Отношения

3.1. Понятие отношения

Определение 3.1. *N-арным* (*n-местным*) *отношением* P на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

В случае $n = 1$ отношение P называется *унарным* (*одноместным*) и является подмножеством множества A_1.

При $n = 2$ P называется *бинарным* (*двуместным*) *отношением* или *соответствием*. Если $P \subseteq A_1 \times A_2$, то также говорят, что P есть отношение между множествами A_1 и A_2 (между элементами множеств A_1 и A_2) или что P задано (определено) на паре множеств A_1 и A_2. Если $A_1 = A_2 = A$ ($P \subseteq A \times A$), то говорят, что P есть *бинарное отношение на множестве* A.

Пусть P – бинарное отношение и $(x, y) \in P$, тогда говорят, что элемент x находится в отношении P к элементу y, или что x и y связаны отношением P. Вместо записи $(x, y) \in P$ часто пишут xPy.

В дальнейшем речь будет идти о бинарных отношениях, так как они наиболее часто встречаются и хорошо изучены. Если не будет специально оговорено, то под «отношением» будем понимать бинарное отношение. Частично бинарные отношения (соответствия) уже были рассмотрены в параграфе 1.7. Введем еще несколько определений.

Определение 3.2. Пусть $P \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$. Отношения P и S называются *равными* (пишут $P = S$), если для любых $x \in A$ и $y \in B$ пара $(x, y) \in P$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in S$.

Другими словами, отношения P и S равны, если P и S равны как множества.

Определение 3.3. Для любого множества A отношение $id_A = \{(x;x) \mid x \in A\}$ называется *тождественным отношением* (*диагональю*), а $U_A = A \times A = \{(x;y) \mid x, y \in A\}$ – *полным отношением* (*универсальным отношением*).

Определение 3.4. *Графиком* бинарного отношения $P \subseteq R^2$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy с координатами (x, y) такими, что $(x,y) \in P$.

Определение 3.5. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и $P \subseteq A \times B$. *Матрицей* бинарного отношения P называется матрица $\| P \| = (p_{ij})$ размера $n \times m$, элементы p_{ij} которой определяются следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in P; \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$$

Пример 3.1. Если A – конечное множество мощности n, то матрица тождественного отношения id_A представляет собой единичную матрицу, а матрица полного отношения U_A представляет собой матрицу, все элементы которой равны 1:

$$\| id_A \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}; \qquad \| U_A \| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}. \square$$

Замечание 3.1. Матрица бинарного отношения $P \subseteq A \times B$ содержит полную информацию о связях между элементами множеств A и B и позволяет представить эту информацию в графическом виде на компьютере. ***Любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения***.

3.2. Способы задания бинарных отношений

Бинарные отношения можно задать одним из перечисленных способов.

1. ***Списком входящих в отношение элементов*** (см. пример 1.12).
2. ***Характеристическим свойством.***

Пример 3.2. $P = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

3. ***Графиком*** (***только для подмножеств R^2***).

Пример 3.3. График, изображенный на рис. 3.1, задает отношение P из примера 3.2.

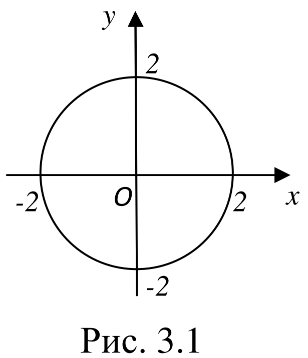


Рис. 3.1

4. ***Графом.*** Понятие графа отношения (или графа соответствия) между двумя различными множествами было введено в параграфе 1.7. Граф, изображенный на рис. 1.7, задает отношение R из примера 1.12. Если отношение P задано на множестве A ($P \subseteq A \times A$), то его *ориентирован-*

ным графом (или просто *графом*) называется следующая геометрическая фигура: точки плоскости (*вершины*), представляющие элементы множества $DomP \cup ImP$, и *ориентированные ребра* – каждой паре $(a,b) \in P$ ставится в соответствие линия (прямая или кривая), соединяющая точки a и b, на которой стрелкой указано направление от точки a к точке b. Ориентированное ребро, соответствующее паре $(a,b) \in P$, где $a = b$, называется *петлей*. Направление обхода петли при изображении графа фиксируется (например, всегда против часовой стрелки).

Любое бинарное отношение на конечном множестве можно представить ориентированным графом. Обратно, любой ориентированный граф представляет бинарное отношение на множестве его вершин.

Пример 3.4. Граф, изображенный на рис. 3.2, задает отношение $S = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,e),(b,c),(c,c),(d,e)\}$ на множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$.

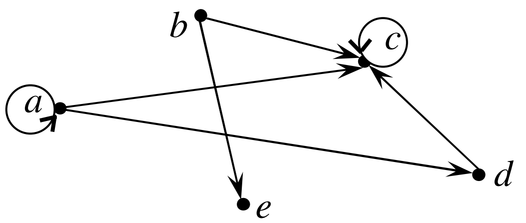


Рис. 3.2

5. ***Матрицей.***

Пример 3.5. Если $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$, то матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

задает отношение

$P = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 3)\} \subseteq A \times B$.

3.3. Операции над бинарными отношениями

Бинарные отношения – это *множества* упорядоченных пар. Следовательно, над ними можно выполнять любые теоретико-множественные операции, в частности, операции *объединения* и *пересечения*. Определим еще две операции над отношениями.

Определение 3.6. Отношением P^{-1}, *обратным* к отношению $P \subseteq A \times B$, называется подмножество прямого произведения $B \times A$ такое, что

$P^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in P\}$.

Пример 3.6. Пусть $P = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 5)\}$. Тогда

$P^{-1} = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, e)\}$.

Определение 3.7. *Композицией (суперпозицией) отношений* $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$ называется множество

$P \circ Q = \{(x,y) \mid x \in A, y \in C \wedge (\exists z \in B) : (x,z) \in P, (z,y) \in Q\}$ (рис. 3.3).

Здесь и далее знак «$\wedge$» заменяет союз «и».

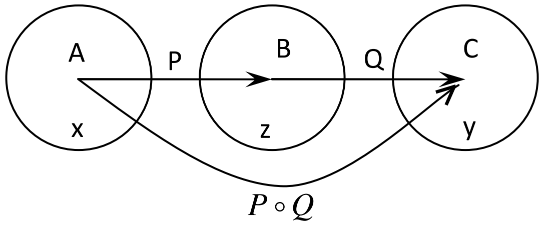


Рис. 3.3

Пример 3.7. Если $P = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (6, 7)\}$, $Q = \{(5, 8), (6, 1), (3, 7), (4, 2)\}$, то $P \circ Q = \{(1, 1), (2, 8), (3, 2)\}$ и $Q \circ P = \{(6, 6), (4, 5)\}$.

Утверждение 3.1. Для любых бинарных отношений *P*, *Q* и *R* выполняются следующие свойства:

1. $(P^{-1})^{-1} = P$;
2. $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;
3. $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (*ассоциативность композиции*).

Доказательство. Каждое из свойств 1 – 3 представляет собой равенство двух множеств. Следовательно, доказательство можно провести на основании определений 1.5, 3.6 и 3.7.

