Бинарные отношения

Как уже отмечалось выше, множество A, состоящее из элементов a и b, обозначается $A=\{a,b\}$. Так как $\{a,b\}=\{b,a\}$, то множество $\{a,b\}$ называется *неупорядоченной парой элементов* a и b. С другой стороны, для элементов a и b существует множество (a,b), которое называется *упорядоченной парой элементов* a,b и удовлетворяет свойству $(a,b)=(c,d)$ в том и только том случае, если $a=c$ и $b=d$.

В общем случае для любого натурального числа n и любых элементов $a_1,\ldots,a_n$ существует множество $(a_1,\ldots,a_n)$, которое называется *упорядоченным набором n элементов* $a_1,\ldots,a_n$ и удовлетворяет свойству $(a_1,\ldots,a_n)=(b_1,\ldots,b_n)$ в том и только том случае, если $a_1=b_1,\ldots,a_n=b_n$.

Определение. *Декартовым* (или *прямым*) *произведением* n множеств $A_1,\ldots,A_n$ называется множество $A_1\times\ldots\times A_n$, которое состоит из всех таких упорядоченных наборов n элементов $(a_1,\ldots,a_n)$, что $a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n$. Если все множества $A_1,\ldots,A_n$ равны одному и тому же множеству A, то прямое произведение $A\times\ldots\times A$ n множителей A называется n-ой *декартовой степенью* множества A и обозначается символом A^n.

В частности, декартово произведение двух множеств A и B есть множество $A\times B$, которое состоит из всех таких упорядоченных пар (a,b), что $a\in A$ и $b\in B$. Если $A=B$, то декартово произведение $A\times B$ называется *декартовым квадратом* множества A и обозначается символом A^2.

Определение. Подмножества декартова произведения $A_1\times\ldots\times A_n$ множеств $A_1,\ldots,A_n$ называются *n-арными отношениями* между элементами множеств $A_1,\ldots,A_n$ и обозначаются строчными греческими буквами (возможно с индексами): $\rho,\sigma,\ldots,\rho_1,\rho_2,\ldots$.

В частности, при подмножества декартова произведения $A_1\times\ldots\times A_n=A_1$ называются *унарными отношениями* между элементами множества A_1 и при подмножества декартова произведения $A_1\times\ldots\times A_n=A_1\times A_2$ называются *бинарными отношениями* между элементами множеств A_1,A_2.

Для бинарного отношения $\rho\subset A\times B$ *область определения* обозначается символом и определяется по формуле:

$$=\{a:(a,b)\in\rho \text{ для некоторого } b\in B\}.$$

Для бинарного отношения $\rho \subset A \times B$ *множество значений* обозначается символом и определяется по формуле:

$$= \{b : (a,b) \in \rho \text{ для некоторого } a \in A \}.$$

Для любого подмножества $X \subset A$ множество

$$\rho(X) = \{b \in B : (x,b) \in \rho \text{ для некоторого } x \in X \}$$

называется *образом* множества X относительно отношения ρ. Образ одноэлементного множества $X = \{a\}$ относительно отношения ρ обозначается символом $\rho(a)$ и называется также *срезом* отношения ρ через элемент a.

Определение. Бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ называется:

– *всюду определенным,* если его область определения $D_\rho = A$;

– *однозначным* (или *частичной функцией, частичным отображением* множества A), если для каждого элемента $a \in D_\rho$ условие $(a,b) \in \rho$ выполняется точно для одного элемента $b \in B$, который называется *значением функции* ρ для элемента a и обозначаеется символом $\rho(a)$;

– *взаимно однозначным,* если оно однозначно и для каждого элемента $b \in E_\rho$ условие $(a,b) \in \rho$ выполняется точно для одного элемента $a \in A$, который называется *прообразом элемента* b для функции ρ и обозначается символом $\rho^{-1}(b)$.

