ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

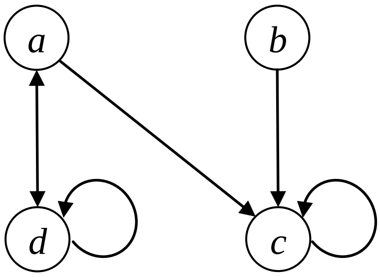
5.1. Основные определения

Наглядно-геометрически графы определяются как диаграммы, представляющие собой множество точек плоскости, некоторые из которых соединены непрерывными линиями. Такие точки называются вершинами графа и обозначаются буквами $x_1, x_2, ..., x_n$, а соединяющие их линии – ребрами графа и обозначаются буквами $a_1, a_2, ... , a_m$. Графы могут быть ориентированными, неориентированными и смешанными.

Определение. *Графом* называется алгебраическая система $\rho)$, состоящая из непустого множества V и некоторого бинарного отношения $\rho \subset V \times V$ между элементами этого множества V. Элементы множества V называются *вершинами* графа и элементы бинарного отношения ρ – *дугами* графа. Для дуги $(a, b) \in \rho$ вершины a называется *началом* и вершина b – *концом* этой дуги. При этом говорят, что такая дуга (a, b) связывает вершины a и b, исходит из вершины a и заходит в вершину b. В этом случае говорят, что вершина a является предшественником вершины b, вершина b – последователем вершины a, вершины a,b называются *смежными* и *инцидентными* дуге (a, b). Дуга $(a, a) \in \rho$, у которой начало и конец совпадают, называется *петлей* для вершины a.

Граф $G = (V, \rho)$ с конечным множеством вершин $V = \{a_1,...,a_n\}$ наглядно-геометрически изображается специальным рисунком, который состоит из n выделенных точек, изображающих вершины графа $a_1,...,a_n$, и на котором дуги $(a_i, a_j) \in \rho$ изображаются стрелками – ориентированными кривыми линиями, направленными от a_i к a_j. В случае, если $(a_i, a_j) \in \rho$ и $(a_j, a_i) \in \rho$, две противоположно направленные стрелки, соединяющие вершины a_i, a_j, изображаются одной стрелкой с двумя противоположными направлениями. Такое изображение графа G называется его геометрической реализацией.

Пример. Граф $G = (V, \rho)$ с множеством вершин $V = \{a, b, c, d\}$ и бинарным отношением $\rho = \{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ изображается следующим рисунком:

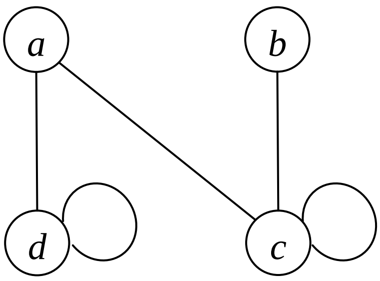


При задании графа $G = (V, \rho)$ принципиальную роль играют элементы бинарного отношения $\rho \subset V \times V$, которые определяют наличие ориентированной связи между вершинами графа. Поэтому такие графы называются также *ориентированными графами*, или кратко – *орграфами*. В случае, когда направленность связи между вершинами графа не важна, приходим к понятию неориентированного графа.

Определение. *Неориентированным графом* называется алгебраическая система $G = (V, E)$, состоящая из непустого множества V, элементы которого называются *вершинами* графа, и некоторого множества E неупорядоченных пар $\{a, b\}$ элементов a,b множества V, которые называются *ребрами* графа, соединяющими вершины a,b. В этом случае вершины a,b называются *смежными* и *инцидентными* ребру $\{a, b\}$. Ребро $\{a, a\} \in E$ называется *петлей* для вершины a.

Неориентированный граф $G = (V, E)$ с конечным множеством вершин $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ наглядно геометрически изображается специальным рисунком, который состоит из n выделенных точек, изображающих вершины графа $a_1, \ldots, a_n$, и на котором ребра $\{a_i, a_j\} \in E$ изображаются непрерывными линиями, соединяющими вершины a_i, a_j. Такое изображение графа G называется его геометрической реализацией.

Пример. На рисунке изображен неориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{a, b, c, d\}$ и множеством ребер $E = \{\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{c,c\},\{d,d\}\}$:



Определение. Неориентированный граф без петель называется *обыкновенным графом*.

Помимо ориентированных и неориентированных графов, отражающих характер связи между вершинами графа, в прикладных задачах приходится рассматривать мультиграфы и взвешенные графы, которые отражают характер нескольких связей между вершинами графа и количественную характеристику таких связей.

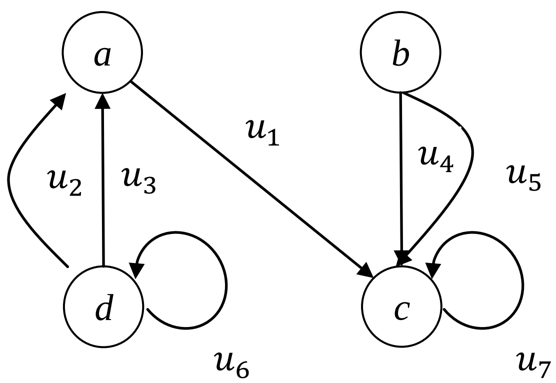
Определение. *Мультиграфом* называется алгебраическая система $G = (V, U, \alpha)$, состоящая из непустого множества V, элементы которого называются *вершинами* мультиграфа, множества U, элементы которого называются *дугами* мультиграфа и некоторого тернарного отношения $\alpha \subset V \times U \times V$, которое называется *инцидентором* мультиграфа. В случае $(a, u, b) \in \alpha$ говорят, что вершины a и b соединяются дугой u, которая исходит из вершины a и заходит в вершину b. В этом случае вершины a,b называются смежными и инцидентными дуге u.

Мультиграф $G = (V, U, \alpha)$ с конечным множеством вершин $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ наглядно-геометрически изображается специальным рисунком, который состоит из n выделенных точек, изображающих вершины графа $a_1, \ldots, a_n$, и на котором в случае $(a_i, u, a_j) \in \alpha$ дуга u изображается стрелкой, направленной от a_i к a_j.

