

5. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Язык графов используется в ряде математических разделов, таких, например, как теория управляющих автоматов, теория алгоритмов, теория цепей Маркова. Широко применяется язык теории графов при описании моделей в экономике, биологии и других областях.

5.1. «Задача о кёнигсбергских мостах»

Первой работой, в которой использовалось название «граф» и давалось его точное определение, была работа Л. Эйлера, которая появилась в 1736 году в трудах Петербургской академии наук. В ней Эйлер предлагает читателю головоломку «Задача о кёнигсбергских мостах». Город Кёнигсберг (ныне Калининград) расположен на двух берегах реки Прегель и двух островах. Районы города соединены мостами (рис. 5.1, а).

Вопрос состоит в том, можно ли, выйдя из одного района города, по одному разу пройти по каждому из мостов и вернуться в исходный район?

Л. Эйлер каждому району сопоставляет вершину, каждому мосту – ребро и уже на языке графов (рис. 5.1, б) формулирует задачу: существует ли циклический маршрут из последовательности ребер, выходящий из любой вершины графа и проходящий по каждому ребру в точности по одному разу?

Попытки найти такой маршрут к успеху не приводят, и тогда Л. Эйлер формулирует и доказывает свою теорему: *Для того чтобы существовал циклический маршрут в графе G , необходимо и достаточно, чтобы граф был связным и степени всех его вершин были четными.*

Теперь мы можем сформулировать определение графа. Графом называется пара (V, E) , где V – множество вершин, E – множество инцидентных им ребер. Под степенью вершины графа понимается число ребер, инцидентных этой вершине (связанных с ней).

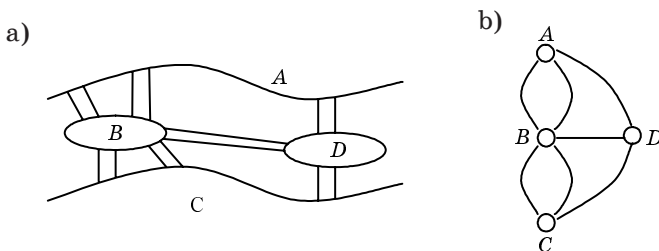


Рис 5.1. Граф переходов по мостам г. Калининграда

5.2. Виды графов

В различных технических приложениях встречаются графы, которые существенно отличаются внешним видом, а следовательно, и своими свойствами.

Основные виды графов показаны на рис. 5.2.

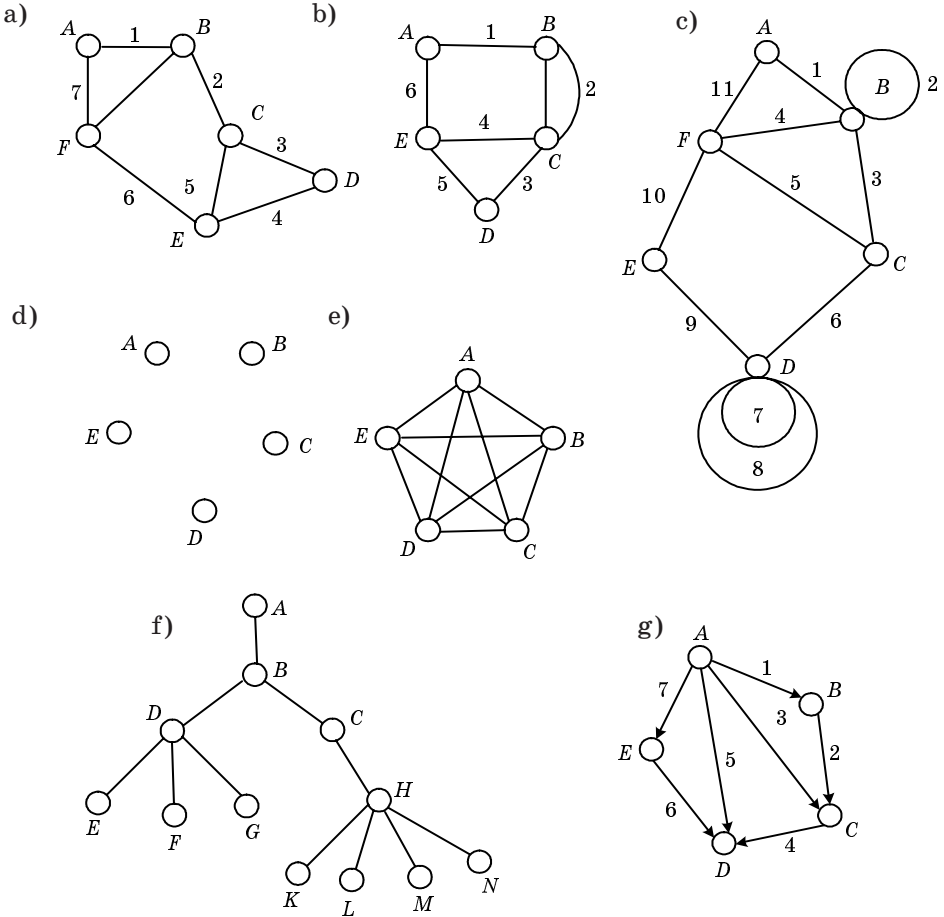


Рис. 5.2. Основные виды графов: *a* – обычный граф; *b* – граф с кратными ребрами; *c* – граф с петлями и вложенными петлями; *d* – «нуль-граф» – граф, не имеющий ребер, но имеющий вершины; *e* – «полный граф» – граф, у которого все вершины связаны со всеми остальными; *f* – граф типа «дерево», т. е. граф, у которого нет внутренних циклов; *g* – направленный граф, у которого переходы из вершины в вершину имеют направления

Встречаются и различные комбинации приведенных графов, например графы с кратными ребрами и петлями, графы с направленными и ненаправленными переходами (ребрами) и т. п.

5.3. Способы задания графов

Для того чтобы использовать задания в виде графов при решении разнообразных оптимизационных задач, применяют различные эквивалентные способы задания. Основным требованием является взаимная однозначность графического изображения и выбранного способа задания. Чаще всего используются следующие виды задания графа:

- матрица инциденции;
- список ребер;
- матрица смежности.

Рассмотрим эти виды задания.

1. Матрица инциденции. Нумеруются все ребра графа (например, арабскими цифрами) и все вершины (например, буквами). Строится матрица, каждой строке которой сопоставляется ребро, а каждому столбцу – вершина. Символами (например, единицами), отмечаются вершины, связанные ребрами. Так, для графов типа *a*, *b* (см. рис. 5.2) матрицы инциденции имеют вид (табл. 5.1, 5.2).

