Глава 3

Введение в алгебру логики

> Я, по крайней мере, думал, что противоречить друг другу могут только высказывания, поскольку они через умозаключения ведут к новым высказываниям, и мне кажется, что мнение, будто сами факты и события могут оказаться в противоречии друг с другом, является классическим примером бессмыслицы.
>
> *Д. Гильберт*

Алгебра логики является частью, разделом бурно развивающейся сегодня науки — *дискретной математики*. Дискретная математика занимается изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Заметим, что классическая математика, в основном, занимается изучением свойств объектов непрерывного характера, хотя само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку между ними происходит активная циркуляция идей и методов, часто возникает необходимость исследовать модели, обладающие как дискретными, так и непрерывными свойствами. К числу структур, изучаемых дискретной математикой, могут быть отнесены конечные группы, конечные графы, математические модели преобразователей информации типа конечных автоматов или машин Тьюринга и др.

Математический аппарат алгебры логики широко используется в информатике, в частности, в таких ее разделах, как проектирование ЭВМ, теория автоматов, теория алгоритмов, теория информации, целочисленное программирование и т. д.

§ 3.1. Алгебра логики. Понятие высказывания

Алгебра логики изучает свойства функций, у которых и аргументы, и значения принадлежат заданному двухэлементному множеству (например, {0, 1}). Иногда вместо термина «алгебра логики» употребляют термин «двузначная логика».

Дж. Буль
(1815–1864)

Отцом алгебры логики по праву считается английский математик XIX столетия Джордж Буль. Именно он построил один из разделов формальной логики в виде некоторой «алгебры», аналогичной алгебре чисел, но не сводящейся к ней. *Алгебра* в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться не только над числами, но и над другими математическими объектами. Существуют алгебры натуральных чисел, многочленов, векторов, матриц, множеств и т. д.

Большой вклад в становление и развитие алгебры логики внесли Августус де Морган (1806–1871), Уильям Стенли Джевонс (1835–1882), Платон Сергеевич Порецкий (1846–1907), Чарлз Сандерс Пирс (1839–1914), Андрей Андреевич Марков (1903–1979), Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) и др.

Долгое время алгебра логики была известна достаточно узкому классу специалистов. Прошло почти 100 лет со времени создания алгебры логики Дж. Булем, прежде чем в 1938 году выдающийся американский математик и инженер Клод Шеннон (1916–2001) показал, что алгебра логики применима для описания самых разнообразных процессов, в том числе функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

Исследования в алгебре логики тесно связаны с изучением высказываний (хотя высказывание — предмет изучения *формальной логики*). С помощью высказываний мы устанавливаем свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противном случае оно ложно.

Примерами высказываний на естественном языке являются предложения «Сегодня светит солнце» или «Трава растет». Каждое из этих высказываний характеризует свойства или состояние конкретного объекта (в нашем примере погоды и окружающего мира). Каждое из этих высказываний несет значение «истина» или «ложь».

Однако определение истинности высказывания далеко не простой вопрос. Например, высказывание «Число $1+2^{2^5}=4\,294\,967\,297$ — простое», принадлежащее Ферма (1601–1665), долгое время считалось истинным, пока в 1732 году Эйлер (1707–1783) не доказал, что оно ложно. В целом, обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики. Например, истинность или ложность высказывания «Сумма углов треугольника равна 180°» устанавливается геометрией, причем в геометрии Евклида это высказывание является истинным, а в геометрии Лобачевского — ложным.

Что же является высказыванием в формальной логике?

Определение 1. *Высказывание* — это языковое образование, в отношении которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности (*Аристотель*).

Это словесное определение, не являющееся математически точным, только на первый взгляд кажется удовлетворительным. Оно отсылает проблему определения высказывания к проблеме определения истинности или ложности данного языкового образования. Если рассматривать в качестве высказываний любые утвердительные предложения, то это быстро приводит к парадоксам и противоречиям. Например, предложению «*Это предложение является ложным*» невозможно приписать никакого значения истинности без того, чтобы не получить противоречие. Действительно, если принять, что предложение истинно, то это противоречит его смыслу. Если же принять, что предложение ложно, то отсюда следует, что предложение на самом деле истинно. Как видно, этому предложению осмысленно нельзя приписать какое-либо значение истинности, следовательно, оно не является высказыванием.

Причина этого парадокса лежит в *структуре* построения указанного предложения: *оно ссылается на свое собственное значение*. С помощью определенных ограничений на допустимые формы высказываний могут быть устранены такие ссылки на себя и, следовательно, устранены возникающие отсюда парадоксы.

Определение 2. *Высказывание* называется *простым* (*элементарным*), если никакая его часть не является высказыванием.

Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков. Из двух числовых выражений можно составить высказывание, соединив их знаком равенства или неравенства. Сами числовые выражения высказываниями не являются. Не являются высказываниями и равенства или неравенства, содержащие переменные. Например, предложение «$x < 12$» становится высказыванием при замене переменной каким-либо конкретным значением. Предложения типа «$x < 12$» называют *предикатами*.

Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Мы можем договориться, что абсурдное по смыслу высказывание «Крокодилы летают» является истинным, и с этим значением высказывания будем работать. Вопрос о том, летают крокодилы или нет, может волновать зоологов, но никак не математиков: им этот потрясающий факт безразличен. Введение таких ограничений дает возможность изучать высказывания алгебраическими методами, позволяет ввести операции над элементарными высказываниями и с их помощью строить и изучать составные высказывания. В информатике для точного определения понятия высказывания строятся ограниченные системы форм высказываний (формальный язык), которые используются при описании алгоритмических языков, в информационных системах, для строгого формального описания алгоритмов и т. д.

! *Алгебра логики* изучает строение (форму, структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Вопросы и задания

1. Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями, и обоснуйте свой выбор.
   а) Коля спросил: «Который час?»
   б) Как пройти в библиотеку?
   в) Картины Пикассо слишком абстрактны.
   г) Решение задачи — информационный процесс.
   д) Число 2 является делителем числа 7 в некоторой системе счисления.
2. Объясните, почему формулировка любой теоремы является высказыванием.
3. Приведите по два примера истинных и ложных высказываний из биологии, географии, информатики, истории, математики, литературы.
4. Из данных высказываний выберите истинные.
   а) Город Джакарта — столица Индонезии.
   б) Решение задачи — информационный процесс.
   в) Число 2 является делителем числа 7 в некоторой системе счисления.
   г) Меню в программе — это список возможных вариантов.
   д) Для всех x из области определения выражения $\sqrt{x+1}$ верно, что $x + 2 > 0$.

е) Сканер — это устройство, которое может напечатать на бумаге то, что изображено на экране компьютера.
ж) II + VI > VIII.
з) Мышь — устройство ввода информации.

5. В приведенных предложениях вместо многоточий поставьте подходящие по смыслу слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно». Помните, что получившиеся высказывания должны быть истинными.
   1) Для того чтобы число делилось на 4, ... чтобы оно было четным.
   2) Чтобы число делилось на 3, ... чтобы оно делилось на 9.
   3) Для того чтобы число делилось на 10, ... чтобы оно оканчивалось нулем.
   4) Чтобы произведение двух чисел равнялось нулю, ... чтобы каждое из них равнялось нулю.
   5) Чтобы произведение двух чисел равнялось нулю, ... чтобы хоть одно из них равнялось нулю.
   6) Чтобы умножить сумму нескольких чисел на какое-нибудь число, ... каждое слагаемое умножить на это число и произведения сложить.
   7) Чтобы произведение нескольких чисел разделить на какое-нибудь число, ... разделить на это число только один из сомножителей и полученное частное умножить на остальные сомножители.
   8) Для того чтобы сумма двух чисел была четным числом, ... чтобы каждое из слагаемых было четным числом.
   9) Для того чтобы число делилось на 10, ... чтобы оно делилось на 5.
   10) Для того чтобы число делилось на 6, ... чтобы оно делилось на 2 и на 3.
   11) Для того чтобы число делилось на 12, ... чтобы оно делилось на 2 и на 3.
   12) Чтобы четырехугольник был квадратом, ... чтобы все его стороны были равны.

§ 3.2. Логические операции. Таблицы истинности

Употребляемые в обычной речи связки «и», «или», «не», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда ...» и т. п. позволяют из уже заданных высказываний строить новые сложные высказывания. Истинность или ложность получаемых таким образом высказываний зависит от истинности и ложности исходных высказываний и соответствующей *трактовки связок как логических операций над высказываниями.* Для обозначения истинности, как правило, используются символы «И» и «1», а для обозначения ложности — символы «Л» и «0».

! Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает сложное высказывание при всех возможных значениях простых высказываний.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Логическая связка	Названия логической операции	Обозначения
не	Отрицание, инверсия	$\bar{\ }$, $\rceil$, $\neg$
и, а, но, хотя	Конъюнкция, логическое умножение	&, $\cdot$, $\wedge$
или	Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение	$\vee$, +
либо	Разделительная (строгая) дизъюнкция, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2	$\oplus$, Δ
если ..., то	Импликация, следование	$\Rightarrow$, $\rightarrow$
тогда и только тогда, когда	Эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	$\Leftrightarrow$, $\sim$, $\equiv$, $\leftrightarrow$

Введем перечисленные логические операции формальным образом[1].

3.2.1. Высказывание, составленное из двух высказываний путем объединения их связкой «и», называется *конъюнкцией* или *логическим умножением.* Высказывая конъюнкцию, мы утверждаем, что выполняются оба события, о которых идет речь в составляющих высказываниях. Например, сообщая:

{*Ивановы привезли на зиму уголь и закупили дрова на растопку камина*},

мы выражаем в одном высказывании свое убеждение в том, что произошли оба этих события.

[1] Это тем более необходимо, потому что связки, употребляемые в речи, неоднозначны.

