Элементы теории графов

Задачи

Граф G - это упорядоченная пара

G = (V, E),

где

V - это непустое множество вершин,
E - это множество ребер.

Определение. Степенью вершины $v \in V$, называется число ребер графа G, инцидентных данной вершине. Обозначение:

$$\deg v.$$

Определение. Неориентированный простой граф, в котором любые две различные вершины смежны, называется *полным*. Полный граф порядка *n* обозначается через K_n.

Определение. Неориентированный граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется полным двудольным.

Граф, изображенный на плоскости, называется *плоским*, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин графа.

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называют *планарным*.

Маршруты, цепи, циклы

Маршрут в графе - это последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Вершины $v_0,\ldots, v_n$ называются *связанными данным путем* (или просто связанными). Вершину v_0 называют *началом*, v_n - *концом* пути.

Цепь маршрут, в котором все ребра попарно различны.

Цикл замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Маршрут, в котором *все вершины попарно различны*, называют ***простой цепью***. Цикл, в котором *все вершины, кроме первой и последней*, *попарно различны*, называются ***простым циклом***.

Путь графа, цепь графа - это конечная последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.

Простой путь (*простой цикл*) - это такой путь, в котором ребра не повторяются.

Связный граф - это граф, в котором для любых вершин u,v есть путь из u в v.

Эйлеровы графы

Определение. Цепь (цикл) в называется эйлеровым (эйлеровой), если она (он) проходит по одному разу через каждое ребро графа G.

Определение. Граф G называется эйлеровым, если он содержит эйлеров цикл.

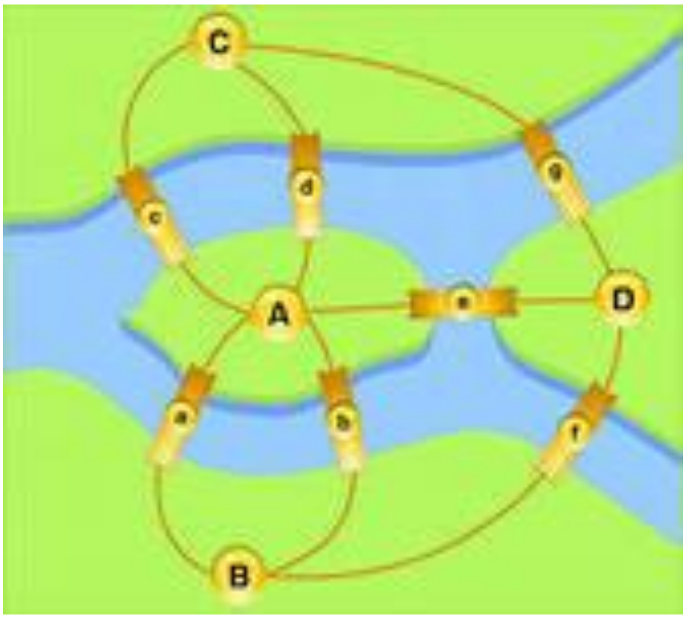
Заметим, что эйлеров граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

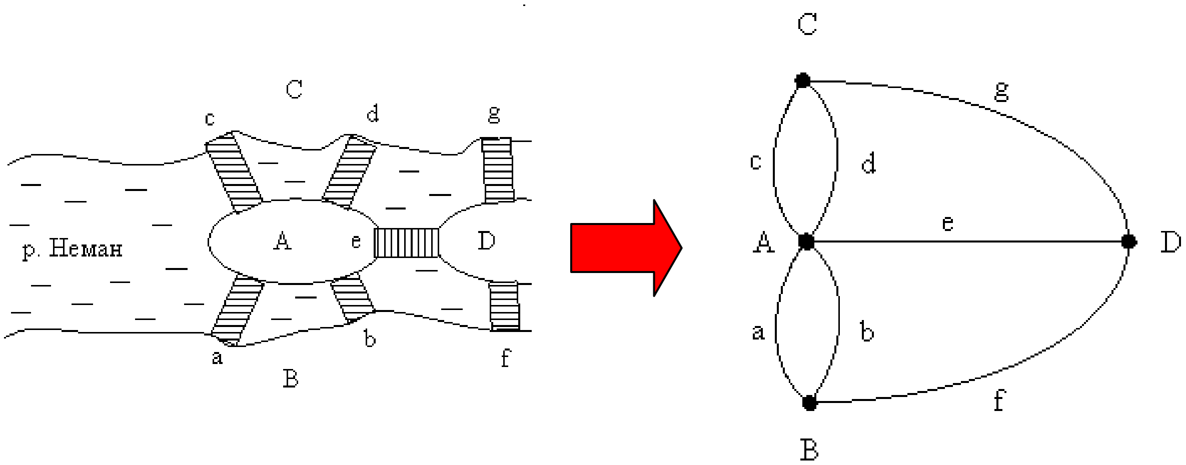
Теорема. Для того чтобы связный граф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени его вершин были четными.

