ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ

1.1. Множества и действия над ними

При изложении математических дисциплин широко используются основные положения теории множеств. Понятие множества является одним из первоначальных понятий математики и обычно трактуется на интуитивном уровне: *множество* понимается как совокупность объектов, удовлетворяющих некоторому свойству. Множества обозначаются прописными латинскими буквами (возможно с индексами): $A, B, \ldots, A_1, A_2, \ldots$. Объекты, входящие в состав множества, называются его *элементами* и обозначаются строчными латинскими буквами (возможно с индексами): $a, b, \ldots, a_1, a_2, \ldots$. Утверждение «объект a есть элемент множества A» символически записывается с помощью *символа принадлежности* $\in$ формулой $a \in A$, которая читается «a принадлежит A» или «a – элемент A». Если объект a не входит в множество A, то пишут $a \notin A$ и говорят, что «a не принадлежит A» или «a не является элементом A».

Если множество A есть совокупность объектов x, удовлетворяющих свойству $P(x)$, то пишут $A = \{x : P(x)\}$.

Пример. Отрезок $[0;1]$ числовой прямой $\boldsymbol{R}$ с концами 0 и 1 есть множество вещественных чисел x, удовлетворяющих условию $0 \le x \le 1$. Следовательно, такое множество определяется формулой:

$$[0;1] = \{x : x \in \boldsymbol{R} \text{ и } \ 0 \le x \le 1\}.$$

Конечное множество A, состоящее из элементов $a_1, \ldots, a_n$, обозначается также $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. В частности, множество A, состоящее из одного элемента a, обозначается $A = \{a\}$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Пример. Множество делителей числа 10 записывается в виде $\{1,2,5\}$, множество вещественных корней уравнения $x^2-1=0$ записывается в виде $\{-1,1\}$ и множеством вещественных корней уравнения $x^2+1=0$ является пустое множество $\varnothing$.

Для некоторых особо важных множеств используются стандартные обозначения. Так, основные числовые множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел обозначаются соответственно $\boldsymbol{N},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$. Символом $\boldsymbol{R}_+$ обозначается множество положительных вещественных чисел.

Основные действия над множествами.

1. *Сравнение множеств*: множество *A* называется *подмножеством* множества *B*, если каждый элемент множества *A* принадлежит множеству *B*. С помощью *символа включения* $\subset$ этот факт выражается формулой $A\subset B$, которая читается «*A* – подмножество *B*» или «*A* включается в *B*».

Если для множеств *A*,*B* выполняются включения $A\subset B$ и $B\subset A$, то такие множества состоят из одних и тех же элементов. В этом случае множества *A*,*B* называются *равными*. С помощью знака равенства «=» этот факт выражается формулой $A=B$, которая читается «*A* равно *B*». Если множества *A*,*B* не равны, то пишут $A\neq B$.

Множество *A* называется *собственным подмножеством* множества *B*, если $A\subset B$ и $A\neq B$.

2. *Объединение множеств*: объединением множеств *A* и *B* называется множество $A\cup B$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A*,*B*, т.е.

$$A\cup B=\{\,x: x\in A \ \text{ или } \ x\in B\,\}.$$

3. *Пересечение множеств*: пересечением множеств *A* и *B* называется множество $A\cap B$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые одновременно принадлежат обоим множествам *A* и *B*, т.е.

$$A\cap B=\{\,x: x\in A \ \text{ и } \ x\in B\,\}.$$

Если $A\cap B=\varnothing$, то множества *A*,*B* называются *непересекающимися*.

4. *Вычитание множеств*: разностью множеств *A* и *B* называется множество $A\setminus B$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *A*, но не принадлежат множеству *B*, т.е.

$$A\setminus B=\{\,x: x\in A \ \text{ и } \ x\notin B\,\}.$$

Для наглядного представления действий над множествами используют их схематическое изображение областями плоскости, которые принято называть *диаграммами Эйлера-Венна*. Например, включение множеств $A \subset B$ схематически изображается диаграммой (рис.1.1), пересечение множеств $A \cap B$ схематически изображается заштрихованной областью на рис.1.2, разность множеств $A \setminus B$ схематически изображается заштрихованной областью на рис.1.3.

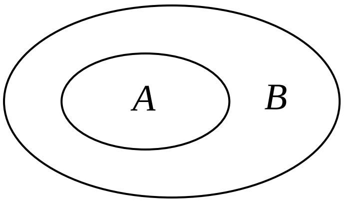


Рис. 1.1.
Включение множеств

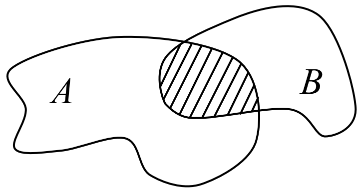


Рис. 1.2.
Пересечение множеств

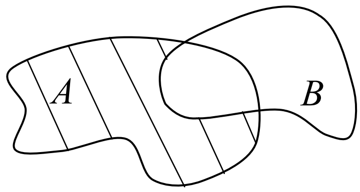


Рис. 1.3.
Разность множеств

Примеры.

1. Пусть A – множество простых делителей числа 210 и B – множество простых делителей числа 231. Тогда $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{3,7,11\}$, $A \cap B = \{3,7\}$, $A \cup B = \{2,3,5,7,11\}$, $A \setminus B = \{2,5\}$ и $B \setminus A = \{11\}$. Очевидно, что произведение элементов множества $A \cap B$ равно наибольшему общему делителю чисел 210 и 231 и произведение элементов множества $A \cup B$ равно наименьшему общему кратному этих чисел, т.е. НОД(210,221) = $3 \cdot 7$ = 21 и
$\cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

2. Пусть A – множество решений неравенства $f(x) \le 0$ и B – множество решений неравенства $g(x) \le 0$. Тогда по определению *система неравенств*

$$\begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \le 0 \end{cases}$$

имеет множество решений $A \cap B$ и *совокупность неравенств*

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 0, \\ g(x) \le 0 \end{array}\right.$$

имеет множество решений $A \cup B$.

3. Пусть {(0} и {(0}. Построим на координатной плоскости эти множества и найдем их пересечение $X \cap Y$ объединение $X \cup Y$ и разности $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.

Для построения множества решений неравенства $y - x \geq 0$ рассмотрим уравнение $y - x = 0$, которое определяет на числовой плоскости линию, разбивающую эту плоскость на две области знакопостоянства выражения $y - x$. В данном случае эта линия является прямой – биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов, которая разбивает плоскость на две полуплоскости (рис.1.4).