Пример. Мультиграф $G = (V, U, \alpha)$ с множеством вершин $V = \{a, b, c, d\}$, множеством дуг $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ и инцидентором

$\alpha = \{(a, u_1, c), (d, u_2, a), (d, u_3, a), (b, u_4, c), (b, u_5, c), (d, u_6, d), (c, u_7, c)\}$

изображается следующим рисунком:

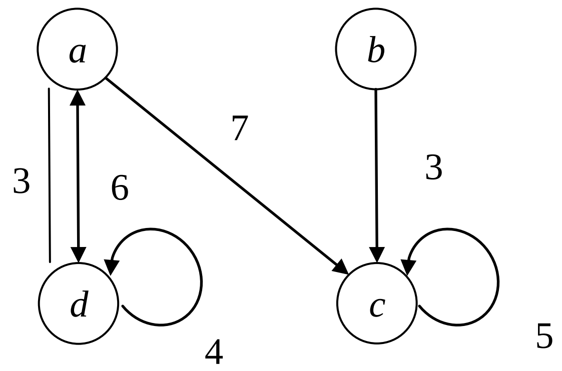


Определение. *Взвешенным графом* называется алгебраическая система $G = (V, \rho, c)$, состоящая из непустого множества V, элементы которого называются *вершинами* графа, бинарного отношения

$\rho \subset V \times V$, элементы которого называются *дугами* графа, и некоторого отображения $\nu: \rho \to \boldsymbol{R}$, которое каждой дуге $(a, b) \in \rho$ ставит в соответствие число $\nu(a, b)$, называемое *весом* этой дуги (a, b).

Взвешенный граф $G = (V, \rho, \nu)$ с конечным множеством вершин $V = \{a_1, ..., a_n\}$ наглядно геометрически изображается специальным рисунком, который состоит из n выделенных точек, изображающих вершины графа $a_1, ..., a_n$, и на котором дуги $(a_i, a_j) \in \rho$ изображаются стрелками с метками $\nu(a_i, a_j)$,, направленными от a_i к a_j.

Пример. Пусть взвешенный граф $G = (V, \rho, \nu)$ имеет множество вершин $V = \{a, b, c, d\}$, бинарное отношение $\rho = \{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ и отображение $\nu: \rho \to \boldsymbol{R}$, определяемое по правилу: $\nu(a, c) = 7, \nu(a, d) = 3, \nu(b, c) = 3$, $\nu(d, a) = 6, \nu(c, c) = 5, \nu(d, d) = 4$. Тогда граф G изображается следующим рисунком:



Способы задания графов.

1. *Теоретико-множественное задание графа* $G = (V, \rho)$ осуществляется с помощью описания множества вершин V и свойства элементов множества дуг графа.

Пример. Граф с множеством вершин $V = \{2,3,4,6\}$ и свойством элементов множества дуг $P(a, b) = "a \text{ делит } b"$ имеет множество дуг:

$$\rho = \{(a, b) \in V \times V : "a \text{ делит } b"\} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)\}.$$

2. *Геометрическое задание графа* $G = (V, \rho)$ с конечным множеством вершин $V = \{a_1, ..., a_n\}$ осуществляется при помощи геометрической реализации этого графа.

3. *Матричное задание графа* $G = (V, \rho)$ с конечным множеством вершин $V = \{a_1, ..., a_n\}$ и конечным множеством дуг $\rho = \{u_1, ..., u_m\}$ осу-

ществляется либо с помощью матрицы смежности, либо с помощью матрицы инцидентности.

Определение. *Матрицей смежности* графа G называется квадратная матрица $M(G)$ порядка n, строки и столбцы которой помечены элементами множества вершин V, и в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $M(G)_{ij}$ множества $\{0,1\}$, определяемый по правилу:

$$M(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, a_j) \in \rho, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, матрица смежности $M(G)$ графа G имеет вид:

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & \ldots & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} M(G)_{11} & \ldots & M(G)_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M(G)_{n1} & \ldots & M(G)_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример. Граф $G = (V, \rho)$ с множеством вершин $V = \{a, b, c, d\}$ и бинарным отношением $\rho = \{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ имеет следующую матрицу смежности:

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для простоты записи матрицы смежности $M(G)$ разметка ее строк и столбцов обычно явно не указывается.

Определение. *Матрицей инцидентности* графа G называется прямоугольная матрица $A(G)$ размерности $n \times m$, строки и столбцы которой помечены соответственно элементами множества вершин $V = \{a_1,\ldots,a_n\}$ и элементами множества дуг $\rho = \{u_1,\ldots,u_m\}$ и в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $A(G)_{ij}$ множества $\{0,1,-1\}$, определяемый по правилу:

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i - \text{начало дуги } u_j, \\ -1, & \text{если } a_i - \text{конец дуги } u_j, \text{ не являющейся петлей}, \\ 0, & \text{если вершина } a_i \text{ не инцидентна дуге } u_j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица инцидентности $A(G)$ графа G имеет вид:

$$
A(G)=\begin{array}{c} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & \dots & u_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} A(G)_{11} & \dots & A(G)_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A(G)_{n1} & \dots & A(G)_{nm} \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Пример. Граф $G=(V,\rho)$ с множеством вершин $V=\{a,b,c,d\}$ и бинарным отношением

$$
\rho=\{u_1=(a,c),u_2=(a,d),u_3=(b,c),u_4=(c,c),u_5=(d,a),u_6=(d,d)\}
$$

имеет следующую матрицу инцидентности:

$$
A(G)=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Для простоты записи матрицы инцидентности $A(G)$ разметка ее строк и столбцов обычно явно не указывается.

4. *Списочное задание графа* $G=(V,\rho)$ с конечным множеством вершин V осуществляется с помощью *структуры смежности*, представляющей собой список вершин, в котором для каждой вершины a указывается список ее последователей, т.е. таких вершин b, что $(a,b)\in\rho$.