Определение. Всюду определенное и однозначное бинарное отношение $\varphi \subset A \times B$ обозначается символом $\varphi : A \to B$ и называется *отображением* множества A в множество B, или (*всюду определенной*) *функцией* на множестве A со значениями в множестве B.

Определение. Отображение $\varphi : A \to B$ называется:

– *отображением* множества A на множество B (или *сюръекцией*), если его множество значений $E_\varphi = B$;

– *взаимно однозначным отображением* множества A в множество B (или *инъекцией*), если оно является взаимно однозначным бинарным отношением;

– *взаимно однозначным отображением* множества A на множество B (или *биекцией*), если оно является взаимно однозначным отображением A на B;

– *преобразованием* множества A, если $A = B$;

– *перестановкой* множества A, если оно является взаимно однозначным отображением множества A на себя.

Примеры.

1. Пусть A – множество студентов вуза и B – множество студенческих групп этого вуза. Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ принадлежности студентов группе, т.е. для элементов $a \in A,\ b \in B$ условие $(a,b) \in \rho$ означает, что студент a обучается в группе b. Тогда D_ρ есть множество всех таких студентов $a \in A$, которые обучаются по крайней мере в одной группе, и E_ρ есть множество всех таких групп $b \in B$, в которых обучается хотя бы один студент. Ясно, что в этом случае отношение ρ является всюду определенным и однозначным, так как каждый студент $a \in A$ обучается точно в одной из групп вуза, и $E_\rho = B$, так как в каждой группе $b \in B$ обучается хотя бы один студент. Таким образом, ρ – отображение множества A на множество B.

2. Пусть A – множество учеников школы и B – множество кружков центра дополнительного образования. Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ посещаемости учениками кружков, т.е. для элементов $a \in A,\ b \in B$ условие $(a,b) \in \rho$ означает, что ученик a посещает кружок b. Тогда D_ρ есть множество всех таких учеников $a \in A$, которые посещают, по крайней мере, один кружок, и E есть множество всех таких кружков $b \in B$, которые посещает хотя бы один ученик. В общем случае данное отношение ρ не является всюду определенным, так как некоторые ученики $a \in A$ могут не посещать ни один из кружков, и не является однозначным, так как некоторые ученики могут посещать несколько кружков.

3. Пусть A – множество студентов вуза, обучающихся на 1-м курсе по специальности «Математика», и B – множество дисциплин учебного плана по специальности «Математика». Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ сдачи студентами экзаменов в зимнюю сессию, т.е. для элементов $a \in A,\ b \in B$ условие $(a,b) \in \rho$ означает, что студент a сдал в зимнюю сессию экзамен по специальности b. Тогда D_ρ есть множество всех таких студентов $a \in A$, которые сдали по крайней мере один экзамен в зимнюю сессию, и E_ρ есть множество всех таких дисциплин $b \in B$, экзамен по которым предусмотрен в зимнюю сессию на 1-м курсе учебным планом специальности «Математика» (предполагается, что все экзамены сдаются по крайней мере

одним студентом $a \in A$). В общем случае данное отношение ρ не является всюду определенным, так как некоторые студенты $a \in A$ могут не сдать ни одного экзамена, и не является однозначным, так как учебным планом в сессию может быть предусмотрено несколько экзаменов, которые сданы успевающими студентами.

Основные действия над бинарными отношениями.

1. *Теоретико-множественные операции*: для бинарных отношений, как для множеств, определены действия сравнения, объединения, пересечения и вычитания.

2. *Обращение бинарных отношений*: обратным для бинарного отношения $\rho \subset A \times B$ называется бинарное отношение $\rho^{-1} \subset B \times A$, которое определяется по формуле: $\rho^{-1} = \{(b,a):(a,b) \in \rho\}$.

