3.7. Отношение эквивалентности

Определение 3.13. Бинарное отношение на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение эквивалентности обычно обозначают символами ~ или ≡.

Примерами отношения эквивалентности являются отношение равенства на множестве действительных чисел, отношение параллельности на множестве прямых евклидовой плоскости.

Определение 3.14. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и $a \in A$. *Классом эквивалентности*, *порожденным элементом* a, называется множество $\{x \in A \mid xRa\}$.

Класс эквивалентности, порожденный элементом a, будем обозначать через a/R. Совокупность всех классов эквивалентности отношения R на множестве A обозначается через A/R.

Определение 3.15. *Представителем класса эквивалентности* называется любой элемент этого класса.

Определение 3.16. Пусть A – непустое множество. *Фактор- множеством* множества A по отношению эквивалентности R называется множество A/R всех классов эквивалентности.

Теорема 3.1 (прямая). Пусть R – отношение эквивалентности на непустом множестве A. Тогда фактор-множество A/R является разбиением множества A.

Доказательство. Так как отношение R рефлексивно, то для любого $a \in A$ имеем aRa. Это значит, что каждый элемент a множества A принадлежит классу эквивалентности a/R. Итак, имеем семейство непустых классов a/R (a/R содержит по крайней мере один элемент a) и $\bigcup_{a \in A} a/R = A$. Осталось доказать, что пересечение любых двух различных классов пусто. Для этого достаточно показать, что классы эквивалентности, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают. Пусть a/R и b/R – классы эквивалентности, имеющие общий элемент c. Тогда cRa и cRb. В силу симметричности отношения R из cRa следует aRc. Пусть x – любой элемент из a/R , тогда xRa. Имеем, xRa и aRc. Следовательно, в силу транзитивности отношения R xRc. Имеем, xRc и cRb. Тогда xRb, так как отношение R транзитивно. Следовательно, $x \in b/R$. Таким образом, $a/R \subseteq b/R$. Аналогично доказывается, что $b/R \subseteq a/R$. Следовательно, $a/R = b/R$.

Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Тогда

1) $(\forall\ a \in A)\ a \in a/R$;
2) $\bigcup\limits_{a\in A} a/R = A$;
3) $(\forall\ a, b \in A)\ \ a/R = b/R \Leftrightarrow a\,R\,b$;
4) $a/R \neq b/R \Leftrightarrow a/R \cap b/R = \varnothing$.

Пусть S – разбиение непустого множества A и R_S – бинарное отношение, определяемое следующим образом: (x,y) $\in R_S$ тогда и только, когда x и y принадлежат одному и тому же подмножеству семейства S.

Теорема 3.2 (обратная). Отношение R_S, соответствующее разбиению S непустого множества A, является отношением эквивалентности на A, причем фактор-множество A/R_S совпадает с разбиением S.

Доказательство. 1. Так как S есть разбиение, то $(\forall a \in A)\exists M_i \subseteq S : a \in M_i$. Следовательно, по определению отношения R_S, $aR_s a$, а значит R_S – рефлексивно.

2. Пусть a, b – произвольные элементы из A такие, что aR_Sb. Тогда, по определению отношения R_S, $\exists\ M_j \subseteq S$: $a, b \in M_j$. Следовательно, bR_Sa. Получили, что R_S – симметрично.

3. Пусть a, b, c – произвольные элементы из A такие, что $aR_S\, b \wedge bR_S\, c$. Следовательно, по определению отношения R_S, $\exists\ M_i, M_j \subseteq S$: $a, b \in M_i \wedge$ $b, c \in M_j$. Отсюда $b \in M_i \cap M_j$. Но тогда, по определению разбиения, $M_i = M_j$, а значит, $a, c \in M_i$, и, по определению отношения R_S, aR_Sc. Получили, что R_S – транзитивно.

Из п. 1 – 3 следует, что R_S – отношение эквивалентности. Фактор-множество A/R_S совпадает с разбиением S по определению отношения R_S.

Пример 3.10. На множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$ задано отношение $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d), (e, e)\}$. Доказать, что R является отношением эквивалентности на множестве A. Найти классы эквивалентности, на которые разбивается множество A отношением R.

Решение. Построим граф отношения R (рис. 3.4), на основании которого заключаем, что R является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, по определению, R – отношение эквивалентности. В один класс эквивалентности входят элементы, попарно связанные отношением R между собой. Значит, отношение R разбивает множество A на три класса эквивалентности: $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c, d\}$, $A_3 = \{e\}$.

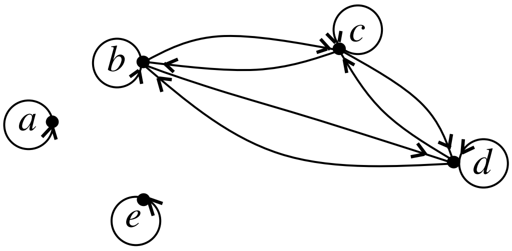

Рис. 3.4

Замечание 3.3. Частным случаем отношения эквивалентности ~ является отношение равенства элементов некоторого множества A, которое определяет разбиение множества на одноэлементные классы эквивалентности:

$(\forall\ x \in A)\ x\,/\!\sim\ = \{x\}$. В этом случае ***классов эквивалентности оказывается столько же, сколько элементов содержится в множестве A***, так как каждый элемент из A эквивалентен только самому себе.

В другом частном случае все элементы множества A эквивалентны друг другу. При этом фактор-множество $A\,/\!\sim$ состоит всего из ***одного класса*** – самого множества A.

В любом другом случае среди классов эквивалентности имеется хотя бы один класс, который содержит больше одного элемента и в то же время не совпадает с самим множеством A.

Замечание 3.4. Понятие отношения эквивалентности имеет большое значение в математике. Дело в том, что элементы, входящие в один класс эквивалентности неразличимы с точки зрения рассматриваемого отношения эквивалентности. Поэтому считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем (произвольным элементом этого класса). Это позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность представителей каждого класса эквивалентности. Свойства, которыми обладают все элементы некоторого класса эквивалентности, изучаются на одном его представителе.

Отношения эквивалентности играют важную роль в определении математических понятий.