1. $\forall (x, y) \in P \Leftrightarrow (y, x) \in P^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (P^{-1})^{-1}$.
2. $\forall (x, y) \in (P \circ Q)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P \circ Q \Leftrightarrow (\exists z) : (y, z) \in P \wedge (z, x) \in Q \Leftrightarrow (\exists z) : (z, y) \in P^{-1} \wedge$ $\wedge (x, z) \in Q^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in Q^{-1} \circ P^{-1}$.
3. $\forall (x, y) \in (P \circ Q) \circ R \Leftrightarrow (\exists z) : (x, z) \in P \circ Q \wedge (z, y) \in R \Leftrightarrow (\exists z), (\exists t) : (x, t) \in P \wedge (t, z) \in Q \wedge$ $\wedge (z, y) \in R \Leftrightarrow (\exists t) : (x, t) \in P \wedge (t, y) \in Q \circ R \Leftrightarrow (x, y) \in P \circ (Q \circ R)$.

3.4. Свойства матриц бинарных отношений

1. Пусть $P, Q \subseteq A \times B$ и $\| P \| = (p_{i,j})$, $\| Q \| = (q_{i,j})$. Тогда $\| P \cup Q \| = \| P \| + \| Q \| = (p_{i,j} + q_{ij})$ и $\| P \cap Q \| = \| P \| * \| Q \| = (p_{i,j} \cdot q_{ij})$. При этом сложение и умножение элементов определяются по правилам: 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 1, 0 · 0 = 0, 1 · 0 = 0 · 1 = 0, 1 · 1 = 1.
2. Пусть $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$. Тогда $\| P \circ Q \| = \| P \| \cdot \| Q \|$, где матрицы умножаются по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов при перемножении матриц находится по правилам п. 1.
3. $\| P^{-1} \| = \| P \|^T$.
4. Пусть $\| P \| = (p_{ij})$, $\| Q \| = (q_{ij})$. Если $P \subseteq Q$, то $(\forall i, j)\ (p_{ij}) \le (q_{ij})$.

Пример 3.8. Пусть P, $Q \subseteq A^2$, $A = \{1, 2, 3\}$. Если $\| P \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\| Q \| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – соответственно матрицы отношений P и Q, то

$$\| P \cup Q \| = \| P \| + \| Q \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \| P \cap Q \| = \| P \| * \| Q \| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\| P \circ Q \| = \| P \| \cdot \| Q \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \| P^{-1} \| = \| P \|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. Свойства бинарных отношений

Пусть $A \neq \varnothing$ и $P \subseteq A^2$.

Определение 3.8. Отношение P на множестве A называется *рефлексивным*, если $(\forall a \in A)\ aPa$.

Примерами рефлексивных отношений являются отношение делимости на множестве целых чисел, отношение включения на булеане непустого множества.

Отношение P рефлексивно тогда и только тогда, когда каждая вершина графа имеет петлю.

Определение 3.9. Отношение P на множестве A называется *антирефлексивным*, если $(\forall a \in A)\ (a,a) \notin P$.

Например, отношение неравенства на некотором числовом множестве, отношение перпендикулярности на множестве всех прямых евклидовой плоскости являются антирефлексивными.

Отношение антирефлексивно тогда и только тогда, когда ни одна вершина графа не имеет петли.

Определение 3.10. Отношение P на множестве A называется *симметричным*, если $(\forall a,b \in A)\ aPb \Rightarrow bPa$.

Примерами симметричных отношений являются отношение равенства на некотором числовом множестве, отношение параллельности на множестве всех прямых евклидовой плоскости.

Отношение симметрично тогда и только тогда, когда всякий раз вместе с ребром (x, y) граф содержит ребро (y, x).

Определение 3.11. Отношение P на множестве A называется *антисимметричным*, если $(\forall a,b \in A)\ aPb \wedge bPa \Rightarrow a = b$.

Например, отношение меньше (<) на множестве действительных чисел, отношение включения на булеане непустого множества.

Отношение антисимметрично тогда и только тогда, когда вместе с каждым ребром (x, y) граф не содержит ребро (y, x). Граф антисимметричного отношения может содержать петли.

Замечание 3.2. Свойство антисимметричности не совпадает со свойством несимметричности. Например, отношение $P = \{(a,b),(b;a),(a;c)\}$ на множестве $A = \{a,b,c\}$ не симметрично, поскольку $(a,c) \in P$, а $(c,a) \notin P$, и не антисимметрично, так как $(a,b) \in P$ и $(b,a) \in P$, но $a \neq b$. Диагональ непустого множества A (id_A) является примером симметричного и антисимметричного отношения. Вообще***, любое подмножество*** id_A ***обладает одновременно свойствами симметричности и антисимметричности.***

Определение 3.12. Отношение P на множестве A называется *транзитивным*, если $(\forall a,b,c \in A)\ aPb \wedge bPc \Rightarrow aPc$.

Например, отношение параллельности на множестве всех прямых евклидовой плоскости, отношение включения на булеане непустого множества являются транзитивными.

Отношение транзитивно тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой ребер (x, y) и (y, z) граф содержит ребро (x, z).

Утверждение 3.2. Пусть $A \neq \varnothing$ и $P \subseteq A^2$. Тогда справедливы следующие соотношения:

1. P – рефлексивно $\Leftrightarrow$ $id_A \subseteq P$;
2. P – антирефлексивно $\Leftrightarrow P \cap id_A = \varnothing$;
3. P – симметрично $\Leftrightarrow P = P^{-1}$;
4. P – антисимметрично $\Leftrightarrow P \cap P^{-1} \subseteq id_A$;
5. P – транзитивно $\Leftrightarrow P \circ P \subseteq P$.

3.6. Определение свойств бинарного отношения по его матрице

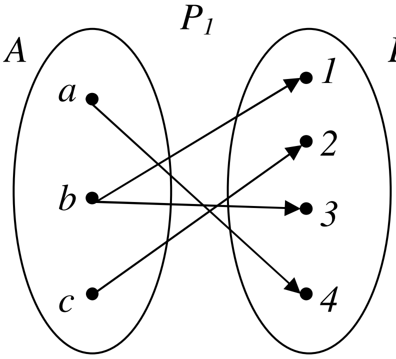
На основании утверждения 3.2 и свойств матриц бинарных отношений можно выяснить, как определять свойства бинарного отношения по его матрице.

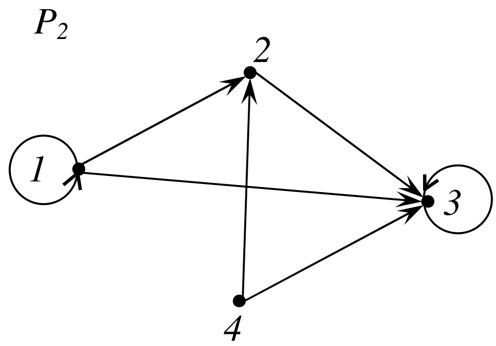
1. P – рефлексивно $\Leftrightarrow$ $id_A \subseteq P \Leftrightarrow$ главная диагональ матрицы $\|P\|$ состоит из одних единиц.
2. P – антирефлексивно $\Leftrightarrow$ $P \cap id_A = \varnothing \Leftrightarrow$ главная диагональ матрицы $\|P\|$ состоит из одних нулей.
3. P – симметрично $\Leftrightarrow$ $P = P^{-1} \Leftrightarrow \| P \| = \| P \|^T$ $\Leftrightarrow$ матрица $\|P\|$ симметрична относительно главной диагонали.
4. P – антисимметрично $\Leftrightarrow$ $P \cap P^{-1} \subseteq id_A$ $\Leftrightarrow$ матрица $\| P \cap P^{-1} \|$ вне главной диагонали содержит только нули.