3. *Композиция бинарных отношений*: композицией бинарных отношений $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$ называется бинарное отношение $\rho\sigma \subset A \times C$, которое определяется по формуле:

$$\rho\sigma = \{(a,c):(a,b) \in \rho \text{ и } (b,c) \in \sigma \text{ для некоторого } b \in B\}.$$

В частности, для отображений $\varphi: A \to B$, $\psi: B \to C$ композиция $\varphi\psi$ является отображением множества *A* в множество *C*, которое каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие единственный элемент $(\varphi\psi)(a) = \psi(\varphi(a))$ множества *C*. Иногда для обозначения композиции отображений используется правосторонняя запись $\psi \circ \varphi$, при которой для любого $a \in A$ выполняется равенство: $(\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a))$.

Композиция $\varphi\psi$ называется также *сложной функцией*, полученной подстановкой функции φ в функцию ψ.

Легко видеть, что для любых бинарных отношений $\rho \subset A \times B$, $\sigma \subset B \times C$ и $\gamma \subset C \times D$ выполняется свойство $(\rho\sigma)\gamma = \rho(\sigma\gamma)$, которое называется *ассоциативностью композиции*.

В случае *A*=*B* подмножества декартова квадрата $A \times A$ называются также *бинарными отношениями* на множестве *A*. Пример бинарного отношения на множестве *A* дает *тождественное отношение* на этом множестве, которое обозначается символом Δ_A и состоит из всех таких упорядоченных пар (a,b), что $a \in A$ и $a = b$. Очевидно, что для любого бинарного отношения ρ на множестве *A* выполняются равенства $\rho\Delta_A = \Delta_A\rho = \rho$.

Определение. Бинарное отношение $\rho \subset A \times A$ называется:

– *рефлексивным*, если $\Delta_A \subset \rho$, т.е. $(a,a) \in \rho$ для любого $a \in A$;

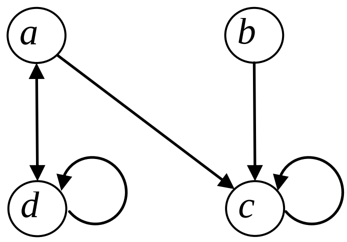
– *симметричным*, если $\rho^{-1} \subset \rho$, т.е. из $(a,b) \in \rho$ следует $(b,a) \in \rho$;

– *антисимметричным*, если $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$, т.е. из $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho$ следует $a=b$;

– *транзитивным*, если $\rho\rho \subset \rho$, т.е. из $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$ следует $(a,c) \in \rho$.

Заданные на конечном множестве бинарные отношения наглядно изображают специальными рисунками – графами. *Графом* бинарного отношения ρ на множестве $A = \{a_1,...,a_n\}$ называется плоская фигура, которая состоит из n выделенных точек, изображающих элементы $a_1,...,a_n$ и называющихся *вершинами* графа, и у которой вершины a_i, a_j, удовлетворяющие условию $(a_i, a_j) \in \rho$, соединяются стрелкой, направленной от a_i к a_j и называемой *дугой* графа. При этом вершины a_i и a_j называются соответственно *началом* и *концом* такой дуги. Дуга, у которой начало и конец совпадают, называется *петлей*. В случае, если $(a_i, a_j) \in \rho$ и $(a_j, a_i) \in \rho$, две противоположно направленные стрелки, соединяющие вершины a_i, a_j, изображаются одной стрелкой с двумя противоположными направлениями.

Пример. Граф заданного на множестве $A = \{a,b,c,d\}$ бинарного отношения $\rho = \{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ имеет следующий вид:



Ясно, что у графа рефлексивного бинарного отношения каждая вершина имеет петлю, у графа симметричного бинарного отношения вместе с каждой стрелкой от a_i к a_j имеется обратная стрелка от a_j к a_i, у графа антисимметричного бинарного отношения любые две вершины a_i, a_j могут соединяться только одной стрелкой, у графа транзитивного бинарного отношения вместе с каждой парой стрелок от a_i к a_j и от a_j к a_k имеется стрелка от a_i к a_k.

