých pozorování – vnitřní hradby				
dolní mez	713,59	724,6		
horní mez	846,49	838,6		

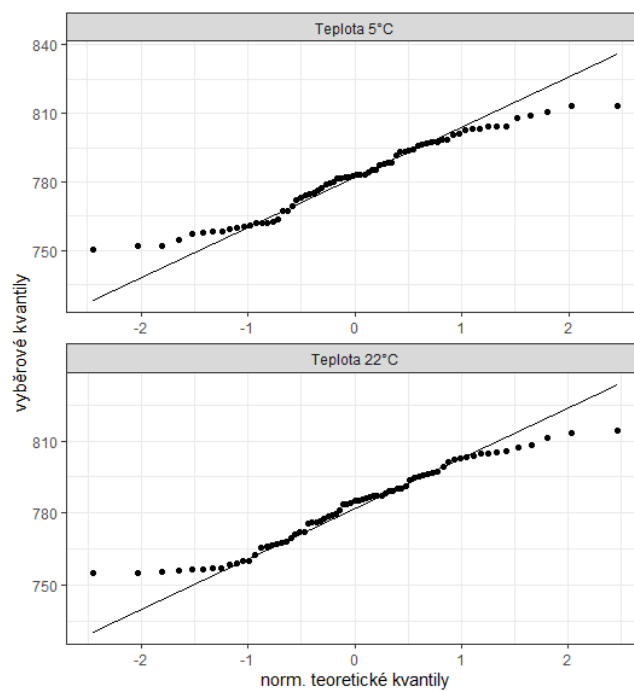
Grafická prezentace (krabicový graf, histogram, q-q graf):



Obr. 1: Světelný tok zářivek (lm) výrobce Amber v závislosti na teplotě (krabicový graf, původní data)



Obr. 2: Světelný tok zářivek (lm) výrobce Amber v závislosti na teplotě (histogram, data po odstranění odl. pozorování)



Obr. 3: Světelný tok zářivek (lm) výrobce Amber v závislosti na teplotě (Q-Q graf, data po odstranění odl. pozorování)

Analýza světelného toku zářivek výrobce Amber (po 30 sekundách od zapnutí, při teplotě 5°C)

Během testu byl měřen světelný tok 72 kusů zářivek výrobce Amber. Naměřená světelný tok při teplotě 5°C se pohyboval v rozmezí 652,1 lm až 813,4 lm. Světelný tok zářivek č. 19, 29 byl na základě metody vnitřních hradeb identifikován jako odlehle pozorování a nebude zahrnut do dalšího zpracování. Možné příčiny vzniku odlehlých pozorování jsou: nestandardně kvalitní zářivka. Dále uvedené výsledky tedy pocházejí z analýzy světelný toku 70 kusů zářivek. Jejich průměrný světelný tok byl 782,1 lm, směrodatná odchylka pak 17,5 lm. U poloviny testovaných zářivek světelný tok nepřekročil 782,8 lm. V polovině měření se světelný tok pohyboval v rozmezí 767,2 lm až 797,0 lm. Vzhledem k hodnotě variačního koeficientu (2.2 %) lze analyzovaný soubor považovat za homogenní.

Analýza světelného toku zářivek výrobce Amber (po 30 sekundách od zapnutí, při teplotě 22°C)

Během testu byl měřen světelný tok 72 kusů zářivek výrobce Amber. Naměřená světelný tok při teplotě 22°C se pohyboval v rozmezí 658,3 lm až 814,4 lm. Světelný tok zářivek č. 29 byl na základě metody vnitřních hradeb identifikován jako odlehle pozorování a nebude zahrnut do dalšího zpracování. Možné příčiny vzniku odlehlých pozorování jsou: nestandardně kvalitní zářivka. Dále uvedené výsledky tedy pocházejí z analýzy světelný toku 71 kusů zářivek. Jejich průměrný světelný tok byl 782,7 lm, směrodatná odchylka pak 17,1 lm. U poloviny testovaných zářivek světelný tok nepřekročil 785,1 lm. V polovině měření se světelný tok pohyboval v rozmezí 767,8 lm až 796,0 lm. Vzhledem k hodnotě variačního koeficientu (2.2 %) lze analyzovaný soubor považovat za homogenní.

