Минимизации логических функций. Метод Квайна

Пусть логическая функция $f(x_4, x_3, x_2, x_1)$ задана в виде

$$f\,(2,5,6,7,10,12,13,14)=1.$$

В скобках заданы номера наборов четырех переменных, на которых логическая функция принимает единичное значение. Заменим эти номера (десятичные числа) их двоичным представлением, получаем наборы переменных (x_4, x_3, x_2, x_1), на которых логическая функция принимает единичное значение:

$$f\,(0010, 0101, 0110, 0111, 1010, 1100, 1101, 1110) = 1.$$

Эту логическую функцию можно представить в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (символ конъюнкции для краткости опущен):

$$f = \bar{x}_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3x_2\bar{x}_1$$

Но, оказывается, есть более экономное представление, а именно

$$f = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2$$

Процедура получение такого представления называется минимизацией функции, а полученная форма **минимальной нормальной формой**. Рассмотрим один из методов такой минимизации, который называется *методом Квайна***.** Данный метод делится на три этапа.

1. На первом этапе минимизации исходную СДНФ упрощаем, используя закон склеивания,

$$AB + \bar{A}B = B\,(A + \bar{A}) = B.$$

Применяя несколько раз закон склеивания к СДНФ функции f получим:

$$\bar{x}_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3x_2\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3x_2\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2x_1$$

$$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_2x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2$$

$$\bar{x}_3x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee x_3x_2\bar{x}_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2$$

$$x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2$$

Удачная последовательность склеиваний привела к минимальной форме.

Однако, мы могли бы привести формулу к выражению:

$$f = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4x_3x_1 \vee \bar{x}_1x_3x_2 \vee x_3\bar{x}_2x_1 \vee x_4x_3\bar{x}_2 \vee x_4x_3\bar{x}_1.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы убрать лишние $\vee$ —слагаемые в данном представлении так, чтобы $\vee$ — сумма оставшихся членов также представляла нашу функцию.

2. На втором этапе, составляем таблицу Куайна для функции f

x_4, x_3, x_2, x_1	0010	0101	0110	0111	1010	1100	1101	1110
X X 1 0	1	0	1	0	1	0	0	1
0 1 X 1	0	1	0	1	0	0	0	0
0 1 1 X	0	0	1	1	0	0	0	0
X 1 0 1	0	1	0	0	0	0	1	0
1 1 0 X	0	0	0	0	0	1	1	0
1 1 X 0	0	0	0	0	0	1	0	1

В этой таблице в первом столбце перечислены все, полученные на первом этапе упрощения, слагаемые в символической записи, а в первой строке – наборы значений переменных (x_4, x_3, x_2, x_1), на которых логическая функция принимает единичное значение. Красные единицы и нули строки соответствуют значениям, которые принимает функция первого столбца, на соответствующем синем наборе значений переменных (символическая запись позволяет процесс вычисления заменить визуальным эффектом – «накрытием», 0 накрывает 0, 1 накрывает 1, а X накрывает 0 и 1).

3. Наконец, на третьем этапе выбираем **наименьшее** число ∨ — слагаемых (строк) так, чтобы «накрыть» всю первую строку. Объединение красных единиц выбранных строк, должны накрывать всю первую строку. В результате, получаем:

$$f = x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 x_3 x_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 .$$

Использованная литература

1. Акимов В.А. Дискретная математика: логика, группы, графы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003, 376 с, стр. 15-16.