С целью упрощения вычисления результатов действий над бинарными отношениями используется представление бинарных отношений специальными таблицами, называемыми матрицами. *Матрицей* бинарного отношения ρ между элементами множеств $A = \{a_1,...,a_m\}$ и $B = \{b_1,...,b_n\}$ называется прямоугольная таблица $M(\rho)$, состоящая из m строк, помеченных элементами множества A, и n столбцов, помеченных элементами множества B, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $[M(\rho)]_{ij}$ из множества $\{0,1\}$, определяемый по правилу:

$$[M(\rho)]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in \rho, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ имеет вид:

$$M(\rho) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & \dots & b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} [M(\rho)]_{11} & \dots & [M(\rho)]_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ [M(\rho)]_{m1} & \dots & [M(\rho)]_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Пример. Матрица заданного на множестве $A = \{a,b,c,d\}$ бинарного отношения $\rho = \{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ имеет следующий вид:

$$M(\rho) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для простоты записи матрицы бинарного отношения $M(\rho)$ обычно явно не указывается разметка ее строк и столбцов.

Легко видеть, что для бинарных отношений $\rho, \sigma \subset A \times B$ выполняются следующие свойства:

1) $\rho \subset \sigma$ в том и только том случае, если $[M(\rho)]_{ij} \le [M(\sigma)]_{ij}$ для всех $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$;

2) элементы матрицы $M(\rho \cap \sigma)$ вычисляются по формуле:

$$[M(\rho \cap \sigma)]_{ij} = [M(\rho)]_{ij} \cdot [M(\sigma)]_{ij};$$

3) элементы матрицы $M(\rho \cup \sigma)$ вычисляются по формуле:

$$[M(\rho \cup \sigma)]_{ij} = \max\{[M(\rho)]_{ij}, [M(\sigma)]_{ij}\}.$$

Кроме того, если $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$ для некоторого множества $C = \{c_1, ..., c_p\}$, то элементы матрицы $M(\rho\sigma)$ вычисляются по формуле:

$$[M(\rho\sigma)]_{ij} = \max_{1 \le k \le n} \{[M(\rho)]_{ik} \cdot [M(\sigma)]_{kj}\}.$$

Примеры.

1. Пусть A – множество студентов, сдающих экзамены по алгебре и геометрии. Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times A$ сравнения успеваемости студентов по алгебре, т.е. для элементов $a, b \in A$ условие $(a, b) \in \rho$ означает, что по алгебре успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b. Ясно, что такое отношение транзитивно. Аналогичными свойствами обладает бинарное отношение $\sigma \subset A \times A$ сравнения успеваемости студентов по геометрии, т.е. для элементов $a, b \in A$ условие $(a, b) \in \sigma$ означает, что по геометрии успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b. Рассмотрим отношения $\rho \cap \sigma$ и $\rho \cup \sigma$. По определению для элементов $a, b \in A$ условие $(a, b) \in \rho \cap \sigma$ означает, что успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b как по алгебре, так и по геометрии, и условие $(a, b) \in \rho \cup \sigma$ означает, что успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b либо по алгебре, либо по геометрии. Легко видеть, что отношение $\rho \cap \sigma$ всегда будет транзитивным, но отношение $\rho \cup \sigma$ транзитивным может не быть, так как возможно наличие таких элементов $a, b, c \in A$, что $(a, b) \in \rho$, $(b, c) \in \sigma$ и $(a, c) \notin \rho \cup \sigma$. Например, это выполняется в случае, если студент a сдал алгебру на «4» и геометрию на «5», студент b сдал алгебру на «5» и геометрию на «3», студент c сдал алгебру на «3» и геометрию на «4». Графы таких отношений ρ, σ для множества $A = \{a, b, c\}$ изображены на рис.1.10, 1.11.