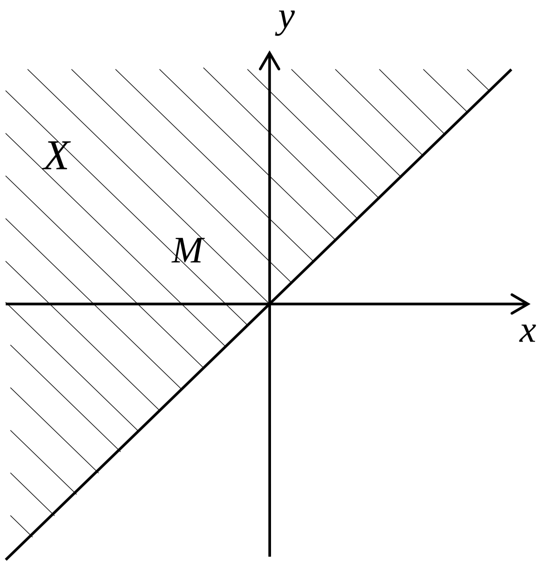


Рис. 1.4.
Множество *X*

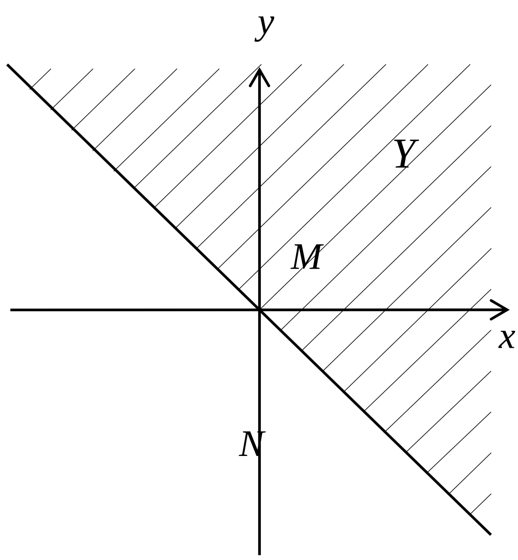


Рис. 1.5.
Множество *Y*

Возьмем произвольную точку в верхней полуплоскости, например точку $M(0;1)$, и определим в ней знак выражения $y - x$: $1 - 0 = 1 > 0$. Так как в точке M выполняется $y - x > 0$, то выражение $y - x$ будет положительно во всей верхней полуплоскости. По аналогии нетрудно проверить, что в нижней полуплоскости выражение $y - x$ будет отрицательно. Таким образом, множество *X* изображается на рис.1.4 заштрихованной областью.

Для построения множества решений неравенства $x + y \geq 0$ рассмотрим уравнение $x + y = 0$, которое определяет на числовой плоскости прямую – биссектрису 2-го и 4-го координатных углов. Эта линия разбивает плоскость на две полуплоскости (рис.1.5) – области знакопостоянства выражения $x + y$.

С помощью пробных точек (например, $M(0;1)$ – в верхней полуплоскости и $N(0;-1)$ – в нижней полуплоскости) убеждаемся, что выражение $x + y$ в верхней полуплоскости положительно, а в нижней полуплоскости отрицательно. Значит, множество Y изображается на рис.1.5 заштрихованной областью.

Тогда пересечение $X \cap Y$ и объединение $X \cup Y$ изображаются заштрихованными областями на рис.1.6 и 1.7.

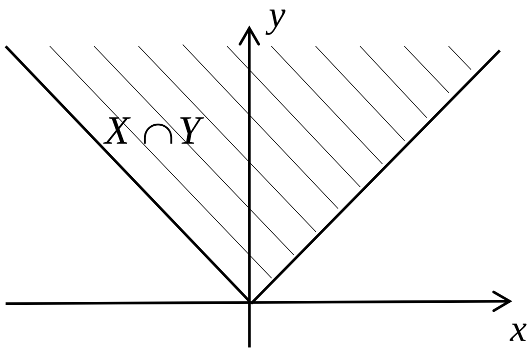


Рис. 1.6.
Пересечение множеств X, Y

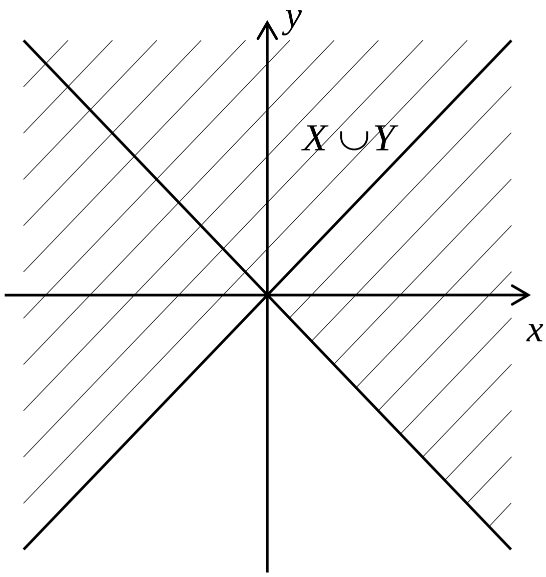


Рис. 1.7.
Объединение множеств X, Y

Разности множеств $X \backslash Y, Y \backslash X$ изображаются заштрихованными областями на рис.1.8 и 1.9.

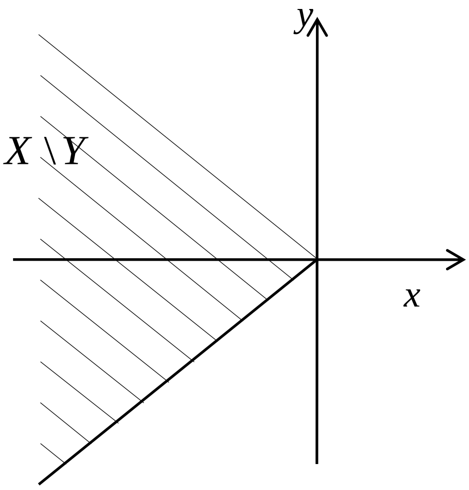


Рис. 1.8.
Разность множеств X и Y

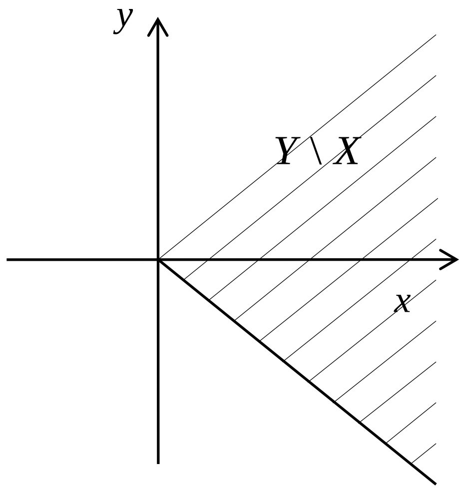


Рис. 1.9.
Разность множеств Y и X

Свойства операций над множествами.

