3.3 Кодирование деревьев

Задавать деревья можно по-разному. В гл. 2 описывался способ задания плоских корневых деревьев. Одним из экономных способов записи деревьев является *код Прюфера.*

Пусть T – некоторое дерево, вершины которого занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Тогда код Прюфера для T строится по следующим правилам.

Удаляем висячую вершину с наименьшим номером и записываем номер ее соседа. В оставшемся дереве снова удаляем висячую вершину с наименьшим номером и выписываем номер ее соседа рядом с уже записанным. Повторяем эту процедуру $n-1$ раз. Полученная последовательность из $n-1$ чисел называется кодом Прюфера для T.

Теорема 3.4. *Для любой последовательности* $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ *натуральных чисел такой, что*

$$1 \le a_i \le n \, (i = 1, 2, \ldots, n-2), a_{n-1} = n, \tag{22}$$

существует единственное дерево на множестве вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, *код Прюфера которого совпадает с данной последовательностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в силу следствия 3.3 последним числом в коде Прюфера должно быть n.

Единственность. Пусть T – дерево и $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ – его код Прюфера. Обозначим через $b_i \, (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ номер вершины, которую мы удаляли на шаге i. Очевидно, $b_i \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i\}$. Кроме того, $b_i \notin \{a_{i+1}, \ldots, a_n\}$, поскольку при $j > i$ вершина a_j принадлежит дереву $T \setminus \{b_1, \ldots, b_i\}$. И наоборот, если $k \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}\}$, то k является висячей вершиной в $T \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ (иначе на каком-нибудь шаге $q > i$ она оказалась бы соседней с висячей вершиной b_q и совпала бы с a_q). Значит,

$$b_i = \min\{k \mid k \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}\}\}. \tag{23}$$

Таким образом, последовательность $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ однозначно (по правилу (23)) определяет последовательность $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$. Поскольку (b_i, a_i) – ребро в T для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, последовательность $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ однозначно определяет T.

Существование. Пусть последовательность $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ удовлетворяет (22). По правилу (23) построим соответствующую ей последовательность $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ и проведем ребра (b_i, a_i) для всех $i \in \in \{1, \ldots, n-1\}$. Получим некоторый граф G. Обозначим

$$G_i = G \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Покажем, что

(а) G – дерево,

(б) код Прюфера для G есть $(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Для доказательства (а) достаточно убедиться, что b_i – висячая вершина в G_i для любого i, а для (б) – что номер любой висячей вершины в G_i не меньше, чем b_i.

Поскольку согласно (23) $a_i \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$, имеем $a_i \in V(G_i)$. Следовательно, b_i смежна с некоторой вершиной из G_i. Предположим, что b_i смежна в G_i с какой-то вершиной $x \neq a_i$. Тогда ребро, соединяющее b_i с этой вершиной, должно иметь вид (a_j, b_j), где $j > i$, так как $b_j \in V(G_i)$. Поскольку все b_k различны, имеем $b_j \neq b_i$. Значит, $b_i = a_j$ и $j > i$, что противоречит (23). Следовательно, наше предположение неверно, и вершина b_i смежна в G_i лишь с a_i. Итак, все G_i являются деревьями.

Предположим теперь, что в G_i есть висячая вершина k и $k < b_i$. Поскольку при построении последовательности $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ по правилам (23) мы не положили $b_i = k$, то это значит, что или $k \in \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$, или $k \in \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}\}$. Первое невозможно, так как $\{b_1, \ldots, b_{i-1}\} \cap$ $\cap V(G_i) = \emptyset$. Значит, $k = a_j$ для некоторого $j > i$. Как отмечалось, b_j – висячая вершина в G_j, смежная с a_j. Но $a_j = k$ – висячая вершина в G_i, а следовательно, и в G_j. Таким образом, G_j имеет только две вершины: a_j и b_j, т.е. $j = n - 1$ и $a_j = n$. Но $n \geq b_i > k$. ∇

Теорема 3.5. (Теорема Кэли.) *Число n-вершинных деревьев с помеченными вершинами равно n^{n-2}.*