СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

Пусть заданы множества A и B. *Соответствием* G между множествами A и B называется соотношение, при котором элементам $a \in A$ сопоставляются элементы $b \in B$. Это обозначается $G : A \to B$.

При этом используются следующие определения:

- каждый элемент $b \in B$, соответствующий элементу $a \in A$, называется *образом* элемента a; множество всех образов элемента $a \in A$ будем обозначать $G(a)$;
- каждый элемент $a \in A$, соответствующий элементу $b \in B$, называется *прообразом* элемента b; множество всех прообразов элемента $b \in B$ будем обозначать $G^{-1}(b)$;
- множество всех образов всех элементов $a \in A$, называется *множеством значений* соответствия G, которое будем обозначать $E(G)$;
- множество всех прообразов всех элементов $b \in B$, называется *множеством определения* соответствия G, которое будем обозначать $D(G)$.

1) Рассмотрим пример соответствия между подмножеством множества курсантов и множеством экзаменационных оценок.

Фамилия И.О. курсанта	Экзаменационные оценки		
	Математика	Физика	История Отечества
Иванов И.И.	5	4	5
Петров П.П.	2	2	3
Романов Р.Р.	4	4	4

Образы элемента *x*= «Иванов И.И.» - $G(\textit{Иванов И.И.}) = \{5,4\}$,

прообраз элемента $y = 2$ - $G^{-1}(2) = \{\textit{Петров П.П.}\}$,

множество определения соответствия

G – $D(G) = \{\textit{Иванов И.И., Петров П.П., Романов Р.Р.}\}$,

множество значений – $E(G) = \{2,3,4,5\}$.

Выделяют следующие типы соответствий.

Пусть заданы множества A и B.

Выделяют следующие типы соответствий:

- соответствие G называется *всюду определенным*, если его множество определения совпадает со всем множеством A:

$D(G) = A$, т. е. для каждого элемента $a \in A$ найдется хотя бы один образ;

- соответствие G называется *сюръективным*, если его множество значений совпадает со всем множеством B: $E(G) = B$, т. е. для каждого элемента $b \in B$ найдется хотя бы один прообраз;
- соответствие G называется *функциональным (однозначным)*, если для любого элемента $a \in A$ существует не более одного образа $|G(a)| \leq 1$;
- соответствие G называется *инъективным*, если для любого элемента $b \in B$ существует не более одного прообраза $|G^{-1}(b)| \leq 1$;
- соответствие G называется *взаимнооднозначным* или *биективным*, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Рассмотрим пример.

Пусть $A = R, B = R_{\geq 0}, G = \{(x, y), x \in A, y \in B, y = x^2\}$.

Найдем тип этого соответствия. Из свойств функции $y = x^2$ вытекает, что рассматриваемое соответствие

1) всюду определено, т. к. для каждого $x \in R$ найдется образ - значение $y = x^2 \geq 0$;

2) сюръективно, т. к. для каждого $y \geq 0$ найдется прообраз - значение $x = \sqrt{y}$;

3) функционально, т. к. для каждого $x \in R$ найдется только один образ - значение $y = x^2 \geq 0$;

4) не инъективно, т. к. для всякого $y \in B, y > 0$ во множестве A существуют два прообраза - значения $x_1 = \sqrt{y}, x_2 = -\sqrt{y}$;

5) не взаимнооднозначно, т. к. не является инъективным.

Если между конечными множествами существует взаимнооднозначное соответствие, то, как легко доказать, количество элементов в них одинаково, т. е. $|A| = |B|$. Взаимнооднозначные соответствия позволяют распространить понятие мощности на произвольные множества:

два множества называются *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел N, называются *счетными*.

Пример 1. Показать, что множество всех целых чисел счетно.

Для этого необходимо найти взаимнооднозначное соответствие между множествами целых и натуральных чисел: $f : N \to Z$. Легко проверить, что таким соответствием является, например,

$$z = f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ если } n - \text{четное число,} \\ -\dfrac{n-1}{2}, \text{ если } n - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Верны следующие утверждения для счетных множеств, которые мы примем без доказательства.

Теорема 1.

1) Объединение конечного числа счетных множеств счетно;
2) объединение счетного числа конечных множеств счетно;
3) объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Теорема 2. Множество всех рациональных чисел счетно.

Доказательство следует из теоремы 1.

Теорема 3. (теорема Кантора). Множество всех действительных чисел интервала $(0,1)$ не является счетным.

Мощность множества $(0,1)$ называется «континуум», а все множества, имеющие такую мощность – континуальными.

Пример 2. Показать, что множество всех действительных чисел континуально.

С этой целью найдем взаимнооднозначное соответствие между множеством I чисел, лежащих на отрезке $(0,1)$ и множеством действительных чисел $g : I \to R$. Легко проверить, что таким соответствием является, например, $y = g(x) = tg(\pi x - \frac{\pi}{2})$.

Можно доказать, что континуальными являются

- множество всех точек пространства R^n,
- множество всех подмножеств счетного множества.

Значения мощности множеств называют кардинальными числами. В частности кардинальными числами являются натуральные числа – это мощности конечных множеств.

Доказано, что мощность множества A и мощность множества всех его подмножеств 2^A связаны следующим соотношением: $|A| < |2^A|$. Поэтому не существует множества максимальной мощности, т.е. не существует максимального кардинального числа.