С помощью диаграмм Эйлера-Венна легко проверяются следующие равенства множеств.

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ – свойства *коммутативности* объединения и пересечения (или *перестановочные законы*);

2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ – свойства *ассоциативности* объединения и пересечения (или *сочетательные законы*);

3. $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ – свойства *идемпотентности* объединения и пересечения;

4. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ – свойства дистрибутивности соответственно пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения (или *распределительные законы*);

5. $(A\cap B)\cup A=A$, $(A\cup B)\cap A=A$ – *законы поглощения*;

6. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$, $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ – *законы де Моргана*;

7. $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ – характерные свойства пустого множества.

Таким образом, с операциями объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ множеств можно оперировать по известным из элементарной математики свойствам операций сложения $+$ и умножения $\times$ вещественных чисел. Принципиальным отличием теоретико-множественных операций от арифметических операций являются их свойства идемпотентности и законы поглощения. Кроме того, из перечисленных выше свойств видно, что для теоретико-множественных операций объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ справедлив *принцип двойственности*: свойство таких операций остается справедливым при одновременной замене символов этих операций друг на друга (символа $\cup$ – на символ $\cap$ и символа $\cap$ – на символ $\cup$).

В заключение отметим, что действия объединения и пересечения двух множеств легко обобщаются для любого семейства множеств. Если I – непустое множество и каждому элементу $i\in I$ поставлено в соответствие некоторое множество A_i, то множество $\{A_i : i\in I\}$ называется *семейством множеств* (индексированным элементами множества I) и обозначается $\{A_i\}_{i\in I}$ или просто $\{A_i\}$. В частности, если $I=\{1,..n\}$ – конечное множество, то семейство множеств $\{A_i\}_{i\in I}$ состоит из n множеств $A_1,...,A_n$. Если же $\boldsymbol{I=N}$, то семейство множеств $\{A_i\}_{i\in I}$ есть бесконечная последовательность множеств $A_1, A_2,...,A_n,...$.

Определение. *Объединением семейства множеств* $\{A_i\}_{i\in I}$ называется множество $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_i. В этом случае семейство множеств $\{A_i\}_{i\in I}$ называется также *покрытием* множества $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Покрытие называется *разбиением,* если его элементы попарно не пересекаются между собой, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ при всех различных $i, j \in I$. В этом случае говорят также, что множество A *разбивается на классы* A_i $(i \in I)$.

Определение. *Пересечением семейства множеств* $\{A_i\}_{i \in I}$ называется множество $\bigcap_{i \in I} A_i$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_i для любых $i \in I$.

В частности, если $I = \{1,..n\}$, то $\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ – объединение n множеств $A_1,\ldots,A_n$ и $\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ – пересечение n множеств $A_1,\ldots,A_n$.

Примеры.

1. Если каждому натуральному числу $n \in \boldsymbol{N}$ поставить в соответствие отрезок $A_n = [0;1 - 1/n]$, то объединение бесконечной последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ будет равно числовому промежутку $[0;1)$.
2. Если каждому натуральному числу $n \in \boldsymbol{N}$ поставить в соответствие числовой промежуток $A_n = [0; 1/n)$, то пересечение бесконечной последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ будет равно одноэлементному множеству $\{0\}$.
3. Если каждому целому числу $n \in \boldsymbol{Z}$ поставить в соответствие числовой промежуток $A_n = [n; n+1]$, то семейство множеств $\{A_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ образует покрытие множества вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, так как $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} A_i = \boldsymbol{R}$. Если же каждому целому числу $n \in \boldsymbol{Z}$ поставить в соответствие числовой промежуток $B_n = [n; n+1)$, то семейство множеств $\{B_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ образует разбиение множества вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, так как $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} B_i = \boldsymbol{R}$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$ при всех различных $i, j \in \boldsymbol{Z}$.
4. Множества $\boldsymbol{N_2}$ и $\boldsymbol{N_1}$ соответственно четных и нечетных натуральных чисел образуют двухэлементное разбиение множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Другими словами, множество $\boldsymbol{N}$ разбивается на два класса – $\boldsymbol{N_2}$ и $\boldsymbol{N_1}$.
5. Множество вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ разбивается на бесконечное множество классов чисел, имеющих одинаковые дробные части.
6. Множество студентов вуза разбивается на классы студентов, обучающихся в одной группе.

1.2. Бинарные отношения и отображения

Как уже отмечалось выше, множество A, состоящее из элементов a и b, обозначается $A=\{a,b\}$. Так как $\{a,b\}=\{b,a\}$, то множество $\{a,b\}$ называется *неупорядоченной парой элементов* a и b. С другой стороны, для элементов a и b существует множество (a,b), которое называется *упорядоченной парой элементов* a,b и удовлетворяет свойству $(a,b)=(c,d)$ в том и только том случае, если $a=c$ и $b=d$.

В общем случае для любого натурального числа n и любых элементов $a_1,...,a_n$ существует множество $(a_1,...,a_n)$, которое называется *упорядоченным набором* n *элементов* $a_1,...,a_n$ и удовлетворяет свойству $(a_1,...,a_n)=(b_1,...,b_n)$ в том и только том случае, если $a_1=b_1,\ldots,a_n=b_n$.

Определение. *Декартовым* (или *прямым*) *произведением* n множеств $A_1,...,A_n$ называется множество $A_1\times...\times A_n$, которое состоит из всех таких упорядоченных наборов n элементов $(a_1,...,a_n)$, что $a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n$. Если все множества $A_1,...,A_n$ равны одному и тому же множеству A, то прямое произведение $A\times...\times A$ n множителей A называется n-ой *декартовой степенью* множества A и обозначается символом A^n.

В частности, декартово произведение двух множеств A и B есть множество $A\times B$, которое состоит из всех таких упорядоченных пар (a,b), что $a\in A$ и $b\in B$. Если $A=B$, то декартово произведение $A\times B$ называется *декартовым квадратом* множества A и обозначается символом A^2.

