БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Подмножество R декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ называется n-арным или n-местным отношением. Если $R \subseteq M^n$, то говорят, что R - n-местное отношение на множестве M .

Пример. Файл базы данных с полями, значения которых находятся в полях $M_1, M_2, ..., M_n$ представляет собой подмножество декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, т. е. n-арное отношение.

Если $n = 1$, то отношение называется унарным. Оно отражает наличие какого либо признака у данного множества. Например, отношение $R \subset Z$ «быть четным числом» на множестве целых чисел Z является унарным.

Наиболее часто встречаются 2-местные или бинарные отношения. Если для отношения R - $(a,b) \in R$, то это обычно обозначают aRb, если же $(a,b) \notin R$, то обозначают $a\overline{R}b$.

Примеры. а) Бинарными отношения на множестве целых чисел Z являются:

O_k - «иметь одинаковый остаток от деления на k»,

O_2 - «иметь одинаковую четность».

б) Пусть M - множество целых, рациональных или вещественных чисел. Бинарными отношения на множество целых, рациональных или вещественных чисел M являются отношения $<, \leq, =, \neq, \geq, >$.

в) Пусть M - множество сотрудников фирмы. Бинарными отношения на M являются отношения:

«быть начальником»,

«не быть начальником»,

Рассмотрим способы задания отношений.

В соответствии с определением отношения являются множествами, и поэтому для их задания могут быть использованы все ранее описанные способы. Бинарные отношения, определенные на конечных множествах могут, кроме того, задаваться с помощью квадратных матриц и графов отношений.

Пусть $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$; тогда бинарное отношение $R \subseteq M^2$ задается по правилу:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i R a_j, \\ 0, \text{ если } a_i \overline{R} a_j. \end{cases}$$

Граф бинарного отношения является его геометрическим изображением и представляет собой схему, включающую

- вершины, обозначаемые точками или кружочками, соответствующие элементам множества $M = \{ a_1, a_2, ..., a_m \}$, на котором определяется отношение;
- дуги, соответствующие парам элементов, входящих в бинарные отношения, обозначаемые линиями со стрелками, направленными от вершины, соответствующей элементу a_i к вершине, соответствующей элементу a_j, если $a_i R a_j$.

Пример. Отношение R «быть делителем на множестве $M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$» может быть задано матрицей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или в виде графа:

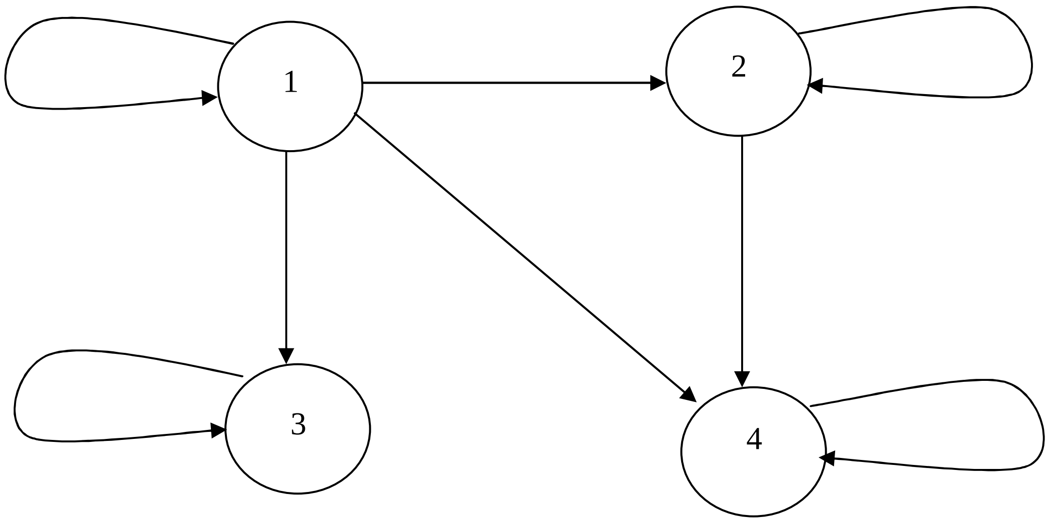

Рис. 1.11. Граф отношения R

Рассмотрим основные типы бинарных отношений.

Бинарное отношение R на множестве M называется *рефлексивным*, если для любого $a \in M$ выполняется aRa.

Примеры: 1) отношения $\leq, =, \geq$ на множестве действительных чисел;

2) отношение «не быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *антирефлексивным*, если для любого $a \in M$ выполняется $a\overline{R}a$.

Примеры: 1) отношения $<,>$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *симметричным*, если для любых
$a,b \in M$, $a \neq b$ из aRb следует bRa.

Примеры: 1) отношения $\neq$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть родственником» на множестве людей.

Бинарное отношение R на множестве M называется *антисимметричным*, если для любых $a,b \in M$, $a \neq b$ из aRb следует $b\overline{R}a$.

Примеры: 1) отношения $<,\leq,\geq,>$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть сыном» на множестве людей.

Бинарное отношение R на множестве M называется *транзитивным*, если для любых $a,b,c \in M$ из aRb и bRc следует aRc.

Примеры: 1) отношения $<,\leq,=,\geq,>$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *антитранзитивным*, если для любых $a,b,c \in M$ из aRb и bRc следует $a\overline{R}c$.

Примеры: 1) отношение «несовпадение четности» на множестве целых чисел;
2) отношение «быть непосредственным начальником» на множестве сотрудников организации.

Бинарное отношение R на множестве M называется *отношением эквивалентности*, если оно

- рефлексивно,
- симметрично,
- транзитивно.

Примеры: 1) отношение «иметь одинаковый остаток от деления на число k» на множестве целых чисел;
2) отношение «учиться в одной группе» на множестве учащихся.

Отношение эквивалентности R разбивает множество M на непересекающиеся подмножества так, что любые элементы одного подмножества находятся в отношении R, а любые элементы разных подмножеств не находятся в отношении R. Данные подмножества называются классами эквивалентности, а их количество – индексом разбиения.

Бинарное отношение R на множестве M называется *отношением нестрогого порядка*, если оно

- рефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры: 1) отношение $\leq$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть не старше» на множестве людей.

Бинарное отношение R на множестве M называется *отношением строгого порядка*, если оно

- антирефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры: 1) отношение $<$ на множестве действительных чисел;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.

Отношения строгого и нестрогого порядка называются отношениями порядка.

Элементы $a, b \in M$ называются сравнимыми по отношению порядка R, если aRb или bRa.

Множество M называется полностью упорядоченным множеством, если любые два элемента в нем сравнимы по некоторому отношению порядка R.

Примеры: 1) множество действительных чисел по отношениям $<, \leq, =, \geq, >$;
2) отношение «быть не старше» на множестве людей.

Множество M называется частично упорядоченным множеством, если в нем есть хотя бы два элемента, несравнимые по некоторому отношению порядка R.

Примеры: 1) множество комплексных чисел отношениям $<, \leq, \geq, >$;
2) отношение «быть начальником» на множестве сотрудников организации.