3.3. ПОСТРОЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим методы позволяющие представлять любую логическую функцию в стандартном базисе, т. е. с помощью операций $\wedge, \vee, \neg$.

Конъюнктивным одночленом (элементарной конъюнкцией) называется конъюнкция логических переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Пример. $x_1\overline{x_3}x_4$ - конъюнктивный одночлен; $x_1x_3x_1$, $x_1x_3\overline{x_1}$, $x_1\overline{x_3x_4}$ - формулы, не являющиеся конъюнктивными одночленами.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) булевой функции называется формула, имеющая вид дизъюнкции конъюнктивных одночленов.

При этом конъюнктивные одночлены называются членами ДНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) булевой функции называется ДНФ, в которой каждый конъюнктивный одночлен включает все переменные или их отрицания.

Пример. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3$ - ДНФ, не являющаяся СДНФ; $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$ - СДНФ.

Дизъюнктивным одночленом (элементарной дизъюнкцией) называется дизъюнкция логических переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Пример. $x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ - конъюнктивный одночлен; $x_1 \vee x_3 \vee x_1$, $x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_1}$, $x_1 \vee \overline{x_3 \vee x_4}$ - формулы, не являющиеся конъюнктивными одночленами.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) булевой функции называется формула, имеющая вид конъюнкции дизъюнктивных одночленов.

При этом дизъюнктивные одночлены называются членами КНФ,

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) булевой функции называется ДНФ, в которой каждый дизъюнктивный одночлен включает все переменные или их отрицания.

Пример. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_2} \vee x_3)$ - КНФ, не являющаяся СКНФ; $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ - СКНФ.

Наиболее просто СДНФ и СКНФ для логической функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ строятся с помощью таблицы истинности.

Построение СДНФ:

- для каждого набора значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ выписывается конъюнктивный одночлен, содержащий все переменные $x_i = 1$ и отрицания всех переменных $x_j = 0$;

- все полученные конъюнктивные одночлены объединяются знаками дизъюнкции.

Построение СКНФ:

- для каждого набора значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ выписывается дизъюнктивный одночлен, содержащий отрицания всех переменных $x_i = 1$ и все переменные $x_j = 0$;
- все полученные дизъюнктивные одночлены объединяются знаками конъюнкции.

Рассмотрим в качестве примера логическую функцию, описывающую принятие решения большинством голосов в коллективе из трех человек («комитете трех»):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	Строки для построения СДНФ	Строки для построения СКНФ
0	0	0	0		*
0	0	1	0		*
0	1	0	0		*
0	1	1	1	*	
1	0	0	0		*
1	0	1	1	*	
1	1	0	1	*	
1	1	1	1	*	

СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3;$$

СКНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3).$$

Часто при построении СДНФ и СКНФ полученные формы содержат избыточную информацию, от которой можно избавиться и получить минимальные дизъюнктивную нормальную форму (МДНФ) и конъюнктивную нормальную форму (МКНФ).

Метод Квайна включает два этапа:

1) переход от СДНФ (СКНФ) к сокращенной форме;
2) переход от сокращенной формы к МДНФ (МКНФ).

Реализацию метода Квайна опишем на примере.

Пусть дана логическая функция $f(x_1,x_2,x_3)$, заданная таблицей истинности

№ стр.	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

1. Рассмотрим способ построения МДНФ с помощью метода Квайна.

В соответствии с правилом построения СДНФ используются строки № 7, 6, 4, 2 и 1: $f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1x_2\overline{x_3}\right)\vee\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)$.

Найдем все склеивающиеся пары:

2 и 4: $\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)=\overline{x_2}x_3$,

3 и 4: $\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)=\overline{x_1}x_3$,

4 и 5: $\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Результаты операции склеивания вводим в выражение функции. Это не изменит ее значения.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1x_2\overline{x_3}\right)\vee\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)\vee\overline{x_2}x_3\vee x_1x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

Проведем операцию поглощения новыми членами старых членов нормальной формы:

$\left(x_1\overline{x_2}x_3\right)\vee\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\right)\vee\overline{x_2}x_3=\overline{x_2}x_3$,

$\left(\overline{x_1}x_2x_3\right)\vee\overline{x_1}x_3=\overline{x_1}x_3$, $\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}=\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Тогда $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_1}x_3\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Дальнейшее проведение операций склеивания и поглощения невозможно, следовательно, мы получили сокращенную форму.

Построим импликантную таблицу, в которой символом «*» отмечены возможности поглощения членов СДНФ простыми импликантами, а символом «!» - простые импликанты, входящие в ядро:

Простые импликанты	Члены СДНФ				
	$x_1x_2\overline{x_3}$	$x_1\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}x_2x_3$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$
$x_1x_2\overline{x_3}$!	*				
$\overline{x_2}x_3$!		*		*	
$\overline{x_1}x_3$!			*	*	
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$!				*	*

Ни один из членов сокращенной формы не может быть исключен из так, чтобы обеспечить поглащение всех членов СДНФ. Следовательно, МДНФ совпадает с сокращенной формой:

$$\text{МДНФ: } f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,.$$

2. Рассмотрим СКНФ.

В соответствии с правилом построения СКНФ используются строки № 1, 4, 6:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right).$$

Поскольку в данном выражении отсутствуют склеивающиеся пары, то оно является минимальной конъюнктивной нормальной формой записи.