Глава II. Отношения и функции

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1,\ldots,\ A_n$ называется множество $A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\,a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n\}$. Если $A_1=\ldots=A_n$, то множество $A_1\times\ldots\times A_n$ называется *прямой степенью* множества A и обозначается A^n.

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества $A\times B$. Если $A=B$, то отношение R называется бинарным отношением *на A*.

Удобным способом задания бинарного отношения на конечных множествах является *матрица бинарного отношения,* т. е. бинарному отношению $R\subseteq A\times B$ из множества $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ в множество $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$ соответствует матрица C размера $|A|\times|B|$, элементы которой определяются следующим образом:

$$c_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } (a_i,b_j)\in R,\\ \quad 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Областью определения бинарного отношения R называется множество

$$\mathrm{Dom}(R)=\{x\mid x\in A \text{ и существует } y \text{ такой, что } (x,y)\in R\}.$$

Областью значений бинарного отношения R называется множество

$$\mathrm{Im}(R)=\{y\mid y\in B \text{ и существует } x \text{ такой, что } (x,y)\in R\}.$$

Для бинарных отношений определены обычным образом операции объединения, пересечения, разности.

Дополнением бинарного отношения $R\subseteq A\times B$ называется множество

$$\overline{R}=(A\times B)\setminus R.$$

Обратным отношением для бинарного отношения $R\subseteq A\times B$ называется множество $R^{-1}=\{(y,x)\,|\,y\in B, x\in A, (x,y)\in R\}$.

Бинарное отношение R на множестве A называется

рефлексивным, если для всех $x\in A$ $(x,x)\in R$;

антирефлексивным, если для всех $x\in A$ $(x,x)\notin R$;

симметричным, если для всех $x,y\in A$, из того, что $(x,y)\in R$, следует $(y,x)\in R$;

антисимметричным, если для всех $x,y\in A$ из того, что $(x,y)\in R$ и $(y,x)\in R$, следует $x=y$;

транзитивным, если для всех $x,y,z\in A$ из того, что $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, следует $(x,z)\in R$.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности* и разбивает множество A на *классы эквивалентности по отношению R.*

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется *отношением нестрогого порядка.* Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется *отношением строгого порядка.*

Отношение f из A в B называется *функциональным* (или *функцией*), если для любого $x \in \mathrm{Dom}(f)$ и любых $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$

$$(x, y_1) \in f \text{ и } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 .$$

При этом говорят, что функция имеет тип f «из A в B» и пишут $f : A \to B$.

Функция f называется *всюду определенной,* если Dom(f)=A;

сюръективной, если Im(f)=B; *инъективной,* если для любых $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ и любого $y \in \mathrm{Im}(f)$ если $(x_1, y) \in f$ и $(x_2, y) \in f$, то $x_1 = x_2$.

Функция f называется *биективной* или *взаимно-однозначной,* если она всюду определена, сюръективна и инъективна.

Пример 2.1. Задать отношение «являться нестрогим подмножеством» на множестве всех подмножеств $P(M)$ множества $M = \{a, b, c\}$

$$R = \{(A, B) \mid A, B \in P(M), A \subseteq B\}.$$

Установить, какими свойствами обладает данное отношение.

▷ Множество $P(M)$ конечно $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$, поэтому отношение R зададим матрицей отношения (таблица 2.1):

Таблица 2.1

R	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\varnothing$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{a\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{b\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{c\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{a,b\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{a,c\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{b,c\}$	0	0	0	0	0	0	1	1

$\{a,b,c\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Отношение R является рефлексивным на множестве $P(M)$, так как для любого множества $A\in P(M)$ выполнено $A\subseteq A$, т. е. $\forall A\in P(M)$ $(A,A)\in R$.

Заметим, что на главной диагонали матрицы рефлексивного отношения R стоят только единицы.

Отношение R является антисимметричным на множестве $P(M)$, так как для любых множеств $A,B\in P(M)$ если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, то $A=B$, т. е. $\forall A,B\in P(M)$ $(A,B)\in R$, $(B,A)\in R$ $\Rightarrow A=B$.

Отношение R является транзитивным на множестве $P(M)$, так как для любых множеств $A,B,C\in P(M)$ если $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, то $A\subseteq C$, т. е. $\forall A,B,C\in P(M)$ $(A,B)\in R$, $(B,C)\in R$ $\Rightarrow (A,C)\in R$.