Определение 3. *Конъюнкция* — логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны[1]. Логическая операция конъюнкция определяется следующей таблицей, которую называют *таблицей истинности*:

p	q	$p \& q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рассмотрим два высказывания p = {*Завтра будет мороз*} и q = {*Завтра будет идти снег*}. Очевидно, новое высказывание $p \& q$ = {*Завтра будет мороз, и завтра будет идти снег*} истинно только в том случае, когда одновременно истинны высказывания p и q, а именно, когда истинно, что завтра будет и мороз, и снег. Высказывание $p \& q$ будет ложно во всех остальных случаях: будет идти снег, но будет оттепель (т. е. не будет мороза); мороз будет, а снег не будет идти; не будет мороза, и снег не будет идти.

! В русском языке конъюнкции соответствует не только союз «и», но и другие речевые обороты, например связки «а» или «но».

3.2.2. Высказывание, состоящее из двух высказываний, объединенных связкой «или», называется *дизъюнкцией* или *логическим сложением*, *нестрогой дизъюнкцией*. В высказываниях, содержащих связку «или», указывается на существование двух возможных событий, из которых хотя бы одно должно быть осуществлено. Например, сообщая:

{*Петя читает книгу или пьет чай*},

мы имеем в виду, что хотя бы что-либо одно Петя делает. При этом Петя может одновременно читать книгу и пить чай. И в этом случае дизъюнкция будет истинна.

[1] Это определение легко распространяется на случай n высказываний ($n > 2$, n — натуральное число).

Определение 4. *Дизъюнкция* — логическая операция, которая каждым двум элементарным высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны[1]. Логическая операция дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция истинна, когда хотя бы одно из двух образующих ее высказываний истинно.

Рассмотрим два высказывания p = {*Колумб был в Индии*} и q = {*Колумб был в Египте*}. Очевидно, новое высказывание $p \vee q$ = {*Колумб был в Индии или Колумб был в Египте*} истинно как в случае, если Колумб был в Индии, но не был в Египте, так и в случае, если он не был в Индии, но был в Египте, а также в случае, если он был и в Индии, и в Египте. Но это высказывание будет ложно, если Колумб не был ни в Индии, ни в Египте.

Союз «или» может применяться в речи и в другом, «исключающем» смысле. Тогда он соответствует другому высказыванию — разделительной, или строгой дизъюнкции.

3.2.3. Высказывание, образованное из двух высказываний, объединенных связкой «либо» (точнее: «либо только ..., либо только ...»), называется *разделительной* (*строгой*) *дизъюнкцией*, *исключающим ИЛИ*, *сложением по модулю* 2.

В отличие от обычной дизъюнкции (связка «или»), в высказывании, являющемся разделительной дизъюнкцией, мы утверждаем, что произойдет только одно событие из двух. Например, сообщая:

{*Петя сидит на трибуне А либо на трибуне Б*},

мы утверждаем, что Петя сидит либо только на трибуне А, либо только на трибуне Б.

---

[1] Это определение, как и предыдущее, распространяется на случай n высказываний ($n > 2$, n — натуральное число).

Определение 5. *Строгая*, или *разделительная дизъюнкция* — логическая операция, ставящая в соответствие двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда ровно одно из двух высказываний является истинным. Логическая операция разделительная дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Рассмотрим два высказывания p = {*Кошка охотится за мышами*} и q = {*Кошка спит на диване*}. Очевидно, что новое высказывание $p \oplus q$ истинно только в двух случаях: когда кошка охотится за мышами или когда кошка мирно спит. Это высказывание будет ложно, если кошка не делает ни того, ни другого, т. е. когда оба события не происходят. Но это высказывание будет ложным и тогда, когда предполагается, что оба события будут происходить одновременно.

Вопрос. *В сложном высказывании использована связка «или». Какая это дизъюнкция: нестрогая или строгая?*

Ответ. В логике связкам «либо» и «или» придается разное значение, однако в русском языке связку «или» иногда употребляют вместо связки «либо». Чтобы определить значение связки «или», нужно проанализировать содержание высказывания по смыслу. Например, анализ высказывания {*Петя сидит на трибуне А или на трибуне Б*} однозначно укажет на логическую операцию разделительная дизъюнкция, так как человек не может находить в двух разных местах одновременно. □

3.2.4. Предложение, образованное из двух предложений, объединенных связкой «если ..., то ...», в грамматике называется условным предложением, а в логике такое высказывание называется *импликацией*.

Импликацию мы используем тогда, когда хотим показать, что некоторое событие зависит от другого события. Например, пусть человек сказал: «*Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять*». Здесь p = {*Завтра будет хорошая погода*} и q = {*Я пойду гулять*}. Ясно, что человек окажется лжецом лишь в том случае, если погода действительно окажется хорошей, а гулять он не пойдет. Если же погода будет плохой, то независимо от того, пойдет он гулять или нет, во лжи его нельзя обвинить: обещание пойти гулять он давал лишь при условии, что погода будет хорошей.

Определение 6. *Импликация* — логическая операция, ставящая в соответствие двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда *условие* (*посылка*) — истинно, а *следствие* (*заключение*) — ложно. Логическая операция импликация задается следующей таблицей истинности:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Мы видим, что импликация заведомо истинна, если условие p ложно. Другими словами, из неверного условия может следовать все, что угодно. Например, высказывание {*Если 2 > 3, то крокодилы летают*} является истинным.

Подавляющее число зависимостей между событиями можно описать с помощью импликации.

Пример 1. Истинным высказыванием {*Если на каникулах мы поедем в Петербург, то посетим Исаакиевский собор*} мы утверждаем, что в случае приезда на каникулах в Петербург Исаакиевский собор мы посетим обязательно. □

В соответствии с определением импликации истинны следующие высказывания:

а) {*Если 2 × 2 = 4, то через Смоленск протекает Днепр*}.

б) {*Если через Смоленск протекает Енисей, то* $2 \times 2 = 4$}.

в) {*Если через Смоленск протекает Енисей, то* $2 \times 2 = 5$}.

г) {*Если все ученики класса напишут контрольную работу по физике на отлично, то слоны в Африке живут*}.

д) {*Если через Смоленск протекает Енисей, то все ученики класса напишут контрольную работу по физике на отлично*}.

Отметим, что высказывания г) и д) являются истинными импликациями и в том случае, если высказывание {*все ученики класса напишут контрольную работу по физике на отлично*} является истинным, и в том случае, если оно является ложным.

Следующие две импликации являются ложными, так как в них посылки истинны, а заключения ложны:

е) {*Если* $2 \times 2 = 4$, *то через Смоленск протекает Енисей*}.

ж) {*Если через Смоленск протекает Днепр, то Луна сделана из теста*}.

! Импликация, образованная из высказываний A и B, может быть записана на естественном языке при помощи следующих предложений: «Если A, то B», «Из A следует B», «A влечет B».

Может показаться странным, что высказывание «Если A, то B» всегда истинно, если посылка (высказывание A) ложна. Но для математика это вполне естественно. В самом деле, исходя из ложной посылки, можно путем верных рассуждений получить как истинное, так и ложное утверждение.

Допустим, что $1 = 2$, тогда и $2 = 1$. Складывая эти равенства, получим $3 = 3$, т. е. из ложной посылки путем тождественных преобразований мы получили истинное высказывание.

Большинство математических теорем являются импликациями. Однако те импликации, в которых посылки (условия) и заключения (следствия) являются предложениями без взаимной (по существу) связи, не могут играть в науке важной роли. Они являются бесплодными предложениями, так как не ведут к выводам более глубокого содержания.

! В математике ни одна теорема не является импликацией, в которой условие и заключение не были бы связаны по содержанию. Достаточно часто в математических теоремах импликации формулируются в виде *только необходимого* или *только достаточного условия.*

3.2.5. Высказывание, образованное из двух высказываний при помощи связки «тогда и только тогда, когда», в логике называется *эквивалентностью.* Эквивалентность используется в тех случаях, когда необходимо выразить взаимную обусловленность. Например, сообщая:

{*Я получу паспорт тогда и только тогда, когда мне исполнится 14 лет*},

человек утверждает не только то, что после того, как ему исполнится 14 лет, он получит паспорт, но и то, что паспорт он сможет получить только после того, как ему исполнится 14 лет.

Определение 7. *Эквивалентность* — логическая операция, ставящая в соответствие двум элементарным высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. Логическая операция эквивалентность задается следующей таблицей истинности:

p	q	$p \sim q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рассмотрим возможные значения сложного высказывания, являющегося эквивалентностью: {*Учитель утверждает, что 5 в четверти ученику он поставит тогда и только тогда, когда ученик получит 5 на зачете*}.

1) Ученик получил 5 на зачете и 5 в четверти, т. е. учитель выполнил свое обещание, следовательно, высказывание является истинным.
2) Ученик не получил на зачете 5, и учитель не поставил ему 5 в четверти, т. е. учитель свое обещание сдержал, высказывание является истинным.
3) Ученик не получил на зачете 5, но учитель поставил ему 5 в четверти, т. е. учитель свое обещание не сдержал, высказывание является ложным.

4) Ученик получил на зачете 5, но учитель не поставил ему 5 в четверти, т. е. учитель свое обещание не сдержал, высказывание является ложным.

! В математических теоремах эквивалентность выражается связкой «необходимо и достаточно».

3.2.6. Рассмотренные выше операции были двуместными (бинарными), т. е. выполнялись над двумя операндами (высказываниями). В алгебре логики определена и широко применяется и одноместная (унарная) операция *отрицание*.

Определение 8. *Отрицание* — логическая операция, которая каждому элементарному высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному. Логическая операция отрицание задается следующей таблицей истинности:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

В русском языке для построения отрицания используется связка «неверно, что». Хотя связка «неверно, что» и не связывает двух каких-либо высказываний в одно, она трактуется логиками как логическая связка, поскольку, поставленная перед произвольным высказыванием, образует из него новое.

Пример 2. Отрицанием высказывания {*У меня дома есть компьютер*} будет высказывание {*Неверно, что у меня дома есть компьютер*} или, что в русском языке то же самое, {*У меня дома нет компьютера*}. □

Пример 3. Отрицанием высказывания {*Я не знаю корейского языка*} будет высказывание {*Неверно, что я не знаю корейского языка*} или {*Я знаю корейский язык*}. □

Пример 4. Отрицанием высказывания {*Все юноши 11-х классов — отличники*} является высказывание {*Неверно, что все юноши 11-х классов — отличники*} или {*Не все юноши 11-х классов — отличники*} или другими словами, {*Некоторые юноши 11-х классов — не отличники*}. □

На первый взгляд кажется, что построить отрицание к заданному высказыванию достаточно просто. Однако это не так.