Пример. Для графа $G=(V,\rho)$ с множеством вершин $V=\{a,b,c,d\}$ и бинарным отношением $\rho=\{(a,c),(a,d)(b,c),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ структура смежности имеет вид: $(a{:}\ c,d)$, $(b{:}\ c)$, $(c{:}\ c)$, $(d{:}\ a,d)$.

Аналогичные способы задания определяются для неориентированных графов, мультиграфов и взвешенных графов.

5.2. Обыкновенные графы

Напомним, что обыкновенным графом называется неориентированный граф без петель, т.е. алгебраическая система $G=(V,E)$, состоящая из непустого множества V, элементы которого называются *вершинами* графа, и некоторого множества E неупорядоченных пар $\{a,b\}$ попарно различных элементов a,b множества V, которые называются *ребрами* графа, соединяющими вершины a,b. В этом случае вершины a,b называются *смежными* и *инцидентными* ребру $\{a,b\}$. *Ребра* с общей вершиной называются *смежными*.

Для конечного графа $G = (V, E)$ число вершин обозначается символом $|V|$ и число ребер – символом $|E|$. Число ребер, инцидентных вершине $a \in V$, обозначается символом $d(a)$ и называется *степенью вершины* a. Вершина графа a называется *изолированной*, если ее степень $d(a) = 0$, и *концевой*, если $d($

Для конечного графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ вектор $(d(a_1), \ldots, d(a_n))$ называется *распределением степеней вершин* этого графа.

Лемма о рукопожатиях. Для любого графа $G = (V, E)$ сумма степеней всех его вершин равна удвоенному числу его ребер, т.е. выполняется равенство $\sum_{a \in V} d(a) = 2 \cdot |E|$.

Классификация графов. Граф $G = (V, E)$ называется:

- *пустым*, если у него нет ребер, т.е. выполняется равенство $\emptyset$; пустые графы с n вершинами обозначаются символом
- *полным*, если любая пара его попарно различных вершин соединена ребром, т.е. выполняется равенство $\{\{a, b\}$: $b\}$; полные графы с n вершинами обозначаются символом
- *двудольным*, если его множество вершин так разбивается на две доли – непустые подмножества X и Y, что любое ребро этого графа соединяет вершины из X и Y;
- *полным двудольным*, если он двудольный и любая вершина из доли X соединяется ребром с каждой вершиной из доли Y; полные двудольные графы, у которых доли X и Y состоят соответственно из n и m вершин, обозначаются символом $K_{n,m}$; при этом граф $K_{1,n}$ называется также звездой с n лучами.

Действия над графами.

Определение. Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа если все вершины графа G' являются вершинами графа и все ребра – ребрами G, т.е. выполняются условия: и $\subset E$. Если при этом выполняется равенство $V' = V$, то граф называется *остовным подграфом* графа G.

Любое подмножество $X \subset V$ множества вершин графа G определяет подграф G' этого графа G с множеством вершин X и множеством ребер E', состоящим из всех ребер графа G, которые соединяют вершины из X. Такой подграф $G' = (X, E')$ обозначается символом $\langle X \rangle$ и называется *подграфом* графа G, *порожденным множеством вершин* X.

Операцией добавления вершины a к графу $G = (V, E)$ образуется граф $G + a = (V \cup \{a\}, E)$.

Операцией добавления ребра $e = \{a, b\}$ к графу $G = (V, E)$ образуется граф $G + e = (V \cup \{a, b\}, E \cup \{e\})$.

Операцией удаления вершины a из графа $G = (V, E)$ образуется граф $G - a = (V \setminus \{a\}, E \setminus \{e \in E : a \in e\})$, который получается из графа G удалением вершины a и всех инцидентных ей ребер.

Операцией удаления ребра e образуется граф $G - e = (V, E \setminus \{e\})$, который получается из графа G удалением ребра e.

Определение. *Дополнением графа* $G = (V, E)$ называется граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ с тем же множеством вершин, в котором различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G.

Определение. *Объединением графов* $G' = (V', E')$ и $G = (V, E)$ называется граф $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$, который получается объединением множеств вершин V, V' и множеств ребер E, E' графов G, G'. В случае, когда множества вершин графов G, G' не пересекаются, т.е. $V \cap V' = \emptyset$, объединение графов $G \cup G'$ называется также *суммой* этих *графов* G, G' и обозначается $G + G'$.

Определение. *Пересечением графов* $G' = (V', E')$ и $G = (V, E)$ называется граф $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$, который получается пересечением множеств вершин V, V' и множеств ребер E, E' графов G, G'.

Определение. *Соединением графов* $G' = (V', E')$ и $G = (V, E)$ называется граф $G \mathbin{\bar{\cup}} G' = \left(V \cup V', E \cup E' \cup \left\{\{a, b\} : a \in V, b \in V', a \neq b\right\}\right)$, который получается объединением множеств вершин V, V' и множеств ребер E, E' графов G, G' с добавлением ребер, соединяющих все вершины графа G со всеми отличными от них вершинами графа G'.

Определение. *Произведением графов* $G' = (V', E')$ и $G = (V, E)$ называется граф

$$G \times G' = \left(V \times V', \left\{\{(a, a'), (b, b')\} : \{a, b\} \in E, \{a', b'\} \in E'\right\}\right),$$

у которого вершины $(a, a'), (b, b') \in V \times V'$ смежны в том и только том случае, если вершины a, b смежны в графе G и вершины a', b' смежны в графе G'.

Определение. *Композицией графов* $G' = (V', E')$ и $G = (V, E)$ называется граф

$$G[G'] = \left(V \times V', \left\{\{(a, a'), (b, b')\} : \{a, b\} \in E \text{ или } (a = b \text{ и } \{a', b'\} \in E')\right\}\right),$$

у которого вершины $(a, a'), (b, b') \in V \times V'$ смежны в том и только том случае, если вершины a, b смежны в графе G или эти вершины совпадают и вершины a', b' смежны в графе G'. Наглядно-геометрически композиция графов $G[G']$ получается заменой каждой вершины a графа G на изоморфную копию G'_a графа G' и, в случае смежности вершин a,b в графе G, добавлением ребер, соединяющим все вершины из G'_a с каждой вершиной из G'_b.