Определение. Подмножества декартова произведения $A_1\times...\times A_n$ множеств $A_1,...,A_n$ называются n*-арными отношениями* между элементами множеств $A_1,...,A_n$ и обозначаются строчными греческими буквами (возможно с индексами): $\rho,\sigma,...,\rho_1,\rho_2,...$.

В частности, при $n=1$ подмножества декартова произведения $A_1\times...\times A_n=A_1$ называются *унарными отношениями* между элементами множества A_1 и при $n=2$ подмножества декартова произведения $A_1\times...\times A_n=A_1\times A_2$ называются *бинарными отношениями* между элементами множеств A_1,A_2.

Для бинарного отношения $\rho\subset A\times B$ *область определения* обозначается символом D_ρ и определяется по формуле:

$$D_\rho=\{a:(a,b)\in\rho \text{ для некоторого } b\in B\}.$$

Для бинарного отношения $\rho \subset A \times B$ *множество значений* обозначается символом E_ρ и определяется по формуле:

$$E_\rho = \{b : (a,b) \in \rho \text{ для некоторого } a \in A\}.$$

Для любого подмножества $X \subset A$ множество

$$\rho(X) = \{b \in B : (x,b) \in \rho \text{ для некоторого } x \in X\}$$

называется *образом* множества X относительно отношения ρ. Образ одноэлементного множества $X = \{a\}$ относительно отношения ρ обозначается символом $\rho(a)$ и называется также *срезом* отношения ρ через элемент a.

Определение. Бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ называется:

– *всюду определенным,* если его область определения $D_\rho = A$;

– *однозначным* (или *частичной функцией, частичным отображением* множества A), если для каждого элемента $a \in D_\rho$ условие $(a,b) \in \rho$ выполняется точно для одного элемента $b \in B$, который называется *значением функции* ρ для элемента a и обозначаеется символом $\rho(a)$;

– *взаимно однозначным,* если оно однозначно и для каждого элемента $b \in E_\rho$ условие $(a,b) \in \rho$ выполняется точно для одного элемента $a \in A$, который называется *прообразом элемента* b для функции ρ и обозначается символом $\rho^{-1}(b)$.

Определение. Всюду определенное и однозначное бинарное отношение $\varphi \subset A \times B$ обозначается символом $\varphi : A \to B$ и называется *отображением* множества A в множество B, или (*всюду определенной*) *функцией* на множестве A со значениями в множестве B.

Определение. Отображение $\varphi : A \to B$ называется:

– *отображением* множества A на множество B (или *сюръекцией*), если его множество значений $E_\varphi = B$;

– *взаимно однозначным отображением* множества A в множество B (или *инъекцией*), если оно является взаимно однозначным бинарным отношением;

– *взаимно однозначным отображением* множества A на множество B (или *биекцией*), если оно является взаимно однозначным отображением A на B;

– *преобразованием* множества A, если $A = B$;

– *перестановкой* множества A, если оно является взаимно однозначным отображением множества A на себя.

Примеры.

1. Пусть A – множество студентов вуза и B – множество студенческих групп этого вуза. Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ принадлежности студентов группе, т.е. для элементов $a \in A,\ b \in B$ условие $(a,b) \in \rho$ означает, что студент a обучается в группе b. Тогда D_ρ есть множество всех таких студентов $a \in A$, которые обучаются по крайней мере в одной группе, и E_ρ есть множество всех таких групп $b \in B$, в которых обучается хотя бы один студент. Ясно, что в этом случае отношение ρ является всюду определенным и однозначным, так как каждый студент $a \in A$ обучается точно в одной из групп вуза, и $E_\rho = B$, так как в каждой группе $b \in B$ обучается хотя бы один студент. Таким образом, ρ – отображение множества A на множество B.
2. Пусть A – множество учеников школы и B – множество кружков центра дополнительного образования. Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ посещаемости учениками кружков, т.е. для элементов $a \in A,\ b \in B$ условие $(a,b) \in \rho$ означает, что ученик a посещает кружок b. Тогда D_ρ есть множество всех таких учеников $a \in A$, которые посещают, по крайней мере, один кружок, и E_ρ есть множество всех таких кружков $b \in B$, которые посещает хотя бы один ученик. В общем случае данное отношение ρ не является всюду определенным, так как некоторые ученики $a \in A$ могут не посещать ни один из кружков, и не является однозначным, так как некоторые ученики могут посещать несколько кружков.
3. Пусть A – множество студентов вуза, обучающихся на 1-м курсе по специальности «Математика», и B – множество дисциплин учебного плана по специальности «Математика». Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times B$ сдачи студентами экзаменов в зимнюю сессию, т.е. для элементов $a \in A,\ b \in B$ условие $(a,b) \in \rho$ означает, что студент a сдал в зимнюю сессию экзамен по специальности b. Тогда D_ρ есть множество всех таких студентов $a \in A$, которые сдали по крайней мере один экзамен в зимнюю сессию, и E_ρ есть множество всех таких дисциплин $b \in B$, экзамен по которым предусмотрен в зимнюю сессию на 1-м курсе учебным планом специальности «Математика» (предполагается, что все экзамены сдаются по крайней мере

одним студентом $a \in A$). В общем случае данное отношение ρ не является всюду определенным, так как некоторые студенты $a \in A$ могут не сдать ни одного экзамена, и не является однозначным, так как учебным планом в сессию может быть предусмотрено несколько экзаменов, которые сданы успевающими студентами.

Основные действия над бинарными отношениями.

1. *Теоретико-множественные операции*: для бинарных отношений, как для множеств, определены действия сравнения, объединения, пересечения и вычитания.

2. *Обращение бинарных отношений*: обратным для бинарного отношения $\rho \subset A \times B$ называется бинарное отношение $\rho^{-1} \subset B \times A$, которое определяется по формуле: $\rho^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in \rho\}$.

3. *Композиция бинарных отношений*: композицией бинарных отношений $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$ называется бинарное отношение $\rho\sigma \subset A \times C$, которое определяется по формуле:

$$\rho\sigma = \{(a,c) : (a,b) \in \rho \text{ и } (b,c) \in \sigma \text{ для некоторого } b \in B\}.$$

В частности, для отображений $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ композиция $\varphi\psi$ является отображением множества *A* в множество *C*, которое каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие единственный элемент $(\varphi\psi)(a) = \psi(\varphi(a))$ множества *C*. Иногда для обозначения композиции отображений используется правосторонняя запись $\psi \circ \varphi$, при которой для любого $a \in A$ выполняется равенство: $(\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a))$.