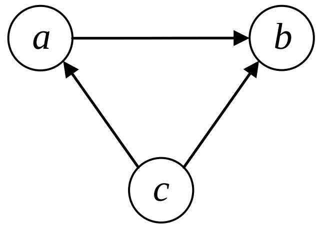


Рис. 1.10.
Граф отношения ρ

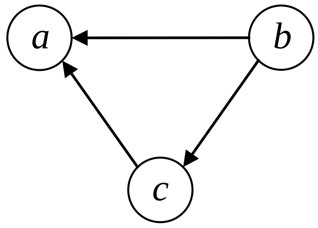


Рис.1. 11.
Граф отношения σ

Графы отношений $\rho \cap \sigma$ и $\rho \cup \sigma$ изображены на рис.1.12,1.13.

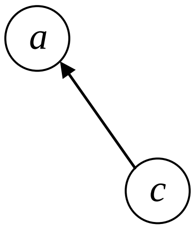


Рис.1.12.
Граф отношения $\rho \cap \sigma$

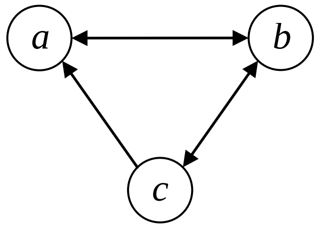


Рис.1.13.
Граф отношения $\rho \cup \sigma$

Очевидно, что данные бинарные отношения представляются матрицами:

$$M(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(\rho \cap \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M(\rho \cup \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть четыре города A, B, C, D обслуживаются двумя авиакомпаниями «Ро» и «Сигма». При этом авиакомпания «Ро» выполняет прямые рейсы: из A в B, из B в C и D, из C в B, и авиакомпания «Сигма» выполняет прямые рейсы: из A в B, из B в C, из D в C. Тогда отношения ρ и σ связи городов из множества $X = \{A, B, C, D\}$ прямыми рейсами соответственно авиакомпаний «Ро» и «Сигма» имеют вид:

$$\rho = \{(A,B),(B,C),(B,D),(C,B)\} \text{ и } \sigma = \{(A,B),(B,C),(D,C)\}.$$

Графы таких отношений ρ, σ изображены на рис.1.14,1.15.

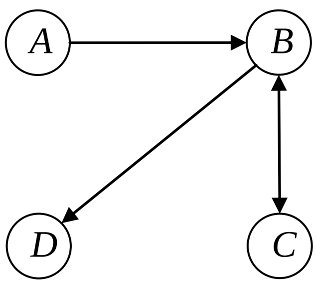


Рис.1.14.
Граф отношения ρ

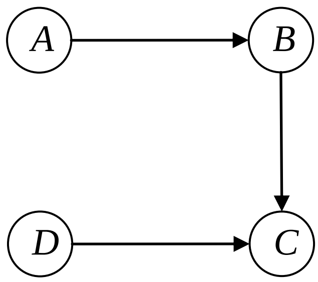


Рис.1.15.
Граф отношения σ

Матрицы таких отношений ρ,σ имеют вид:

$$M(\rho)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ M(\sigma)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

В данном примере ρ^{-1} является отношением связи множества городов $X=\{A,B,C,D\}$ обратными рейсами авиакомпания «Ро» и $\rho\sigma$ является отношением связи этих городов стыковочными рейсами авиакомпаний «Ро» и «Сигма». Графы таких отношений $\rho^{-1},\rho\sigma$ изображены на рис.1.16,1.17.

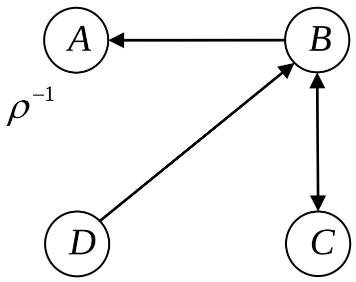


Рис.1.16.
Граф отношения ρ^{-1}

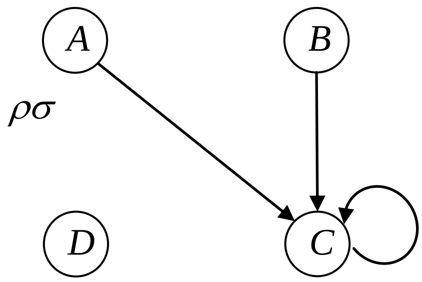


Рис.1.17.
Граф отношения $\rho\sigma$

Матрицы таких отношений $\rho^{-1},\rho\sigma$ имеют вид:

$$M(\rho^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ M(\rho\sigma)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1.3. Отношение эквивалентности и фактор-множество