Из перечисленных свойств следует, что R является отношением нестрогого порядка на множестве $P(M)$. Более того, отношение R задает *частичный порядок* на множестве $P(M)$, так как во множестве $P(M)$ есть элементы, *сравнимые по отношению* R (например, элементы $\{a\}$ и $\{a,b\}$ сравнимы по R, так как $\{a\}\subseteq\{a,b\}$) и *несравнимые по отношению* R (например, элементы $\{a\}$ и $\{b,c\}$ несравнимы по R, так как $\{a\}\subsetneq\{b,c\}$ и $\{b,c\}\subsetneq\{a\}$). $\lhd$

А) Контрольные вопросы

2.1 Дайте определение прямого произведения двух множеств, трех множеств, n множеств. Приведите пример элементов множеств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

2.2 Докажите, что $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

2.3 Дайте определение унарного, бинарного, n-арного отношения. Приведите пример.

2.4 Приведите пример бинарного отношения, которое является:

а) рефлексивным, симметричным, не транзитивным;

б) рефлексивным, антисимметричным, не транзитивным;

в) рефлексивным, не симметричным, транзитивным;

г) не рефлексивным, антисимметричным, транзитивным.

2.5 Каким свойством обладает матрица рефлексивного бинарного отношения, симметричного бинарного отношения, антисимметричного бинарного отношения?

2.6 Приведите пример отношения эквивалентности, отношения строгого порядка, отношения нестрогого порядка.

2.7 Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна разбиение множества U на следующие классы эквивалентности:

а) $A, \overline{A}$; **б)** $(A \cap B)$, $(A \Delta B)$, $\overline{(A \cup B)}$.

2.8 Дайте определение биективной функции.

2.9 Докажите, что если между двумя множествами A и B существует биективная функция $f: A \to B$, то $|A| = |B|$.

Б) Задачи и упражнения

2.10 Даны множества $X = \{x, y\}$, $Y = \{x, y, z\}$. Задайте следующие множества:

а) $X \times Y$; **б)** $Y \times X$;

в) X^2; **г)** $X \times Y \times X$.

2.11 Найдите геометрическую интерпретацию множеств:

а) $[0;1] \times [0;2]$;

б) $[0;1] \times (0;1)$;

в) $[0;1]^3$, где $[0;1], [0;2], (0;1) \subset \mathbb{R}$.

2.12 Задайте перечислением пар следующие бинарные отношения. Постройте матрицы данных отношений:

а) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4\}, x<y\}$;

б) $R=\{(x,y) \mid x \in \{1,2,3,4,5\}, y \in \{12,16\}, x$ делит $y\}$;

в) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4,5\}, (x+y)$ четно$\}$;

г) $R=\{(x,y) \mid x,y \in A, x$ предшествует $y\}$, где $A=\{$понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресение$\}$.

2.13 Найдите Dom(R), Im(R), $\overline{R}$, R^{-1} для следующих бинарных отношений:

а) $R=\{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4\}, x \geq y\}$;

б) $R = \{(x, y) \mid x \in [0,3], y \in [-1,2], x^2 + 4y^2 \leq 4\}$;

в) $R = \{(x, y) \mid x \in [0,1], y \in [0,4], x^3 = y\}$;

г) $R = \{(a,b) \mid a,b \in P(M), a \subseteq b\}$, где $M=\{x,y\}$.

2.14 Для отношения $R=\{(x,y) \mid x,y \in M, x \geq y\}$, $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:

а) постройте матрицу отношения;

б) найдите область определения $\mathrm{Dom}(R)$;

в) найдите область значений $\mathrm{Im}(R)$;

г) найдите образы $R(2)$ и $R(5)$ элементов относительно данного отношения;

д) найдите образы множеств $R(\{2,5\})$ и $R(\{2,3\})$;

е) найдите прообразы элементов $R^{-1}(2)$ и $R^{-1}(5)$;

ж) найдите прообразы множеств $R^{-1}(\{2,5\})$ и $R^{-1}(\{2,3,5\})$;

з) задайте дополнение $\overline{R}$ и обратное отношение R^{-1};

и) докажите, что R является отношением нестрогого порядка на *M*.