Ověření normality světelného toku zářivek výrobce Amber po 30 sekundách od zapnutí při teplotě 5°C na základě explorační analýzy

Na základě grafického zobrazení (viz Obr. 2 a Obr. 3) a výběrové šikmosti a špičatosti (výběrová šikmost i špičatost leží v intervalu $(-2; 2)$) lze předpokládat, že světelný tok zářivek výrobce Amber při teplotě 5°C má normální rozdělení. Dle pravidla 3σ lze tedy očekávat, že přibližně 95 % zářivek bude mít světelný tok v rozmezí 747,3 lm až 817,0 lm.

Ověření normality světelný toku zářivek výrobce Amber po 30 sekundách od zapnutí při teplotě 22°C na základě explorační analýzy

Na základě grafického zobrazení (viz Obr. 2 a Obr. 3) a výběrové šikmosti a špičatosti (výběrová šikmost i špičatost leží v intervalu $(-2; 2)$) lze předpokládat, že světelný tok zářivek výrobce Amber při teplotě 22°C má normální rozdělení. Dle pravidla 3σ lze tedy očekávat, že přibližně 95 % zářivek bude mít světelný tok v rozmezí 748,6 lm až 816,9 lm.

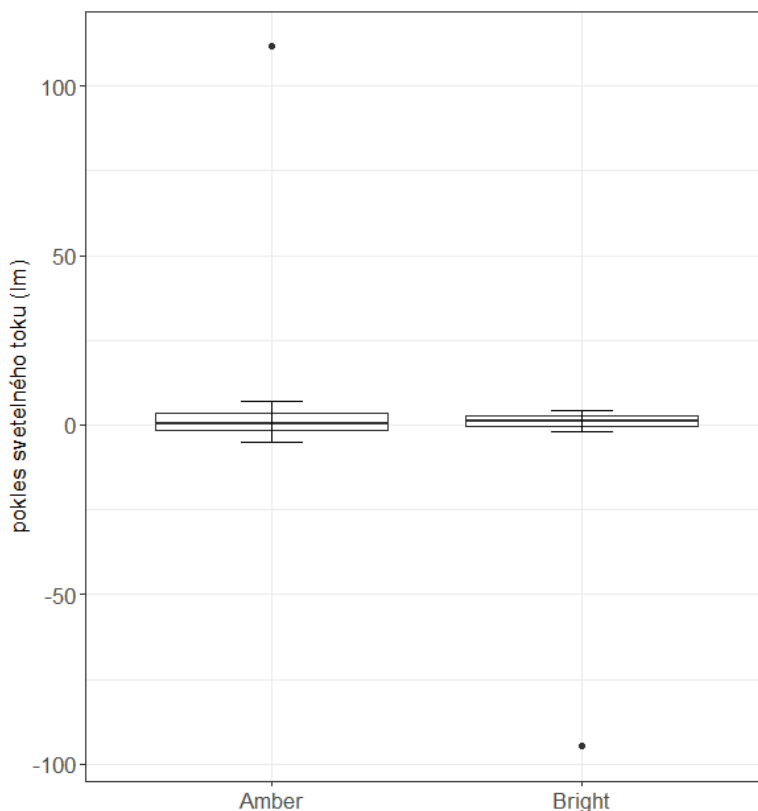
Úkol 2

Porovnejte pokles světelného toku po 30 sekundách od zapnutí při snížení okolní teploty z 22°C na 5°C u zářivek od výrobců Amber a Bright. Nezapomeňte, že použité metody mohou vyžadovat splnění určitých předpokladů. Pokud tomu tak bude, okomentujte splnění/nesplnění těchto předpokladů jak na základě explorační analýzy (např. s odkazem na histogram apod.), tak exaktně pomocí metod statistické indukce.