Определение. Графы $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\varphi: V \to V'$, которая сохраняет ребра этих графов, т.е. любые вершины $a, b \in V$ в том и только том случае соединены ребром $\{a, b\} \in E$ в графе G, если их образы – вершины $\varphi(a), \varphi(b)$ – соединены ребром $\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ в графе G'. В этом случае биекция φ называется *изоморфизмом* графа G на граф G' и факт изоморфности графов G, G' обозначается символом $G \cong G'$.

С наглядно-геометрической точки зрения графы G, G' изоморфны в том и только том случае, если на геометрической реализации графа G можно так переобозначить вершины, что получится геометрическая реализация графа G'. С алгебраической точки зрения изоморфность графов G, G' равносильна тому, что их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов.

Инвариантом графа G называется математический объект (например, число, вектор, фиксированный граф и др.), который сохраняется при действии изоморфизмов. Важным примером инварианта конечного графа является распределение степеней его вершин $(d(a_1),\ldots,d(a_n))$, записанное в порядке их возрастания: $d(a_1) \le \ldots \le d(a_n)$.

5.3. Связность графа

Определение. *Маршрутом* графа $G = (V, E)$ называется последовательность его смежных ребер вида $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$. Такой маршрут обозначается

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{m-1} \to v_m$$

и называется маршрутом из вершины v_0 в вершину v_m, или кратко (v_0, v_m)-маршрутом. При этом v_0 называется *началом маршрута*, v_m – *концом маршрута* и говорят, что (v_0, v_m)-маршрут соединяет вершины v_0, v_m. Число m ребер маршрута называется *длиной маршрута*.

Вершины графа G называются *связными*, если в этом графе они соединяются некоторым маршрутом, и несвязными в противном случае.

Классификация маршрутов.

Маршрут называется:

– *цепью*, если все его ребра различны;

– *простой цепью*, если различны все его вершины, за исключением, быть может, его начала и конца;

– *замкнутой цепью*, если он является цепью, у которой начало и конец совпадают;

– *циклом*, если он является замкнутой простой цепью, содержащей по крайней мере одно ребро.

Отношение связности $\equiv$ на множестве вершин графа $G = (V, E)$ определяется по правилу: $v_0 \equiv v_m$ в том и только том случае, если вершины v_0, v_m равные или связные. Легко видеть, что это отношение является эквивалентностью на множестве вершин графа, которое разбивает это множество на классы эквивалентности, называющиеся *компонентами связности графа. Число компонент связности* графа G обозначается символом $C(G)$.

Определение. Граф называется *связным*, если он имеет одну компоненту связности, т.е. любые две различные вершины такого графа соединяются цепью. В противном случае граф называется *несвязным*.

Теорема. Граф в том и только том случае является связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся графов.

Лемма 1. Для любого графа G с матрицей смежности A справедливы следующие утверждения:

1) матрица $B = A^k$ является матрицей маршрутов длины k графа G, т.е. в матрице B элемент $b_{ij} = 1$ в том и только том случае, если в графе G есть (v_i, v_j)-маршрут длины k;

2) если E – единичная матрица порядка n, то матрица

$$C = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

является матрицей отношения связности графа G, т.е. в матрице C элемент $c_{ij} = 1$ в том и только том случае, если вершины v_i, v_j равные или связные.

Лемма 2. Если граф G имеет n вершин, m ребер и k компонент связности, то выполняется неравенство: $m \geq n - k$. В частности, для любого связного графа с n вершинами и m ребрами справедливо неравенство: $m \geq n - 1$.

Определение. Ребро e графа G называется *мостом*, если удаление этого ребра из графа G увеличивает число компонент связности, т.е. граф $G - e$ имеет больше компонент связности, чем граф G.

Определение. Вершина v графа G называется *точкой сочленения*, если удаление этой вершины из графа G увеличивает число компонент связности, т.е. граф $G - a$ имеет больше компонент связности, чем граф G.

Лемма 3. Ребро e графа G в том и только том случае является мостом, если это ребро e не содержится в цикле.

Лемма 4. Вершина v графа G в том и только том случае является точкой сочленения, если в графе G найдутся такие вершины v_1, v_2, что любой (v_1, v_2)-маршрут проходит через вершину v.

Определение. В графе $G = (V, E)$ для любых его вершин $u, v \in V$ определяется *расстояние* $\rho(u, v)$ между этими вершинами по правилу: $\rho(u, v) = 0$, если $u = v$, $\rho(u, v) = \infty$, если вершины u, v несвязные, и $\rho(u, v) = k$, если вершины u, v связные и k – длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

С помощью расстояния для графа $G = (V, E)$ вводятся следующие числовые характеристики:

– $d(G) = \max_{u,v \in V} \rho(u, v)$ – *диаметр графа G;*

– $r(v) = \max_{x \in V} \rho(v, x)$ – *эксцентриситет вершины* v графа G;

– $r(G) = \min_{v \in V} r(v)$ – *радиус графа* G.

Вершина v_0 называется *центром графа* G, если $r(G) = r(v_0)$.

Предложение. Для любого связного графа G выполняются неравенства: $\frac{d(G)}{2} \le r(G) \le d(G)$.

Алгоритм вычисления радиуса и диаметра графа $G = (V, E)$:

1. Фиксируем вершину $v_0 \in V$ и обозначаем:

– $V_0 = \{v_0\}$ – множество вершин графа G, которые находятся на расстоянии 0 от вершины v_0;

– $V_1 = \{v : \{v, v_0\} \in E\}$ – множество вершин графа G, которые находятся на расстоянии 1 от вершины v_0;

– $V_2 = \{v : v \notin V_0 \cup V_1$ и $\{v, v_1\} \in E$ для некоторого $v_1 \in V_1\}$ – множество вершин графа G, которые находятся на расстоянии 2 от вершины v_0, и так далее.

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не найдется число $k \le n$, для которого $V_k \ne \emptyset$ и $V_{k+1} = \emptyset$.