В табл. 5.2 два кратных ребра, связывающие вершины *B* и *C*, заменены одним ребром с двойной связью (обозначены цифрой 2).

В графе *c* (см. рис. 5.2) имеются петли. Для их указания можно использовать любые символы, отличные от 1. Мы использовали символ ^{*}. В вершине *D* имеются две петли. Их можно указывать отдельно (табл. 5.3) либо объединить две петли в одну и отметить каким-либо новым символом, например ^{**}.

При построении матрицы инциденции для направленного графа *d* (см. рис. 5.2) необходимо было указать направление перехода. Для этого в столбце, соответствующем вершине, из которой выходит стрелка,

Таблица 5.1

a)

| Ребро | A | B | C | D | E | F |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | 1 | |
| 5 | | | 1 | | 1 | |
| 6 | | | | | 1 | 1 |
| 7 | 1 | | | | | 1 |
| 8 | | 1 | | | | 1 |

Таблица 5.2

b)

| Ребро | A | B | C | D | E |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | |
| 2 | | 2 | 2 | | |
| 3 | | | 1 | 1 | |
| 4 | | | 1 | | 1 |
| 5 | | | | 1 | 1 |
| 6 | 1 | | | | 1 |

Таблица 5.3

с)

| Ребро | A | B | C | D | E | F |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | | * | | | | |
| 3 | | 1 | 1 | | | |
| 4 | | 1 | | | | 1 |
| 5 | | | 1 | | | 1 |
| 6 | | | 1 | 1 | | |
| 7 | | | | * | | |
| 8 | | | | * | | |
| 9 | | | | 1 | 1 | |
| 10 | | | | | 1 | 1 |
| 11 | 1 | | | | | 1 |

Таблица 5.4

д)

| Ребро | A | B | C | D | E |
|-------|----|----|----|----|----|
| 1 | -1 | 1 | | | |
| 2 | | -1 | 1 | | |
| 3 | -1 | | 1 | | |
| 4 | | | -1 | 1 | |
| 5 | 1 | | | -1 | |
| 6 | | | | 1 | -1 |
| 7 | -1 | | | | 1 |

мы писали -1 (источник), а в столбце, соответствующем вершине, в которую входит стрелка, 1 (сток) (табл. 5.4).

Для остальных графов читателю предлагается самостоятельно нарисовать матрицы инциденции.

2. Список ребер. Этот список является сокращением матрицы инциденции. Число строк, как и ранее, равно числу ребер графа, а столбцов только два. В первом указываются вершины, из которых выходят ребра, а во втором – в которые входят. Приведем списки ребер для графов типа a, b, c, d (см. рис. 5.2) (табл. 5.5–5.8).

3. Матрица смежности. Матрица строится следующим образом. Каждой строке и каждому столбцу соответствует вершина графа. На пересечении строки и столбца ставятся символы, например 1 , если эти вершины связаны одним ребром, 2 – если двумя и т. д. Для первых трех видов графов a, b, c (см. рис. 5.2) матрицы смежности имеют вид (табл. 5.9–5.11).

Таблица 5.5

а)

| Ребро | Вершина | |
|-------|---------|---|
| 1 | A | B |
| 2 | B | C |
| 3 | C | D |
| 4 | D | E |
| 5 | C | E |
| 6 | E | F |
| 7 | A | F |
| 8 | B | F |

Таблица 5.6

б)

| Ребро | Вершина | |
|-------|---------|----|
| 1 | A | B |
| 2 | B2 | C2 |
| 3 | C | D |
| 4 | E | C |
| 5 | D | E |
| 6 | A | E |

Таблица 5.7

с)

| Ребро | Вершина | |
|-------|----------|----------|
| 1 | <i>A</i> | <i>B</i> |
| 2 | <i>B</i> | <i>B</i> |
| 3 | <i>B</i> | <i>C</i> |
| 4 | <i>B</i> | <i>F</i> |
| 5 | <i>C</i> | <i>F</i> |
| 6 | <i>C</i> | <i>D</i> |
| 7 | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 8 | <i>D</i> | <i>D</i> |
| 9 | <i>D</i> | <i>E</i> |
| 10 | <i>E</i> | <i>F</i> |
| 11 | <i>F</i> | <i>A</i> |

Таблица 5.8

д)

| Ребро | Источник | Сток |
|-------|----------|----------|
| 1 | <i>A</i> | <i>B</i> |
| 2 | <i>B</i> | <i>C</i> |
| 3 | <i>A</i> | <i>C</i> |
| 4 | <i>C</i> | <i>D</i> |
| 5 | <i>D</i> | <i>A</i> |
| 6 | <i>E</i> | <i>D</i> |
| 7 | <i>A</i> | <i>E</i> |

Очевидно, что для ненаправленных графов без петель *a*, *b* (см. рис. 5.2) матрица смежности симметрична относительно главной диагонали (табл. 5.9, 5.10). Если исключить избыточную информацию (главную диагональ и верхнюю правую половину матрицы), то получим треугольную таблицу.

Таблица 5.9

а)

| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | | 1 | | | | 1 |
| <i>B</i> | 1 | | 1 | | | 1 |
| <i>C</i> | | 1 | | 1 | 1 | |
| <i>D</i> | | | 1 | | 1 | |
| <i>E</i> | | | 1 | 1 | | 1 |
| <i>F</i> | 1 | 1 | | | 1 | |

Таблица 5.10

б)

| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | | 1 | | | 1 |
| <i>B</i> | 1 | | 3 | | |
| <i>C</i> | | 3 | | 1 | 1 |
| <i>D</i> | | | 1 | | 1 |
| <i>E</i> | 1 | | 1 | 1 | |

Таблица 5.11

с)

| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | | 1 | | | | 1 |
| <i>B</i> | 1 | 1 | 1 | | | 1 |
| <i>C</i> | | 1 | | 1 | | 1 |
| <i>D</i> | | | 1 | 2 | 1 | |
| <i>E</i> | | | | 1 | | 1 |
| <i>F</i> | 1 | 1 | 1 | | 1 | |

Таблица 5.12

д)

| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | | 1 | 1 | | 1 |
| <i>B</i> | | | 1 | | |
| <i>C</i> | | | | 1 | |
| <i>D</i> | 1 | | | | |
| <i>E</i> | | | | 1 | |

При построении матрицы смежности для направленного графа d (см. рис. 5.2) каждой строке сопоставляется вершина, из которой выходит стрелка, а каждому столбцу – вершина, в которую входит стрелка (табл. 5.12). Матрицы смежности для направленного графа не являются симметричными относительно главной диагонали, и поэтому они не сжимаются до треугольных таблиц.