Определение. Бинарное отношение ε на множестве A называется *отношением эквивалентности* (или просто *эквивалентностью*), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Для обозначения эквивалентности ε используется инфиксная запись с помощью символа $\equiv$, т.е. вместо $(a,b)\in\varepsilon$ пишут $a\equiv b(\varepsilon)$ или просто $a\equiv b$ (читается «a эквивалентно b относительно эквивалентности ε» или просто «a эквивалентно b»).

Срезы $\varepsilon(a)$ отношения эквивалентности ε через элементы $a \in A$ называются *классами эквивалентности* по отношению ε и сокращенно обозначаются символом $[a]$. Множество всех таких классов эквивалентности $\{[a]: a \in A\}$ называется *фактор-множеством* множества A по эквивалентности ε и обозначается символом A/ε.

Отношения эквивалентности характеризуются свойством: для любых элементов $a,b \in A$ классы эквивалентности $[a],[b]$ либо не пересекаются, либо совпадают, т.е. условие $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ влечет $[a]=[b]$. Таким образом, множество всех классов эквивалентности $A/\varepsilon= \{[a]: a \in A\}$ образует семейство непересекающихся подмножеств множества A, объединение которого дает все множество A и которое называется *разбиением множества* A .

Теорема. Непустое семейство $\{A_i : i \in I\}$ подмножеств множества A в том и только том случае является разбиением множества A, если это семейство является фактор-множеством некоторого отношения эквивалентности ε на множестве A.

Определение. Подмножество $T \subset A$ называется *полной системой представителей классов* эквивалентности ε на множестве A, если выполняются следующие два условия:

1)каждый элемент множества A эквивалентен некоторому элементу множества T , т.е. $\varepsilon(T)=A$;

2)различные элементы множества T неэквивалентны между собой, т.е. для любых $t_1,t_2 \in T$ из условия $t_1 \equiv t_2(\varepsilon)$ следует $t_1=t_2$.

В этом случае классы эквивалентности $[t] \in A/\varepsilon$, содержащие элементы $t \in T$, могут быть отождествлены со своими представителями t и фактор-множество A/ε может быть отождествлено с множеством T.

Примеры.

1. Пусть A – множество шаров в коробке, состоящее из 7 красных, 5 синих и 8 зеленых шаров. Определим на множестве A отношение ε по формуле: для любых шаров $a,b \in A$ условие $a \equiv b(\varepsilon)$ означает, что шары a,b одного цвета. Легко видеть, что отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве A. Ясно, что любой красный шар $a_к \in A$ определяет класс эквивалентности $[a_к]$, состоящий из 7 красных шаров, любой синий шар $a_c \in A$ определяет класс эквивалентности $[a_c]$, состоящий из 5 синих шаров и любой зеле-

ный шар $a_з \in A$ определяет класс эквивалентности $[a_з]$, состоящий из 8 зеленых шаров. Значит, фактор-множество A/ε состоит из трех элементов $[a_к],[a_с],[a_з]$ и может быть отождествлено с *полной системой представителей классов* эквивалентности ε на множестве *A*, состоящей из трех разноцветных шаров $\{a_к, a_с, a_з\}$, или просто с множеством трех цветов $\{красный, синий, зеленый\}$.