Композиция $\varphi\psi$ называется также *сложной функцией*, полученной подстановкой функции φ в функцию ψ.

Легко видеть, что для любых бинарных отношений $\rho \subset A \times B$, $\sigma \subset B \times C$ и $\gamma \subset C \times D$ выполняется свойство $(\rho\sigma)\gamma = \rho(\sigma\gamma)$, которое называется *ассоциативностью композиции*.

В случае *A*=*B* подмножества декартова квадрата $A \times A$ называются также *бинарными отношениями* на множестве *A*. Пример бинарного отношения на множестве *A* дает *тождественное отношение* на этом множестве, которое обозначается символом Δ_A и состоит из всех таких упорядоченных пар (a,b), что $a \in A$ и $a = b$. Очевидно, что для любого бинарного отношения ρ на множестве *A* выполняются равенства $\rho\Delta_A = \Delta_A\rho = \rho$.

Определение. Бинарное отношение $\rho \subset A \times A$ называется:

– *рефлексивным*, если $\Delta_A \subset \rho$, т.е. $(a,a) \in \rho$ для любого $a \in A$;

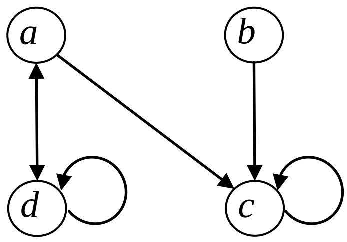
– *симметричным*, если $\rho^{-1} \subset \rho$, т.е. из $(a,b) \in \rho$ следует $(b,a) \in \rho$;

– *антисимметричным*, если $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$, т.е. из $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho$ следует $a=b$;

– *транзитивным*, если $\rho\rho \subset \rho$, т.е. из $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$ следует $(a,c) \in \rho$.

Заданные на конечном множестве бинарные отношения наглядно изображают специальными рисунками – графами. *Графом* бинарного отношения ρ на множестве $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ называется плоская фигура, которая состоит из n выделенных точек, изображающих элементы $a_1,\dots,a_n$ и называющихся *вершинами* графа, и у которой вершины a_i, a_j, удовлетворяющие условию $(a_i, a_j) \in \rho$, соединяются стрелкой, направленной от a_i к a_j и называемой *дугой* графа. При этом вершины a_i и a_j называются соответственно *началом* и *концом* такой дуги. Дуга, у которой начало и конец совпадают, называется *петлей*. В случае, если $(a_i, a_j) \in \rho$ и $(a_j, a_i) \in \rho$, две противоположно направленные стрелки, соединяющие вершины a_i, a_j, изображаются одной стрелкой с двумя противоположными направлениями.

Пример. Граф заданного на множестве $A = \{a,b,c,d\}$ бинарного отношения $\rho = \{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ имеет следующий вид:



Ясно, что у графа рефлексивного бинарного отношения каждая вершина имеет петлю, у графа симметричного бинарного отношения вместе с каждой стрелкой от a_i к a_j имеется обратная стрелка от a_j к a_i, у графа антисимметричного бинарного отношения любые две вершины a_i, a_j могут соединяться только одной стрелкой, у графа транзитивного бинарного отношения вместе с каждой парой стрелок от a_i к a_j и от a_j к a_k имеется стрелка от a_i к a_k.

С целью упрощения вычисления результатов действий над бинарными отношениями используется представление бинарных отношений специальными таблицами, называемыми матрицами. *Матрицей* бинарного отношения ρ между элементами множеств $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ и $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ называется прямоугольная таблица $M(\rho)$, состоящая из m строк, помеченных элементами множества A, и n столбцов, помеченных элементами множества B, в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $[M(\rho)]_{ij}$ из множества $\{0,1\}$, определяемый по правилу:

$$[M(\rho)]_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } (a_i,b_j)\in\rho,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, матрица $M(\rho)$ бинарного отношения ρ имеет вид:

$$M(\rho)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b_1 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{pmatrix} [M(\rho)]_{11} & \cdots & [M(\rho)]_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [M(\rho)]_{m1} & \cdots & [M(\rho)]_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Пример. Матрица заданного на множестве $A=\{a,b,c,d\}$ бинарного отношения $\rho=\{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ имеет следующий вид:

$$M(\rho)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для простоты записи матрицы бинарного отношения $M(\rho)$ обычно явно не указывается разметка ее строк и столбцов.

Легко видеть, что для бинарных отношений $\rho,\sigma\subset A\times B$ выполняются следующие свойства:

1) $\rho\subset\sigma$ в том и только том случае, если $[M(\rho)]_{ij}\le[M(\sigma)]_{ij}$ для всех $1\le i\le m, 1\le j\le n$;

2) элементы матрицы $M(\rho\cap\sigma)$ вычисляются по формуле:

$$[M(\rho\cap\sigma)]_{ij}=[M(\rho)]_{ij}\cdot[M(\sigma)]_{ij};$$

3) элементы матрицы $M(\rho\cup\sigma)$ вычисляются по формуле:

$$[M(\rho\cup\sigma)]_{ij}=\max\{[M(\rho)]_{ij},[M(\sigma)]_{ij}\}.$$

Кроме того, если $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$ для некоторого множества $C = \{c_1, ..., c_p\}$, то элементы матрицы $M(\rho\sigma)$ вычисляются по формуле:

$$[M(\rho\sigma)]_{ij} = \max_{1 \le k \le n} \{[M(\rho)]_{ik} \cdot [M(\sigma)]_{kj}\}.$$

Примеры.

1. Пусть A – множество студентов, сдающих экзамены по алгебре и геометрии. Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset A \times A$ сравнения успеваемости студентов по алгебре, т.е. для элементов $a, b \in A$ условие $(a, b) \in \rho$ означает, что по алгебре успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b. Ясно, что такое отношение транзитивно. Аналогичными свойствами обладает бинарное отношение $\sigma \subset A \times A$ сравнения успеваемости студентов по геометрии, т.е. для элементов $a, b \in A$ условие $(a, b) \in \sigma$ означает, что по геометрии успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b. Рассмотрим отношения $\rho \cap \sigma$ и $\rho \cup \sigma$. По определению для элементов $a, b \in A$ условие $(a, b) \in \rho \cap \sigma$ означает, что успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b как по алгебре, так и по геометрии, и условие $(a, b) \in \rho \cup \sigma$ означает, что успеваемость студента a ниже, чем успеваемость студента b либо по алгебре, либо по геометрии. Легко видеть, что отношение $\rho \cap \sigma$ всегда будет транзитивным, но отношение $\rho \cup \sigma$ транзитивным может не быть, так как возможно наличие таких элементов $a, b, c \in A$, что $(a, b) \in \rho$, $(b, c) \in \sigma$ и $(a, c) \notin \rho \cup \sigma$. Например, это выполняется в случае, если студент a сдал алгебру на «4» и геометрию на «5», студент b сдал алгебру на «5» и геометрию на «3», студент c сдал алгебру на «3» и геометрию на «4». Графы таких отношений ρ, σ для множества $A = \{a, b, c\}$ изображены на рис.1.10, 1.11.