5.4. Понятие о плоских графах – «Задача о трех домах и трех колодцах»

Рассмотрим простую головоломку, которая называется «Задача о трех домах и трех колодцах». Три друга получили садовые участки и начали строить дома. Сначала выкопали три колодца и ходили к любому из них. Когда же дома были построены, приехали домочадцы и, как часто бывает, перессорились. И потребовали, чтобы хозяева сделали дорожки так, чтобы от любого дома можно было бы дойти до любого колодца, но дорожки не должны были пересекаться, чтобы домочадцы не встречались на пути к колодцам. Можно ли удовлетворить требования домочадцев?

Все попытки удовлетворить требования домочадцев заканчиваются неудачно (рис. 5.3). Почему? Потому, что этот граф невозможно на плоскости изобразить так, чтобы его ребра не пересекались. Этот граф не является плоским.

Вопрос о том, является ли граф плоским или нет – исключительно важен для технологии интегральных микросхем. Ведь каждая микросхема представляет собой некоторый граф, в котором имеются контактные площадки (вершины) и связи (ребра).

Задача может ставиться так: имеется новая схема (например, процессора). На какое минимальное число фрагментов ее нужно разбить, чтобы каждый фрагмент мог быть представлен плоским графом?

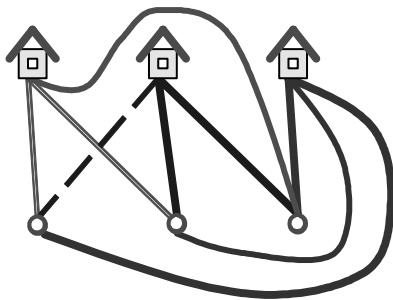


Рис. 5.3. «Задача о трех домах и трех колодцах»

5.5. Теорема Жордана о плоских графах

Вопрос о том, является ли граф плоским или нет и какие существуют необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был плоским, волновали математиков давно. Первые работы на эту тему принадлежат Жордану. Им была доказана теорема, существо которой сводится к следующему. Пусть на плоскости имеется некоторая непрерывная замкнутая линия L . Эта линия делит всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю (рис. 5.4). Пусть на линии L имеются три пары точек, которые нужно соединить так: a с b , c с d , e с f . Соединить a с b можно, например, по внутренней области линией L_1 , c с d – по внешней области линией L_2 , тогда линия L_3 , соединяющая e с f , обязательно пересечет либо L_1 , либо L_2 .

5.6. Определение числа ребер в графе

Число ребер графа можно определять различными способами. Наиболее простой способ – прямой пересчет ребер. Другой способ использует понятие степеней вершин графа. Рассмотрим граф типа a (см. рис. 5.2) и подсчитаем степени ρ его вершин. Получим: $\rho(A) = 2$; $\rho(B) = 3$; $\rho(C) = 3$; $\rho(D) = 2$; $\rho(E) = 3$; $\rho(F) = 3$. Если просуммировать степени всех вершин и разделить это число пополам, получим количество ребер графа.

Так, для графа типа a имеем $P = \frac{2+3+3+2+3+3}{2} = 8$.

В общем случае, пусть вершины графа обозначены $A_i (i = 1 \div n)$, тогда число ребер графа

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n \rho(A_i)}{2}. \quad (5.1)$$

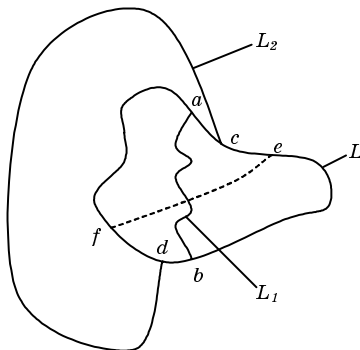


Рис. 5.4. Пояснение к теореме Жордана

Формула (5.1) для определения числа ребер графа применима как для графов с кратными ребрами, так и для графов с петлями. Следует только правильно подсчитывать степени вершин. Для этого нужно вокруг вершины провести маленькую окружность так, чтобы в нее не попала полностью петля. После чего подсчитать количество ребер, проходящих в этой окружности к вершине. Так, для вершины B графа c (см. рис. 5.2) получаем $\rho(B) = 5$, а для вершины D того же графа $\rho(D) = 6$. Число ребер этого графа $P = \frac{2+5+3+6+2+4}{2} = 11$, что соответствует значению, полученному прямым пересчетом.

5.7. Теорема о количестве вершин нечетной степени

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать очевидную теорему о степенях вершин в графе: *В любом графе количество вершин нечетной степени четно.*

Во всех примерах графов это действительно так. Если бы был найден граф, у которого количество вершин нечетной степени было бы нечетным, то из формулы (5.1) следовало бы, что число ребер этого графа было бы нецелым!

5.8. Графы типа «дерево» — основные соотношения

В задачах сортировки используется особый вид графов — графы типа «дерево» (см. рис. 5.2, f). Особенностью этих графов является то, что в них нет внутренних циклов.

Подсчитаем число ребер и вершин графа f : $P = 11$, $V = 12$. Легко показать, что в любом графе типа «дерево» число вершин на единицу больше числа ребер. Действительно, возьмем самый простой граф типа «дерево». Он будет содержать 2 вершины и одно ребро. Будем теперь произвольно наращивать этот граф, добавляя ребра и вершины. Число добавленных ребер будет равно числу добавленных вершин. Следовательно, в графе типа «дерево»

$$V - P = 1. \quad (5.2)$$

5.9. Цикломатическое число графа

Рассмотрим произвольный граф, например граф c на рис. 5.2. В этом графе $P = 11$, $V = 6$. Для того чтобы превратить этот граф в граф типа «дерево», необходимо вычеркнуть 6 ребер. В этом случае будет справедливо соотношение (5.2).

Количество ребер графа, которые необходимо убрать, чтобы превратить его в граф типа «дерево», называется цикломатическим числом графа, т. е.

$$\gamma = P - B + 1. \quad (5.3)$$

Для графа типа «дерево» $\gamma = 0$.

