Алгоритм Евклида

Любое число N может быть представлено в виде произведения степеней простых чисел (*каноническое* представление числа). Такое представление единственно (с точностью до перестановки сомножителей). Так, число

$$600 = 2^3 3^1 5^2.$$

НОД и НОК

НОК(a, b) обозначают через $[a, b]$.
НОД(a, b) обозначают через (a, b).

Определение НОК И НОД чисел. Алгоритм Евклида

Для произвольного целого числа a и произвольного целого положительного числа b существуют такие числа t и r, что $a = bt + r$, где $0 \le r < b$. Причем такое представление единственное.

Можно показать, что если $b|a$ (b делит a нацело), то $(a, b) = b$, и если $a = bt + r$, то $(a, b) = (b, r)$.

Для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел a и b известен алгоритм Евклида: пусть $a \ge b$. Рассмотрим следующую последовательность равенств:

$$a = bt_1 + r_2,\ 0 < r_2 < b;$$
$$b = r_2 t_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2;$$
$$r_2 = r_3 t_3 + r_4,\ 0 < r_4 < r_3 \ldots$$
$$r_{n-1} = r_n t_n + r_{n+1},\ 0 = r_{n+1}.$$

Поскольку $a \ge b > r_2 > r_3 > \ldots \ge 0$, то алгоритм имеет конечное число шагов. Согласно вышеприведенным свойствам, $(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = \ldots = r_n$. Таким образом, наибольший общий делитель чисел a и b равен последнему ненулевому остатку в последовательности равенств, т. е. r_n. А наименьшее общее кратное a и b равно $[a, b] = ab/(a, b)$.