Пример 5. Высказывание {*Все юноши 11-х классов — не отличники*} не является отрицанием высказывания {*Все юноши 11-х классов — отличники*}. Объясняется это следующим образом. Высказывание {*Все юноши 11-х классов — отличники*} ложно. Отрицанием к ложному высказыванию должно быть высказывание, являющееся истинным. Но высказывание {*Все юноши 11-х классов — не отличники*} не является истинным, так как среди одиннадцатиклассников есть как отличники, так и не отличники. □

Пример 6. Для высказывания {*На стоянке стоят красные «Жигули»*} следующие предложения отрицаниями являться не будут:

1) {*На стоянке стоят не красные «Жигули»*};
2) {*На стоянке стоит белый «Мерседес»*};
3) {*Красные «Жигули» стоят не на стоянке*}.

Попробуйте этот пример разобрать самостоятельно. □

Проанализировав приведенные примеры, можно вывести полезное правило.

Правило построения отрицания к простому высказыванию

При построении отрицания к простому высказыванию либо используется речевой оборот «неверно, что», либо отрицание строится к сказуемому, тогда к сказуемому добавляется частица «не», при этом слово «все» заменяется на «некоторые» и наоборот. △

В заключение приведем сводную таблицу истинности для введенных логических операций.

p	q	$\overline{p}$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \sim q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Вопросы и задания

1. В следующих высказываниях выделите простые, обозначив каждое их них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание.

   а) Число 376 четное и трехзначное.
   б) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
   в) Новый год мы встретим на даче либо на Красной площади.
   г) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
   д) Если 14 октября будет солнечным, то зима будет теплой.
   е) Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
   ж) На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу.
   з) Если вчера было воскресенье, то Дима вчера не был в школе и весь день гулял.
   и) Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то число делится на 3.
   к) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.

2. Ниже приведена таблица, левая колонка которой содержит основные логические союзы (связки), с помощью которых в естественном языке строятся сложные высказывания. Заполните правую колонку таблицы названиями наиболее подходящих логических операций.

В естественном языке	В логике
и	
или	
Неверно, что	
хотя	
в том и только в том случае	
но	
а	
Если ..., то	
однако	
тогда и только тогда, когда	
Либо ..., либо	
необходимо и достаточно	

В естественном языке	В логике
Из ... следует ...	
... влечет ...	
... равносильно ...	
... необходимо ...	
... достаточно ...	

3. Постройте отрицания следующих высказываний.

а) Сегодня в театре идет опера «Евгений Онегин».
б) Каждый охотник желает знать, где сидит фазан.
в) Число 1 есть простое число.
г) Число 1 — составное.
д) Натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, являются простыми числами.
е) Неверно, что число 3 не является делителем числа 198.
ж) Коля решил все задания контрольной работы.
з) Неверно, что любое число, оканчивающееся цифрой 4, делится на 4.
и) Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом.
к) Некоторые млекопитающие не живут на суше.

4. Являются ли отрицаниями друг друга следующие пары предложений?

а) Он — мой друг. Он — мой враг.
б) Большой дом. Небольшой дом.
в) Большой дом. Маленький дом.
г) $X > 2$. $X < 2$.

5. Пусть p = {*Ане нравятся уроки математики*}, а q = {*Ане нравятся уроки химии*}. Выразите следующие формулы на естественном языке.

а) $p \mathbin{\&} q$; г) $p \vee q$; ж) $\overline{p \mathbin{\&} q}$; к) $p \to q$;
б) $\overline{p} \mathbin{\&} q$; д) $p \vee \overline{q}$; з) $\overline{p \vee q}$; л) $p \to \overline{q}$;
в) $p \mathbin{\&} \overline{q}$; е) $\overline{p} \vee \overline{q}$; и) $\overline{p \mathbin{\&} \overline{q}}$; м) $\overline{p \to q}$.

6. В математических теоремах импликация выражается не только связкой «если ..., то». Высказывание «для того чтобы выполнялось A, достаточно, чтобы выполнялось B» соответствует импликации ($B \to A$). Запишите в символике алгебры логики импликацию «для того чтобы выполнялось A, необходимо, чтобы выполнялось B».

§ 3.3. Логические формулы. Законы алгебры логики

Математики под словом «алгебра» подразумевают науку, которая изучает некие объекты и операции над ними. Например, школьная алгебра (алгебра действительных чисел) изучает действительные числа и операции над ними. Предметом же нашего изучения являются высказывания, операции над ними, а также логические функции. В предыдущих параграфах для обозначения высказываний мы использовали буквы. Как и в алгебре действительных чисел, введем следующие определения.

Определение 9. *Логической переменной* называется переменная, значением которой может быть любое высказывание. Логические переменные (далее «переменные») обозначаются латинскими буквами, иногда снабженными индексами, как обычные алгебраические переменные: x, y, x_1, y_1, x_k, y_n и т. п.

Понятие логической формулы является формализацией понятия сложного высказывания. Введем его индуктивно.

Определение 10. *Логической формулой* является:

1) любая логическая переменная, а также каждая из двух логических констант — 0 (ложь) и 1 (истина);
2) если A и B — формулы, то $\overline{B}$ и $A*B$ — тоже формулы, где знак «$*$» означает любую из логических бинарных операций.

Формулой является, например, следующее выражение: $(x \mathbin{\&} y) \to z$. Каждой формуле при заданных значениях входящих в нее переменных приписывается одно из двух значений — 0 или 1.

Определение 11. Формулы A и B, зависящие от одного и того же набора переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, называют *равносильными* или *эквивалентными*, если на любом наборе значений переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ они имеют одинаковые значения. Для обозначения равносильности формул используется знак равенства, например $A = B$.

В дальнейшем будет показано, что любую формулу можно преобразовать к равносильной ей, в которой используются только аксиоматически введенные операции &, $\vee$ и отрицание.

Для преобразования формул в равносильные важную роль играют следующие равенства, отражающие свойства логических операций, которые по аналогии с алгеброй вещественных чисел будем называть законами:

1) **законы коммутативности**
$x \mathbin{\&} y = y \mathbin{\&} x,$
$x \vee y = y \vee x;$

2) **законы ассоциативности**
$(x \mathbin{\&} y) \mathbin{\&} z = x \mathbin{\&} (y \mathbin{\&} z),$
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z);$

3) **законы поглощения (нуля и единицы)**
$x \vee 0 = x,\ x \mathbin{\&} 1 = x\ ;$

4) **законы дистрибутивности**
$x \mathbin{\&} (y \vee z) = (x \mathbin{\&} y) \vee (x \mathbin{\&} z),$
$x \vee (y \mathbin{\&} z) = (x \vee y) \mathbin{\&} (x \vee z);$

5) **закон противоречия**
$x \mathbin{\&} \overline{x} = 0;$

6) **закон исключенного третьего**
$x \vee \overline{x} = 1;$

7) **законы идемпотентности**[1]
$x \mathbin{\&} x = x,\ x \vee x = x;$

8) **закон двойного отрицания**
$\overline{\overline{x}} = x;$

9) **законы де Моргана**
$\overline{x \mathbin{\&} y} = \overline{x} \vee \overline{y},$
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \mathbin{\&} \overline{y};$

10) **законы поглощения**
$x \vee (x \mathbin{\&} y) = x,$
$x \mathbin{\&} (x \vee y) = x.$

Любой из этих законов может быть легко доказан с помощью таблиц истинности.

Пример 7. Докажем первый закон де Моргана с использованием таблиц истинности. Построим таблицу истинности для левой и правой частей закона.

---

[1] От латинских слов *idem* — тот же самый и *potens* — сильный; дословно — равносильный.

x	y	$x \& y$	$\overline{x \& y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Так как результирующие столбцы совпали, то формулы, стоящие в левой и правой частях закона, равносильны. □

Любой из законов алгебры логики может быть доказан путем логических рассуждений.

Пример 8. Докажем первый закон поглощения $x \vee (x \,\&\, y) = x$ путем логических рассуждений. Для этого достаточно показать, что если правая часть истинна, то и левая часть истинна, и что если левая часть истинна, то и правая часть истинна.

Пусть истинна правая часть, т. е. $x = 1$, тогда в левой части дизъюнкция $x \vee (x \,\&\, y)$ истинна по определению дизъюнкции. Пусть истинна левая часть. Тогда по определению дизъюнкции истинна или формула x, или формула $(x \,\&\, y)$, или обе эти формулы одновременно. Если x ложна, тогда $(x \,\&\, y)$ ложна, следовательно, x может быть только истинной. □

Еще одним способом вывода законов являются *тождественные преобразования.*

Пример 9. Первый закон поглощения можно вывести при помощи законов поглощения единицы и дистрибутивности:

$$x \vee (x \,\&\, y) = (x \,\&\, 1) \vee (x \,\&\, y) = x \,\&\, (1 \vee y) = x. \qquad \square$$

Определение 12. Формула A называется *тавтологией* (или тождественно истинной), если она истинна при любых значениях своих переменных.

Пример 10. Тавтологией является формула $x \vee \overline{x}$, выражающая закон исключенного третьего. □

В алгебре логики дизъюнкцию еще называют логическим сложением, а конъюнкцию — логическим умножением. Если продолжать аналогию между логическими и арифметическими операциями, то операция отрицания по некоторым характеристикам аналогична унарному минусу.

! Для логических операций установлен следующий порядок вычислений: 1) отрицание; 2) конъюнкция; 3) дизъюнкция (строгая и нестрогая); 4) импликация и эквивалентность.

Поэтому при записи логических формул с использованием этих операций скобки требуется расставлять только для того, чтобы изменить порядок выполнения операций, фиксированный по умолчанию. Например, выражение $x \vee \overline{y} \ \& \ z$ трактуется как $x \vee (\overline{y} \ \& \ z)$.