5.10. «Задача о наименованиях и переименованиях»

Справедливо утверждается*, что в любом городе мира наименование и переименование улиц и площадей является любимым занятием специального отдела мэрии. Особенно активно проводились переименования в период с 17-го по 90-е годы XX века в Советском Союзе. Может показаться странным, но переименования российских городов начались не с имен Ленина и Сталина, а с Троцкого. Российский город Гатчина получил новое имя Троцк. Следующий город получил имя Зиновьевск. И только затем небольшому поселку присвоили имя Сталино. Зато потом каждый член Политбюро получал по городу своего имени. Не повезло Рыбинску, который побывал и Андроповым, и Щербаковым, а затем опять стал Рыбинском. В атласе конца XX века 36 крупных городов мира носили имена, связанные с Лениным: Ленинград, Ленинабад, Ленинакан, Ленинварош и т. д.

Самым, пожалуй, курьезным случаем можно считать переименование старинного русского города Тверь, ровесника Москвы, в город Калинин. Указ об этом переименовании подписал «всесоюзный староста» М. И. Калинин в день своего рождения (своеобразный подарок себе ко дню рождения). В начале перестройки многим городам, улицам и площадям справедливо начали возвращать их прежние имена.

Мы тоже займемся присвоением улицам и площадям имен великих современников.

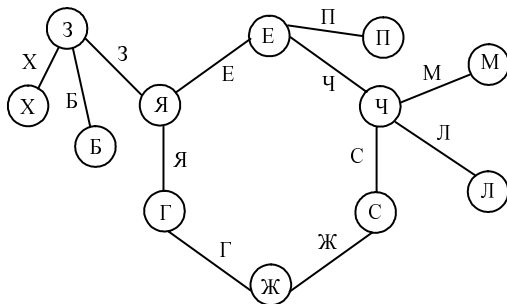


Рис. 5.5. План города демократов — цикл с ветвями в виде деревьев, вырастающих из вершин

* Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965. 174 с.

Пусть, например, бывшие пролетарии, а ныне демократы первой волны решили построить город и увековечить свои красивые фамилии. Пусть также принято условие, что каждый получает по улице и по площади, причем, улица Ельцина должна заканчиваться площадью Ельцина, улица Чубайса должна заканчиваться площадью Чубайса и т. д. План города демократов будет иметь такой вид (рис. 5.5).

Поскольку в этом городе число улиц (ребер) равно числу площадей (вершин), то цикломатическое число графа, соответствующего плану города демократов первой волны, равно $\gamma = 1$.

5.11. «Задача коммивояжера» и «Задача о минимальной сети дорог»

Во все времена математики пытались заработать на своих уникальных знаниях. Однако, похоже, что это удалось только венгерскому математику Рубику.

В 1859 году ирландский математик сэр Уильям Роуэн Гамильтон изготовил и пытался продавать новую головоломку. Он взял один из правильных многогранников (додекаэдр), в каждую вершину вбил маленькие гвоздики, а к одному гвоздю привязал веревку. Задача состояла в том, чтобы, наматывая веревку на гвоздики, образовать цикл такой, чтобы веревка (путь) прошла бы через все вершины в точности по одному разу. К сожалению, обыватели не заинтересовались головоломкой сэра Гамильтона, зато ее запомнили математики. Со временем, после некоторого изменения условий, эта головоломка превратилась в классическую теперь «Задачу коммивояжера», которая формулируется так. Имеется n городов и задана таблица попарных расстояний между ними. Найти циклический путь обхода по одному разу всех городов, при этом путь должен иметь минимально возможную длину. В более общих постановках на паре вершин задается значение некоторой функции и требуется найти цикл, при котором общее значение функции минимизируется или максимизируется.

В принципе, «Задача коммивояжера» была известна и российским корабейникам. Они обходили деревни и, как правило (если верить Некрасову), никогда не заходили в одну и ту же деревню дважды. А минимизировали они либо время обхода всех деревень, либо путь, либо количество стоптанных лаптей.

«Задача коммивояжера» очень похожа по постановке на задачу Эйлера о цикле в графе. Однако задача Эйлера была поставлена и блестяще решена Эйлером в его первой работе. Аналитическое решение «Задачи коммивояжера» до сих пор не найдено, хотя имеются достаточно хорошие решения, основанные на упорядоченном переборе (например,

метод Кенига). Для крупных городов США перебором найден цикл облета этих городов с минимизацией времени облета.

Известна еще одна задача, очень похожая по постановке на две предыдущие. Эта задача больше подходит к проблемам российской действительности. Называется она «Задача о минимальной сети дорог».

Путешествуя со студенческими строительными отрядами по Ленинградской области, авторы встречали некоторые населенные пункты в принципе недоступные большую часть года. Так, между городами Тихвином и Будогощью имеется некая деревушка, в которую можно пробраться по тропинкам через болота летом, если месяц не было дождей, или зимой, если долго стояли морозы. Да и то только на гусеничном тракторе. В остальное время деревню можно посетить только пешком, пробираясь с кочки на кочку через болота. Однако на большинстве карт дорога между Будогощью и Тихвином показана как дорога республиканского значения. Говорят, что эта ошибка сыграла хорошую службу во время Великой Отечественной войны. Немцы отступали от Тихвина в сторону Будогощи. Увидев на карте дорогу республиканского значения, решили, что это дорога с хорошим покрытием, и взяли всю тяжелую технику с собой. Между двумя городами вся эта техника навечно завязла в болотах.

Изложенные соображения приводят к новой постановке задачи для российской действительности. Имеется n городов и заданы попарные расстояния между ними. Построить граф типа «дерево» минимальной суммарной длины (рис. 5.6). В отличие от предыдущих двух задач алгоритм построения минимальной сети дорог прост и всегда приводит к решению. Для этого нужно из таблицы попарных расстояний выбрать минимальное расстояние и провести эту дорогу. Затем перейти к рассмотрению следующего минимального расстояния. Если имеются два или более минимальных расстояния, можно брать любое. На каждом

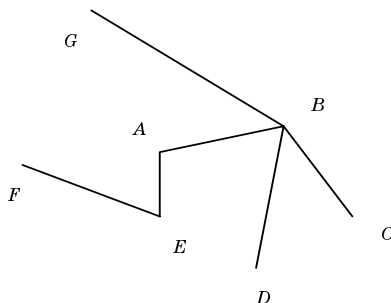


Рис 5.6. Минимальная сеть дорог

шаге необходимо следить, чтобы не образовался цикл. Как только все вершины будут задействованы, алгоритм завершен. Минимальный общий путь равен сумме всех выбранных путей.