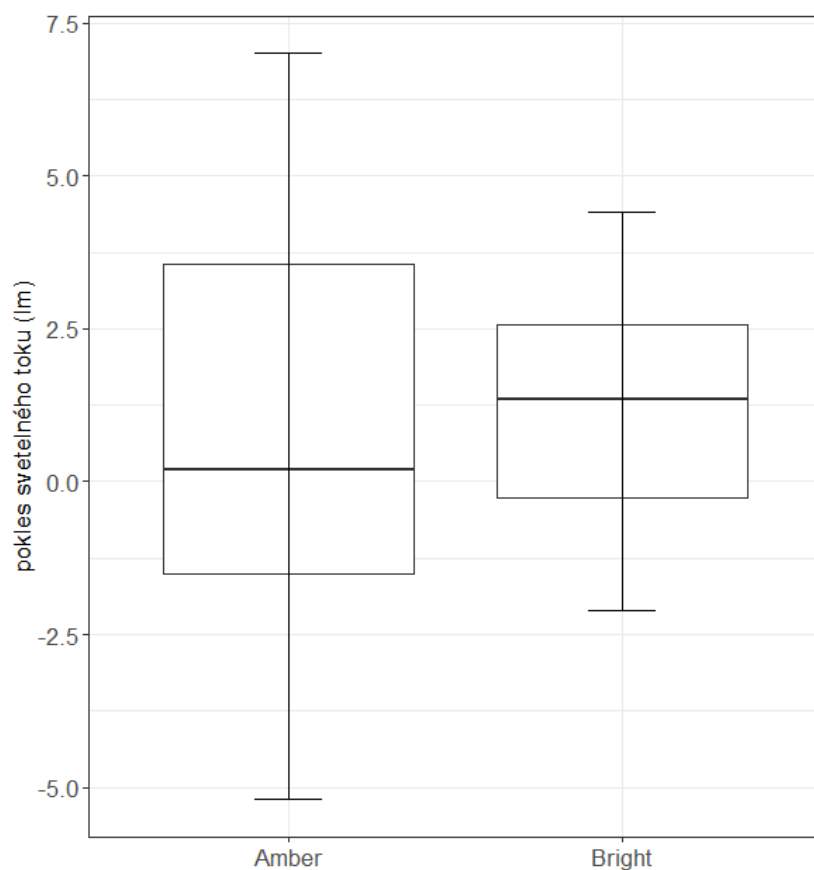
- a) Graficky prezentujte srovnání poklesů světelného toku zářivek výrobců Amber a Bright při snížení okolní teploty (vícenásobný krabicový graf, histogramy, q-q grafy). Srovnání okomentujte (včetně informace o případné manipulaci s datovým souborem).

U výrobce Amber i Bright bylo pozorováno jedno odlehlé pozorování (viz Obr. 4), toto jsme se rozhodli z dalšího zpracování vypustit.

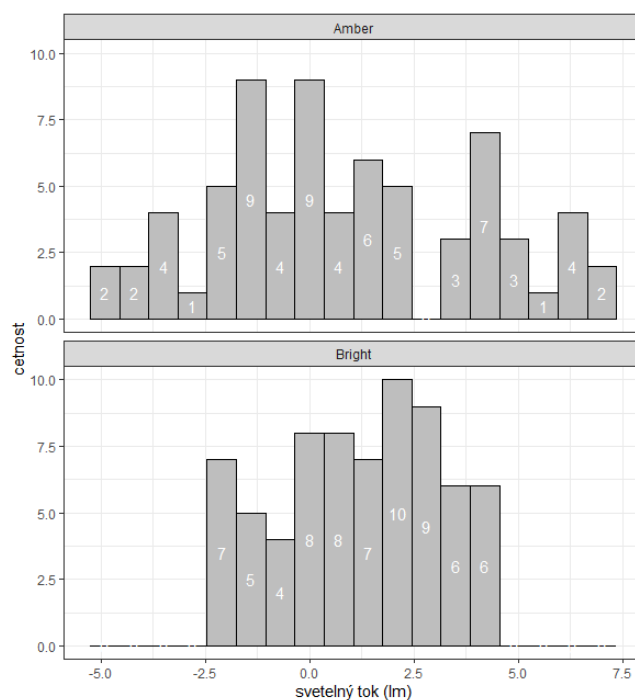
U obou výrobců došlo spíše k poklesu světelného toku (viz. Obr. 5). Zároveň, ale dochází i k nárustu světelného toku. U výrobce Amber, lze pozorovat výraznější rozptyl hodnot. Zdá se, že u výrobce Bright oproti výrobce Amber dochází v průměru k výraznějším poklesům světelného toku.