Вопросы и задания

1. Какие из рассмотренных логических законов аналогичны законам алгебры чисел, а какие нет?
2. Докажите второй закон де Моргана с помощью таблиц истинности.
3. Рассмотрите два сложных высказывания:

   F_1 = {если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и другое слагаемое делится на 3};

   F_2 = {если одно слагаемое делится на 3, а другое не делится на 3, то сумма не делится на 3}.

   Формализуйте эти высказывания, постройте таблицы истинности для каждой из полученных формул и убедитесь, что результирующие столбцы совпадают.
4. Формализуйте следующие высказывания и постройте для них таблицы истинности:

   F_1 = {если все стороны четырехугольника равны и один из его углов прямой, то этот четырехугольник является квадратом};

   F_2 = {если все стороны четырехугольника равны, а он не является квадратом, то один из его углов не является прямым}.
5. Для операций импликации, эквивалентности и разделительной дизъюнкции также может быть сформулирован ряд важных свойств. В частности, каждая из этих операций может быть выражена через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Убедитесь в этом, доказав самостоятельно следующие соотношения:

   а) $a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$;

   б) $a \sim b = a \ \& \ b \vee \overline{a} \ \& \ \overline{b}$;

в) $a \oplus b = \bar{a}\ \&\ b \vee a\ \&\ \bar{b}$.
г) $a \to b = \bar{b} \to \bar{a}$;
д) $a \sim b = (a \to b)\ \&\ (b \to a)$;
е) $a \oplus b = \overline{a \sim b}$.

6. Найдите x, если $\overline{(x \vee a)} \vee \overline{(x \vee \bar{a})} = b$.

7. Какие из следующих формул являются тавтологиями?
а) $\overline{a\ \&\ \bar{a}}$;
б) $a \to (b \to a)$;
в) $(a\ \&\ b) \to a$.

8. Логическая формула называется *тождественно ложной*, если она принимает значение 0 на всех наборах входящих в нее переменных. Упростите формулу $a\ \&\ (a \to b)\ \&\ (a \to \bar{b})$ и покажите, что она тождественно ложна.

§ 3.4. Методы решения логических задач

Исходными данными в логических задачах являются высказывания. Эти высказывания и взаимосвязи между ними бывают так сложны, что разобраться в них без использования специальных методов достаточно трудно.

Многие логические задачи связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств и связей между их элементами. Для решения таких задач зачастую прибегают к помощи таблиц или графов, при этом успешность решения во многом зависит от удачно выбранной структуры таблицы или графа. Аппарат же алгебры логики позволяет построить формальный *универсальный* способ решения логических задач.

Формальный способ решения логических задач

1. Выделить из условия задачи элементарные (простые) высказывания и обозначить их буквами.
2. Записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в сложные с помощью логических операций.
3. Составить единое логическое выражение для всех требований задачи.
4. Используя законы алгебры логики, попытаться упростить полученное выражение и вычислить все его значения либо построить таблицу истинности для рассматриваемого выражения.

5. Выбрать решение — набор значений простых высказываний, при котором построенное логическое выражение является истинным.
6. Проверить, удовлетворяет ли полученное решение условию задачи. △

Рассмотрим, как можно использовать данный способ для решения задач.

Пример 11. Задача «Уроки логики».

На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй». Кто из учащихся изучал логику?

Решение. Обозначим через P_1, P_2, P_3 высказывания, состоящие в том, что соответственно первый, второй, третий учащийся изучали логику. Из условия задачи следует истинность высказывания $(P_1 \to P_2) \& \overline{(P_3 \to P_2)}$.

Воспользуемся соотношением $a \to b = \overline{a} \vee b$ (см. § **3.3**, задание 5) и упростим исходное высказывание:

$$(P_1 \to P_2) \& \overline{(P_3 \to P_2)} = (\overline{P}_1 \vee P_2) \& \overline{(\overline{P}_3 \vee P_2)} =$$

$$= (\overline{P}_1 \vee P_2) \& P_3 \& \overline{P}_2 = \overline{P}_1 \& P_3 \& \overline{P}_2 \vee P_2 \& P_3 \& \overline{P}_2.$$

Высказывание $P_2 \& \overline{P}_2$ ложно, а следовательно, ложно и высказывание $P_2 \& P_3 \& \overline{P}_2$. Поэтому должно быть истинным высказывание $\overline{P}_1 \& P_3 \& \overline{P}_2$, а это означает, что логику изучал третий учащийся, а первый и второй не изучали. □

Для решения следующей задачи составим логическое выражение, удовлетворяющее всем условиям, затем заполним для него таблицу истинности. Анализ полученной таблицы истинности позволит получить требуемый результат.

Пример 12. Задача «Кто виноват?»

По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено:

1) если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен;
2) если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Виновен ли Иванов?

Решение. Рассмотрим простые высказывания:

A = {Иванов виновен},
B = {Петров виновен},
C = {Сидоров виновен}.

Запишем на языке алгебры логики факты, установленные следствием:

$(\overline{A} \vee B) \to C$;
$\overline{A} \to \overline{C}$.

Обозначим $F = ((\overline{A} \vee B) \to C) \mathbin{\&} (\overline{A} \to \overline{C})$ — единое логическое выражение для всех требований задачи. Оно истинно. Составим для него таблицу истинности:

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решить данную задачу — значит указать, при каких значениях A полученное сложное высказывание F истинно. Для этого необходимо проанализировать все строки таблицы истинности, где $F = 1$. И если хотя бы в одном из таких случаев $A = 0$ (Иванов не виновен), то у следствия недостаточно фактов для того, чтобы обвинить Иванова в преступлении.

Анализ таблицы показывает, что высказывание F истинно только в тех случаях, когда A истинно, т. е. Иванов в ограблении виновен. □

Иногда, для того чтобы решить задачу, нет необходимости составлять единое логическое выражение, удовлетворяющее всем условиям задачи, достаточно построить таблицу истинности, отражающую каждое условие задачи, и проанализировать ее.

Пример 13. Решим текстовую задачу, построив совместную таблицу истинности для условий задачи и пранализировав ее.

Три подразделения А, В, С торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:

1) А получит максимальную прибыль только тогда, когда получат максимальную прибыль В и С,
2) Либо А и С получат максимальную прибыль одновременно, либо одновременно не получат,
3) Для того чтобы подразделение С получило максимальную прибыль, необходимо, чтобы и В получило максимальную прибыль.

По завершении года оказалось, что одно из трех предположений ложно, а остальные два истинны. Какие из названных подразделений получили максимальную прибыль?

Решение. Рассмотрим простые высказывания:

A = {А получит максимальную прибыль},

B = {В получит максимальную прибыль},

C = {С получит максимальную прибыль}.

Запишем на языке алгебры логики прогнозы, высказанные экономистами:

1) $F_1 = A \to B \,\&\, C$;

2) $F_2 = A \,\&\, C \vee \overline{A} \,\&\, \overline{C}$;

3) $F_3 = C \to B$.

Составим таблицу истинности для F_1, F_2, F_3.

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Теперь вспомним, что один из прогнозов F_1, F_2, F_3 оказался ложным, а остальные два — истинными. Эта ситуация соответствует четвертой строке таблицы.

Ответ: В и С получат максимальную прибыль. □

Если число простых высказываний в решаемой задаче больше трех, то таблица истинности насчитывает 16, 32 и более строк, заполнять ее вручную достаточно трудоемко. Умение заполнять таблицу истинности с привлечением компьютера помогает преодолеть это неудобство.

Вопросы и задания

1. Задача «Валютные махинации».

   В нарушении правил обмена валюты подозреваются четыре работника банка — Антипов (A), Борисов (B), Цветков (C) и Дмитриев (D). Известно:
   1) если A нарушил правила обмена валюты, то и B нарушил;
   2) если B нарушил, то и C нарушил или A не нарушил;
   3) если D не нарушил, то A нарушил, а C не нарушил;
   4) если D нарушил, то и A нарушил.

   Кто из подозреваемых нарушил правила обмена валюты?
2. Задача «Пятеро друзей».

   Пятеро друзей решили записаться в кружок любителей логических задач: Андрей (A), Николай (N), Виктор (V), Григорий (G), Дмитрий (D). Но староста кружка поставил им ряд условий: «Вы должны приходить к нам так, чтобы:
   1) если A приходит вместе с D, то N должен присутствовать обязательно;
   2) если D отсутствует, то N должен быть, а V пусть не приходит;
   3) A и V не могут одновременно ни присутствовать, ни отсутствовать;
   4) если придет D, то G пусть не приходит;
   5) если N отсутствует, то D должен присутствовать, но это в том случае, если не присутствует V; если же и V присутствует при отсутствии N, то D приходить не должен, а G должен прийти».

   В каком составе друзья смогут прийти на занятия кружка?
3. Решите логическую задачу, используя только алгебраические преобразования логических формул.

   Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?

4. Решите логическую задачу, используя только алгебраические преобразования логических формул.

   Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H надо отобрать шестерых специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога — B и F, синоптика — F и G, радиста — C и D, механика — C и H, врача — A и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без C и без H, C не может ехать одновременно с G, а A вместе с B?

5. Напишите программу, которая строит таблицу истинности по заданной логической формуле. Используйте для этого известный вам язык программирования или воспользуйтесь электронной таблицей.

§ 3.5. Алгебра переключательных схем

Одним из практических применений алгебры логики является область параллельно-последовательных переключательных схем.

Определение 13. *Переключательная схема* — это изображение некоторого устройства, содержащего только двухпозиционные переключатели, которые могут находиться в одном из двух состояний: замкнутое (ток проходит) или разомкнутое (ток не проходит).

Очевидно, что состояние переключателя можно кодировать числами 1 и 0. Большинство переключательных схем можно разбить на участки из последовательно или параллельно соединенных переключателей. Каждому переключателю поставим в соответствие логическую переменную, принимающую значение «истина» тогда, когда переключатель замкнут, и «ложь», если переключатель разомкнут. На схемах переключатели будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие им переменные.