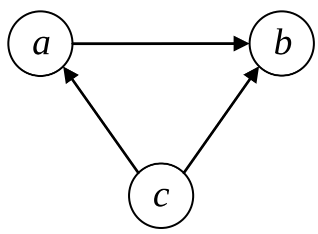


Рис. 1.10.
Граф отношения ρ

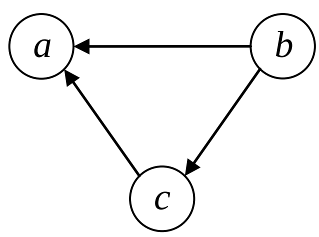


Рис.1. 11.
Граф отношения σ

Графы отношений $\rho \cap \sigma$ и $\rho \cup \sigma$ изображены на рис.1.12,1.13.

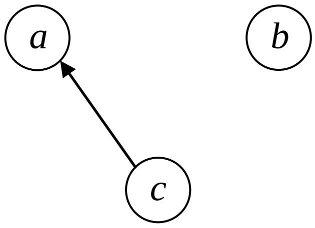


Рис.1.12.
Граф отношения $\rho \cap \sigma$

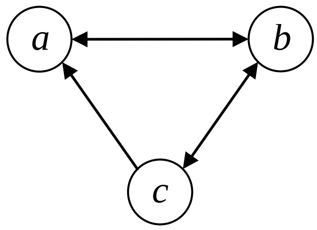


Рис.1.13.
Граф отношения $\rho \cup \sigma$

Очевидно, что данные бинарные отношения представляются матрицами:

$$M(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(\rho \cap \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M(\rho \cup \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть четыре города A, B, C, D обслуживаются двумя авиакомпаниями «Ро» и «Сигма». При этом авиакомпания «Ро» выполняет прямые рейсы: из A в B, из B в C и D, из C в B, и авиакомпания «Сигма» выполняет прямые рейсы: из A в B, из B в C, из D в C. Тогда отношения ρ и σ связи городов из множества $X = \{A, B, C, D\}$ прямыми рейсами соответственно авиакомпаний «Ро» и «Сигма» имеют вид:

$$\rho = \{(A,B),(B,C),(B,D),(C,B)\} \text{ и } \sigma = \{(A,B),(B,C),(D,C)\}.$$

Графы таких отношений ρ, σ изображены на рис.1.14,1.15.

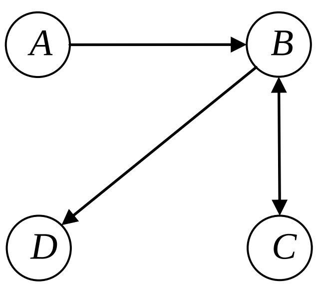


Рис.1.14.
Граф отношения ρ

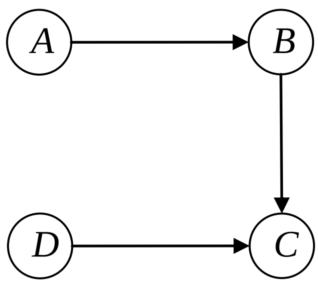


Рис.1.15.
Граф отношения σ

Матрицы таких отношений ρ,σ имеют вид:

$$M(\rho)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ M(\sigma)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

В данном примере ρ^{-1} является отношением связи множества городов $X=\{A,B,C,D\}$ обратными рейсами авиакомпания «Ро» и $\rho\sigma$ является отношением связи этих городов стыковочными рейсами авиакомпаний «Ро» и «Сигма». Графы таких отношений $\rho^{-1},\rho\sigma$ изображены на рис.1.16,1.17.

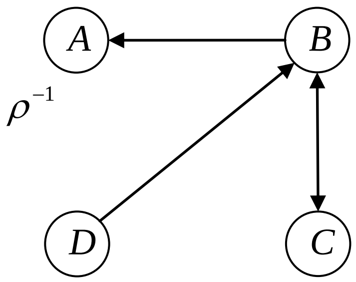


Рис.1.16.
Граф отношения ρ^{-1}

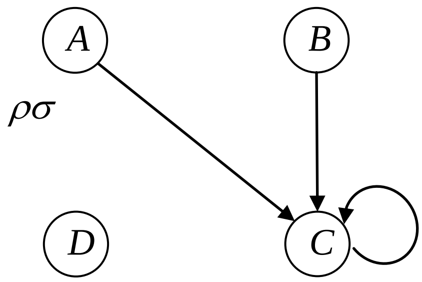


Рис.1.17.
Граф отношения $\rho\sigma$

Матрицы таких отношений $\rho^{-1},\rho\sigma$ имеют вид:

$$M(\rho^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ M(\rho\sigma)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1.3. Отношение эквивалентности и фактор-множество

Определение. Бинарное отношение ε на множестве A называется *отношением эквивалентности* (или просто *эквивалентностью*), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Для обозначения эквивалентности ε используется инфиксная запись с помощью символа $\equiv$, т.е. вместо $(a,b)\in\varepsilon$ пишут $a\equiv b(\varepsilon)$ или просто $a\equiv b$ (читается «a эквивалентно b относительно эквивалентности ε» или просто «a эквивалентно b»).

Срезы $\varepsilon(a)$ отношения эквивалентности ε через элементы $a \in A$ называются *классами эквивалентности* по отношению ε и сокращенно обозначаются символом $[a]$. Множество всех таких классов эквивалентности $\{[a]: a \in A\}$ называется *фактор-множеством* множества A по эквивалентности ε и обозначается символом A/ε.

Отношения эквивалентности характеризуются свойством: для любых элементов $a,b \in A$ классы эквивалентности $[a],[b]$ либо не пересекаются, либо совпадают, т.е. условие $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ влечет $[a]=[b]$. Таким образом, множество всех классов эквивалентности $A/\varepsilon=\{[a]: a \in A\}$ образует семейство непересекающихся подмножеств множества A, объединение которого дает все множество A и которое называется *разбиением множества* A .