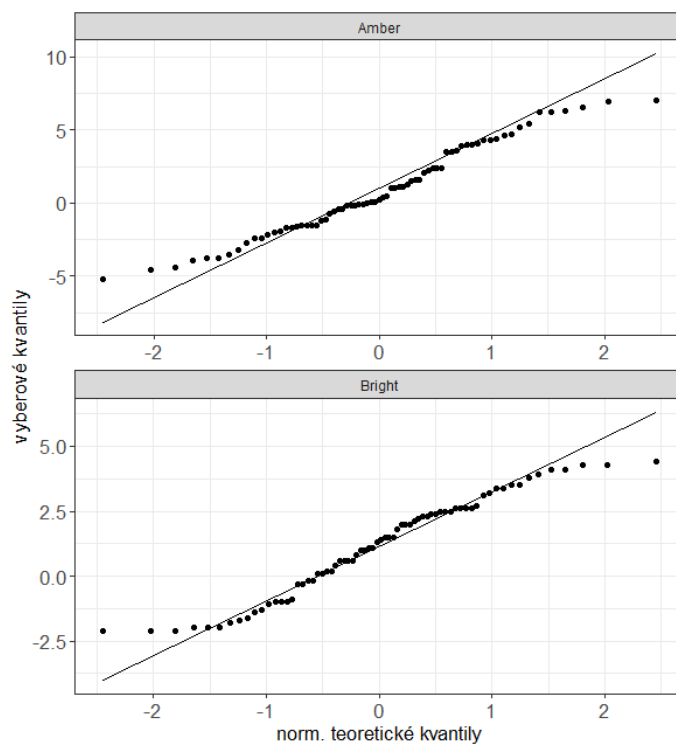
Obr. 4: Srovnání poklesů světelného toku po 30 sekundách od zapnutí při snížení okolní teploty z 22°C na 5°C u zářivek od výrobců Amber a Bright (krabicový graf, původní data)



Obr. 5: Srovnání poklesů světelného toku po 30 sekundách od zapnutí při snížení okolní teploty z 22°C na 5°C u zářivek od výrobců Amber a Bright (krabicový graf, data po odstranění odlehlých pozorování)



Obr. 6: Srovnání poklesů světelného toku po 30 sekundách od zapnutí při snížení okolní teploty z 22°C na 5°C u zářivek od výrobců Amber a Bright (histogramy, data po odstranění odlehlých pozorování)



Obr. 7: Srovnání poklesů světelného toku po 30 sekundách od zapnutí při snížení okolní teploty z 22°C na 5°C u zářivek od výrobců Amber a Bright (Q-Q grafy, data po odstranění odlehlých pozorování)

b) Na hladině významnosti 5 % rozhodněte, zda jsou střední poklesy (popř. mediány poklesů) světelného toku zářivek výrobců Amber a Bright statisticky významné. K řešení využijte bodové a intervalové odhady i testování hypotéz. Výsledky okomentujte.

Tab. 2: Nástroje pro ověření předpokladů symetrie a normality poklesu světelného toku v závislosti na teplotě

Výrobce	Šikmost	Špičatost	Shapirův-Wilkův test (p-hodnota)	Test symetrie (p-hodnota)
Amber	0,2	-0,8	0,103	0,028
Bright	-0,2	-1,1	0,012	0,279

Dle prezentovaných grafů (viz Obr. 6 a Obr. 7) lze usuzovat, že poklesy světelného toku jdou modelovat normálním rozdělením. Šikmost a špičatost (viz Tab. 2) jsou v přípustném intervalu.

Dle Shapirova-Wilkova testu nelze na hladině významnosti 0,05 pokles světelného toku výrobce Bright modelovat normálním rozdělením (viz Tab. 2).

U obou výrobců nebylo prokázáno normální rozdělení, a proto nelze přistoupit k určení odhadů střední hodnoty.

Následujeme tedy provedením testu symetrie, kde zase podle výsledků můžeme usoudit, že symetrie byla porušena u výrobce Amber, a proto využijeme znaménkový test.

V datové sadě, máme pokles reprezentovaný jako kladné číslo. Při intervalových odhadech se proto přikláníme k levostranné verzi.

Tab. 3: Odhad mediánů poklesu světelného toku (lm) dle výrobce a test významnosti poklesu

Výrobce	Bodový odhad (lm)	95% levostranný intervalový odhad (lm)	Znaménkový levostranný test (p-hodnota)
Amber	0,20	$(-0,20; \infty)$	0,275
Bright	1,35	$(0,60; \infty)$	$< 0,001$

U výrobce Amber, lze očekávat, že polovina zářivek bude vykazovat pokles světelného toku menší než 0,20 lm. 95% levostranný intervalový odhad mediánu poklesu světelného toku u výrobce Amber je $(-0,20; \infty)$ lm. Společně se znaménkovým levostranným testem, lze pozorovat, že medián poklesu světelného toku je statisticky nevýznamný (na hladině významnosti 5%).