Пусть, например, имеется 7 (*A, B, C, D, E, F, G*) городов и таблица минимальных расстояний.

Таблица 5.13

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>B</i> | 18 | | | | | |
| <i>C</i> | 24 | 19 | | | | |
| <i>D</i> | 36 | 25 | 24 | | | |
| <i>E</i> | 15 | 21 | 33 | 18 | | |
| <i>F</i> | 22 | 31 | 55 | 27 | 19 | |
| <i>G</i> | 28 | 17 | 41 | 19 | 29 | 22 |
| | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> |

Из табл. 5.13 минимальное расстояние равно 15 (*A–E*). Соединим эти вершины. Следующее минимальное расстояние 17 (*B–G*). Соединим эти вершины. Следующее минимальное расстояние 18 (*A–B* и *E–G*). Мы можем выбрать только одно (любое) соединение, иначе образуется цикл. Возьмем, например, *A–B*, а *E–G* исключим из рассмотрения. Следующим минимальным расстоянием будет 19 (*E–F* и *C–B*). В данном случае мы можем соединить обе пары вершин. Очередное минимальное расстояние 21 (*B–E*) проводить нельзя, так как образуется цикл. Следующее минимальное расстояние 22 (*A–F* *F–G*) также следует пропустить (любая из этих пар образует цикл. Расстояние 24 (*A–C*) также неприемлемо, расстояние 25 (*B–D*) завершает построение минимальной сети дорог. Суммарная длина всех построенных дорог равна $L = 15 + 17 + 18 + 19 + 19 + 25 = 113$. Решения меньшей длины не существует.

5.12. Построение турнирной таблицы

Для проведения соревнований используются турнирные таблицы. В этих таблицах отмечается, какое количество туров нужно сыграть в турнире и какие команды или игроки должны играть в каждом туре. При этом количество туров должно быть минимально возможным, а в каждом туре должны быть заняты все или почти все игроки.

Приведем метод построения турнирной таблицы при условии, что число команд четное. Если число команд нечетное, то вводится фиктивный игрок, который не играет ни в одном туре и вместе с ним отдыхает его соперник по туру. Пусть число игроков равно *N*, при этом бу-

Таблица 5.14

| | | | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|---|---|---|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | . | . | . | . | N |
| 2 | 2/1 | N | $N-1$ | $N-2$ | $N-3$ | . | . | . | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 3/1 | 2 | N | $N-1$ | . | . | . | 6 | 5 |
| 4 | 6 | 5 | 4/1 | 3 | 2 | N | . | . | 8 | 7 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| $1/2N+1$ | N | $N-1$ | $N-2$ | . | . | . | . | . | 3 | 2 |
| $1/2N+2$ | 3 | 2 | N | $N-1$ | | | | | | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| N | $N-1$ | $N-2$ | . | . | . | . | . | . | 2 | $N/1$ |

Таблица 5.15

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 6 | 5 | 1 | 3 | 2 | 8 | 7 |
| 5 | 8 | 7 | 6 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 6 | 3 | 2 | 8 | 7 | 1 | 5 | 4 |
| 7 | 5 | 4 | 3 | 2 | 8 | 1 | 6 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

дем считать, что N – четное. Перенумеруем игроков от 1 до N и выпишем их номера так, как указано в табл. 5.14. Затем подчеркнем номера на диагонали и заменим их на 1. В таблице это показано так: 2/1, 3/1, ..., $N/1$.

Из построенной таблицы видно, что в первом туре играют 1-й и 2-й игроки, 3-й и N -й и т. д. Число туров равно $N-1$ (минимально возможное), при этом в каждом туре заняты все участники.

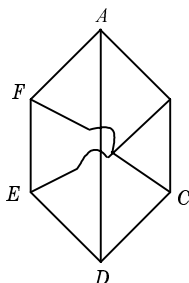
Построим, например, турнирную таблицу для 7 игроков. Добавим фиктивного игрока для того, чтобы число участников стало четным. Таблица для 8 участников будет выглядеть так (табл. 5.15)

В первой строке построенной таблицы перечислены номера всех участников. В первом туре играют пары из 1-й и 2-й строк. Во втором туре играют пары из 1-й и 3-й строк и т. д. Один из игроков, например с номером 8, является фиктивным.

5.13. Теорема Куратовского о плоских графах

Плоским графам посвящено очень большое число работ. Попытки сформулировать необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был плоским, неоднократно предпринимались. Наиболее сильным результатом является теорема польского математика Куратовского. Прежде чем сформулировать его теорему, сделаем несколько предварительных замечаний.

Граф типа А



Граф типа В

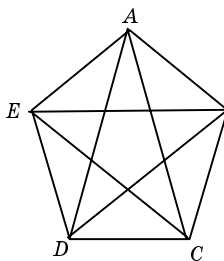


Рис. 5.7. Примеры неплоских графов с минимальным числом вершин

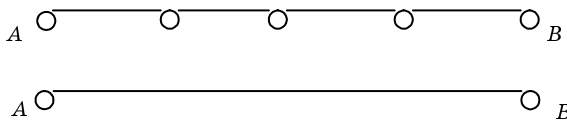


Рис. 5.8. Сжатие графа

На рис. 5.7 приведены два графа, которые не являются плоскими. Назовем их графами типа А и типа В.

Для произвольных графов введем операцию сжатия на графе. Пусть между двумя вершинами графа имеется путь, проходящий только через вершины степени 2 (рис. 5.8)

Заменим этот путь одним ребром, соединяющим А с В. Такая процедура называется сжатием на графе. Куратовский показал, что процедура сжатия на графе не меняет свойство графа быть плоским, то есть: если граф был плоским, то после сжатия он останется плоским, а если был не плоским, то останется не плоским.

Теорема Куратовского. Для того чтобы граф G был плоским, необходимо и достаточно, чтобы после всех операций сжатия на графе внутри графа G не было бы графов типа А или типа В.

5.14. Проецирование графа на сферу

Для плоских графов сформулировано несколько очень интересных теорем, например такая.

Теорема о прямых ребрах плоского графа. Любой плоский граф может быть расположен на плоскости так, чтобы все его ребра были прямыми.