2. В результате можно определить расстояние от вершины до любой вершины v из множества $V' = \bigcup_{i=0}^{k} V_i$ как наименьшее значение индекса i множества V_i, которому принадлежит вершина v. Очевидно, что множество V' является компонентой связности графа G, содержащей вершину v_0. Поэтому для всех остальных вершин V полагаем $\rho($

В частности, для связного графа G выполняется равенство и, значит, по определению В результате вычисления значений эксцентриситета для всех вершин находим радиус и диаметр графа по формулам: и

5.4. Деревья и остовы графов

Определение. *Деревом* называется связный граф без циклов.

Теорема. Для связного графа следующие условия эквивалентны:

1) G – дерево;
2) любые две вершины графа G соединяются единственной цепью;
3) $|E| = |V|$ т.е. число ребер графа G на единицу меньше, чем число его вершин;
4) любое ребро графа G является его мостом;
5) граф G не содержит циклов, но добавление к нему любого нового ребра приводит к образованию ровно одного простого цикла.

Определение. Граф, компоненты связности которого являются деревьями, называется *лесом.*

Лемма 1. Граф $G = (V, E)$ является лесом в том и только том случае, если он не содержит циклов. Такой лес удовлетворяет условию $|E| = |V| - C(G)$, где – число компонент связности графа G .

Определение. *Остовом* (или *каркасом*) графа называется остовной подграф этого графа, сохраняющий компоненты связности графа G. Другими словами, граф является остовом графа G, если он имеет одинаковые с графом G компоненты связности и каждая такая компонента является деревом, т.е. ограничение графа G' на каждой компоненте связности графа G является деревом.

В частности, для связного графа G с единственной компонентой связности $K = V$ остовной подграф G' является деревом, которое называется *остовным деревом* графа G.

Лемма 2. Пусть граф $G = (V, E)$ имеет n вершин, m ребер и $G)$ компонент связности. Тогда для получения остова графа G необходимо удалить из исходного графа $m - n + C(G)$ ребер. Это число называется *циклическим рангом* графа и обозначается).

Следствие. Граф G в том и только том случае является лесом, если его циклический ранг $\nu($

Пусть $c)$ – взвешенный граф, в котором отображение каждому ребру $e \in E$ ставит в соответствие действительное число), называемое весом этого ребра e. Тогда каждый остов графа G имеет *вес*

$$\sum$$

Определение. Остов T_0 взвешенного графа G называется *остовом минимального веса*, если выполняется условие

$$\min\{c \qquad \}.$$

Алгоритм построения остова минимального веса для взвешенного графа $G = (V, E, c)$:

1. Во взвешенном графе G строим остовной подграф где $\{e_1\}$ и – ребро минимального веса в графе G, т.е. $\min\{c \qquad \}$
2. Если во взвешенном графе G построен остовной подграф и $|V|$ то строим новый остовной подграф где ребро имеет минимальный вес среди ребер графа G, которые не входят в граф T_i и не имеют циклов с ребрами графа т.е. $\min\{c \qquad \}$;
3. Если же во взвешенном графе G построен остовной подграф T_i и $i = |V| - C(G)$, то этот подграф T_i является остовом минимального веса взвешенного графа G.

Алгоритм Краскала построения остова минимального веса для взвешенного графа определяется по тому же принципу, но на каждом шаге алгоритма после выбора ребра минимального веса e_i из графа G удаляются все ребра, которые образуют циклы с уже выбранными ребрами.

5.5. Обходы графов

Введенное выше для обыкновенного графа понятие цикла остается в силе для любого неориентированного мультиграфа G. При этом цикл такого мультиграфа называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра мультиграфа G, и *гамильтоновым*, если он проходит через каждую вершину мультиграфа G ровно один раз. *Мультиграф,* имеющий эйлеров или гамильтонов цикл, называется соответственно *эйлеровым* или *гамильтоновым*.

Теорема Эйлера. Мультиграф эйлеров в том и только том случае, если он связен и степени всех его вершин четные.

Алгоритм Флери построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе G:

1. Выбираем произвольную вершину a в мультиграфе G.
2. Выбираем произвольное ребро $e = \{a, b\}$ и переходим по нему в вершину b, присваиваем этому ребру номер 1, называем его пройденным и удаляем из рассматриваемого мультиграфа G.
3. Продолжаем этот процесс для очередных выбранных вершин и каждый раз увеличиваем номер очередного пройденного ребра на единицу до тех пор, пока опять не попадем в исходную вершину a. При этом, находясь в вершине x, руководствуемся правилами:

1) выбираем по возможности ребро $e = \{x, y\}$ с концом $y \neq a$;

2) не выбираем ребро, являющееся мостом рассматриваемого мультиграфа с непройденными ребрами.

4. Полученная последовательность занумерованных ребер мультиграфа G образует его эйлеров цикл.

Лемма. Если обыкновенный граф $G = (V, E)$ имеет не менее трех вершин и для любых его несмежных вершин a,b выполняется условие $d(a) + d(b) \geq |V|$, то граф G гамильтонов.

Следствие. Если обыкновенный граф $G = (V, E)$ имеет более трех вершин и для любой его вершины a выполняется условие $d(a) \geq {}^1/_2 \cdot |V|$, то граф G гамильтонов.

Пусть $G = (V, E)$ – связный обыкновенный граф и $T = (V, E')$ – остов этого графа.

Фиксируем вершину $a \in V$ и называем ее корнем дерева T. Тогда множество вершин V дерева T разбивается на непересекающиеся уровни – подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_k \subset V$, такие что:

1) $V_0 = \{a\}$ – верхний уровень состоит из корня a;

2) следующий нижележащий уровень состоит из вершин, смежных с единственной вершиной a верхнего уровня;

3) для последующих значений соответствующий нижележащий уровень V_i состоит из вершин, смежных с вершинами предыдущего уровня V_{i-1}.