5. P – транзитивно $\Leftrightarrow$ $P \circ P \subseteq P$ $\Leftrightarrow$ $(\forall i, j)$ $q_{ij} \le p_{ij}$, где $\| P \| = (p_{ij})$, $\| P \circ P \| = (q_{ij})$.

Пример 3.9. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $P_1 = \{(a, 4), (b, 1), (b, 3), (c, 2)\}$, $P_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$. Изобразить графы отношений P_1 и P_2, найти матрицу $\| (P_1 \circ P_2)^{-1} \|$. Выяснить с помощью матрицы $\| P_2 \|$, какими свойствами обладает отношение P_2.

Решение. Изобразим графы отношений P_1 и P_2:





Найдем матрицу $\| (P_1 \circ P_2)^{-1} \|$.

$\| (P_1 \circ P_2)^{-1} \| = \| P_2^{-1} \circ P_1^{-1} \| = \| P_2^{-1} \| \cdot \| P_1^{-1} \| = \| P_2 \|^T \cdot \| P_1 \|^T$.

$$\| P_1 \| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \| P_2 \| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \| P_1 \|^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \| P_2 \|^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\| (P_1 \circ P_2)^{-1} \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним с помощью матрицы $\| P_2 \|$, какими свойствами обладает отношение P_2.

1. Отношение P_2 не рефлексивно, так как главная диагональ матрицы $\| P_2 \|$ не состоит из одних единиц.
2. Отношение P_2 не антирефлексивно, так как главная диагональ матрицы $\| P_2 \|$ не состоит из одних нулей.
3. Отношение P_2 не симметрично, так как матрица $\| P_2 \|$ не является симметричной относительно главной диагонали.
4. $$\| P_2 \cap P_2^{-1} \| = \| P_2 \| * \| P_2 \|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отношение P_2 антисимметрично, так как матрица $\| P_2 \cap P_2^{-1} \|$ вне главной диагонали содержит только нули.

$$5.\ \| P_2 \circ P_2 \| = \| P_2 \| \cdot \| P_2 \| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (q_{ij}),\ \| P_2 \| = (p_{ij}).$$

Отношение P_2 транзитивно, так как $(\forall i, j)\ \ q_{ij} \le p_{ij}$.

3.7. Отношение эквивалентности

Определение 3.13. Бинарное отношение на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение эквивалентности обычно обозначают символами ~ или ≡.

Примерами отношения эквивалентности являются отношение равенства на множестве действительных чисел, отношение параллельности на множестве прямых евклидовой плоскости.

Определение 3.14. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и $a \in A$. *Классом эквивалентности*, *порожденным элементом* a, называется множество $\{x \in A \mid xRa\}$.

Класс эквивалентности, порожденный элементом a, будем обозначать через a/R. Совокупность всех классов эквивалентности отношения R на множестве A обозначается через A/R.

Определение 3.15. *Представителем класса эквивалентности* называется любой элемент этого класса.

Определение 3.16. Пусть A – непустое множество. *Фактор- множеством* множества A по отношению эквивалентности R называется множество A/R всех классов эквивалентности.

Теорема 3.1 (прямая). Пусть R – отношение эквивалентности на непустом множестве A. Тогда фактор-множество A/R является разбиением множества A.

Доказательство. Так как отношение R рефлексивно, то для любого $a \in A$ имеем aRa. Это значит, что каждый элемент a множества A принадлежит классу эквивалентности a/R. Итак, имеем семейство непустых классов a/R (a/R содержит по крайней мере один элемент a) и $\bigcup\limits_{a \in A} a/R = A$. Осталось доказать, что пересечение любых двух различных классов пусто. Для этого достаточно показать, что классы эквивалентности, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают. Пусть a/R и b/R – классы эквивалентности, имеющие общий элемент c. Тогда cRa и cRb. В силу симметричности отношения R из cRa следует aRc. Пусть x – любой элемент из a/R , тогда xRa. Имеем, xRa и aRc. Следовательно, в силу транзитивности отношения R xRc. Имеем, xRc и cRb. Тогда xRb, так как отношение R транзитивно. Следовательно, $x \in b/R$. Таким образом, $a/R \subseteq b/R$. Аналогично доказывается, что $b/R \subseteq a/R$. Следовательно, $a/R = b/R$.

Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Тогда

1) $(\forall\ a \in A)\ a \in a/R$;
2) $\bigcup_{a\in A} a/R = A$;
3) $(\forall\ a, b \in A)\ \ a/R = b/R \Leftrightarrow a\,R\,b$;
4) $a/R \neq b/R \Leftrightarrow a/R \cap b/R = \varnothing$.

Пусть S – разбиение непустого множества A и R_S – бинарное отношение, определяемое следующим образом: (x,y) $\in R_S$ тогда и только, когда x и y принадлежат одному и тому же подмножеству семейства S.

Теорема 3.2 (обратная). Отношение R_S, соответствующее разбиению S непустого множества A, является отношением эквивалентности на A, причем фактор-множество A/R_S совпадает с разбиением S.

Доказательство. 1. Так как S есть разбиение, то $(\forall a \in A)\exists M_i \subseteq S : a \in M_i$. Следовательно, по определению отношения R_S, $aR_s a$, а значит R_S – рефлексивно.

2. Пусть a, b – произвольные элементы из A такие, что aR_Sb. Тогда, по определению отношения R_S, $\exists\ M_j \subseteq S$: $a, b \in M_j$. Следовательно, bR_Sa. Получили, что R_S – симметрично.

3. Пусть a, b, c – произвольные элементы из A такие, что $aR_S\,b \wedge bR_S\,c$. Следовательно, по определению отношения R_S, $\exists\ M_i, M_j \subseteq S$: $a, b \in M_i \wedge$ $b, c \in M_j$. Отсюда $b \in M_i \cap M_j$. Но тогда, по определению разбиения, $M_i = M_j$, а значит, $a, c \in M_i$, и, по определению отношения R_S, aR_Sc. Получили, что R_S – транзитивно.

Из п. 1 – 3 следует, что R_S – отношение эквивалентности. Фактор-множество A/R_S совпадает с разбиением S по определению отношения R_S.

Пример 3.10. На множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$ задано отношение $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d), (e, e)\}$. Доказать, что R является отношением эквивалентности на множестве A. Найти классы эквивалентности, на которые разбивается множество A отношением R.