U výrobce Bright, lze očekávat, že polovina zářivek bude vykazovat pokles světelného toku menší než 1,35 lm. 95% levostranný intervalový odhad mediánu poklesu světelného toku u výrobce Amber je $(0,60; \infty)$ lm. Společně se znaménkovým levostranným testem, lze pozorovat, že medián poklesu světelného toku je statisticky významný (na hladině významnosti 5%).

- c) Na hladině významnosti 5 % rozhodněte, zda je rozdíl středních hodnot (mediánů) poklesů světelných toků zářivek výrobců Amber a Bright (při snížení okolní teploty) statisticky významný. K řešení využijte bodový a intervalový odhad i čistý test významnosti. Výsledky okomentujte.

Vzhledem k předchozímu příkladu, jsme zamítli normalitu u výrobce zářivek Bright (viz Tab. 2), takže budeme pokračovat kontrolou stejného tvaru rozdělení.

Z histogramů, lze pozorovat srovnatelný tvar rozdělení, takže jsme schopni využít Mannův-Whitneyho test.

Tab. 4: Srovnání mediánů poklesu světelného toku (lm) výrobce Bright ($x_{0.5}^B$) a výrobce Amber ($x_{0.5}^A$)

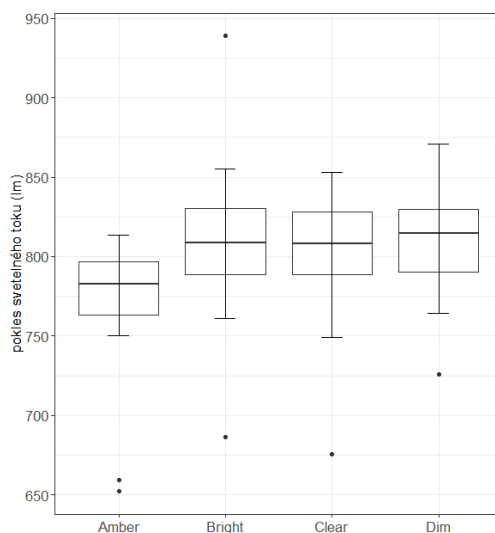
Bodový odhad $x_{0.5}^B - x_{0.5}^A$ (lm)	1,15
95% oboustranný intervalový odhad $x_{0.5}^B - x_{0.5}^A$ (lm)	(-0,49; 1,50)
Mannův-Whitneyho oboustranný test (p-hodnota)	0,345

Data neposkytují dostatek důkazů pro podpoření tvrzení, že by se zářivky vyrobené od Bright významně lišily od zářivek vyrobených od Amber. Na zadané hladině významnosti 5%, tedy rozdíl mediánů nelze považovat za statisticky významný (viz výsledky Tab. 4).

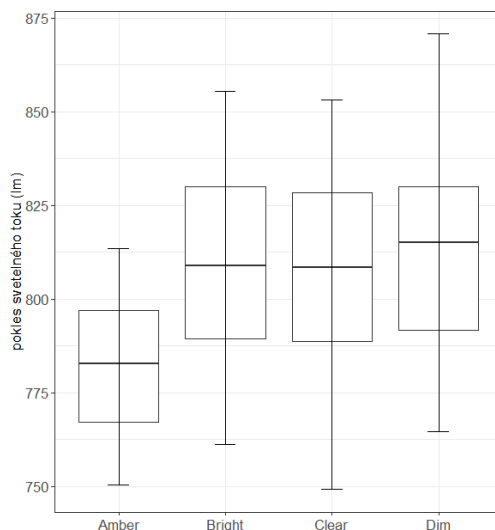
Úkol 3

Na hladině významnosti 5 % rozhodněte, zda se světelný tok zářivek při teplotě 5 °C liší v závislosti na tom, od kterého výrobce pocházejí. Posouzení proveďte nejprve na základě explorační analýzy a následně pomocí vhodného statistického testu, včetně ověření potřebných předpokladů. V případě, že se světelný tok zářivek jednotlivých výrobců statisticky významně liší, určete pořadí výrobců dle středního světelného toku (popř. mediánu světelného toku) zářivek při 5°C.