При описании переключательных схем будем придерживаться следующих соглашений:

1. Все переключатели, работающие так, что они всегда либо одновременно замкнуты, либо одновременно разомкнуты, обозначаются одной и той же буквой.
2. Переключателям, соединенным параллельно, поставим в соответствие операцию дизъюнкции: ток в этой цепи (рис. 3.1, *а*) будет протекать или при замкнутом переключателе A, или при замкнутом переключателе B, или при замкнутых переключателях A и B одновременно.

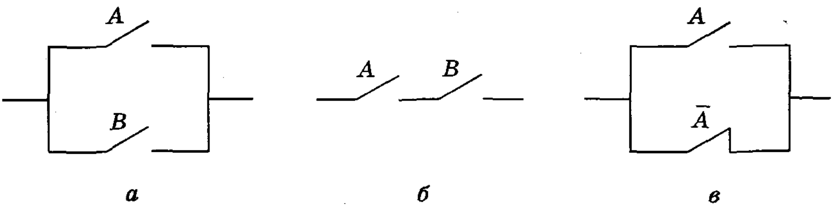


Рис. 3.1

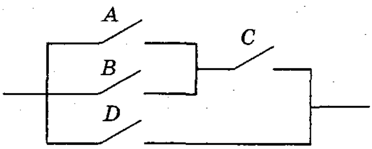
3. Переключателям, соединенным последовательно, поставим в соответствие операцию конъюнкции: ток в цепи (рис. 3.1, *б*) потечет только тогда, когда замкнут переключатель A и замкнут переключатель B.
4. Два переключателя, работающие так, что один из них замкнут, когда другой разомкнут, и наоборот, описываются формулами A и $\bar{A}$ соответственно (рис. 3.1, *в*).

! Прочитать переключательную схему — значит определить, протекает по ней ток или нет при указанных *состояниях* переключателей.

Определение 14. Две схемы, содержащие одни и те же переключатели A, B, ..., будем считать *равными*, если при одном и том же состоянии переключателей обе схемы одновременно пропускают или не пропускают ток. Из двух равных схем более *простой* будем считать ту, которая содержит меньше переключателей.

Каждой переключательной схеме можно поставить в соответствие формулу, истинную тогда и только тогда, когда схема проводит ток. В алгебре переключательных схем выполняются все законы алгебры логики. В этом достаточно просто убедиться, если построить и прочитать соответствующие этим законам схемы, а затем сравнить столбец состояния каждой схемы с результирующим столбцом таблицы истинности для соответствующей логической формулы.

Пример 14. Составим формулу для схемы, изображенной на рисунке.



Переключатели A и B соединены параллельно, следовательно, этот участок схемы описывается как дизъюнкция переменных: $A \vee B$. Далее следует последовательное соединение с переключателем C: $(A \vee B)\ \&\ C$. Рассмотренный участок цепи параллельно соединяется с переключателем D: $(A \vee B)\ \&\ C \vee D$. □

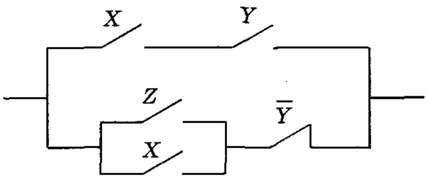
Синтез переключательной схемы — это разработка схемы, условия работы которой заданы таблицей истинности или словесным описанием. Упрощение (минимизация) переключательной схемы сводится к упрощению соответствующей ей формулы на основании законов алгебры логики.

Вопросы и задания

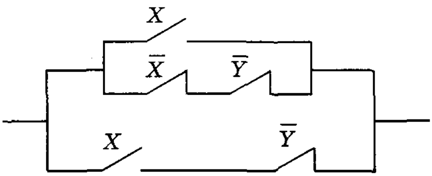
1. Каким образом интерпретируются элементы переключательных схем с помощью объектов и операций алгебры логики? Заполните следующую таблицу:

Переключательная техника	Алгебра логики
Переключатель	
Переключатель замкнут	
Переключатель разомкнут	
Соединение	
Последовательное соединение	
Параллельное соединение	
Состояние тока	
Прохождение тока	
Отключение тока	

2. Комиссия состоит из трех рядовых членов и председателя. Постройте электрическую цепь для тайного голосования, если оно производится следующим образом: каждый член комиссии при голосовании «за» нажимает кнопку. Лампочка зажигается в случаях, если предложение набрало большинство голосов или число голосов «за» и «против» равное, но за предложение «за» подан голос председателя.
3. Можно ли изображенную на рисунке электрическую цепь заменить более простой схемой, соответствующей формуле $X \vee \overline{Y}\ \&\ Z$?



4. Минимизируйте следующую переключательную схему:



§ 3.6. Булевы функции

Как было сказано выше, значение логической формулы определяется заданными значениями входящих в формулу переменных. Тем самым каждая формула может рассматриваться как способ задания *функции алгебры логики*.

Определение 15. *Логической* (булевой) *функцией* называют функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, аргументы которой x_1, x_2, ..., x_n (независимые переменные) и сама функция (зависимая переменная) принимают значения 0 или 1. Логические функции могут быть заданы табличным способом или аналитически — в виде соответствующих формул.

В общем случае булева функция от n аргументов определяется как отображение $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. Обычно совокупность значений n аргументов интерпретируют как строку нулей и единиц (бинарную строку) длины n. Существует ровно 2^n различных бинарных строк длины n. Так как на каждой такой строке некая функция может принимать значение 0 или 1, то общее количество различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}.

! Для $n = 2$ существует 16 различных булевых функций.

Рассмотрим их подробно.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_1(x, y) = 0$ — константа «ложь» ($f(x, y) \equiv 0$);
$f_2(x, y) = x \,\&\, y$ — конъюнкция;
$f_3(x, y) = \overline{x \to y}$ — отрицание импликации;
$f_4(x, y) = x$ — функция равна первому аргументу;
$f_5(x, y) = \overline{y \to x}$ — отрицание обратной импликации;
$f_6(x, y) = y$ — функция равна второму аргументу;
$f_7(x, y) = x \oplus y$ — разделительная (строгая) дизъюнкция (исключающее ИЛИ, сумма по модулю 2);
$f_8(x, y) = x \vee y$ — дизъюнкция;
$f_9(x, y) = x \downarrow y$ — стрелка Пирса[1] (отрицание дизъюнкции, ИЛИ–НЕ);
$f_{10}(x, y) = x \sim y$ — эквивалентность;
$f_{11}(x, y) = \overline{y}$ — отрицание второго аргумента;
$f_{12}(x, y) = y \to x = x \leftarrow y$ — обратная импликация;
$f_{13}(x, y) = \overline{x}$ — отрицание первого аргумента;
$f_{14}(x, y) = x \to y$ — импликация;
$f_{15}(x, y) = x \mid y$ — штрих Шеффера[2] (отрицание конъюнкции, И–НЕ);
$f_{16}(x, y) = 1$ — константа «истина» ($f(x, y) \equiv 1$).

[1] Ч. С. Пирс — американский философ, логик, математик; исследовал свойства функции $x \downarrow y$.
[2] Х. М. Шеффер — американский логик и математик; указал полноту функции $x \mid y$.

Функции, выраженные с использованием одной логической операции, называются по имени этой логической операции. Например, $f_2(x, y) = x \& y$ — конъюнкция.

С увеличением числа аргументов количество логических функций резко возрастает. Для трех переменных существует 256 различных булевых функций. Для четырех переменных — уже 65 536 функций и т. д. Пугаться резкого увеличения количества функций не следует, как будет показано ниже, при необходимости любая булева функция, может быть выражена только, например, через &, $\vee$ и отрицание.

Вопросы и задания

1. Сколько существует логических функций одной переменной?
2. Составьте сводную таблицу всех логических функций одной переменной. Запишите аналитические выражения этих функций.
3. Убедитесь, что следующие шесть функций тождественны, т. е. принимают одинаковые значения на одинаковых наборах переменных:

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \& x_1 \vee x_2;$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 \& 1 \vee x_1 \& x_3;$
$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 \& x_3 \vee 0;$
$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 \& x_3 \& (x_1 \vee \bar{x}_1);$
$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \vee x_1 \& x_3 \vee x_4 \& \bar{x}_4;$
$f_6(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 \& x_3.$

§ 3.7. Канонические формы логических формул. Теорема о СДНФ

Всякая логическая формула определяет некоторую булеву функцию. В то же время ясно, что для всякой булевой функции можно записать бесконечно много формул, ее представляющих (см. задание 3 к § 3.6). Действительно, если имеется хотя бы одна формула, выражающая булеву функцию, то, используя тождественные преобразования, можно изменить эту формулу, построив сколь угодно сложную равносильную формулу.

Одна из основных задач алгебры логики — нахождение *канонических форм* (т. е. формул, построенных по определенному правилу, канону), а также наиболее простых формул, представляющих булевы функции.

Определение 16. Если логическая функция выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание переменных, то такая форма представления называется *нормальной*.

Среди нормальных форм выделяют такие, в которых функции записываются единственным образом. Их называют *совершенными*.

! Особую роль в алгебре логики играют *классы дизъюнктивных и конъюнктивных совершенных нормальных форм*. В их основе лежат понятия элементарной дизъюнкции и элементарной конъюнкции.

Определение 17. Формулу называют *элементарной конъюнкцией*, если она является конъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания. Одну переменную или ее отрицание считают *одночленной элементарной конъюнкцией*.

Пример 15. Формулы x_2, $\overline{x}_2$, $x_1 \& x_3$, $x_1 \& x_3 \& x_1 \& \overline{x}_3$ являются элементарными конъюнкциями; первые две из них — одночленными. □

Определение 18. Формула называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций. ДНФ записываются в виде $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где каждое A_i — элементарная конъюнкция.

Пример 16. Приведем две дизъюнктивные нормальные формы: $x_2 \vee x_1 \& x_3$, $\overline{x}_2 \vee x_2 \& x_1 \vee \overline{x}_1$. □

Определение 19. Формула A от k переменных называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ), если:

1) A является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция есть конъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой конъюнкции стоит либо переменная x_i, либо ее отрицание;

2) все элементарные конъюнкции в такой ДНФ попарно различны.