Решение. Построим граф отношения R (рис. 3.4), на основании которого заключаем, что R является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, по определению, R – отношение эквивалентности. В один класс эквивалентности входят элементы, попарно связанные отношением R между собой. Значит, отношение R разбивает множество A на три класса эквивалентности: $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c, d\}$, $A_3 = \{e\}$.

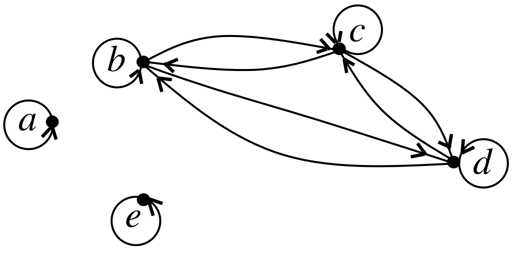


Рис. 3.4

Замечание 3.3. Частным случаем отношения эквивалентности ~ является отношение равенства элементов некоторого множества A, которое определяет разбиение множества на одноэлементные классы эквивалентности:

$(\forall\ x \in A)\ x\ /\!\sim\ = \{x\}$. В этом случае ***классов эквивалентности оказывается столько же, сколько элементов содержится в множестве А***, так как каждый элемент из A эквивалентен только самому себе.

В другом частном случае все элементы множества A эквивалентны друг другу. При этом фактор-множество $A\ /\!\sim$ состоит всего из ***одного класса*** – самого множества A.

В любом другом случае среди классов эквивалентности имеется хотя бы один класс, который содержит больше одного элемента и в то же время не совпадает с самим множеством A.

Замечание 3.4. Понятие отношения эквивалентности имеет большое значение в математике. Дело в том, что элементы, входящие в один класс эквивалентности неразличимы с точки зрения рассматриваемого отношения эквивалентности. Поэтому считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем (произвольным элементом этого класса). Это позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность представителей каждого класса эквивалентности. Свойства, которыми обладают все элементы некоторого класса эквивалентности, изучаются на одном его представителе.

Отношения эквивалентности играют важную роль в определении математических понятий.

3.8. Счетные и несчетные множества

Определение 3.17. Множества X и Y называются *изоморфными* (пишут $X \cong Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Утверждение 3.3. Бинарное отношение «быть изоморфными» на совокупности множеств является отношением эквивалентности.

По теореме 3.1 все множества относительно отношения «быть изоморфными» разбиваются на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из попарно изоморфных между собой множеств.

Определение 3.18. То общее, что есть у всех множеств одного и того же класса эквивалентности по отношению «быть изоморфными» (количество элементов), называется *кардинальным числом* (т.е. количественным) или *мощностью* множеств данного класса.

Таким образом, мощность множества представляет собой обобщение понятия «число элементов» на случай произвольного (конечного или бесконечного) множества. Как и для конечного множества, мощность бесконечного множества X обозначается через $|X|$.

Определение 3.19. Множества X и Y называются *равномощными*, если они изоморфны, то есть между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. При этом пишут $|X| = |Y|$.

Пример 3.11. Пусть X – множество действительных чисел, а $У$ – множество точек координатной прямой. Установим между ними следующее соответствие: каждому действительному числу x сопоставим точку $M(x)$ координатной прямой. Это соответствие является взаимно однозначным, так как каждому действительному числу сопоставляется единственная точка координатной прямой и, наоборот, каждая точка на координатной прямой соответствует только одному числу. Следовательно, $|X| = |Y|$.

Пример 3.12. Пусть X – множество точек отрезка AB, $У$ – множество точек отрезка CD, причем длины отрезков AB и CD различны. Между множествами X и $У$ можно установить взаимно однозначное соответствие так, как показано на рис. 3.5. Следовательно, $|X| = |Y|$.

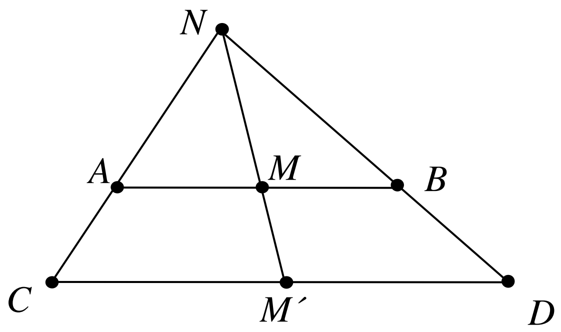


Рис. 3.5

В теории конечных множеств имеет место утверждение: «часть меньше целого».

Пример 3.13. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, e\} \Rightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$.

Между конечным множеством и его собственным подмножеством нельзя установить взаимно-однозначное соответствие.

Определение 3.20. Множество X называется *конечным*, если X не равномощно никакому его собственному подмножеству.

В противном случае множество называется бесконечным.

Определение 3.21. Множество X называется *бесконечным*, если из множества X можно выделить равномощное ему собственное подмножество.

Пример 3.14. Рассмотрим N и $A = \{x \in N \mid x$ – четное число$\}$. Имеем: $A \subseteq N$, $A \neq N$. Собственное подмножество A равномощно N, так как между N и A можно следующим образом установить взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{llllll} N: & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \quad \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A: & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \ldots \end{array}$$

Таким образом, в теории бесконечных множеств теряет силу утверждение, что «часть меньше целого».

Определение 3.22. Кардинальное число называется *конечным*, если оно является мощностью конечного множества.

Определение 3.23. Кардинальное число называется *бесконечным*, если оно является мощностью бесконечного множества.

Определение 3.24. Конечные ненулевые кардинальные числа называются *натуральными числами*.

Другими словами, натуральное число – это общее свойство класса конечных непустых равномощных множеств.

Наименьшей бесконечной мощностью является $\aleph_0$ (а́леф-нуль) – мощность множества натуральных чисел. Итак, $|N| = \aleph_0$.

Определение 3.25. Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называют *счетными*.

Другими словами, множество является счетным, если его элементы можно перенумеровать. Мощность любого счетного множества равна $\aleph_0$.

Пример 3.15. Множество Z счетно. Покажем, как можно перенумеровать элементы множества Z.

Запишем множество Z в виде двух строк и будем нумеровать по столбцам:

0 – № 1; –1 – № 2; 1 – № 3; –2 – № 4 и т.д.:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & \ldots \end{array}$$

Таким образом, все положительные числа и нуль нумеруются нечетными числами, а все отрицательные целые числа – четными.

Пример 3.16. Множество Q счетно. Покажем, как можно перенумеровать элементы множества Q.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1}; & \frac{2}{1}; & \frac{3}{1}; & \frac{4}{1}; & \frac{5}{1}; & \ldots \\ \frac{1}{2}; & \frac{2}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{4}{2}; & \frac{5}{2}; & \ldots \\ \frac{1}{3}; & \frac{2}{3}; & \frac{3}{3}; & \frac{4}{3}; & \frac{5}{3}; & \ldots \\ \frac{1}{4}; & \frac{2}{4}; & \frac{3}{4}; & \frac{4}{4}; & \frac{5}{4}; & \ldots \end{array}$$

Перенумеруем сначала все положительные рациональные числа. Для этого выпишем в виде таблицы сначала все положительные дроби со знаменателем 1, потом все положительные дроби со знаменателем 2, далее со знаменателем 3 и т.д. Нумерацию будем проводить по квадратам. При этом если некоторая дробь занумерована, то последующие дроби, выражающие то же число, будем пропускать. Получим следующую нумерацию: $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$.