В результате получаем $r(a) + 1$ уровней, где – эксцентриситет вершины a. Такое разбиение множества вершин исходного графа G на уровни позволяет организовать упорядоченный перебор всех вершин этого графа следующими двумя способами:

1) *обход графа в глубину* заключается в выборе сначала корня a и затем последовательном просмотре вершин из нижележащих слоев, смежных с предыдущими вершинами; если очередная просматриваемая вершина является концевой, то возвращаемся назад до ближайшей вершины с инцидентными ей еще не рассмотренными ребрами и аналогично просматриваем вершины другого, еще не пройденного маршрута в том же порядке;

2) *обход графа в ширину* заключается в выборе сначала корня a и затем последовательном просмотре вершин строго по слоям, перемещаясь сверху вниз.

При обходе всего множества вершин эти обходы равносильны. Однако в случае поиска одной вершины с определенными свойствами, эффективность успешного завершения того или иного обхода вершин графа определяется структурой дерева: если дерево широкое и концевые вершины расположены на сравнительно близких уровнях, то целесообразней искать такую вершину поиском в глубину; если же дерево узкое и концевые вершины достаточно далеко разбросаны по уровням, то целесообразней искать такую вершину поиском в ширину.

Если при решении задача A разбивается на подзадачи n), каждая из которых $A(1, i)$, в свою очередь, разбивается на подзадачи $A(2, i, 1), A(2, i, 2), \dots, A(2, i, n_{2,i})$ и так далее, то в результате получается дерево решения задачи A, которое осуществляется путем обхода такого дерева поиском в глубину или в ширину. При этом обход дерева может существенно сокращаться с помощью специального *метода ветвей и границ* за счет искусственного отсечения лишних поддеревьев.

5.6. Фундаментальные циклы

Определение. Пусть обыкновенный граф $G = (V, E)$ имеет n вершин, m ребер и $c = C(G)$ компонент связности. Тогда любой остов этого графа $T = (V, E')$ имеет n-c ребер $e_1, \ldots, e_{n-c}$, которые называются *ветвями.* Остальные m-n+c ребер $u_1, \ldots, u_{m-n+c}$ графа G, которые не вошли в остов T , называются *хордами*.

Согласно теореме о деревьях из р. 5.4 при добавлении к остову T любой из хорд u_i получается граф $T + u_i$, содержащий единственный цикл C_i, который состоит из хорды u_i и некоторых ветвей остова T, образующих единственную цепь, соединяющую вершины этой хорды u_i. Такой цикл называется *фундаментальным циклом* графа G относительно хорды u_i остова T.

Определение. Множество $\{C_1, \ldots, C_{m-n+c}\}$ всех фундаментальных циклов графа G относительно хорд остова T называется *фундаментальным множеством циклов* графа G относительно остова T. Число элементов такого множества $\nu = m - n + c$ равно цикломатическому числу $\nu(G)$ графа G.

Рассмотрим множество всех ребер E графа G в виде следующего упорядоченного набора m элементов:

$$(v_1, \ldots, v_m) = (u_1, \ldots, u_{m-n+c}, e_1, \ldots, e_{n-c}).$$

Тогда каждый фундаментальный цикл C_i определяется m-мерным булевым вектором $\bar{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ с координатами $a_{ij} = 1$, если $v_j \in C_i$, и $a_{ij} = 0$, если $v_j \notin C_i$.

В результате фундаментальное множество циклов графа G можно задать с помощью матрицы фундаментальных циклов C, строками которой являются m-мерные векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\nu$:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu m} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Псевдоциклом* графа G называется множество ребер $X \subset E$, для которого все вершины подграфа $G' = (V, X)$ имеют четные степени.

В частности, любой цикл графа G является его псевдоциклом. По аналогии с фундаментальными циклами псевдоцикл X определяется m-мерным булевым вектором $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с координатами $x_j = 1$, если $v_j \in X$, и $x_j = 0$, если $v_j \notin X$. Тогда фундаментальное множество циклов графа G является базисом векторного пространства его псевдоциклов над полем $\boldsymbol{Z}_2 = (\{0,1\},\oplus,\cdot)$, т.е. любой псевдоцикл X графа G однозначно представляется в виде линейной комбинации:

$$X = \alpha_1 \cdot C_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_{m-n+c} \cdot C_{m-n+c}$$

с булевыми коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-n+c} \in \{0,1\}$.

Определение. *Разрезом* графа $G = (V, E)$ называется множество всех ребер K, соединяющих вершины двух компонент V_1, V_2 некоторого разбиения множества вершин $V = V_1 + V_2$.

В этом случае множество ребер K отделяет вершины множества V_1 от вершин множества V_2, т.е. удаление в графе G множества ребер K приводит к тому, что вершины из множеств V_1 будут несмежны с вершинами из множества V_2.

Определение. Минимальные по включению разрезы графа G называются *коциклами* этого графа.

Другими словами, множество ребер $K \subset E$ является коциклом, если найдется такое разбиение множества вершин $V = V_1 + V_2$, что K состоит из всех ребер, соединяющих вершины из множества V_1 с вершинами из множества V_2, и при этом любое собственное подмножество множества K таким свойством не обладает ни для какого разбиения множества вершин V.

Для связного графа G понятия остова и коцикла являются двойственными в том смысле, что остову графа G соответствует минимальное множество его ребер, связывающее маршрутами все его вершины, а коциклу графа G соответствует минимальное множество его ребер, отделяющее некоторые вершины графа G от всех его остальных вершин.

Теорема. В связном графе любое остовное дерево имеет, по крайней мере, одно общее ребро с каждым разрезом этого графа и любой цикл имеет четное число общих ребер с каждым разрезом этого графа.

Пусть обыкновенный граф $G = (V, E)$ имеет n вершин, m ребер, $c = C(G)$ компонент связности и $T = (V, E')$ – произвольный остов этого графа с n-c ветвями $e_1, \ldots, e_{n-c}$ и m-n+c хордами $u_1, \ldots, u_{m-n+c}$. Тогда удаление из графа G любой ветви e_i приводит к разбиению множества вершин V на две компоненты связности V_1, V_2, которые определяют минимальный по включению разрез $K_i = \{e_i, u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}\}$ графа G, состоящий из всех ребер, соединяющих вершины множества V_1 с вершинами множества V_2. Такой разрез K_i называется *фундаментальным разрезом* графа G относительно ветви e_i остова T.