2. Пусть $A = \boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел. Определим на множестве $\boldsymbol{Z}$ отношение ε по формуле: для любых $a,b \in \boldsymbol{Z}$ условие $a \equiv b(\varepsilon)$ означает, что числа a,b имеют одинаковые остатки при делении на число 3, т.е. разность $a–b$ кратна числу 3. Легко видеть, что отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве $\boldsymbol{Z}$. Ясно, что число 0 определяет класс эквивалентности $[0] = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$, число 1 – класс эквивалентности $[1] = \{1, 1 \pm 3, 1 \pm 6, \ldots\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$, число 2 – класс эквивалентности $[2] = \{2, 2 \pm 3, 2 \pm 6, \ldots\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$. Так как этими множествами исчерпываются все классы данной эквивалентности ε, то фактор-множество $\boldsymbol{Z}/\varepsilon$ состоит из трех элементов $[0],[1],[2]$ и может быть отождествлено с трехэлементным множеством $\{0,1,2\}$.

Определение. *Ядром отображения* $\varphi : A \to B$ называется бинарное отношение $\ker\varphi$ на множестве *A*, которое определяется по формуле:

$$\ker\varphi = \{(a,b) \in A^2 : \varphi(a) = \varphi(b)\}.$$

Легко видеть, что отношение $\ker\varphi$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве *A*. Ясно, что каждый элемент $a \in A$ определяет класс эквивалентности

$$[a] = \{b \in A : \varphi(a) = \varphi(b)\} = \varphi^{-1}(\varphi(a)),$$

который является прообразом элемента $\varphi(a)$ для функции φ. Значит, фактор-множество $A/\ker\varphi$ состоит из элементов $\varphi^{-1}(b)$ для всех $b \in E$ и может быть отождествлено с множеством E_φ.

Определение. Пусть ε – отношение эквивалентности на множестве *A*. *Каноническим отображением* эквивалентности ε называется отображение nat ε (от англ. *natural* – канонический) множества *A* на фактор-множество A/ε, которое каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие содержащий его класс эквивалентности $[a]$.

Легко видеть, что выполняется равенство: $\ker \operatorname{nat} \varepsilon = \varepsilon$.

1.4. Отношение порядка и упорядоченное множество

Определение. Бинарное отношение ω на множестве A называется *отношением порядка* (или просто *порядком*), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Для обозначения порядка ω используется инфиксная запись с помощью символа ≤: вместо $(a,b)\in\omega$ принято писать $a\le b(\omega)$ или просто $a\le b$ (читается «a меньше или равно b относительно порядка ω»).

Множество A с заданным на нем отношением порядка ≤ называется *упорядоченным множеством* и обозначается $A=(A,\le)$ или просто $(A,\le)$.

Определение. Подмножество X упорядоченного множества $(A,\le)$ называется *ограниченным сверху,* если найдется такой элемент $a\in A$, что $x\le a$ для всех $x\in X$. В этом случае элемент a называется *верхней гранью* множества X. Если для множества X существует наименьшая верхняя грань, то она обозначается символом $\sup X$ (читается «супремум множества X») и называется *точной верхней гранью* множества X. В случае, когда $\sup X\in X$, значение $\sup X$ является *наибольшим элементом* множества и обозначается $\max X$.

Определение. Подмножество X упорядоченного множества $(A,\le)$ называется *ограниченным снизу,* если найдется такой элемент $a\in A$, что $a\le x$ для всех $x\in X$. В этом случае элемент a называется *нижней гранью* множества X. Если для множества X существует наибольшая нижняя грань, то она обозначается символом $\inf X$ (читается «инфимум множества X») и называется *точной нижней гранью* множества X. В случае, когда $\inf X\in X$, значение $\inf X$ является *наименьшим элементом* множества и обозначается $\min X$.

Если само упорядоченное множество $(A,\le)$ ограничено сверху (соответственно, снизу), то его верхняя (соответственно, нижняя) грань является *наибольшим* (соответственно, *наименьшим*) *элементом* множества A и обозначается символом 1 (соответственно, 0).

Определение. Порядок ≤ на множестве A называется:

– *линейным*, если для любых $a,b\in A$ выполняется $a\le b$ или $b\le a$;

– *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент.

Множество, на котором задан линейный порядок, называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью*. Множество, на котором задан полный порядок, называется *вполне упорядоченным множеством*.