После того как занумерованы все положительные рациональные числа, все рациональные числа нумеруются аналогично целым числам. Для этого надо перенумерованные положительные и отрицательные рациональные числа записать отдельно в виде двух строк, и числа одной строки нумеровать четными номерами, а второй – нечетными, оставив еще один номер для нуля.

Теорема 3.3 (Кантора). Множество всех действительных чисел несчетно.

Доказательство. Предположим противное. Пусть все действительные числа занумерованы: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Известно [5], что между множеством всех действительных чисел и множеством допустимых десятичных дробей (то есть бесконечных десятичных дробей, не имеющих периода 9) существует взаимно однозначное соответствие. Запишем числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с помощью допустимых десятичных дробей:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)} \ldots \alpha_m^{(1)} \ldots \\
x_2 &= \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)} \ldots \alpha_m^{(2)} \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)} \ldots \alpha_m^{(n)} \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

В равенствах (11) $\alpha_0^{(n)}$ ($n = 1, 2, ...$) – целое число с тем или иным знаком, а $\alpha_m^{(n)}$ ($m = 1, 2, ... , n = 1, 2, ...$) – одна из цифр 0, 1, 2, ... , 9.

Выберем цифру α_n ($n = 1, 2, ...$) так, чтобы $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ и $\alpha_n \neq 9$. Тогда дробь $0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ является допустимой. Следовательно, $\exists\ n \in N$: $x_n = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$
С другой стороны, действительного числа $a = 0, \alpha_1\,\alpha_2... \ \alpha_n...$ нет среди чисел x_n ($n = 1, 2, ...$), так как десятичная дробь $0,\alpha_1\alpha_2... \ \alpha_n...$ хотя бы одним десятичным знаком отличается от каждой из десятичных дробей (11). Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно, и множество действительных чисел несчетно.

Мощность множества всех действительных чисел R называют мощностью *континуума* (от лат. continuum – непрерывное) и обозначают древнееврейской буквой $\aleph$ (алеф). Все множества, изоморфные множеству R, имеют мощность континуума. Примерами множеств мощности континуума являются множества точек любого отрезка, луча, прямой.

На множестве кардинальных чисел введем отношение «≤» следующим образом: $|X| \leq |Y| \Leftrightarrow X$ изоморфно некоторому подмножеству множества Y. Говорят, что мощность множества X меньше мощности множества Y (пишут $|X| < |Y|$), если $|X| \leq |Y|$ и $X \neq Y$.

Известно, что мощность $\aleph_0$ счетных множеств меньше мощности $\aleph$: $\aleph_0 < \aleph$.

Есть ли между $\aleph_0$ и $\aleph$ другие кардинальные числа – знаменитая *проблема* (*гипотеза*) *континуума* в математике, которая в 1963 г. была решена американским математиком П. Коэном. Он доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств. Проблема континуума решается аналогично проблеме пятого постулата Евклида в геометрии. Ни утверждение проблемы, ни отрицание ее из аксиоматики теории множеств доказать нельзя. Если в качестве аксиомы взять, что между $\aleph_0$ и $\aleph$ есть другие кардинальные числа, то возникает одна ветвь математики, если нет, то другая, совершенно независимая.

Рассмотрим без доказательства несколько теорем, относящиеся к теории бесконечных множеств.

Теорема 3.4. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Теорема 3.5. Объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Теорема 3.6. Всякое бесконечное множество X содержит счетное подмножество Y такое, что $X \setminus Y$ есть бесконечное множество.

Теорема 3.7. Всякое бесконечное множество X содержит подмножество $Y \cong X$ такое, что $X \setminus Y$ есть бесконечное множество.

Теорема 3.8. (**Кантора – Бернштейна**). Если каждое из двух множеств X и Y изоморфно подмножеству другого, то множества X и Y изоморфны между собой, то есть $|X| \le |Y| \wedge |Y| \le |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.

Замечание 3.5. Сергей Натанович Бернштейн (1880 **–** 1966) – советский математик.

Теорема 3.9. Для произвольного множества X мощность его булеана $P(X)$ равна $2^{|X|}$.

Теорема 3.10. Булеан $P(X)$ произвольного непустого множества X имеет мощность, большую, чем мощность множества X, то есть $(\forall X)\ |X| < 2^{|X|}$.

3.9. Отношение порядка. Диаграммы Хассе

Пусть A – непустое множество.

Определение 3.26. Отношение $P \subseteq A^2$ называется *предпорядком* (*квазипорядком*), если оно рефлексивно и транзитивно.

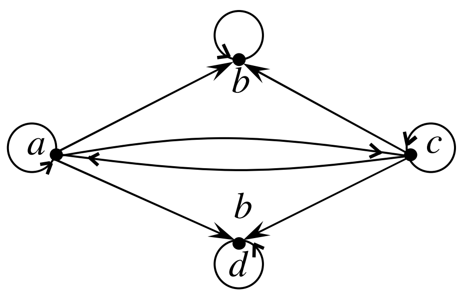


Рис. 3.6

Пример 3.17. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$. Отношение $P = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$ на множестве A является предпорядком (рис. 3.6).

Заметим, что симметричный предпорядок является отношением эквивалентности.

Определение 3.27. Отношение $P \subseteq A^2$ называется *частичным порядком*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Таким образом, частичный порядок представляет собой антисимметричный предпорядок. Частичный порядок обозначается символом $\le$, а обратное ему отношение $\le^{-1}$ – символом $\le$.

Определение 3.28. Отношение $< \subseteq A^2$ называется *строгим порядком*, если оно определяется по следующему правилу: $(\forall\, x, y \in A)\ x < y \Leftrightarrow x \le y$ и $x \ne y$.

Отношение строгого порядка не является частичным порядком, так как оно не рефлексивно.

Пример 3.18. Отношение из примера 3.17 не является частичным порядком, а отношение делимости на множестве целых чисел – является.

Определение 3.29. Пусть $\le \subseteq A^2$ и $x, y \in A$. Элементы x и y называются *несравнимыми*, если нельзя сказать, что $x \le y$ или $y \le x$.

Пример 3.19. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$. Отношение включения $\subseteq$ на булеане $P(A)$ является частичным порядком. Элементы $B = \{a, c\}$ и $C = \{b, d\}$ из $P(A)$ являются несравнимыми, так как $(B, C) \notin \subseteq$ и $(C, B) \notin \subseteq$.

Определение 3.30. Частичный порядок $\le \subseteq A^2$ называется *линейным порядком*, если $(\forall\, x, y \in A)\ x \le y$ или $y \le x$.

Определение 3.31. Пусть $A \ne \varnothing$ и $\le$ – частичный (линейный) порядок на A. Упорядоченная пара $< A, \le >$ называется *частично* (*линейно*) *упорядоченным множеством*.

Другими словами, частично (линейно) упорядоченным множеством является непустое множество A, на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок $\le$.