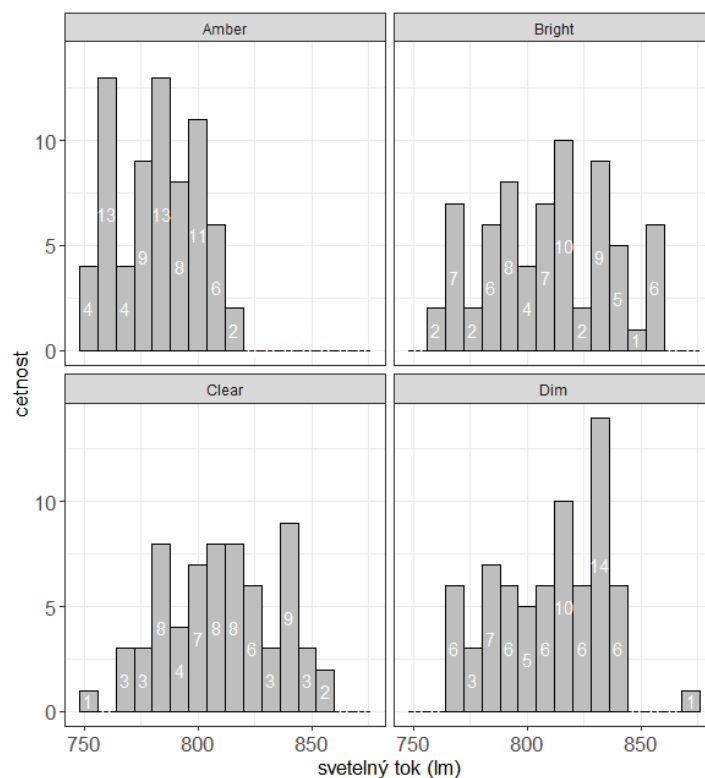
- a) Daný problém vhodným způsobem graficky prezentujte (vícenásobný krabicový graf, histogramy, q-q grafy). Srovnání okomentujte (včetně informace o případné manipulaci s datovým souborem).



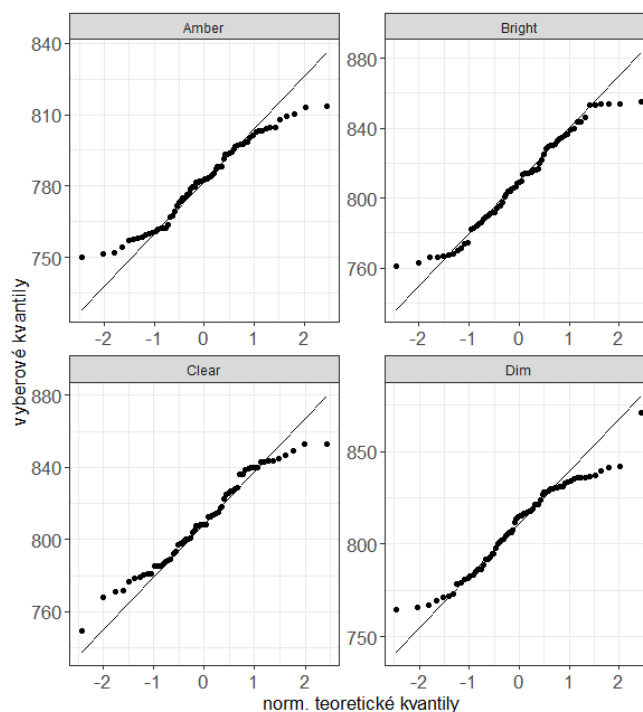
Obr. 8: Světelný tok zářivek (lm) všech výrobců v závislosti na teplotě 5°C (krabicový graf, původní data)



Obr. 9: Světelný tok zářivek (lm) všech výrobců v závislosti na teplotě 5°C (krabicový graf, data po odstranění odlehlých pozorování)



Obr. 10: Světelný tok zářivek (lm) všech výrobců v závislosti na teplotě $5^{\circ}C$ (histogram, data po odstranění odlehlých pozorování)



Obr. 11: Světelný tok zářivek (lm) všech výrobců v závislosti na teplotě $5^{\circ}C$ (Q-Q graf, data po odstranění odlehlých pozorování)

- b) *Ověřte normalitu a symetrii světelného toku zářivek při teplotě 5°C u všech čtyř výrobců (empiricky i exaktně).*

Tab. 5: Nástroje pro ověření předpokladů symetrie a normality dle výrobce

Výrobce	Šikmost	Špičatost	Shapírov-Wilkův test (p-hodnota)	Test symetrie (p-hodnota)
Amber	-0,1	-1,1	0,032	0,677
Bright	0,0	-1,0	0,046	0,985
Clear	-0,1	-0,8	0,121	0,413
Dim	-0,2	-0,7	0,023	0,017

Dle prezentovaných grafů na Obr. 10 a Obr. 11 nelze zcela usoudit, zda světelný tok lze modelovat pomocí normálního rozdělení. Například na histogramu u výrobce Dim, lze pozorovat záporné zešikmení, u výrobce Amber naopak špičatost. V závislosti na Q-Q grafech, lze pozorovat podobné anomálie, přičemž si můžeme povšimnout statistických jednotek, které vypadají jako odlehlá pozorování, i když tato byla korektně odstraněna v předchozích krocích.