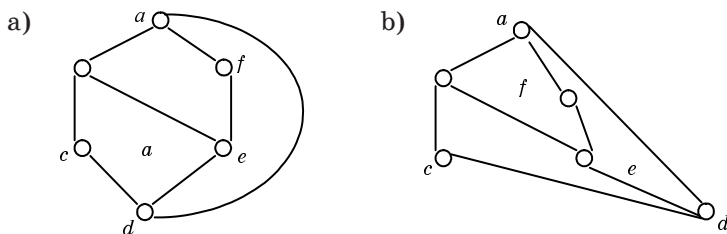


Рис. 5.9. Пояснение к теореме о прямых ребрах плоского графа

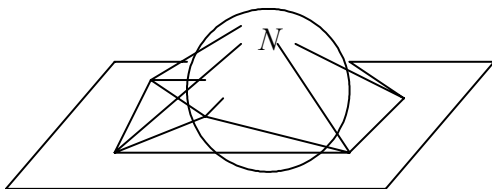


Рис. 5.10. Проецирование плоского графа на сферу

Возьмем какой-нибудь плоский граф. Например, если взять неплоский граф типа A и исключить из него одно ребро, он станет плоским (рис. 5.9, a).

Не меняя обозначений вершин и связей между ними, можно добиться того, чтобы все ребра стали прямыми (рис. 5.9, b).

Любой плоский граф может быть спроецирован на сферу.

Для проецирования плоского графа на сферу возьмем плоскость и на ней изобразим плоский граф G . Примерно в центре этого графа установим сферу и соединим все вершины плоского графа G с северным полюсом сферы N (рис. 5.10).

Отметим точки пересечения этих линий со сферой и соединим их между собой. Получим граф на сфере. Если через выделенные точки провести плоскости, мы получим некоторую объемную фигуру, вписанную в сферу. Таким образом, каждому плоскому графу будет соответствовать некоторый многогранник. Обратным проецированием мы каждому многограннику, вписанному в сферу, можем сопоставить некоторый плоский граф. Последняя процедура используется в картографии.

5.15. Теорема Эйлера о соотношении числа вершин, ребер и граней плоского графа

Рассмотрим некоторый плоский граф (рис. 5.11).

Назовем замкнутую область плоского графа, ограниченную ребрами и не имеющую внутри себя никаких фрагментов графа, *гранью*. Гра-

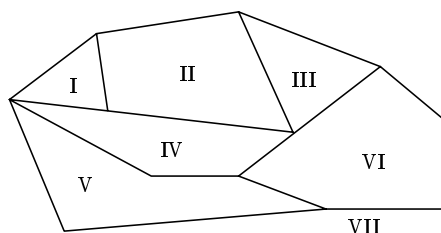


Рис. 5.11. Плоский граф с отмеченными гранями

ни плоского графа будет соответствовать грань многогранника, построенного путем проецирования плоского графа на сферу.

Подсчитаем число ребер, вершин и граней плоского графа: $P = 17$, $B = 12$, $\Gamma = 7$.

Эйлер доказал, что в любом плоском графе (так же, как и в любом многограннике) число вершин минус число ребер, плюс число граней равняется 2, т. е.

$$B - P + \Gamma = 2. \quad (5.3)$$

Для плоского графа, изображенного на рис. 5.11, имеем $12 - 17 + 7 = 2$.

Интересно, что формула (5.3) справедлива и для графов с кратными ребрами, с петлями и с вложенными петлями (рис. 5.12). В этом графе имеются грани степени 1, т. е. ограниченные только одним ребром.

Таким образом, теорема Эйлера о плоских графах справедлива для любых плоских графов.

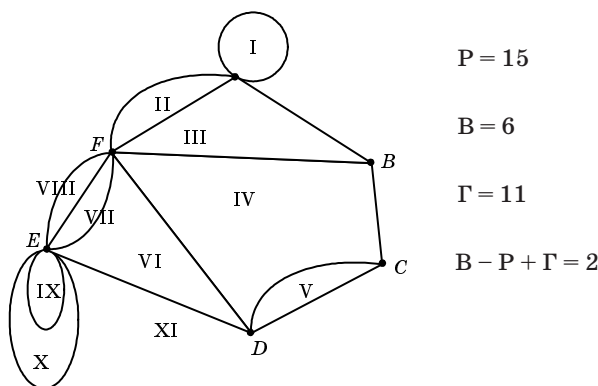


Рис. 5.12. Произвольный граф

5.16. Правильные многогранники

Для любого плоского графа число ребер можно сосчитать третьим способом – учитывая число ребер, ограничивающих каждую грань.

Пусть $\varphi(k)$ – количество граней степени k . Под гранью степени k будем понимать грань, ограниченную ровно k ребрами. Тогда число ребер графа можно определить по формуле

$$P = 1/2(\varphi(2) \cdot 2 + \varphi(3) \cdot 3 + \varphi(4) \cdot 4 + \varphi(5) \cdot 5 + \dots). \quad (5.4)$$

Так, для графа рис. 5.11 $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 2$; $\varphi(5) = 2$; $\varphi(6) = 0$; $\varphi(7) = 0$; $\varphi(8) = 1$; $\varphi(9) = 0$; ... Поэтому $P = 1/2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 8) = 16$. Прямой пересчет дает это же значение.

Формула (5.4) пригодна и для графов с кратными ребрами и вложенными петлями. Так, для графа рис. 5.12 получаем: $\varphi(1) = 2$; $\varphi(2) = 5$; $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 1$; $\varphi(8) = 1$. Тогда $P = 1/2(2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8) = 15$.

Возьмем произвольный плоский граф G и будем строить двойственный ему граф G^* по следующему правилу. В центре каждой грани плоского графа G выберем точку и назовем ее вершиной двойственного графа G^* . Соединим все новые вершины ребрами так, чтобы каждое ребро двойственного графа G^* пересекало в точности одно ребро (общее для двух граней) исходного графа G .

Результаты сравнения характеристик исходного графа G и двойственного ему графа G^* поместим в табл. 5.16.