Пример 3.20. Пара $< Z, \le >$, где $\le$ – отношение делимости на множестве Z, является частичным, но не линейным порядком. Пары $< N, \le >$, $< R, \le >$ с обычными отношениями $\le$ образуют линейно упорядоченные множества.

Определение 3.32. Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $< A, \le >$ называется *максимальным* (*минимальным*), если $(\forall x \in A)\ a \le x\ (x \le a) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = a$.

Определение 3.33. Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $< A, \le >$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $(\forall\ x \in A)\ x \le a\ (a \le x)$.

Наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества $< A, \le >$ (если он существует) обозначается через $max\ A$ ($min\ A$). Наибольший элемент часто называют *единицей*, а наименьший – *нулем* множества $< A, \le >$.

Теорема 3.11. Пусть $< A, \le >$ является частично упорядоченным множеством, где A – непустое и конечное множество. Тогда $< A, \le >$ содержит хотя бы один минимальный элемент, и если он является единственным, то он также является и наименьшим. Аналогично, $< A, \le >$ содержит хотя бы один максимальный элемент, и если он является единственным, то он также является наибольшим.

Пример 3.21. Частично упорядоченное множество $< A, \le >$, где $A = \{a, b, c, d\}$, а граф отношения $\le$ изображен на рис. 3.7, имеет единственный минимальный и он же наименьший элемент a, максимальные элементы c и d, но не имеет наибольшего элемента.

Пример 3.22. Частично упорядоченное множество $< B, \le >$, где $B = \{1, 2, 3, 4\}$, а граф отношения $\le$ изображен на рис. 3.8, имеет минимальные элементы 1 и 2, единственный максимальный и он же наибольший элемент 4, но не имеет наименьшего элемента.

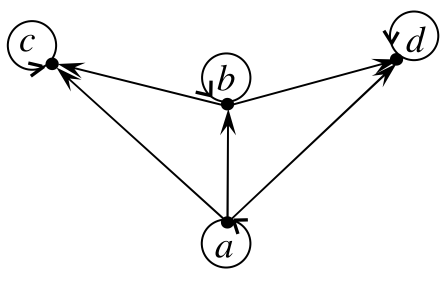


Рис. 3.7

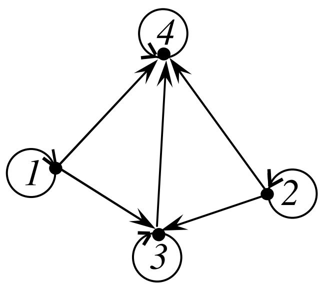


Рис. 3.8

Замечание 3.6. Всякий наибольший элемент частично упорядоченного множества является максимальным, а всякий наименьший элемент – минимальным. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. примеры 3.21 и 3.22).

Определение 3.34. Пусть $< A, \le >$ – частично упорядоченное множество и $B \subseteq A$. Элемент $a \in A$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью подмножества B*, если $(\forall\, b \in B)\ b \le a\ (a \le b)$.

Пример 3.23. Рассмотрим частично упорядоченное множество $<$ R, $\le >$ и $B = [0;1)$. Тогда любое число $x \ge 1$ является верхней гранью B, а любое число $x \le 0$ – нижней гранью B.

Определение 3.35. Пусть $< A, \le >$ – частично упорядоченное множество и $B \subseteq A$. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью подмножества B* называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань множества B.

Точная верхняя грань подмножества B обозначается через $sup\ B$ (супремум), а точная нижняя грань – через $inf\ B$ (инфимум).

Пример 3.24. В условиях примера 3.21 имеем, что $sup\ B = 1$, $inf\ B = 0$.

Определение 3.36. Линейный порядок $\le$ на множестве A называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент.

Определение 3.37. Пусть $\le$ – полный порядок на непустом множестве A. Упорядоченная пара $< A, \le >$ называется *вполне упорядоченным множеством*.

Пример 3.25. Упорядоченная пара $< N, \le >$ является вполне упорядоченным множеством, а $< [-1;1], \le >$ не является, так как, например, полуинтервал $(0;1]$, являющийся подмножеством $[-1;1]$, не содержит наименьшего элемента.

Пусть $< A, \le >$ – частично упорядоченное множество и $x, y \in A$. Говорят, что элемент y *покрывает* элемент x, если $x \le y$ и не существует такого элемента $z \in A$, что $x < z < y$. Если A – любое конечное множество, то частично упорядоченное множество $< A, \le >$ можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если элемент y покрывает элемент x, то точки, изображающие элементы x и у, соединяют отрезком, причем точку, соответствующую элементу x, располагают ниже точки, соответствующей элементу y. Такие схемы называются *диаграммами Хассе*.

Пример 3.26. Диаграммы Хассе частично упорядоченных множеств $< A, \le >$ из примера 3.21 и $< B, \le >$ из примера 3.22 изображены соответственно на рис.3.9 и 3.10.

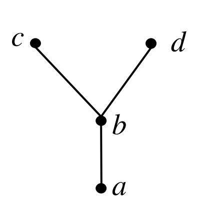


Рис. 3.9

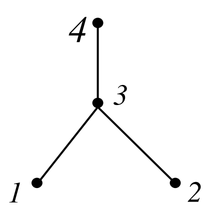
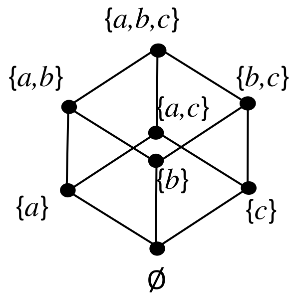


Рис. 3.10

Пример 3.27. а) Рассмотрим частично упорядоченное множество $< P(A), \subseteq >$, где $A = \{a, b, c, d\}$ и $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. На рис. 3.11 изображена диаграмма Хассе, соответствующая $<$ P(A), $\subseteq >$. б) Пусть $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ и $\le$ – обычное отношение порядка на множестве натуральных чисел, не превосходящих восьми. Диаграмма Хассе,



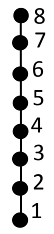


Рис. 3.11 Рис. 3.12

соответствующая линейно упорядоченному множеству $< B, \leq >$, изображена на рис. 3.12.

3.10. Функции

Определение 3.38. Соответствие $f \subseteq A \times B$ называется *функцией* из множества A в множество B, если f функциональное и полностью определенное. Соответствие f называется *частичной функцией*, если f функциональное и частично определенное.

Таким образом, соответствие $f \subseteq A \times B$ является функцией из A в B, если для любого $x \in A$ существует единственный элемент $y \in B$ такой, что $(x, y) \in f$. При этом элемент y обозначается через $f(x)$ и называется *значением* функции f для *аргумента* x. Функция f из A в B обозначается через f: $A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Если $(x, y) \in f$, то используется общепринятая запись $y = f(x)$, а также запись f: $x \mapsto y$ (означает, что функция f ставит в соответствие элементу x элемент y).

Область определения и область значений функции, равные функции определяются так же, как и для соответствий.

Пример 3.28. Какие из соответствий, графы которых изображены на рис. 3.13, являются функциями? Найдите для каждой функции ее область определения и область значений.