Задание. *Даны формулы* $A = x_1 \,\&\, \overline{x}_2 \vee x_1 \,\&\, x_2$; $B = x_1 \vee x_2 \,\&\, x_3$ и $C = x_1 \,\&\, x_2 \vee x_2 \,\&\, \overline{x}_2$. *Определить, являются ли они СДНФ двух переменных.*

Решение. Формула A является СДНФ двух переменных. Формулы B и C не являются СДНФ. Формула B зависит от трех переменных, но количество переменных в элементарных конъюнкциях меньше трех. В формуле C переменная x_2 дважды входит в одну и ту же элементарную конъюнкцию. □

! Совершенная дизъюнктивная нормальная форма представляет собой формулу, построенную по строго определенным правилам с точностью до порядка следования элементарных конъюнкций (дизъюнктивных членов) в ней. Она является примером однозначного представления булевой функции в виде формульной (алгебраической) записи.

Определение 20. Формула называется *элементарной дизъюнкцией*, если она является дизъюнкцией (быть может, одночленной) переменных и отрицаний переменных.

Пример 17. Приведем три элементарные дизъюнкции: x_2, $\overline{x}_2$, $x_1 \vee x_3$. □

Определение 21. Формула называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ), если она является конъюнкцией неповторяющихся элементарных дизъюнкций. КНФ записываются в виде $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$, где каждое A_i — элементарная дизъюнкция.

Пример 18. Формулы

$$x_2,\ \overline{x}_2,\ x_2 \vee x_2,\ (\overline{x}_2 \vee x_1) \,\&\, x_3,\ (x_2 \vee \overline{x}_2) \,\&\, (x_1 \vee x_1)$$

являются конъюнктивными нормальными формами. □

Определение 22. Формула A от k переменных называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ), если:

1) A является КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция есть дизъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой дизъюнкции стоит либо переменная x_i, либо ее отрицание;

2) все элементарные дизъюнкции в такой КНФ попарно различны.

Задание. *Даны формулы* $A = (x_1 \vee \overline{x}_2)\ \&\ (x_1 \vee x_2)$ *и* $B = (x_1 \vee \overline{x}_1)\ \&\ (x_2 \vee x_3)$. *Определить, являются ли они СКНФ.*

Решение. Формула A является СКНФ, а формула B не является СКНФ, поскольку переменная x_1 дважды входит в первый конъюнктивный член, кроме того, количество переменных в каждой элементарной дизъюнкции меньше трех, в то время как формула зависит от трех переменных. □

Вопрос. *Всякую ли логическую функцию можно представить в одной из рассмотренных канонических совершенных форм?*

Ответ. Да, любую булеву функцию, не равную тождественно 0 или 1, можно представить в виде СДНФ или СКНФ. Для обоснования этого утверждения ниже будут доказаны соответствующие теоремы. □

Теорема 1. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция от n переменных, не равная тождественно нулю. Тогда существует совершенная дизъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f.

Доказательство. Сначала докажем, что для всякой булевой функции f от n переменных выполняется соотношение:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \overline{x}_i\ \&\ f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n) \vee \vee\ x_i\ \&\ f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n), \quad (3.1)$$

где x_i — любая из n переменных.

Формулу (3.1) легко получить, последовательно подставляя вместо переменной x_i все ее возможные значения (ноль и единицу):

$$f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n) = 1\ \&\ f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n) \vee \vee\ 0\ \&\ f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n);$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n) = 0\ \&\ f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n) \vee \vee\ 1\ \&\ f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n).$$

Соотношение (3.1) позволяет «выносить» переменную x_i за знак функции. Последовательно вынося $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за знак функции f, мы получим следующую формулу:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \bar{x}_{n-1} \,\&\, \bar{x}_n \,\&\, f(0, 0, \ldots, 0, 0) \vee \\
& \vee\ \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \bar{x}_{n-1} \,\&\, x_n \,\&\, f(0, 0, \ldots, 0, 1) \vee \\
& \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.2) \\
& \vee\ x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_{n-1} \,\&\, \bar{x}_n \,\&\, f(1, 1, \ldots, 1, 0) \vee \\
& \vee\ x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_{n-1} \,\&\, x_n \,\&\, f(1, 1, \ldots, 1, 1).
\end{aligned}
$$

Так как применение преобразования (3.1) к каждой из переменных увеличивает количество дизъюнктивных членов в два раза, то для функции n переменных в формуле (3.2) мы имеем 2^n дизъюнктивных членов. Причем каждый из них соответствует значению функции на одном из 2^n возможных наборов значений n переменных. Если на некотором наборе $f = 0$, то весь соответствующий дизъюнктивный член в (3.2) также равен 0, и в представлении данной функции он фактически не нужен. Если же $f = 1$, то в соответствующем дизъюнктивном члене само значение функции можно опустить. В результате для произвольной булевой функции f мы получили формулу, состоящую из n-членных попарно различных элементарных конъюнкций, объединенных дизъюнкциями, т. е. искомая СДНФ построена.
Теорема доказана.

На основании теоремы 1 можно предложить следующий *алгоритм построения СДНФ по таблице истинности* функции f.

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции f равно единице.
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции. △

Следствие. Для любой формулы можно найти равносильную ей ДНФ.

Доказательство. Если булева функция не равна тождественно нулю, то, согласно доказанной теореме 1, можно построить СДНФ, ее реализующую. Построенная СДНФ является одной из искомых ДНФ. Если же данная формула равна тождественно нулю, то в качестве искомой ДНФ можно взять, например, $\overline{x}_1 \,\&\, x_1$. □

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — булева функция n переменных, не равная тождественно единице. Тогда существует совершенная конъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f.

На основании теоремы 2 можно предложить следующий *алгоритм построения СКНФ по таблице истинности* функции f.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции f равно нулю.
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции. △

Следствие. Для любой формулы можно найти равносильную ей КНФ.

Доказательство. Если булева функция не равна тождественно единице, то, согласно доказанной теореме 2, можно построить СКНФ, ее реализующую. Построенная СКНФ является одной из искомых КНФ. Если же данная формула равна тождественно единице, то в качестве искомой КНФ можно взять, например, $\overline{x}_1 \vee x_1$. □

! Из алгоритмов построения СДНФ и СКНФ следует, что если на большей части наборов значений переменных функция равна 0, то для получения ее формулы проще построить СДНФ, в противном случае — СКНФ.

Пример 19. Требуется построить формулу для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Используя описанный выше алгоритм, построим для нее СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \overline{x}_3 \vee x_1 \,\&\, \overline{x}_2 \,\&\, \overline{x}_3 \vee x_1 \,\&\, \overline{x}_2 \,\&\, x_3.$$

□

Пример 20. Выразим функцию импликация с помощью операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Для этого запишем таблицу истинности функции импликация:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Так как в таблице истинности только один набор переменных, на котором функция принимает значение 0, то проще построить СКНФ.

Ответ: $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$. □

Вопросы и задания

1. Приведите примеры нескольких формул, представляющих собой СДНФ.
2. Приведите примеры нескольких формул, представляющих собой СКНФ.
3. По заданной таблице истинности найдите аналитическое представление логических функций f_1 и f_2:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ

Проверку произведите с помощью электронной таблицы.

4. С помощью отрицания, дизъюнкции и конъюнкции постройте наиболее простое аналитическое представление для функций эквивалентность и разделительная дизъюнкция.

5. Не используя таблицы истинности, постройте СДНФ и СКНФ, выражающие следующие функции:

1) $f(x_1, x_2, x_3)$, равную 1 тогда и только тогда, когда большинство переменных равно 1;

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, равную 1 тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$. Здесь имеется в виду обычная алгебраическая сумма.

6. Не используя таблицу истинности, преобразуйте в СДНФ следующую функцию:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mathbin{\&} x_2 \vee \overline{x}_1 \mathbin{\&} x_3.$$

7. Самостоятельно проведите доказательство теоремы 2.

8. Какие из следующих формул представляют собой СДНФ, а какие СКНФ?

а) $f(x) = 1$;

б) $f(x) = x \mathbin{\&} \overline{x}$;

в) $f(x, y) = \overline{x} \mathbin{\&} \overline{y}$;

г) $f(x, y) = x \mathbin{\&} y \vee \overline{y}$;

д) $f(x, y, z) = \overline{x} \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \overline{z}$;

е) $f(x, y, z) = x \mathbin{\&} y \vee z$;

ж) $f(x, y, z) = (x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} z) \vee (x \mathbin{\&} \overline{y} \mathbin{\&} \overline{z})$.

§ 3.8. Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, имеют большое прикладное значение при проектировании вычислительной техники. Как известно, информация хранится и обрабатывается компьютерами в двоичном виде, т. е. в виде последовательностей нулей и единиц. Для любой операции (например, сложения чисел) исходными данными и результатами являются последовательности нулей и единиц. Таким образом, фактически происходит вычисление значений булевых функций (возможно, очень сложных, с большим количеством переменных). Теоремы 1 и 2 говорят о том, что любую булеву функцию можно записать в виде формулы с использованием операций $\neg$, & и $\vee$ (в виде СДНФ или СКНФ), причем сделать это можно по единому универсальному алгоритму. Следовательно, если у нас имеются электронные логические элементы (вентили)[1], реализующие операции **НЕ**, **И**, **ИЛИ**, то, взяв достаточно много таких элементов и соединив их определенным образом, мы можем построить машину, выполняющую заданный набор действий над двоичными данными.

Конечно, желательно все булевы функции реализовать так, чтобы при этом использовалось как можно меньше логических элементов. Однако разумно уметь находить наиболее короткие формы записи функций в некотором едином классе формул. Большое значение в этом смысле имеют *минимальные ДНФ*.

Определение 23. Дизъюнктивная нормальная форма называется *минимальной*, если она содержит наименьшее общее число вхождений переменных по сравнению со всеми равносильными ей ДНФ. Процесс нахождения минимальной ДНФ называется *минимизацией* в классе ДНФ.

Строить минимальные ДНФ из СДНФ можно разными способами, например используя тождественные преобразования.