2.15 Определите, выполняются ли для следующих отношений свойства рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности:

а) отношения “быть знакомым”, “жить в одном городе”, “быть моложе” на множестве людей;

б) отношение $\geq$ на множестве $\mathbb{R}$;

в) отношение строгого включения на множестве *P(A)*, где *(A)*={1,2,…,n};

г) $R=\{(m,n) \mid m$ и n взаимно просты$\}$ на множестве $\mathbb{N}$;

д) $R=\{(m,n) \mid m\text{-}n=2\}$ на множестве $\mathbb{N}$;

е) $R=\{(x,y) \mid (x+2y)$ делится на $3\}$ на множестве $\mathbb{Z}$;

ж) $R=\{((x,y),(u,v)) \mid x+v=y+u\}$ на множестве $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2.16 Для отношения $R=\{(x,y) \mid x,y\in M$, x и y имеют один и тот же остаток от деления на $3\}$, $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:

а) постройте матрицу отношения *R*;

б) докажите, что *R* является отношением эквивалентности на *M*;

в) разбейте множество *M* на классы эквивалентности по отношению *R*;

2.17 Докажите, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

а) $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R},\ x^2=y^2\}$;

б) $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R},\quad (x-y)\in\mathbb{Z}\}$;

в) $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}x=\operatorname{Re}y\}$.

2.18 Выясните, какие из следующих подмножеств множества $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ являются функциями из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$:

а) $\{(n,2n)\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$; **б)** $\{(2n,n)\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$;

в) $\{(n^2,n)\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$; **г)** $\{(n,n+4)\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$.

2.19 Выясните, какие из следующих функций являются биективными из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$:

а) $f(x)=e^x$; **б)** $f(x)=x^2$;

в) $f(x)=x^3-x$; **г)** $f(x)=2x+1$;

д) $f(x)=|x|$.

В) Тестовые задания (укажите единственный верный ответ)

2.20 Декартовым произведением $A\times B$ двух множеств A и B называется…

а) множество всех произведений элементов, принадлежащих множествам A и B.

б) множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству A, а второй – множеству B;

в) множество всех неупорядоченных пар, в которых один элемент принадлежит множеству A, а другой – множеству B;

г) множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству B, а второй – множеству A;

2.21 Мощность декартового произведения $A\times B\times C$ множеств $A=\{a,b,c\}, B=\{d,e,f,g\}$ и $C=\{a,d,e\}$ равна…

а) 24;

б) 10;

в) 12;

г) 36.

2.22 Бинарное отношение $R=\{(x,y)\ |\ x,y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ 3x=2y\}$ состоит из следующих пар элементов…

а) (2,3) и (3,2);

б) (3,2) и (6,4);

в) (2,3) и (4,6);

г) (2,3), (3,2), (4,6) и (6,4).

2.23 Дано бинарное отношение $R=\{(x,y) \mid x,y\in \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ x>y\}$.

Область определения отношения R^{-1} равна…

а) {1,2,3,4,5,6,7};

б) {1,2,3,4,5,6,7,8};

в) {2,3,4,5,6,7,8};

в) {2,3,4,5,6,7}.

2.24 Дано бинарное отношение $R=\{(x,y) \mid x,y\in \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ x\geq y\}$.

Область значений отношения $\overline{R}$ равна…

а) {1,2,3,4,5,6,7};

б) {1,2,3,4,5,6,7,8};

в) {2,3,4,5,6,7,8};

г) {2,3,4,5,6,7}.

2.25 Бинарное отношение $R=\{(x,y) \mid x,y\in \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ x-y<2\}$ является…

а) рефлексивным, симметричным и транзитивным;

б) рефлексивным, несимметричным и нетранзитивным;

в) нерефлексивным, симметричным и нетранзитивным;

г) антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

2.26 Бинарное отношение $R=\{(x,y) \mid x,y\in \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ |y-x|>1\}$ является…

а) рефлексивным, симметричным и транзитивным;

б) нерефлексивным, несимметричным и нетранзитивным;

в) антирефлексивным, симметричным и нетранзитивным;

г) антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

2.27 Матрица рефлексивного бинарного отношения, заданного на конечном множестве обладает свойством…

а) главная диагональ матрицы содержит только единицы;

б) главная диагональ матрицы содержит только нули;

в) матрица симметрична относительно главной диагонали;

г) матрица имеет треугольный вид.

2.28 Бинарное отношение является отношением строгого порядка, если оно…

а) рефлексивное, симметричное и транзитивное;

б) антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное;

в) рефлексивное, антисимметричное и транзитивное.

2.29 Отношение f из A в B называется функциональным, если оно обладает следующим свойством…

а) если $f(a)=b$ и $f(a)=c$, то $b=c$;

б) если $f(a)=b$ и $f(c)=b$, то $a=c$;

в) область определения $Dom(f)=A$;

г) область значений $Im(f)=B$.

2.30 Функция f из A в B является взаимно-однозначной (биекцией), если она…

а) всюду определена и инъективна;

б) всюду определена и сюръективна;

в) инъективна и сюръективна;

г) всюду определена, инъективна и сюръективна.