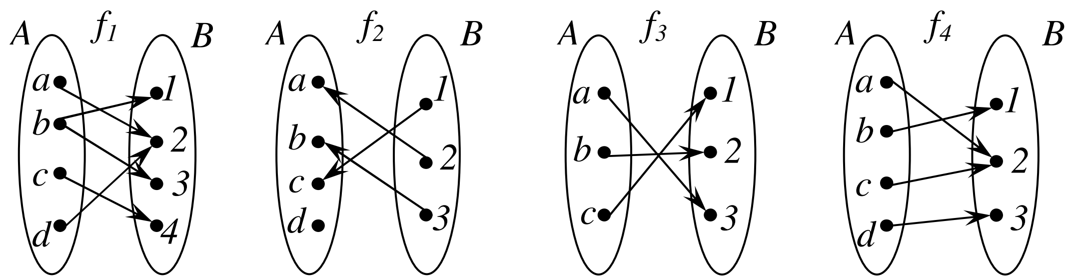


Рис. 3.13

Решение. Соответствия f_2, f_3 и f_4 являются функциями, а f_1 – не является, так как $f_1(b) = \{1, 3\}$. Далее имеем: $Dom\, f_2 = \{1, 2, 3\} = B$, $Im\, f_2 = \{a, b, c\} \subseteq A$; $Dom\, f_3 = \{a, b, c\} = A$, $Im\, f_3 = \{1, 2, 3\} = B$; $Dom\, f_4 = \{a, b, c, d\} = A$, $Im\, f_4 = \{1, 2, 3\} = B$.

Аргументами функции могут являться элементы произвольной природы, в частности, кортежи длины n $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функцию f: $A^n \to B$ называют *n-местной функцией* из A в B. Тогда пишут $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и говорят, что y есть значение функции f при значении аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Функции называются также *отображениями*. Пусть f – функция из A в B. Если $A = Dom\ f$ и $Im\ f \subseteq$ B, то говорят, что f есть *отображение множества A в множество B*. Если $A = Dom\ f$ и $B = Im\ f$, то говорят, что f есть *отображение множества A на множество B*.

Определение 3.39. Функция $f \subseteq A \times B$ называется *инъективной*, или *инъекцией*, если $(\forall\ x, y \in A)\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Определение 3.40. Функция $f \subseteq A \times B$ называется *сюръективной*, или *сюръекцией*, если для каждого элемента $y \in B$ существует хотя бы один элемент $x \in A$ такой, что $y = f(x)$.

Заметим, что сюръективная функция $f \subseteq A \times B$ является отображением A на B.

Определение 3.41. Функция $f \subseteq A \times B$ называется *биективной* (*биекцией*) или *взаимно однозначным соответствием между множествами A и B*, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Пример 3.29. Какие из соответствий, графы которых изображены на рис. 3.13, являются инъективными, сюръективными, биективными функциями?

Решение. Функции f_2 и f_3 являются инъективными; f_3 и f_4 – сюръективными; f_3 – биективной.

Определение 3.42. Если соответствие, обратное к функции $f \subseteq A \times B$, является функциональным и полностью определенным, то оно называется *функцией*, *обратной* к f и обозначается f^{-1}.

Так как в обратном соответствии образы и прообразы меняются местами, то для существования функции, обратной к функции $f \subseteq A \times B$, необходимо и достаточно, чтобы $Im\ f = B$ и каждый элемент $y \in Im\ f$ имел единственный прообраз.

Утверждение 3.4. Для функции $f\colon A \to B$ существует обратная к ней функция $f^{-1}\colon B \to A$ тогда и только тогда, когда f – биекция.

Определение 3.43. Пусть даны функции $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Функция $h\colon A \to C$ называется *композицией* (*суперпозицией*) *функций f* и g, если $(\forall\ x \in A)\ h(x) = g(f(x))$.

Композиция функций f и g обозначается через $f \circ g$, при этом знак $\circ$ часто опускается.

Задачи и упражнения к главе 3

1. Для бинарного отношения $P \subseteq A \times B$ найти $Dom\ P$, $Im\ P$:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2,5\}, \{3\}\}$, $aPX \Leftrightarrow a \in X$, где $a \in A$, $X \in B$;

б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{12, 16\}$, $aPb \Leftrightarrow b \vdots a$ (см. определение 4.26);

в) $A = Z \times Z$, $B = Q$, $(a, b)Pc \Leftrightarrow c = \dfrac{a}{b}$, где $(a, b) \in Z \times Z$, $c \in Q$;

г) $A = Z$, $B = Q$, $aPb \Leftrightarrow a \cdot b = 1$;

д) $P = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + x + 1\}$;

е) $P = \{(x, y) \in R \times R \mid y = lg(x^2 + 1)\}$;

ж) $P = \{(x, y) \in R \times R \mid y = arcos\ x\}$;

з) $P = \{(x, y) \in R \times R \mid y = tg\, x\}$.

2. График отношения P, заданного на множестве R, изображен на рис. 3.14.

а) Найти $Dom\, P$, $Im\, P$;

б) Установите, какие из следующих записей верны: $1P2$, $1P1$, $-3P-1$.

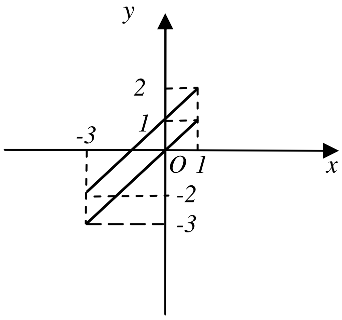


Рис. 3.14

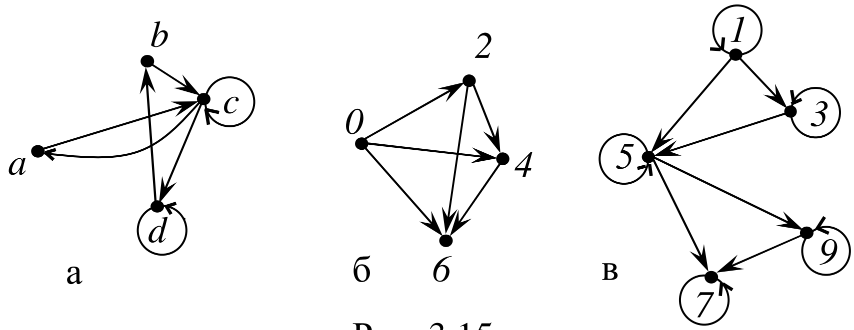


Рис. 3.15

3. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ задано отношение P: «x кратно y».

а) Построить граф отношения P;

б) Перечислить все пары чисел из множества X, находящихся в отношении P;

в) Указать $Dom\, P$, $Im\, P$.

4. Изобразить граф отношения $P = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$ и $Q = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$. Найти $Dom\, P$, Im Q, Q^{-1}, $P \circ Q$.

5. Определить свойства бинарного отношения по его графу (рис. 3.15).

6. Выяснить, является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным:

а) $P \subseteq R^2$, $(x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;

б) $P \subseteq Z^2$, $(x, y) \in P \Leftrightarrow x - y$ четно.