Определение. Множество $\{K_1, \dots, K_{n-c}\}$ всех фундаментальных разрезов графа G относительно ветвей остова T называется *фундаментальным множеством коциклов* графа G относительно остова T. Число элементов такого множества равно значению ν
которое называется *корангом* графа G и обозначается $\nu^*(G)$.

Рассмотрим множество всех ребер E графа G в виде упорядоченного набора m элементов:

).

Тогда аналогично фундаментальным циклам каждый фундаментальный разрез определяется m-мерным булевым вектором $\bar{b}$ = с координатами $b_{ij} = 1$, если $v_j \in K_i$, и $b_{ij} = 0$, если

В результате фундаментальное множество коциклов графа G можно задать с помощью матрицы фундаментальных разрезов K, строками которой являются m-мерные векторы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{\nu^*}$:

$$\left(\qquad\qquad \right).$$

По аналогии с фундаментальными циклами фундаментальное множество коциклов графа G является базисом векторного пространства всех разрезов графа G над полем $\boldsymbol{Z}_2 = (\{0,1\}, \oplus, \cdot)$, т.е. любой разрез K графа G однозначно представляется в виде линейной комбинации:

с булевыми коэффициентами $\{0,1\}$.

5.7. Раскраски графов

Определение. Пусть – обыкновенный граф. *Раскраской* графа G называется отображение $\varphi: V \to \boldsymbol{N}$, которое любым смежным вершинам $a, b \in V$ ставит в соответствие разные значения $\varphi($
Другими словами, отображение φ таким образом ставит в соответствие каждой вершине $a \in V$ значение $\varphi(a) \in \boldsymbol{N}$, называемое *раскраской* или *цветом* этой *вершины* a, что любые смежные вершины графа G имеют различные цвета. Число цветов k такой раскраски определяется числом элементов множества значений отображения φ, т.е. $k = |\{\varphi(a) : a \in V\}|$.

Наименьшее число цветов, позволяющее раскрасить граф G, обозначается $\chi(G)$ и называется *хроматическим числом* графа G.

Примеры.

1. Наименьшее число цветов, позволяющее раскрасить полный граф K_n с n вершинами, равно числу вершин этого графа, т.е. $\chi(K_n) = n$.
2. Наименьшее число цветов, позволяющее раскрасить цикл C_n с n вершинами, равно двум для четного числа n и трем для нечетного числа n, т.е. $\chi(C_n) = 2$ для четного n и $\chi(C_n) = 3$ для нечетного n.
3. Наименьшее число цветов, позволяющее раскрасить полный двудольный граф $K_{n,m}$ с $n + m$ вершинами, равно двум, т.е. $\chi(K_{n,m}) = 2$.

Теорема. Хроматическое число любого графа G удовлетворяет условию $\chi(G) \leq \deg(G) + 1$, где $\deg(G)$ – наибольшая степень вершин графа G.

Алгоритм последовательной раскраски графа $G = (V, E)$:

1. Для произвольной вершины $a_1 \in V$ определяем раскраску $\varphi(a_1) = 1$;
2. Если вершины $a_1, \dots, a_i \in V$ раскрашены в k цветов 1,2,…,k и имеется вершина $a_{i+1} \in V \backslash \{a_1, \dots, a_i\}$, то для новой вершина a_{i+1} определяем раскраску $\varphi(a_{i+1})$ как наименьшее натуральное число, которое не используется для раскраски смежных с a_{i+1} вершин, т.е.

$$\varphi(a_{i+1}) = \min \boldsymbol{N} \backslash \left\{\varphi(a_j) : \ 1 \leq j \leq i \text{ и } \{a_{i+1}, a_j\} \in E\right\}.$$

В общем случае такая последовательная раскраска графа не является минимальной, т.е. число красок последовательной раскраски графа G может оказаться больше его хроматического числа $\chi(G)$.

5.8. Планарные графы

Определение. Граф G называется *планарным*, если он имеет геометрическую реализацию на плоскости в виде диаграммы с непересекающимися ребрами, т.е. граф G можно так наглядно-геометрически изобразить на плоскости, что никакие два его ребра не будут иметь общих точек, за исключением, быть может, общих концов этих ребер. Такое изображение графа G на плоскости называется плоским.

Пример. Полные графы и граф Петерсена являются планарными. С другой стороны, полный граф и полный двудольный граф не являются планарными.

Результатом подразбиения ребра $=\{a\ \ b\}$ в графе G называется граф $G_{a|b} = \big(V \cup \{ab\}, (E \setminus e) \cup \big\{\{a\ \ ab\}, \{ab\ \ b\}\big\}\big)$, который получается из графа G заменой ребра e на (a,b)-цепь длины два, проходящую через новую добавленную вершину ab. Легко видеть, что графы G и $G\ \ _{|b}$ одновременно планарны или нет. Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного и того же графа с помощью последовательных подразбиений ребер.

Известный критерий планарности графа дает следующая теорема.

Теорема Понтрягина – Куратовского. Граф G планарен в том и только том случае, если он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или графу $K_{3,3}$.

Результатом стягивания ребра $e = \{a\ \ b\}$ в графе называется граф $G_{\downarrow e} = \big(V \setminus \{b\}, (E \setminus \{e \in E : b \in e\}) \cup \big\{\{a, c\} : \{b, c\} \in E\big\}\big)$, который получается из графа G удалением вершины b и всех инцидентных ей ребер с последующей заменой этих ребер на смежные вершине a ребра. Легко видеть, что графы G и $G_{\downarrow e}$ одновременно планарны или нет. Граф G называется *стягиваемым* к графу G', если G' можно получить из G с помощью последовательных стягиваний ребер.

Альтернативная форма критерия планарности графа получена К. Вагнером, Ф. Харари и В. Таттом в следующем виде.

Теорема. Граф G планарен в том и только том случае, если он не содержит подграфа, стягиваемого к графу K_5 или к графу $K_{3,3}$.

Оценка хроматического числа планарных графов связана с известной гипотезой четырех красок, которая формулируется следующим образом: хроматическое число любого планарного графа не превосходит четырех, т.е. любой планарный граф может быть раскрашен четырьмя цветами. Заметим, что доказать этот результат удалось только в 1977 году с помощью существенного использования компьютерных вычислений.

