

### 3.3 Отношение эквивалентности

**Определение 3.4.** Бинарное отношение  $R^{(2)} \subseteq A^2$  называется *отношением эквивалентности* (на множестве  $A$ ), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

**Теорема 3.1.** Если  $R$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ , то его  $n$ -я степень  $R^n$  – отношение эквивалентности на множестве  $A^n$ ,  $n \geq 2$ .

**Определение 3.5.** Классом эквивалентности по отношению эквивалентности  $R$ , порожденным элементом  $a$ , называется множество всех таких элементов множества  $A$ , которые находятся в отношении  $R$  с элементом  $a$ .

Обозначение:

$[a]_R = \{b \in A \mid R(a, b)\}$  – класс эквивалентности по отношению эквивалентности  $R$ , порожденный элементом  $a \in A$ .

**Теорема 3.2.** 1. Классы эквивалентности или не пересекаются, или совпадают.

2. Класс эквивалентности порождается любым своим элементом.

**Следствие 3.2.1.** Отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, на классы эквивалентности.

**Определение 3.6.** Фактор-множеством множества  $A$  по отношению эквивалентности  $R$  называется множество всех классов эквивалентности по этому отношению.

Обозначение:

$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$  – фактор-множество множества  $A$  по отношению эквивалентности  $R$ .

Как правило, отношение эквивалентности обозначают  $\sim$  и говорят „эквивалентно“.

Пусть  $\sim$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ .

Записывают  $x \sim y$  и говорят „элемент  $x$  эквивалентен элементу  $y$ “.

### 3.4 Упражнения

**Задача 3.8.** Пусть  $A$  – множество студентов некоторого вуза. Является ли бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

- 1)  $R$  – множество пар студентов, получивших одинаковое количество вступительных баллов;
- 2)  $R$  – множество пар студентов, празднующих день рождения в одном месяце;
- 3)  $R$  – множество пар студентов из одной группы;
- 4)  $R$  – множество пар студентов с разных курсов.

**Задача 3.9.** Пусть  $A$  – множество месяцев года. Является ли бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

- 1)  $R$  – множество пар месяцев одного времени года;
- 2)  $R$  – множество пар месяцев разных времен года.

**Задача 3.10.** Пусть  $A$  – множество букв русского алфавита. Является ли бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

- 1)  $R$  – множество пар согласных букв одинаковой звонкости;
- 2)  $R$  – множество пар букв, содержащих или две согласные, или две гласные буквы.

**Задача 3.11.** Определяется ли отношением эквивалентности

- 1) разбиение месяцев года по временам года;
- 2) распределение студентов факультета по группам;
- 3) распределение станций метрополитена по веткам;
- 4) распределение местности на зоны пригородного сообщения?

**Задача 3.12.** Пусть  $A$  – множество прямых на плоскости. Является ли бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

- 1)  $R$  – множество пар параллельных прямых;
- 2)  $R$  – множество пар перпендикулярных прямых?

**Задача 3.13.** Является ли бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  отношением эквивалентности? Если „да“, найти фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1)  $A$  – множество натуральных чисел,  $R$  – множество пар натуральных чисел, первое из которых является делителем второго;

2)  $A$  – множество целых чисел,  $R$  – множество пар целых чисел, разность которых делится на  $m$ , где  $m \geq 1$  – заданное натуральное число.

**Задача 3.14.** Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  – подмножество множества натуральных чисел. Является ли бинарное отношение  $R$  на множестве  $A^2$  отношением эквивалентности? Если „да“, найти классы эквивалентности и фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

1)  $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$ ;

2)  $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2\}$ ;

3)  $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2\}$ ;

4)  $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (A^2)^2 \mid |y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|\}$ .

**Задача 3.15.** Пусть  $R$  – отношение эквивалентности на конечном множестве  $A$ . Верно ли, что

1) все классы эквивалентности по отношению  $R$  содержат одинаковое число элементов множества  $A$ ;

2) каждый элемент множества  $A$  принадлежит какому-нибудь классу эквивалентности по отношению  $R$ ;

3) могут быть элементы в множестве  $A$ , принадлежащие нескольким разным классам эквивалентности по отношению  $R$ ;

4) количество классов эквивалентности по отношению  $R$  не зависит от того, по каким элементам множества  $A$  они построены?