7. Дано: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$, где:

а) $P_1 = \{(a,3), (a,2), (a,4), (b,1), (c,2), (c,4), (c,3)\}$,

$P_2 = \{(1,1), (2,2), (2,1), (3,3), (4,4), (4,3), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4)\}$;

б) $P_1 = \{(b,2), (a,3), (b,1), (b,4), (c,1), (c,2), (c,4)\}$,

$P_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,2), (3,4), (4,4)\}$.

Изобразить P_1 и P_2 с помощью графов. Найти матрицу отношения $\left\|(P_1 \circ P_2)^{-1}\right\|$.

Проверить с помощью матрицы $\|P_2\|$, является ли отношение P_2 рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

8. На рис. 3.16 приведены графы отношений P, Q, S, T. Укажите среди них отношения эквивалентности.

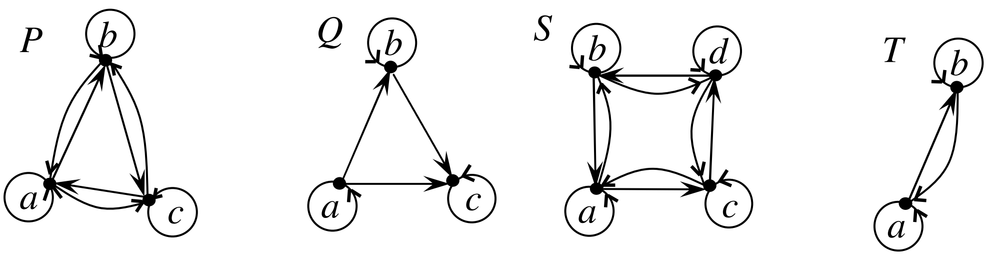


Рис. 3.16

9. На множестве $X = \{a, b, c, d, e\}$ задано отношение $T = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e)\}$. Доказать, что T – отношение эквивалентности. Найти классы эквивалентности.

10. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано отношение эквивалентности T. Оно определяет разбиение этого множества на классы эквивалентности:
$A_1 = \{1, 3, 5\}$, $A_2 = \{2, 4\}$. Построить граф отношения T. Записать все упорядоченные пары чисел, принадлежащих этому отношению.

11. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ задано отношение $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,4), (5,5), (6,6), (4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (4,5)\}$. Доказать, что S – отношение эквивалентности. Построить граф отношения S. Разбить на классы эквивалентности множество X.

12. На множестве $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ задано отношение эквивалентности T. Оно определяет разбиение этого множества на классы эквивалентности $\{a, b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e, f\}$. Записать все пары элементов, принадлежащих этому отношению. Построить его граф.

13. Доказать, что отношение P: $(a,b)P(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ является отношением эквивалентности на множестве $R \times R$. Найти классы эквивалентности и изобразить их на координатной плоскости.

14. На множестве N задано бинарное отношение P: $aPb \Leftrightarrow$ последняя цифра в десятичной записи числа a совпадает с последней цифрой в десятичной записи числа b. Доказать, что P – отношение эквивалентности. Сколько элементов в фактор-множестве N/P?

15. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Доказать, что заданное на $P(A)$ бинарное отношение R: $X\ R\ Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$, является отношением эквивалентности. Найти классы эквивалентности.

16. Доказать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

а) отношение P на множестве точек плоскости: $(M_1, M_2) \in P \Leftrightarrow$ ординаты точек M_1 и M_2 равны;

б) отношение P на множестве C: $(z_1, z_2) \in P \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$;

в) отношение P на множестве $C \setminus \{0\}$: $(z_1, z_2) \in P \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$.

Найти классы эквивалентности. Изобразить их на плоскости.

17. Даны множества: A – множество букв латинского алфавита, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $C = \{c, f\}$, $D = \{b, a, d\}$, $E = \{k, l, m, n, d\}$, $F = \{k, l, m, n\}$. Рассмотреть между ними отношение P: «быть подмножеством». Построить граф отношения P. Выписать все пары множеств, находящихся в отношении P. Определить свойства этого отношения. Доказать, что $<M, P>$ – частично упорядоченное множество, где M – множество всех множеств, указанных выше. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества $<M, P>$. Определить минимальные и максимальные элементы, наименьший и наибольший элементы (если они имеются).

18. Отношение P задано на множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$ с помощью графа (рис. 3.17). Доказать, что пара $<A, P>$ – частично упорядоченное множество. Построить диаграмму Хассе.

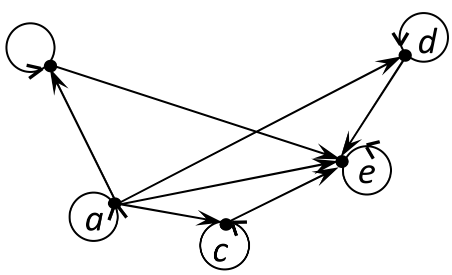


Рис. 3.17

19. Пусть $<A, P>$ – частично упорядоченное множество, имеющее диаграмму Хассе, приведенную на рис. 3.18. Составить список элементов, связанных отношением P. Определить минимальные и максимальные элементы, наибольший и наименьший элементы (если они имеются).

20. Диаграмма Хассе для частично упорядоченного множества $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ представлена на рис. 3.19. Составить список элементов, связанных отношением порядка P и определить максимальные и минимальные элементы, наименьший и наибольший элементы (если они есть).

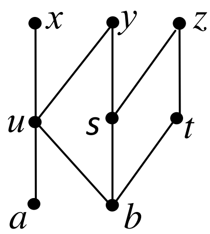


Рис. 3.18

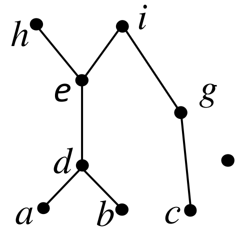


Рис. 3.19

21. Нарисовать диаграммы Хассе для каждого из следующих множеств, упорядоченных отношением делимости: $nRm \Leftrightarrow n$ делит m:

а) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; б) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$; в) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

22. Пусть $A = \{0; 1; 2\}\times\{2; 5; 8\}$. Отношение частичного порядка R на A определено следующим образом: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (a + b) \mid (c + d)$ ($a + b$ делит $c + d$). Нарисовать диаграмму Хассе для частично упорядоченного множества A. Какие элементы на частично упорядоченном множестве будут являться максимальными, минимальными? Имеет ли A наибольший и наименьший элементы?

23. Определить свойства отображения f (инъективность, сюръективность, биективность). Указать $\mathrm{Im}\, f$.

а) $f\colon N \to N,\ f(x) = x + 2$;

б) $f\colon R \to R,\ f(x) = 2x$;

в) $f\colon R \to R,\ f(x) = 2^x$;

г) $f\colon R \to R,\ f(x) = x^2 - 2x + 2$;

д) $f\colon R_+ \to R,\ f(x) = \lg x$;

е) $f\colon R \to R,\ x \mapsto 2^{x^2+3x+4}$;

ж) $f\colon Z\times Z \to Z,\ (a,b) \mapsto a + b$;

з) $f\colon Z \to Z\times Z,\ a \mapsto (a;a)$;

и) A – конечное множество, $f\colon \mathrm{P}(A) \to N, X \mapsto |X|$;

к) $f\colon R \to R,\ x \mapsto x^3$.