Пример 21. Используя закон дистрибутивности и закон поглощения, выполним минимизацию ДНФ $x_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, \overline{x}_2$:

$$x_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, \overline{x}_2 = x_1 \,\&\, (x_1 \vee \overline{x}_2) = x_1. \qquad \square$$

К сожалению, для нахождения минимальной ДНФ необходимо перебрать все возможные способы применения основных законов алгебры логики к исходной формуле. Для функций от большого числа переменных этот процесс оказывается слишком трудоемким, даже если проводить его с использованием компьютера.

[1] См. § 3.10 «Элементы схемотехники. Логические схемы».

Более эффективным способом нахождения минимальных ДНФ является *метод минимизирующих карт.*

Для булевой функции n переменных составим следующую таблицу (карту):

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	x_1x_2	x_1x_3	...	$x_{n-2}x_n$	$x_{n-1}x_n$	...	$x_1x_2...x_{n-1}x_n$
x_1	x_2	...	x_{n-1}	$\overline{x}_n$	x_1x_2	x_1x_3	...	$x_{n-2}\overline{x}_n$	$x_{n-1}\overline{x}_n$	...	$x_1x_2...x_{n-1}\overline{x}_n$
x_1	x_2	...	$\overline{x}_{n-1}$	x_n	x_1x_2	x_1x_3	...	$x_{n-2}x_n$	$\overline{x}_{n-1}x_n$	...	$x_1x_2...\overline{x}_{n-1}x_n$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	...	$\overline{x}_{n-1}$	$\overline{x}_n$	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\,\overline{x}_3$	...	$\overline{x}_{n-2}\overline{x}_n$	$\overline{x}_{n-1}\overline{x}_n$	...	$\overline{x}_1\overline{x}_2...\overline{x}_{n-1}\overline{x}_n$

В последнем столбце карты перечислены все элементарные конъюнкции, которые могут входить в СДНФ функции n переменных (знаки конъюнкции для краткости опущены). Каждая такая элементарная конъюнкция соответствует одному из возможных наборов n переменных в таблице истинности. В остальных столбцах каждой строки перечислены все возможные конъюнкции меньшего размера, полученные из элементарной конъюнкции последнего столбца путем удаления от одной до $(n-1)$ переменных.

Предположим, что конъюнкция из последнего столбца k-й строки таблицы не входит в СДНФ, выражающую функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тогда любая конъюнкция k-й строки не входит ни в какую ДНФ, выражающую функцию f. Докажем это. Действительно, если конъюнкция не входит в СДНФ, выражающую функцию f, то, согласно алгоритму построения СДНФ, значение функции на этом наборе равно 0. Если какая-то конъюнкция k-й строки вошла в некоторую ДНФ функции f, то на этом наборе функция должна быть равна единице. Мы получили противоречие с первоначальным предположением. Используя доказанное утверждение, можно предложить следующий способ построения минимальной ДНФ по *минимизирующей карте.*

Способ минимизации ДНФ методом минимизирующих карт

1. Вычеркнем из таблицы (минимизирующей карты) все строки, в которых конъюнкция последнего столбца не входит в СДНФ функции f.

2. Конъюнкции «вычеркнутых строк» вычеркнем во всех остальных строках таблицы.
3. Если в строке остались конъюнкции с различным числом сомножителей, то конъюнкции с не минимальным числом сомножителей оставляем только тогда, когда они встречаются в других строках.
4. Отметим конъюнкции, оставшиеся единственными на строке. Вычеркнем строки, в которых присутствуют такие же конъюнкции.
5. Всеми возможными способами выберем из каждой строки по одной конъюнкции (из оставшихся) и составим для каждого случая ДНФ.
6. Из всех построенных ДНФ выберем минимальную. Заметим, что мы должны выполнить перебор различных ДНФ для нахождения минимальной из них. Однако в данном случае число вариантов перебора, как правило, существенно меньше вариантов перебора равносильных ДНФ или способов сокращения СДНФ. △

Покажем, что, действуя в соответствии с п. 1–6, мы получим ДНФ, выражающую функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Действительно, пусть F — ДНФ, полученная в п. 6. Тогда если f на каком-то наборе равна 1, то и $F = 1$. В самом деле, если этому набору соответствует j-я строка, то хотя бы одна конъюнкция из этой строки осталась невычеркнутой (в этой или в других строках) и вошла в ДНФ. Любая конъюнкция из этой строки на этом наборе значений принимает значение 1. Следовательно, и формула F, содержащая одну из таких конъюнкций, принимает на этом наборе значение 1. Если же на каком-то наборе $f = 0$, то на этом наборе все невычеркнутые конъюнкции принимают значение 0, так как все конъюнкции, принимающие на этом наборе значение 1, уже вычеркнуты при выполнении п. 2. Следовательно, ДНФ, составленная из оставшихся невычеркнутых конъюнкций, принимает значение 0, т. е. $F = 0$.

Пример 22. Пусть требуется минимизировать функцию

$$f(x,\ y,\ z) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3.$$

Составим минимизирующую карту для функции трех переменных. Отметим знаком «*» не вошедшие в СДНФ строки.

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	*
x_1	x_2	$\overline{x}_3$	x_1x_2	$x_1\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2\overline{x}_3$	
x_1	$\overline{x}_2$	x_3	$x_1\overline{x}_2$	x_1x_3	$\overline{x}_2x_3$	$x_1\overline{x}_2x_3$	
x_1	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	
$\overline{x}_1$	x_2	x_3	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1x_3$	x_2x_3	$\overline{x}_1x_2x_3$	*
$\overline{x}_1$	x_2	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	*
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	x_3	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1x_3$	$\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	*

После действий в соответствии с п. 1–3 в таблице останутся конъюнкции, находящиеся в выделенных ячейках таблицы. Выполнив п. 4–6, получим минимальную ДНФ: $x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3$.

Практические задания

1. Постройте отрицание к сложному высказыванию на русском языке. (В § 1.3 было показано, как непросто построить отрицание к простым высказываниям.) Возможный способ выполнения задания:
   1) выделите простые высказывания и обозначьте их буквами;
   2) запишите исходное предложение на языке алгебры логики, т. е. в виде логической формулы;
   3) постройте таблицу истинности полученного логического выражения;
   4) запишите таблицу значений противоположного по смыслу выражения;
   5) восстановите по ней искомое логическое выражение (например, в виде СДНФ или СКНФ);
   6) если вы получили искомую формулу в виде СДНФ, то минимизируйте ее;
   7) запишите на русском языке высказывание, соответствующее полученному выражению.

   Варианты задания

   а) Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны, а если соответствующие центральным углам дуги равны, то и центральные углы равны.

   б) Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости.

в) Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.

г) Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то в сечении получается многоугольник, подобный основанию.

д) Для того чтобы оплатить проезд в общественном транспорте, необходимо иметь некоторую сумму денег и достаточно иметь 100 руб.

е) Из того, что некоторая ломаная, вписанная в одну окружность и описанная около другой окружности, замкнулась, следует, что и любая такая ломаная замкнется, а из того, что некоторая подобная ломаная не замкнулась, следует, что и любая такая ломаная не замкнется.

2. По выданной вам таблице истинности булевой функции постройте СДНФ и найдите для нее минимальную ДНФ любым удобным вам способом.

§ 3.9. Полные системы булевых функций

Теоретические результаты, изложенные в этом параграфе, имеют важное значение при разработке элементной базы вычислительных машин.

Определение 24. Система булевых функций $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ называется *полной*, если произвольная булева функция может быть выражена через функции $f_1, f_2, ..., f_n$.

Пример 23. Полной является система функций $\{\neg, \&, \vee\}$. Действительно, согласно теоремам 1 и 2 (см. § 3.7), любая булева функция представима в виде СДНФ либо СКНФ, в выражении каждой из которых используются только упомянутые в примере функции. □

Полноту других систем можно доказать с помощью следующего утверждения.

Утверждение. Пусть система $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ — полна и любая из функций $f_1, f_2, ..., f_n$ может быть выражена через функции $g_1, ..., g_m$. Тогда система $\{g_1, ..., g_m\}$ также полна.

Задание. *Докажите, что система функций* $\{\neg, \vee\}$ *является полной.*

Решение. Для доказательства воспользуемся сформулированным выше утверждением. Действительно, пусть

$f_1(x_1) = \overline{x}_1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, $f_3(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2$,
$g_1(x_1) = \overline{x}_1$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.

Выразим функции f_1, f_2, f_3 через g_1, g_2:

$f_1(x_1) = g_1(x_1)$, $f_2(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$,

$f_3(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = g_1(g_2(g_1(x_1), g_1(x_2)))$.

Для выражения конъюнкции через дизъюнкцию и отрицание был использован один из законов де Моргана. Используя второй из этих законов, можно доказать полноту системы $\{\neg, \&\}$. □

! Таким образом, любая (сколь угодно сложная) булева функция может быть выражена через две функции $\{\neg, \&\}$ или $\{\neg, \vee\}$.

Еще более неожиданным может показаться тот факт, что любую булеву функцию можно выразить всего лишь через одну функцию. Другими словами, существует функционально полная система, состоящая из одной булевой функции.

Определение 25. Логическая функция *штрих Шеффера* (другое название **И-НЕ**) обозначается $x_1 \mid x_2$ и задается следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Пример 24. Докажем, что функция штрих Шеффера является полной. Построим для нее СКНФ, т. е. выразим ее через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

$x_1 \mid x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$ или $x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \,\&\, x_2}$ (последняя формула объясняет другое название данной функции — И-НЕ).

Тогда $\overline{x}_1 = \overline{x_1 \,\&\, x_1} = x_1 \mid x_1$;

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x}_1 \,\&\, \overline{x}_2} = \overline{x}_1 \mid \overline{x}_2 = (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$;

$x_1 \,\&\, x_2 = \overline{\overline{x_1 \,\&\, x_2}} = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$.

