Глава 2
Комбинаторные схемы

В этой главе будет сделан обзор комбинаторных формул, наиболее важных для вычислительных задач. Мы не ставим себе целью сделать этот обзор всеобъемлющим, а хотим сосредоточить внимание читателя на таких формулах, которые он мог бы недооценить или даже совсем не заметить. Заинтересованному читателю рекомендуется обратиться к специальной литературе.

Введем следующие обозначения. Множества будем обозначать заглавными буквами. Множества состоят из элементов, которые будем обозначать малыми буквами. Так, запись $a \in A$ обозначает, что элемент a принадлежит множеству A. Такие множества будем изображать перечислением элементов, заключая их в фигурные скобки. Например, $\{a, b, x, y\}$. Количество элементов в множестве называется мощностью и записывается как $|A|$.

Пусть имеются два множества A и B. Рассмотрим все пары элементов при условии, что первый элемент берется из множества A, а второй — из множества B. Полученное таким образом множество называется прямым произведением $A \times B$ множеств A и B. Напомним некоторые операции над множествами, которыми время от времени будем пользоваться.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ — прямое произведение множеств.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение множеств.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение множеств.
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ — разность множеств.
U — универсальное множество.
$\varnothing$ — пустое множество.
$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$ — дополнение множества.

2.1. Правило суммы

Пусть A и B — конечные множества такие, что $A \cap B = \varnothing$, $|A| = m$ и $|B| = n$. Тогда $|A \cup B| = |A| + |B| = m + n$.

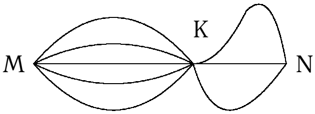
Интерпретация. Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами, а элемент $b \in B$ — n способами, то выбор элемента $x \in A \cup B$ можно осуществить $m + n$ способами. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — попарно непересекающиеся множества, $X_i \cap X_j = \varnothing$, где $i \neq j$. Тогда, очевидно, выполняется равенство $|\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i| = \sum\limits_{i=1}^{k} |X_i|$.

2.2. Правило прямого произведения

Пусть A и B — конечные множества, $|A| = m$ и $|B| = n$, тогда $|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$.

Интерпретация. Если элемент $a \in A$ можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент $b \in B$ можно выбрать n способами, то выбор пары $(a, b) \in A \times B$ в указанном порядке можно осуществить способами $|A \times B| = m \cdot n$. В этом случае говорят, что выбор элементов множества A не зависит от способа выбора элементов множества B. Пусть теперь $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — произвольные множества, $|X_i| = n_i$, $i = \overline{1, k}$. Тогда $|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \,|\, x_i \in X_i, i = \overline{1, k}\}| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Задача. Найти число маршрутов из пункта M в пункт N через пункт K. Из M в K ведут 5 дорог, из K в N — 3 дороги.



Решение. Введем два множества: $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ — дороги из M в K, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ — дороги из K в N. Теперь дорогу из M в N можно представить парой (s_i, t_j), где $i = \overline{1, 5}$; $j = \overline{1, 3}$. Значит, $S \times T$ — это множество всех дорог из M в N, количество которых равно $|S \times T| = 5 \cdot 3 = 15$.

2.3. Размещения с повторениями

Задача формулируется следующим образом. Имеются предметы n различных видов: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из них составляют всевозможные расстановки длины k. Например, $a_1 a_2 a_3 a_3 a_4 a_3 a_2 a_1$ — расстановка длины 8. Такие расстановки называются размещениями с повторениями из n по k (элементы одного вида могут повторяться). Найдем общее число расстановок, среди которых две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них предметов, или порядком этих предметов. При составлении указанных расстановок длины k на каждое место можно поставить предмет любого вида. Рассмотрим множества $X_1, X_2, \ldots, X_k$ такие, что $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда все размещения с повторениями составят множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. По правилу прямого произведения получаем, что общее число размещений с повторениями из n по k равно $|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = n^k$.

Задача. Найти количество всех пятизначных чисел.

Решение. Введем пять множеств: $A_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Тогда все пятизначные числа составят прямое произведение указанных множеств $A_1 \times A_2 \times$

$A_3 \times A_4 \times A_5$. Согласно правилу прямого произведения, количество элементов в множестве $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.

2.4. Размещения без повторений

Имеются n различных предметов: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Сколько из них можно составить расстановок длины k? Две расстановки считаются различными, если они отличаются видом входящих в них элементов или порядком их в расстановке. Такие расстановки называются размещениями без повторений, а их число обозначают A_n^k. При составлении данных расстановок на первое место можно поставить любой из имеющихся n предметов. На второе место теперь можно поставить только любой из $n-1$ оставшихся. И, наконец, на k-е место — любой из $n-k+1$ оставшихся предметов. По правилу прямого произведения получаем, что общее число размещений без повторений из n по k равно $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$. Напомним, что $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ и $0! = 1$.