Теорема. Непустое семейство $\{A_i : i \in I\}$ подмножеств множества A в том и только том случае является разбиением множества A, если это семейство является фактор-множеством некоторого отношения эквивалентности ε на множестве A.

Определение. Подмножество $T \subset A$ называется *полной системой представителей классов* эквивалентности ε на множестве A, если выполняются следующие два условия:

1)каждый элемент множества A эквивалентен некоторому элементу множества T , т.е. $\varepsilon(T)=A$;

2)различные элементы множества T неэквивалентны между собой, т.е. для любых $t_1,t_2 \in T$ из условия $t_1 \equiv t_2(\varepsilon)$ следует $t_1 = t_2$.

В этом случае классы эквивалентности $[t] \in A/\varepsilon$, содержащие элементы $t \in T$, могут быть отождествлены со своими представителями t и фактор-множество A/ε может быть отождествлено с множеством T.

Примеры.

1. Пусть A – множество шаров в коробке, состоящее из 7 красных, 5 синих и 8 зеленых шаров. Определим на множестве A отношение ε по формуле: для любых шаров $a,b \in A$ условие $a \equiv b(\varepsilon)$ означает, что шары a,b одного цвета. Легко видеть, что отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве A. Ясно, что любой красный шар $a_к \in A$ определяет класс эквивалентности $[a_к]$, состоящий из 7 красных шаров, любой синий шар $a_c \in A$ определяет класс эквивалентности $[a_c]$, состоящий из 5 синих шаров и любой зеле-

ный шар $a_з \in A$ определяет класс эквивалентности $[a_з]$, состоящий из 8 зеленых шаров. Значит, фактор-множество A/ε состоит из трех элементов $[a_к],[a_с],[a_з]$ и может быть отождествлено с *полной системой представителей классов* эквивалентности ε на множестве *A*, состоящей из трех разноцветных шаров $\{a_к, a_с, a_з\}$, или просто с множеством трех цветов $\{красный, синий, зеленый\}$.

2. Пусть A = $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел. Определим на множестве $\boldsymbol{Z}$ отношение ε по формуле: для любых $a,b\in \boldsymbol{Z}$ условие $a \equiv b(\varepsilon)$ означает, что числа a,b имеют одинаковые остатки при делении на число 3, т.е. разность $a–b$ кратна числу 3. Легко видеть, что отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве $\boldsymbol{Z}$. Ясно, что число 0 определяет класс эквивалентности $[0] = \{0,\pm3,\pm6,\ldots\}$, число 1 – класс эквивалентности $[1] = \{1,1\pm 3,1\pm 6,\ldots\} = \{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$, число 2 – класс эквивалентности $[2] = \{2,2\pm 3,2\pm 6,\ldots\} = \{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$. Так как этими множествами исчерпываются все классы данной эквивалентности ε, то фактор-множество $\boldsymbol{Z}/\varepsilon$ состоит из трех элементов $[0],[1],[2]$ и может быть отождествлено с трехэлементным множеством $\{0,1,2\}$.

Определение. *Ядром отображения* $\varphi: A \to B$ называется бинарное отношение $\ker\varphi$ на множестве *A*, которое определяется по формуле:

$$\ker\varphi = \{(a,b) \in A^2 : \varphi(a) = \varphi(b)\}.$$

Легко видеть, что отношение $\ker\varphi$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве *A*. Ясно, что каждый элемент $a \in A$ определяет класс эквивалентности

$$[a] = \{b \in A : \varphi(a) = \varphi(b)\} = \varphi^{-1}(\varphi(a)),$$

который является прообразом элемента $\varphi(a)$ для функции φ. Значит, фактор-множество $A/\ker\varphi$ состоит из элементов $\varphi^{-1}(b)$ для всех $b \in E_\varphi$ и может быть отождествлено с множеством E_φ.

Определение. Пусть ε – отношение эквивалентности на множестве *A*. *Каноническим отображением* эквивалентности ε называется отображение nat ε (от англ. *natural* – канонический) множества *A* на фактор-множество A/ε, которое каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие содержащий его класс эквивалентности $[a]$.

Легко видеть, что выполняется равенство: $\ker \operatorname{nat} \varepsilon = \varepsilon$.

1.4. Отношение порядка и упорядоченное множество

Определение. Бинарное отношение ω на множестве A называется *отношением порядка* (или просто *порядком*), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Для обозначения порядка ω используется инфиксная запись с помощью символа $\leq$: вместо $(a,b)\in\omega$ принято писать $a\leq b(\omega)$ или просто $a\leq b$ (читается «a меньше или равно b относительно порядка ω»).

Множество A с заданным на нем отношением порядка $\leq$ называется *упорядоченным множеством* и обозначается $A=(A,\leq)$ или просто $(A,\leq)$.

Определение. Подмножество X упорядоченного множества $(A,\leq)$ называется *ограниченным сверху,* если найдется такой элемент $a\in A$, что $x\leq a$ для всех $x\in X$. В этом случае элемент a называется *верхней гранью* множества X. Если для множества X существует наименьшая верхняя грань, то она обозначается символом $\sup X$ (читается «супремум множества X») и называется *точной верхней гранью* множества X. В случае, когда $\sup X\in X$, значение $\sup X$ является *наибольшим элементом* множества и обозначается $\max X$.

Определение. Подмножество X упорядоченного множества $(A,\leq)$ называется *ограниченным снизу,* если найдется такой элемент $a\in A$, что $a\leq x$ для всех $x\in X$. В этом случае элемент a называется *нижней гранью* множества X. Если для множества X существует наибольшая нижняя грань, то она обозначается символом $\inf X$ (читается «инфимум множества X») и называется *точной нижней гранью* множества X. В случае, когда $\inf X\in X$, значение $\inf X$ является *наименьшим элементом* множества и обозначается $\min X$.

Если само упорядоченное множество $(A,\leq)$ ограничено сверху (соответственно, снизу), то его верхняя (соответственно, нижняя) грань является *наибольшим* (соответственно, *наименьшим*) *элементом* множества A и обозначается символом 1 (соответственно, 0).

Определение. Порядок $\leq$ на множестве A называется:

– *линейным*, если для любых $a,b\in A$ выполняется $a\leq b$ или $b\leq a$;

– *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент.