Dle empiricky vypočtených hodnot šikmosti a špičatosti (viz. Tab. 5) data odpovídají normálnímu rozdělení.

Dle Shapirova-Wilkova testu lze na hladině významnosti 0,05 předpoklad normality pro výrobce Amber, Bright a Dim zamítnout.

Dle testu symetrie (viz. Tab. 5), grafů (viz. Obr. 10), lze zamítnout symetričnost u výrobce Dim.

- c) Ověřte homoskedasticitu (shodu rozptylů) světelného toku zářivek při teplotě 5 °C jednotlivých výrobců (empiricky i exaktně).

Tab. 6: Rozptyly světelného toku v závislosti na teplotě 5 °C dle výrobce zářivek

Výrobce	Rozptyl
Amber	303,6
Bright	717,2
Clear	616,8
Dim	552,0

Tab. 7: Nástroje pro ověření předpokladů shody rozptylů

Empiricky (největší ku nejmenšímu) < 2	$(717,1908 / 303,6150) \cong 2,4$
Exaktně (Leveneho test) p-hodnota	0,004

Dle Tab. 6 a Tab. 7 lze říct, že rozptyly světelného toku při teplotě 5 °C nejsou srovnatelné. Tento úsudek můžeme prezentovat v závislosti na empirickém ověření největšího rozptylu ku nejmenšímu. Tento poměr vyšel 2,4 což přesahuje hodnotu 2. Homoskedacita je zároveň zamítnuta v závislosti na Leveneho testu, kde nám p-hodnota vychází nižší než hladina významnosti.

- d) Určete bodové a 95% intervalové odhady střední hodnoty (popř. mediánu) světelného toku zářivek při teplotě 5°C pro všechny srovnávané výrobce. (Nezapomeňte na ověření předpokladů pro použití příslušných intervalových odhadů.)

Předpoklady symetrie a normality (viz bod b) byly zamítnuty. Tudíž u intervalového odhadu byl využit znaménkový test, výsledky v Tab. 8. Zároveň byl využit bodový odhad mediánu, který je znázorněn také v Tab. 8.

Tab. 8: Odhad mediánů světelného toku (lm) v závislosti na teplotě 5 °C

Výrobce	Bodový odhad (lm)	95% intervalový odhad (lm)
Amber	782,8	(777,5; 788,3)
Bright	808,8	(800,5; 816,0)
Clear	808,3	(800,3; 817,4)
Dim	815,1	(803,0; 820,5)

U poloviny zářivek od výrobce Dim, lze očekávat světelný tok menší než 815,1 lm. 95% intervalový odhad mediánu je (803,0; 820,5) lm. Pro ostatní výrobce, lze využít stejnou interpretaci výsledků, tudíž slovní interpretace není explicitně zopakována. Při bližším náhledu na bodový odhad mediánu, lze pozorovat až na pár desetín stejné mediány u výrobce Bright a Clear. Oproti ostatním výrobcům (Amber, Dim) se Bright a Clear výrazněji liší.

e) Čistým testem významnosti ověřte, zda je pozorovaný rozdíl středních hodnot (popř. mediánů) světelného toku zářivek při teplotě 5°C statisticky významný na hladině významnosti 5 %. Pokud ano, zjistěte, zda lze některé skupiny výrobců označit (z hlediska světelného toku zářivek po 30 sekundách od zapnutí, při teplotě 5°C) za homogenní, tj. určete pořadí výrobců dle středních hodnot (popř. mediánů) světelného toku zářivek při 5°C. (Nezapomeňte na ověření předpokladů pro použití zvoleného testu.)

Vzhledem k provedeným předpokladům (viz bod b), jsem se rozhodl provést Kruskalův-Wallisův test. Musíme brát zřetel, že ne všechny předpoklady byly splněny, ačkoliv k tomuto testu se můžeme uchýlit, protože test je brán jako jeden z robustnějších.