З а д а ч а. В хоккейном турнире участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами могут быть распределены медали?

Р е ш е н и е. 17 команд претендуют на 3 места. Тогда тройку призеров можно выбрать способами $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$.

2.5. Перестановки

При составлении размещений без повторений из n по k мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов. Но если брать расстановки, которые включают все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называются перестановками из n элементов, а их число обозначается P_n. Следовательно, число перестановок равно $P_n = A_n^n = n!$. Перестановки $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ элементов $1, 2, \ldots, n$ записывают и в матричной форме $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots n \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots \pi_n \end{pmatrix}$, где верхняя строка — это порядковые номера $1, 2, \ldots, n$ позиций элементов в перестановке; нижняя строка — тот же набор чисел $1, 2, \ldots, n$, взятых в каком-либо порядке; π_j — номер элемента на j-м месте перестановки. Порядок столбцов в перестановках, записанных в матричной форме, не является существенным, так как в этом случае номер позиции каждого элемента в перестановке указывается явно в нижней строке. Например, перестановка $(3, 2, 4, 1)$ из четырех элементов может быть записана как

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,4\,1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3\,1\,4\,2 \\ 4\,3\,1\,2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\,1\,4\,3 \\ 2\,3\,1\,4 \end{pmatrix}$ и т. д.

Задача. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей, чтобы они «не били» друг друга?

Решение. Условие «не могли бить» означает, что на каждой горизонтали и вертикали может стоять лишь одна ладья. Ввиду этого, каждому расположению ладей на доске соответствует перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 8 \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots \pi_8 \end{pmatrix}$. Верхняя строка перестановки — это номера горизонталей, нижняя — вертикалей, пересечение которых определяет положение ладей на доске. Следовательно, число расстановок равно числу перестановок $P_8 = 8!$.

2.6. Сочетания

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в расстановке, а интересует лишь ее состав, то говорят о сочетаниях. Сочетаниями из n различных элементов по k называют все возможные расстановки длины k, образованные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Общее число сочетаний обозначают через C_n^k или $\binom{n}{k}$. Определим это число. Составим все сочетания из n по k. Затем переставим в каждом сочетании элементы всеми возможными способами. Теперь мы получили расстановки, отличающиеся либо составом, либо порядком, т. е. это все размещения без повторений из n по k. Их число равно A_n^k. Учитывая, что каждое сочетание дает $k!$ размещений, то по правилу произведения можно записать $C_n^k \times k! = A_n^k$. Тогда $C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ или $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ и $C_n^k = C_n^{n-k}$.

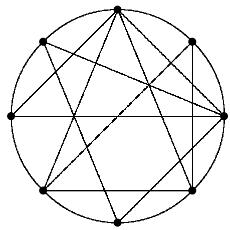
Интерпретация. Если рассмотреть корзину, содержащую n различных шаров, то способов выбрать из нее k шаров и оставить $n-k$ шаров как раз и будет равно числу сочетаний C_n^k. Или, наоборот, оставить в корзине k и выбрать $n-k$ шаров можно способами C_n^{n-k}.

Задача. Используя только определение числа сочетаний, доказать *правило суммы*:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \; n, k > 0. \tag{2.1}$$

Решение. Число сочетаний C_n^k — это способы выбрать k шаров из корзины, содержащей n различных шаров. Так как все шары различные, то будем полагать их пронумерованными. Все сочетания из n по k можно разделить на две группы. К первой группе отнесем сочетания, в которых нет первого шара. Число таких сочетаний равно C_{n-1}^{k}. Ко второй группе отнесем сочетания длины k, которые содержат первый шар. Число таких сочетаний равно C_{n-1}^{k-1}. Следовательно, $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$.

Задача. На окружности произвольным образом отмечают n точек. С вершинами в данных точках строят все возможные треугольники. Определить число таких треугольников.



Решение. Любые три точки, не лежащие на одной прямой, определяют треугольник. Точки окружности обладают данным свойством. Выбрать же три точки из n точек на окружности можно способами C_n^3. Следовательно, и число искомых треугольников будет равно C_n^3.

Задача. Сколько различных прямоугольников можно вырезать из клеток доски, размер которой $m \times n$?

1	2	$\cdots$	n
2			
$\vdots$			
m			

Решение. Прямоугольник однозначно определяется положением его сторон. Горизонтальные стороны могут занимать любое из $m+1$ положения. Тогда число способов их выбора равно C_{m+1}^2. Вертикальные стороны можно выбрать C_{n+1}^2 способами. По правилу прямого произведения заключаем, что количество прямоугольников равно $C_{m+1}^2 \times C_{n+1}^2$.