Определение 1. *Граф G , у которого все степени вершин равны ρ , называется однородным.*

Таблица 5.16

| Параметры графа | Исходный граф G | Двойственный граф G^* |
|-----------------|-------------------|-------------------------|
| Число вершин | V | $V^* = \Gamma$ |
| Число ребер | P | $P^* = P$ |
| Число граней | Γ | $\Gamma^* = V$ |

Определение 2. *Однородный граф G , у которого двойственный ему граф G^* тоже однороден, называется правильным графом. Правильным графам соответствуют правильные многогранники.*

Таблица 5.17

| ρ | ρ^* | V | P | Γ | Тип правильного многогранника |
|--------|----------|-----|-----|----------|-------------------------------|
| 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | Тетраэдр |
| 3 | 4 | 8 | 12 | 6 | Куб |
| 3 | 5 | 20 | 30 | 12 | Додекаэдр |
| 4 | 3 | 6 | 12 | 8 | Октаэдр |
| 5 | 3 | 12 | 30 | 20 | Икосаэдр |

Рассмотрение свойств правильных графов и, соответственно, правильных многогранников приводит к табл. 5.17.

Поскольку каждому многограннику соответствует плоский граф и каждый плоский граф может быть нарисован на плоскости так, чтобы все его ребра были прямыми, приведем

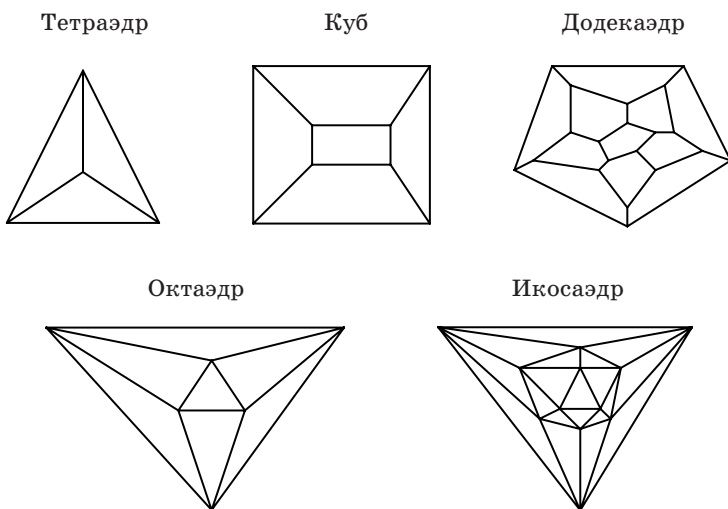


Рис. 5.13. Правильные графы (многогранники)

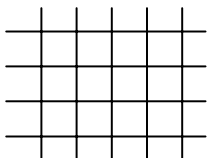
плоские изображения правильных графов, которым соответствуют правильные многогранники (рис. 5.13).

5.17. Мозаики

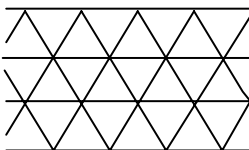
Мозаикой называют правильные бесконечные графы. Можно показать, что существует только три вида мозаик (рис. 5.14), других мозаик нет.

Двойственным бесконечным графом к мозаике на основе треугольников является мозаика на основе шестиугольников и наоборот. Двойственным бесконечным графом к мозаике на основе прямоугольников является сама эта мозаика.

Мозаика на основе
прямоугольника



Мозаика на основе
треугольника



Мозаика на основе
шестиугольника

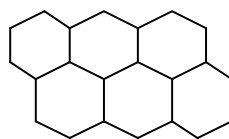


Рис 5.14. Мозаики

5.18. «Задача о четырех красках»

Каждой политической или административной карте можно сопоставить некоторый многоугольный граф. Обычно такие карты раскрашиваются так, чтобы граничащие друг с другом два государства были раскрашены в разные цвета. Поскольку форма ребра значения не имеет, то плоские графы, соответствующих фрагментам таких карт, можно представить как графы с прямыми ребрами. Так, например, граф, изображенный на рис. 5.11, мог бы соответствовать некоторому фрагменту политической карты региона.

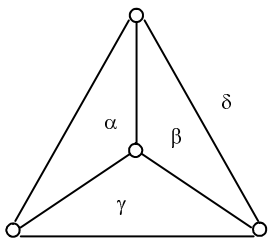


Рис. 5.15. Рисунок, поясняющий необходимость 4-х красок для раскрашивания карт

Существует мнение, что любую политическую карту, так же, как и любой плоский граф, можно раскрасить с использованием 4-х красок, при этом никакие две соседние страны (или никакие две соседние грани) не будут окрашены в один цвет. Эта задача называется «Задача о четырех красках». Достаточно просто показать, что четыре краски необходимы для раскрашивания произвольного графа. Пусть, например, имеется фрагмент графа (рис 5.15).

Пусть некоторая область раскрашена в цвет α , тогда соседняя с ней область должна будет раскрашиваться в другой цвет, например β , третья область, соседняя и с первой и со второй, должна будет раскрашиваться в третий цвет γ . Однако есть еще четвертая область, которая граничит со всеми тремя областями, и ее нужно раскрасить в четвертый цвет δ . Таким образом, четыре краски необходимы для раскрашивания произвольной карты. Но достаточно ли их? Несложно доказывается, что пяти красок достаточно для раскрашивания любой карты, однако не найдено ни одного графа, для раскрашивания которого потребовалось бы использовать пять красок. Похоже, что четыре краски и необходимы, и достаточны для раскрашивания любого графа, а следовательно, и любой политической карты.

5.19. Теорема о направленных графах

Результаты турнира, в котором отсутствуют ничьи, можно представить в виде направленного графа, в котором каждой вершине соответствует команда, а направление стрелки показывает, какая команда выиграла. Пусть, например, в турнире участвуют 7 команд, а результаты игр выглядят так, как это показано на рис. 5.16.

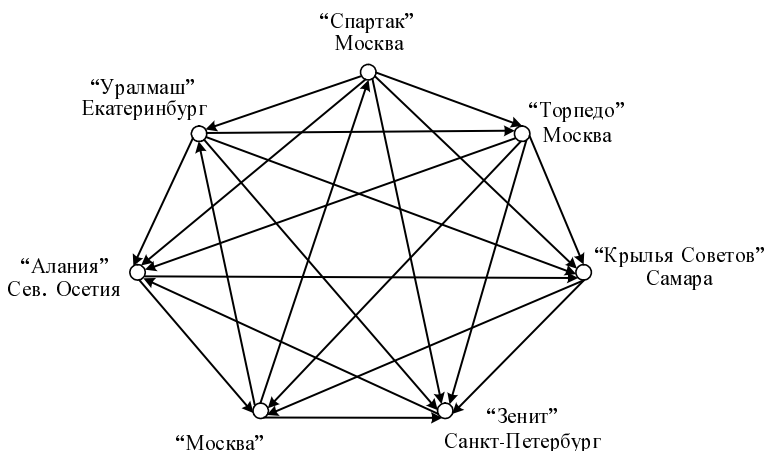


Рис. 5.16. Результаты футбольного турнира

Перепишем результаты в виде табл. 5.19.