5.9. Ориентированные графы

Пусть – ориентированный граф (сокращенно – орграф) с множеством вершин V и множеством дуг V. Число дуг, входящих в вершину $a \in V$, обозначается символом $d^+(a)$ и называется *полустепенью захода вершины* a. Число дуг, исходящих из вершины $a \in V$, обозначается символом $d^-(a)$ и называется *полустепенью исхода вершины* a. Вершина орграфа a называется *источником* (соответственно, *стоком*), если ее полустепень захода $d^+(a) = 0$ (соответственно, полустепень исхода $d^-(a) = 0$).

Определение. *Ориентированным маршрутом* (сокращенно – *popмаршрутом*) орграфа G называется последовательность его смежных дуг вида). Такой ормаршрут обозначается v и называется ормаршрутом из вершины в вершину v_m, или кратко (v_0, v_m)-ормаршрутом. При этом называется *началом ормаршрута*, – *концом ормаршрута* и говорят, что)-ормаршрут соединяет вершину с вершиной v_m.

Классификация ормаршрутов.

Ормаршрут называется:

– *ориентированной цепью* (сокращенно, *орцепью*), если все его дуги различны;

– *простой орцепью*, если различны все его вершины, за исключением, быть может, его начала и конца;

– *замкнутой орцепью*, если он является орцепью, у которой начало и конец совпадают;

– *ориентированным циклом* (сокращенно, *орциклом*), если он является замкнутой простой орцепью, содержащей по крайней мере одну дугу.

Отношение сильной связности на множестве вершин орграфа определяется по правилу: в том и только том случае, если вершины равные или каждая из этих вершин соединяется с другой вершиной орцепью. Легко видеть, что это отношение является эквивалентностью на множестве вершин графа, которая разбивает это множество на классы эквивалентности, называющиеся *компонентами сильной связности графа.*

Определение. Орграф называется *сильно связным*, если он имеет одну компоненту сильной связности, т.е. любая вершина такого орграфа соединяется орцепью с каждой другой его вершиной.

Теорема. Орграф в том и только том случае *сильно связен,* если в нем существует циклический ормаршрут, проходящий через все вершины этого орграфа.

Определение. *Сетью* называется взвешенный орграф, т.е. алгебраическая система $G = (V, \rho, c)$, состоящая из непустого множества вершин V, множества дуг $\rho \subset V \times V$ и некоторого отображения $c: \rho \to \boldsymbol{R}$, которое каждой дуге $(a, b) \in \rho$ ставит в соответствие число $c(a, b) \in \boldsymbol{R}$, называемое *весом* этой дуги (a, b).

Определение. *Длиной орцепи* в сети G называется сумма длин дуг, входящих в эту орцепь.

Определение. В графе $G = (V, E)$ для любых его вершин $u, v \in V$ определяется *расстояние* $\rho(u, v)$ между этими вершинами по правилу: $\rho(u, v) = 0$, если $u = v$; $\rho(u, v) = \infty$, если в сети G не существует (u, v)-орцепей, $\rho(u, v) = k$, если в сети G существует (u, v)-орцепь и k – длина кратчайшей такой орцепи.

Важные практические приложения имеет задача поиска в сети расстояний от фиксированной вершины $v_0 \in V$ до всех вершин $v \in V$.

Алгоритм Дейкстры вычисления расстояний от вершины $v_0 \in V$ *до всех вершин* $v \in V$:

1. Обозначаем $v^* = v_0, S = V \backslash \{v_0\}$ и полагаем $\alpha(v^*) = 0$, $\alpha(v) = \infty$, $\beta(v) = \emptyset$ для всех $v \in S$. Переходим к шагу 2.

2. Берем произвольную вершину $v \in \rho(v^*)$ и проверяем неравенство $\alpha(v^*) + c(v^*, v) < \alpha(v)$: если оно выполняется, то полагаем $\alpha(v) = \alpha(v^*) + c(v^*, v), \beta(v) = v^*$, в противном случае значения $\alpha(v), \beta(v)$ оставляем без изменения. Переходим к шагу 3.

3. Если $|S| = 1$ или $\alpha(v) = \infty$ для всех вершин для всех $v \in S$, то работа алгоритма заканчивается: при этом для любой вершины сети $v \neq v_0$ расстояние $\rho(v_0, v) = \alpha(v)$ и в случае $\rho(v_0, v) \neq \infty$ кратчайшая (v_0, v)-орцепь строится обратным проходом от вершины v к вершинам $\beta(v), \beta\big(\beta(v)\big)$ и так далее до тех пор, пока не достигнем начальной вершины v_0.

Если же $|S| > 1$ и $\alpha(v) \neq \infty$ для некоторой вершины $v \in S$, то находим $\min\{\alpha(v) \mid v \in S\} = \alpha(v')$ для некоторой вершины $v' \in S$ и полагаем $v^* = v'$. Переходим к шагу 2.

Контрольные вопросы для среза знаний

1) Разновидности графов: их определения и способы задания.
2) Определение и классификация маршрутов в графе.
3) Отношение связности вершин графа и компоненты связности графа.
4) Определение расстояния между вершинами графа.
5) Алгоритм вычисления радиуса и диаметра графа.
6) Определение дерева и условия, при которых связный граф является деревом.
7) Алгоритм построения остова минимального веса.
8) Определение эйлерового цикла и алгоритм Флери построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе.
9) Определение и условия существования гамильтонового цикла.
10) Обходы графа в глубину и в ширину.
11) Фундаментальное множество циклов графа и пространство псевдоциклов.
12) Разрезы графа и фундаментальное множество коциклов.
13) Определение раскраски графа и хроматического числа графа.
14) Алгоритм последовательной раскраски графа.
15) Определение и критерии планарности графа.
16) Определение и классификация ормаршрутов в ориентированном графе.
17) Отношение сильной связности вершин ориентированого графа и компоненты сильной связности такого графа.
18) Алгоритм Дейкстры вычисления расстояний в сети.