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme nulovou hypotézu, a tak předpokládáme, že mediány světelných toků dle výrobce se někde statisticky signifikantně liší. Rozhodneme se provést Dunnové post hoc analýzu, abychom mohli provést exaktní závěry.

Tab. 9: Výsledky Dunnové post hoc analýzy

Srovnání	p-hodnota
Amber - Bright	< 0,001
Amber - Clear	< 0,001
Bright - Clear	> 0,999
Amber - Dim	< 0,001
Bright - Dim	> 0,999
Clear - Dim	> 0,999

V zavislosti na výsledcích z Dunnové post hoc analýzy (viz Tab. 9), lze považovat za homogenní, co se týče světelného toku (lm), výrobce Bright, Clear, Dim. Medián výrobce Amber se jako jediný statisticky signifikantně liší oproti ostatním výrobcům. Vlastnost homogenity šel zároveň pozorovat na krabicovém grafu na Obr. 9.

Na základě těchto výsledků, lze výrobce seřadit tak, jak je ilustrováno v Tab. 10.

Tab. 10: Seřazení podle světelného toku znázorňující srovnatelné výrobce

Bright, Clear, Dim
Amber

Úkol 4

Všichni čtyři výrobci udávají, že jejich zářivky dosáhnou při 5°C po 30 sekundách od zapnutí alespoň osmdesáti procent deklarovaného maximálního světelného toku (tj. 80 % z 1 000 lm). Definujte si novou dichotomickou proměnnou Splnění požadavku na deklarovaný světelný tok po 30 s (při 5°C), která bude nabývat hodnot {ANO, NE}. Poznámka: Pracujte s původními daty, nikoliv s daty po odstranění odlehlých pozorování.

a) Srovnajte zářivky jednotlivých výrobců dle toho, zda při teplotě 5°C splňují deklarovaný světelný tok po 30 s od zapnutí pro jednotlivé výrobce (Amber, Bright, Clear, Dim). Výsledky prezentujte pomocí kontingenční tabulky, vhodného grafu a vhodné míry kontingence. Vaše úsudky komentujte.

b) V případě výrobce Bright určete bodový i 95% intervalový odhad pravděpodobnosti, že při teplotě 5°C zářivka nedosáhne po 30 sekundách požadovaného světelného toku (80 % deklarovaného maximálního světelného toku). Nezapomeňte na ověření předpokladů pro použití intervalového odhadu.

- c) *Určete bodový i 95% intervalový odhad relativního rizika, že zářivka při teplotě 5°C nedosáhne po 30 sekundách požadovaného světelného toku (80 % deklarovaného maximálního světelného toku), pro „nejhoršího“ výrobce (vzhledem k „nejlepšímu“ výrobcí). Výsledky slovně interpretujte.*
- d) *Určete bodový i 95% intervalový odhad poměru šancí, že zářivka při teplotě 5°C nedosáhne po 30 sekundách požadovaného světelného toku (80 % deklarovaného maximálního světelného toku), pro „nejhoršího“ výrobce (vzhledem k „nejlepšímu“ výrobcí). Výsledky slovně interpretujte.*
- e) *Pomocí chí-kvadrát testu nezávislosti rozhodněte, jestli to, že zářivka při teplotě 5°C nedosáhne po 30 sekundách požadovaného světelného toku (80 % deklarovaného maximálního světelného toku), závisí statisticky významně na tom, od kterého výrobce zářivka pochází. Výsledky okomentujte.*

Jak identifikovat, zda jsou v datech odlehlá pozorování?

Emiprické posouzení:

- použití vnitřních (vnějších) hradeb,
- vizuální posouzení krabicového grafu.

Jak naložit s odlehlými hodnotami by měl definovat hlavně zadavatel analýzy (expert na danou problematiku).

Jak ověřit normalitu dat?

Emiprické posouzení:

- vizuální posouzení histogramu,
- vizuální posouzení grafu odhadu hustoty pravděpodobnosti,
- Q-Q graf,
- posouzení výběrové šikmosti a výběrové špičatosti.

Exaktní posouzení:

- testy normality (např. Shapirův – Wilkův test, Andersonův-Darlingův test, Lillieforsův test, ...)

Jak ověřit homoskedasticitu (shodu rozptylů)?

Emiprické posouzení:

- poměr největšího a nejmenšího rozptylu,
- vizuální posouzení krabicového grafu.

Exaktní posouzení:

- F – test (parametrický dvouvýběrový test),
- Bartlettův test (parametrický vícevýběrový test),
- Leveneův test (neparametrický test).