Таким образом, мы выразили через функцию штрих Шеффера функции $\{\neg, \&, \vee\}$. Следовательно, система, состоящая только из функции штрих Шеффера, полна. □

Определение 26. Логическая функция *стрелка Пирса* (другое название **ИЛИ-НЕ**) обозначается $x_1 \downarrow x_2$ и задается следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Можно доказать, что и система, состоящая из одной функции стрелка Пирса, является полной.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если научиться физически представлять логический элемент (вентиль), реализующий функцию, являющуюся полной, то любая другая функция может быть реализована в виде схемы, состоящей из одинаковых вентилей, соединенных для каждой функции особым образом.

Вопросы и задания

1. Выразите функции $\&$, $\vee$, $\neg$ через *стрелку Пирса.*
2. Докажите, что система функций, состоящая только из функции отрицания, не является полной.
3. Докажите, что система функций, состоящая только из функции конъюнкция, не является полной.
4. Докажите, что система функций $\{\&, \vee\}$ не является полной.
5. Используя второй закон де Моргана, докажите, что система $\{\neg, \&\}$ полна.
6. Выразите функции $\&$ и $\vee$ через $\to$ и $\neg$, доказав тем самым полноту системы $\{\to, \neg\}$.
7. Как с помощью функции исключающее ИЛИ и одной из констант 0 или 1 (определите, какой именно) можно выразить логическое отрицание?

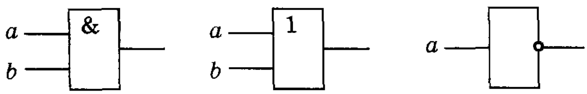
§ 3.10. Элементы схемотехники. Логические схемы

Любое устройство компьютера, выполняющее арифметические или логические операции, может рассматриваться как преобразователь двоичной информации: значения входных переменных для него — последовательность нулей и единиц, а значения выходной функции — новая двоичная последовательность. Необходимые преобразования информации в блоках компьютера производятся логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью.

В *комбинационной схеме* набор выходных сигналов в любой момент времени полностью определяется набором входных сигналов.

Определение 27. Дискретный преобразователь, который выдает после обработки двоичных сигналов значение одной из логических операций, называется *логическим элементом* (*вентилем*).

Ниже приведены условные обозначения (схемы) логических элементов, реализующих логическое умножение, логическое сложение и отрицание.



а *б* *в*

Логический элемент **И** (конъюнктор) реализует операцию логического умножения (рис. 3.2, *а*). Единица на выходе этого элемента появится тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы.

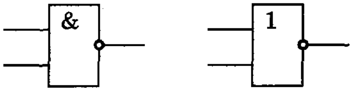
Логический элемент **ИЛИ** (дизъюнктор[1]) реализует операцию логического сложения (рис. 3.2, *б*). Если хотя бы на одном входе будет единица, то на выходе элемента также будет единица, иначе на выходе будет ноль.

Логический элемент **НЕ** (инвертор) реализует операцию отрицания (рис. 3.2, *в*). Если на входе элемента ноль, то на выходе единица и наоборот.

---

[1] Знак «1» на схеме элемента — дань устаревшему обозначению операции ИЛИ «≥1» — результат операции ИЛИ равен 1, если сумма значений операндов больше или равна 1.

Базовыми в микроэлектронике являются также логические элементы **И-НЕ** и **ИЛИ-НЕ**, реализующие функции штрих Шеффера и стрелка Пирса. Их условные обозначения:



Из отдельных логических элементов можно составить, например, устройства, производящие арифметические операции над двоичными числами.

Определение 28. Электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных кодов, называется *сумматором*.

Рассмотрим схему сложения двух n-разрядных двоичных чисел.

$$
\begin{array}{rr|c|l}
 & a_n\ldots & a_i & \ldots a_1 a_0 \\
+ & b_n\ldots & b_i & \ldots b_1 b_0 \\
\hline
 & s_{n+1}s_n\ldots & s_i & \ldots s_1 s_0
\end{array}
$$

При сложении цифр i-го разряда складываются a_i и b_i, к ним прибавляется p_i — признак переноса из $(i-1)$-го разряда. Результатом сложения будет s_i и p_{i+1} — признак переноса в следующий разряд.

Таким образом, одноразрядный двоичный сумматор — это устройство с тремя входами и двумя выходами. Его работа описывается следующей таблицей истинности:

Входы			**Выходы**	
a_i	b_i	p_i	s_i	p_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

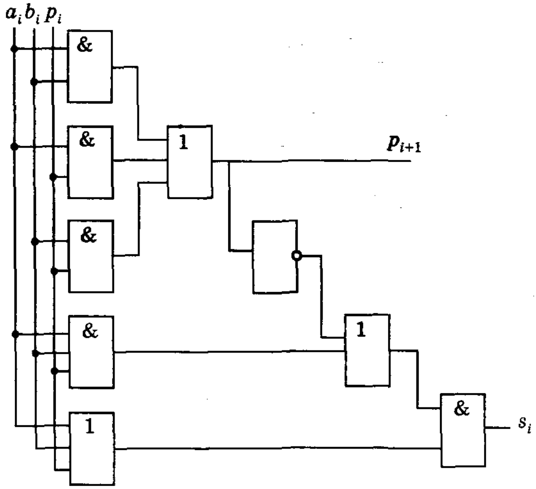
Выходные функции можно восстановить по таблице в виде СДНФ или СКНФ и упростить с помощью тождественных преобразований. В результате преобразований искомые функции приобретают, например, следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= a_i \,\&\, b_i \vee a_i \,\&\, p_i \vee b_i \,\&\, p_i; \\ s_i &= (\bar{p}_{i+1} \vee a_i \,\&\, b_i \,\&\, p_i) \,\&\, (a_i \vee b_i \vee p_i). \end{aligned} \qquad (3.3)$$

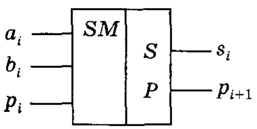
Первое из соотношений (3.3) является решением задания 5, п. 1 к § 3.7. Второе из соотношений (3.3) выведено из СДНФ с учетом уже имеющегося выражения для p_{i+1}.

Заметим, что функции p_{i+1} и s_i можно выразить другими формулами, что, естественно, приведет к другим логическим схемам. Так, наиболее короткой формулой для s_i является следующая: $s_i = a_i \oplus b_i \oplus p_i$.

Одноразрядный двоичный сумматор можно реализовать следующей схемой, что соответствует (3.3):



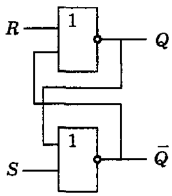
Сложение n-разрядных двоичных чисел осуществляется с помощью комбинации одноразрядных сумматоров (условное обозначение одноразрядного сумматора приведено на рисунке слева.) В зависимости от способа ввода/вывода данных и организации переносов многоразрядные сумматоры бывают последовательного и параллельного принципа действия.



В *цифровых автоматах с памятью* набор выходных сигналов зависит не только от набора входных сигналов, но и от внутреннего состояния данного устройства. Такие устройства всегда имеют память.

Определение 29. Логический элемент, способный хранить один разряд двоичного числа, называют *триггером*.

Триггер был изобретен в 1918 г. М. А. Бонч-Бруевичем (1888–1940). Самый простой триггер — RS. Он состоит из двух элементов **ИЛИ-НЕ**, входы и выходы которых соединены кольцом: выход первого соединен со входом второго, выход второго — со входом первого. Схема RS-триггера:



Здесь: вход S (set) — установка триггера в 1, вход R (reset) — установка триггера в 0.

Принцип работы RS-триггера иллюстрирует следующая таблица истинности:

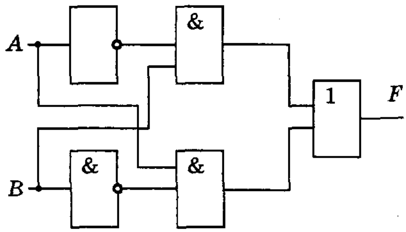
Режимы работы триггера	Входы		Состояние триггера
	R	**S**	**Q**
Хранение предыдущего состояния	0	0	Q
Установка триггера в 1	0	1	1
Установка триггера в 0	1	0	0
Запрещенное состояние	1	1	Недопустимо

Обычно на входы поступают сигналы $R = 0$ и $S = 0$, и триггер хранит старое состояние. Если на вход S поступает на короткое время сигнал 1, то триггер переходит в состояние 1, и после того, как сигнал S станет равен 0, триггер будет сохранять состояние 1. При подаче 1 на вход R триггер перейдет в состояние 0. Подача на оба входа логической единицы может привести к неоднозначному результату, поэтому такая комбинация входных сигналов запрещена.

Для хранения 1 байта информации необходимо 8 триггеров, для 1 килобайта — 8 × 1024 триггера. Таким образом, оперативная память современных компьютеров содержит миллионы триггеров. В целом же компьютер состоит из огромного числа логических элементов, образующих все его узлы и память.

Вопросы и задания

1. Проанализируйте схему, приведенную на следующем рисунке, и выпишите формулу для функции F:



2. Существует 16 логических элементов, имеющих два входа (16 логических функций от двух переменных). Реализуйте их схемы с помощью логических элементов **И**, **ИЛИ**, **НЕ**.
3. Может ли произвольная логическая схема быть построена только из логических элементов одного типа?
4. Постройте схему трехразрядного сумматора из одноразрядных.

Заключение

Итак, подведем итоги. XIX век подарил нам плеяду выдающихся математиков, которым удалось построить стройный аппарат алгебры логики. В первую очередь это Джордж Буль, Огастес де Морган, Джордж Венн.

Стремительный XX век расширил границы практического применения теоретических результатов алгебры логики. В частности, ее математический аппарат широко используется в информатике, при проектировании компьютеров, в теории алгоритмов, в целочисленном программировании и т. д.

Познакомившись с материалом данной главы, вы знаете теперь основные законы алгебры логики, сможете без ошибки построить отрицание к сложному высказыванию, сформулированному на любом национальном языке, знаете, из скольких элементов состоит сумматор, что такое триггер и зачем нам нужны такие необычные логические функции, как стрелка Пирса и штрих Шеффера.

Надеемся, что мы заинтересовали вас алгеброй логики — чрезвычайно красивой областью математики, применение которой будет наверняка расширяться.