После окончания турнира подводятся итоги, в результате любимая команда («Зенит» Санкт-Петербург) оказывается на последнем месте, и ее следует исключить из дальнейших соревнований. Однако находится корреспондент, который утверждает, что итоги подведены неверно, и в доказательство приводит такую цепочку побед: **«Зенит» > «Алания» > «Москва» > «Спартак» > «Уралмаш» > «Торпедо» > «Крылья Советов»**.

Эта цепочка предназначена доказать, что любимая команда – самая лучшая. Из этой цепочки получается, что «Зенит» – самая лучшая команда в этом чемпионате. Интересно, знает ли корреспондент теорему о направленных графах?

Таблица 5.19

| Команда | Выиграно | Проиграно | Место |
|-------------------------|----------|-----------|--------|
| «Спартак» Москва | 5 | 1 | I |
| «Уралмаш» Екатеринбург | 4 | 2 | II–III |
| «Торпедо» Москва | 4 | 2 | II–III |
| «Москва» | 3 | 3 | IV |
| «Алания» Сев. Осетия | 2 | 4 | V–VI |
| «Крылья Советов» Самара | 2 | 4 | V–VI |
| «Зенит» Санкт-Петербург | 1 | 5 | VII |

Приведем без доказательства эту теорему. Пусть имеется направленный полностью связанный граф G , т. е. все вершины связаны со всеми остальными вершинами графа стрелками. Назовем вершину, в которую только входят стрелки и ни одна не выходит из этой вершины, побитой вершиной. Назовем некоторое множество вершин, в которое только входят стрелки и ни одна не выходит из этого множества (причем между вершинами множества стрелки могут иметь произвольное направление), побитым множеством.

Теорема о направленных графах. *Если граф G не содержит побитых вершин и побитых множеств вершин, то всегда в этом графе существует направленный путь, выходящий из любой вершины графа и проходящий через все остальные вершины.*

Таким образом, если ваша любимая команда не проиграла всех игр, у вас имеются шансы утверждать, что она – самая лучшая команда турнира!

5.20. Задачи для контрольной

1. Задан граф списком ребер:

| N ребра | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Вершины | A | A | B | B | C | C | D | E | E | G | B | G |
| Вершины | B | B | C | C | D | F | E | F | G | F | F | A |

Начертите его графическое изображение на плоскости, постройте его матрицы инциденции и смежности. Определите тремя способами число его ребер.

2. Теорема о направленных графах. Сформулируйте теорему и приведите пример с графом, имеющим не менее семи вершин.

3. Задан граф списком ребер:

| N ребра | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Вершины | E | A | D | B | C | C | D | E | E | G | B | G |
| Вершины | E | B | D | C | D | F | E | F | G | F | F | A |

Начертите его графическое изображение на плоскости, постройте его матрицы инциденции и смежности. Определите тремя способами число его ребер.

4. Поясните, что такое цикломатическое число графа. Приведите примеры.

5. Задан граф списком ребер:

| N ребра | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Вершины | E | A | D | B | C | E | D | E | E | D | B | G |
| Вершины | E | B | D | C | D | D | E | F | G | D | F | A |

Начертите его графическое изображение на плоскости, постройте его матрицы инцидентности и смежности. Определите тремя способами число его ребер.

6. «Задача о соединении городов». Приведите пример с 8 городами.

7. «Задача коммивояжер». Сформулируйте и приведите пример с 4 городами.

8. Проектирование плоского графа на сферу. Приведите пример плоского графа с 8 вершинами и найдите число его ребер всеми тремя способами.

9. Постройте турнирную таблицу для 8 игроков.

10. Правильные графы и многогранники. Приведите примеры.

11. «Задача о трех домах и трех колодцах». Почему задача не может быть решена?

12. Теорема Эйлера о числе вершин, ребер и граней плоского графа. Примеры.

13. Теорема Жордана для плоских графов.

14. Графы типа «дерево». Основные соотношения.

15. Теорема Эйлера о циклах в графе.

16. Проецирование плоского графа на сферу. Примеры.

17. Постройте турнирную таблицу для 7 игроков.

18. Правильные графы и многогранники. Приведите примеры.

19. Найдите гамильтонову линию на плоском изображении икосаэдра.

20. Формула Эйлера о числе вершин, ребер и граней плоского графа.

21. Найдите гамильтонову линию на плоском изображении додекаэдра.

22. Теорема о четности числа вершин нечетной степени в графе.

23. Граф задан списком ребер:

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 1 | A1 | A2 | 8 | A9 | A8 |
| 2 | A1 | A2 | 9 | A4 | A7 |
| 3 | A2 | A3 | 10 | A7 | A8 |
| 4 | A2 | A9 | 11 | A7 | A8 |
| 5 | A1 | A9 | 12 | A4 | A5 |
| 6 | A3 | A4 | 13 | A5 | A7 |
| 7 | A3 | A7 | 14 | A5 | A6 |
| | | | 15 | A6 | A7 |

Построить графическое изображение и проверить формулу Эйлера для числа вершин, ребер и граней графа.

24. «Задача о наименованиях и переименованиях».

25. Граф задан матрицей инцидентности:

| | I | II | III | IV | V |
|-----|---|----|-----|----|---|
| I | 1 | 1 | 1 | | |
| II | 2 | | 1 | | 1 |
| III | 3 | 1 | | 1 | |
| IV | 4 | | | 1 | 1 |
| V | 5 | 1 | | | 1 |
| VI | 6 | 1 | | 1 | |
| VII | 7 | 1 | | | 1 |

Постройте его графическое изображение, список ребер и матрицу смежности.

26. Цикломатическое число графа.

27. Найти минимальную линию, соединяющую города A, B, C, D, T, F . Попарные расстояния между городами заданы треугольной таблицей:

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|---|
| B | 11 | | | | |
| C | 8 | 15 | | | |
| D | 6 | 9 | 11 | | |
| E | 9 | 12 | 7 | 5 | |
| F | 14 | 8 | 10 | 11 | 7 |

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | B | C | D | E |
|-----|-----|-----|-----|-----|

28. Теорема о направленных графах. Сформулируйте теорему и приведите пример с графом, имеющим не менее 7 вершин.