Теорема. Для того чтобы связный граф обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.

Задача о кенигсбергских мостах

В 1736 г. Л.Эйлер решил математическую головоломку о кенигсбергских мостах. Эта головоломка заключалась в следующем. Город Кенигсберг был расположен на двух берегах реки и на двух островах. Части города соединялись между собой семью мостами (рис. 1). Требовалось найти маршрут, позволяющий начать движение в любой из частей города, побывать в каждой из четырех частей и вернуться в исходную точку, пройдя в точности один раз по каждому из мостов.





Двудольный граф

Двудольный граф - это граф, в котором вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что всякое ребро соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2.

Полный двудольный граф - это граф, в котором каждая вершина одного подмножества соединена ребром с каждой вершиной другого подмножества.

Планарный граф - граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер.

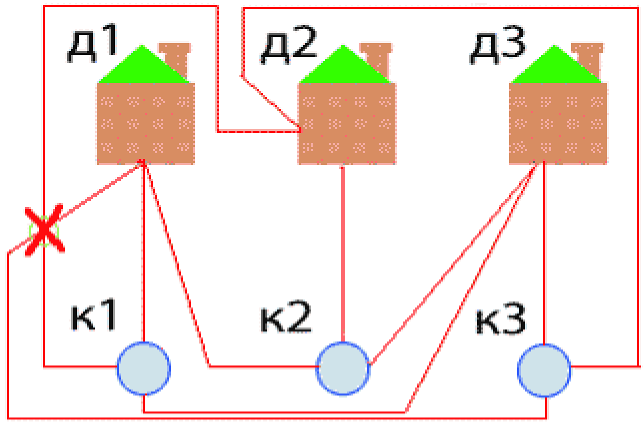
Области, на которые граф разбивает поверхность, называются *гранями*.

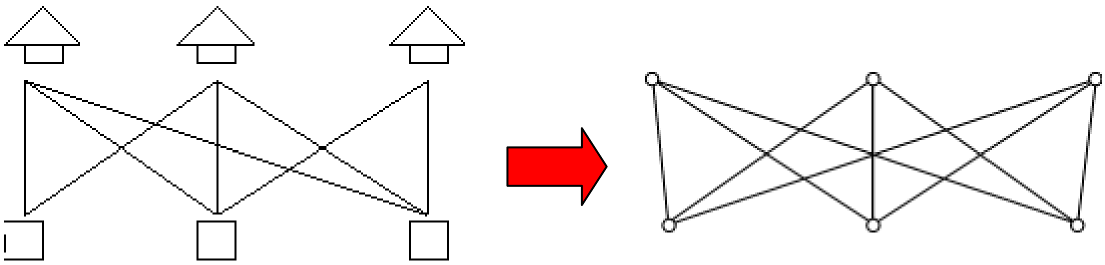
Формула Эйлера

Теорема. Для связного плоского графа справедливо следующее соотношение между количеством вершин *В*, ребер *Р* и граней *Г* (включая внешнюю грань):

$$В - Р + Г = 2.$$

Задача о трех домах и трех колодцах





Имеется 3 дома и 3 колодца. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались.

Эта задача была решена Куратовским в 1930 году. Для решения задачи было введено понятие планарного графа.

Для решения этой задачи использовалась теорема, доказанная Эйлером в 1752 г., которая является одной из основных в теории графов.

Решение. Здесь $В=6$, $Р=9$. Следовательно, согласно формуле Эйлера $Г=5$.

Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше (5×4)/2 = 10, что противоречит условию, по которому их число равно 9.

Таким образом, ответ в задаче отрицателен: нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.