2.7. Сочетания с повторениями

Имеются предметы n различных видов. Число элементов каждого вида неограниченно. Сколько существует расстановок длины k, если не принимать во внимание порядок элементов? Такие расстановки называют сочетаниями с повторениями, количество и обозначение которых следующее: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$. Выведем данную формулу. Пусть $a, b, c, \ldots, d$ — это исходные различные типы элементов, количество которых n. Рассмотрим произвольное сочетание с повторениями $cbbcaccda \ldots ddaccbbb$ из данных типов элементов. Так как порядок элементов в сочетаниях не учитывается, то расстановку можно записать и так: $aa \cdots a|bb \ldots b|cc \ldots c| \ldots |dd \ldots d$, где элементы каждого из типов упорядочены и завершаются вертикальной чертой, за исключением последней серии элементов. Длина такой расстановки с учетом вертикальных линий составляет $k + (n - 1) = n + k - 1$, где k — количество элементов в расстановке; $n - 1$ — число вертикальных линий. Очевидно, что любую такую расстановку можно задать выбором из $n - 1$ места $n + k - 1$ место для положений вертикальных линий. Это можно сделать способами C_{n+k-1}^{n-1}. Промежуточные места между линиями заполняются соответствующими типами элементов.

З а д а ч а. Трое ребят собрали в саду 63 яблока. Сколькими способами они могут их разделить между собой?

Р е ш е н и е. Поставим в соответствие каждому делению яблок между ребятами сочетание с повторениями следующим способом. Типами элементов в нашем случае будут ребята. Таким образом, имеем три типа элементов $a, b, c\,(n = 3)$, из которых предстоит составить все различные расстановки длины $k = 63$. Наличие в расстановке какого–либо из элементов a, b, c отвечает принадлежности данного яблока соответствующему мальчику. Порядок элементов в такой расстановке не играет роли. При делении яблок между ребятами не важно, какое из них попадет тому или иному мальчику. Тогда число способов разделить яблоки между ребятами равно $\overline{C}_3^{63} = C_{3+63-1}^{3-1} = 2080$.

З а д а ч а. Найти количество целочисленных решений системы $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, $k \geqslant 0$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqslant 1$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующую интерпретацию решения уравнения. Каждое значение $x_i = 1_i + 1_i + \ldots + 1_i$ представим как сумму единиц, количество которых x_i. Индекс у 1_i отмечает ее принадлежность к разложению числа x_i. Таким образом, мы ввели n типов различных элементов $\{1_1, 1_2, \ldots, 1_n\}$, значение каждого из них равно единице. Теперь любое решение исходного уравнения можно представить как сумму, составленную из k произвольных единиц множества $\{1_1, 1_2, \ldots, 1_n\}$. Суммируя подобные единицы 1_i с одинаковыми индексами, можно составить соответствующие слагаемые x_i решения исходного уравнения. Данное соответствие является взаимно однозначным, откуда и следует, что число решений системы равно числу сочетаний с повторениями: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.

2.8. Перестановки с повторениями, мультимножества

Задача формулируется следующим образом. Имеются предметы k различных видов. Сколько существует перестановок из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа и т. д., n_k элементов k–го типа? Рассмотрим, например, *мультимно-*

жество $M = \{a, a, a, b, b, c, d, d, d, d\}$, в котором содержатся 3 элемента a, 2 элемента b, 1 элемент c и 4 элемента d. Мультимножество — это то же самое, что и множество, но в нем могут содержаться одинаковые элементы. Повторения элементов можно указать и другим способом: $M = \{3a, 2b, 1c, 4d\}$. Таким образом, искомые перестановки с повторениями — это перестановки элементов мультимножества. Если бы мы рассматривали все элементы множества M как различные, обозначив их $M = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, d_1, d_2, d_3, d_4\}$, то получили бы 10! перестановок, но после отбрасывания индексов многие из них оказались бы одинаковыми. Фактически каждая перестановка множества M встретилась бы ровно 3!2!1!4! раз, поскольку в любой перестановке индексы при буквах a можно расставить 3! способами, при b — 2! способами, при c — одним способом, а при d — соответственно 4! способами. Поэтому число перестановок множества M равно $10!/(3!2!1!4!)$. В применении к общему случаю те же рассуждения показывают, что число перестановок любого мультимножества (перестановки с повторениями) равно полиномиальному коэффициенту

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ общее число элементов.

Перестановки с повторениями имеют тесную связь с сочетаниями. Определим количество этих перестановок следующим образом. Из всех n мест перестановки n_1 место занимают элементы первого типа. Выбор мест для них можно сделать $C_n^{n_1}$ способами. Из оставшихся $n - n_1$ мест элементы второго типа занимают n_2 места, которые можно выбрать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Те же рассуждения показывают, что элементы k-го типа можно расположить в перестановке $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. Согласно правилу прямого произведения, число перестановок с повторениями равно

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \\ = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

З а д а ч а. Сколько существует различных перестановок из букв слова «Уссури»?

Р е ш е н и е. $P(2\text{у}, 1\text{и}, 1\text{р}, 2\text{с}) = \frac{6!}{2!1!1!2!} = 180$.