Множество, на котором задан линейный порядок, называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью*. Множество, на котором задан полный порядок, называется *вполне упорядоченным множеством.*

1.5. Мощность множества

Мощность является количественной характеристикой множества, которая обобщает на произвольные множества понятие числа элементов конечного множества.

Любое конечное множество $A=\{a_1,...,a_n\}$ количественно характеризуется числом его элементов, которые последовательно нумеруются натуральными числами $1, 2, \ldots, n$. Такая нумерация устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и начальным отрезком натурального ряда $[1; n] = \{1,2, \ldots, n\}$. При этом конечные множества A,B в том и только том случае имеют одинаковую количественную характеристику n, если элементы этих множеств нумеруются элементами одного и того же отрезка $[1; n]$, что очевидно равносильно существованию взаимно однозначного отображения множества A на множество B.

Такой подход к количественной характеристике конечных множеств естественно обобщается на произвольные множества A,B, которые имеют одинаковую количественную характеристику в том и только том случае, если существует взаимно однозначное отображение A на B.

Определение. Множества A,B называют *количественно эквивалентными* или *равномощными* и записывают $A\sim B$, если существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B.

Примеры.

1. Любое конечное n-элементное множество A равномощно начальному отрезку натурального ряда $[1; n] = \{1,2, \ldots, n\}$..
2. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ равномощно как множеству четных чисел $\boldsymbol{N_2}$, так и множеству нечетных чисел $\boldsymbol{N_1}$.
3. Интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ равномощен множеству вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, так как функция $y=\operatorname{tg}x$ взаимно однозначно отображает данный интервал на множество $\boldsymbol{R}$.

4. Любые интервалы $(a;b),(c;d)$ числовой прямой $\boldsymbol{R}$ равномощны между собой, так как линейная функция $y=\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ взаимно однозначно отображает $(a;b)$ на $(c;d)$.

Свойства равномощных множеств:

1. Для любого множества A выполняется условие $A \sim A$.
2. Для любых множеств A,B условие $A\sim B$ влечет $B\sim A$.
3. Для любых множеств A,B,C условия $A\sim B, B\sim C$ влекут $A\sim C$.

Например, из предыдущих примеров 3,4 и свойства 3) следует, что все интервалы числовой прямой $\boldsymbol{R}$ равномощны множеству $\boldsymbol{R}$.

Как уже отмечалось выше, конечное множество A количественно характеризуется тем, что его элементы можно перечислить, располагая их в конечную последовательность $a_1,...,a_n$. Поэтому самое простое бесконечное множество A будет количественно характеризоваться тем, что его элементы можно последовательно перечислить, располагая их в бесконечную последовательность $a_1,...,a_n,...$. Такие множества количественно эквивалентны множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ и называются счетными.

Определение. Бесконечное множество A называется *счетным,* если оно равномощно множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$**,** и *несчетным* в противном случае.

Свойства счетных множеств:

1. Множества, отличающиеся от счетных множеств на конечное число элементов, являются счетными.
2. Объединение конечного или счетного семейства счетных множеств является счетным множеством.
3. Декартово произведение конечного семейства счетных множеств является счетным множеством.
4. Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
5. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Из этих свойств и построения множества рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ следует, что это множество счетное.

Важный пример несчетного множества дает следующий результат.

Теорема Кантора. Отрезок $[0;1]$ числовой прямой $\boldsymbol{R}$ является несчетным множеством.

Из этой теоремы, свойств счетных множеств и предыдущих примеров следует, что все промежутки числовой прямой $\boldsymbol{R}$ равномощны множеству $\boldsymbol{R}$.

Таким образом, любое конечное множество взаимно однозначно отображается на некоторое подмножество множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$, и любое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Это означает, что, с одной стороны, количественная характеристика счетных множеств превосходит любое конечное число и, с другой стороны, среди бесконечных множеств счетные множества имеют самую маленькую количественную характеристику. Более точно количественное сравнение множеств определяется с помощью понятия мощности, которое обобщает понятие числа элементов конечных множеств.

Определение. *Мощностью* множества *A* называется математический объект $|A|$, который соответствует всем равномощным *A* множествам *B*, так что выполняется следующее фундаментальное свойство: $|A| = |B|$ в том и только том случае, если $A \sim B$

Согласно определению мощностью конечного n-элементного множества *A* можно считать число элементов этого множества, т.е. $|A| = n$. Для бесконечных множеств строгое определение мощности дается значительно сложнее и мы не будем здесь на нем останавливаться.

Сравнение мощностей определяется следующим образом.

Определение. Говорят, что мощность множества *A* не превосходит мощности множества *B* и записывают $|A| \leq |B|$, если множество *A* равномощно некоторому подмножеству множества *B*. Если при этом множества *A*,*B* не являются равномощными, то говорят, что мощность множества *A* меньше мощности множества *B* и записывают $|A| < |B|$.

Например, для любого натурального числа n и любого бесконечного множества A выполняется $n < |\boldsymbol{N}| \leq |A|$ и, с другой стороны, $|\boldsymbol{N}| < |\boldsymbol{R}|$.

Определение. Мощность $|\boldsymbol{R}|$ называется *мощностью континуума*. Множества, равномощные множеству $\boldsymbol{R}$, называются *континуальными.*

Из приведенных выше результатов следует, что множество всех иррациональных чисел, а также все промежутки числовой прямой $\boldsymbol{R}$ являются континуальными множествами.

Нетрудно убедиться, что отношение сравнения мощностей рефлексивно и транзитивно, т.е. для любых множеств A,B,C выполняется $|A| \le |A|$ и из условий $|A| \le |B|$, $|B| \le |C|$ следует $|A| \le |C|$. Антисимметричность этого отношения показывает следующий результат.

Теорема Кантора – Бернштейна. Для любых множеств A,B из условий $|A| \le |B|$, $|B| \le |A|$ следует $|A| = |B|$.

Существование бесконечно возрастающей последовательности бесконечных мощностей вытекает из следующей теоремы.

Теорема Кантора. Для любого множества A множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A удовлетворяет условию $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Контрольные вопросы для среза знаний

1) Основные действия над множествами и их свойства.
2) Виды бинарных отношений и отображений.
3) Основные действия над отношениями и их свойства.
4) Отношение эквивалентности и фактор-множество.
5) Отношение порядка и упорядоченные множества.
6) Равномощные множества и их свойства.
7) Счетные множества и их свойства.
8) Множества мощности континуума.
9) Понятие мощности и сравнение мощностей.