ГЛАВА 4

ОТНОШЕНИЯ

Когда говорят о родстве двух человек, Хораса и Анны, то подразумевают, что есть некая семья, к членам которой они относятся. Упорядоченная пара (Хорас, Анна) отличается от других упорядоченных пар людей тем, что между Хорасом и Анной есть некое родство (кузина, отец, и т. д.). В математике среди всех упорядоченных пар прямого произведения $A \times B$ двух множеств A и B тоже выделяются некоторые пары в связи с тем, что между их компонентами есть некоторые «родственные» отношения, которых нет у других.

В качестве примера рассмотрим множество S студентов какого-нибудь института и множество K читаемых там курсов. В прямом произведении $S \times K$ можно выделить большое подмножество упорядоченных пар (s, k), обладающих свойством: студент s слушает курс k. Построенное подмножество отражает отношение «... слушает ...», естественно возникающее между множествами студентов и курсов.

Для строгого математического описания любых связей между элементами двух множеств мы введем понятие бинарного отношения. В этой главе мы расскажем о различных путях определения отношений и обсудим некоторые их свойства. В частности, мы изучим два важных специальных типа отношений: отношение эквивалентности и частичного порядка. Они часто появляются как в математике, так и в информатике. Отношения между элементами нескольких множеств задаются в виде таблиц данных. В приложении к этой главе такие n-арные отношения применяются для описания простой *системы управления базами данных*.

4.1. Бинарные отношения

Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R прямого произведения $A \times B$. В том случае, когда $A = B$, мы говорим просто об *отношении* R на A.

Пример 4.1. Рассмотрим генеалогическое древо, изображенное на рис. 4.1. Выпишите упорядоченные пары, находящиеся в следующих отношениях на множестве P членов этой семьи:

(а) $R = \{(x,\, y) :\ x$ — дедушка $y\}$;

(б) $S = \{(x,\, y) :\ x$ — сестра $y\}$.

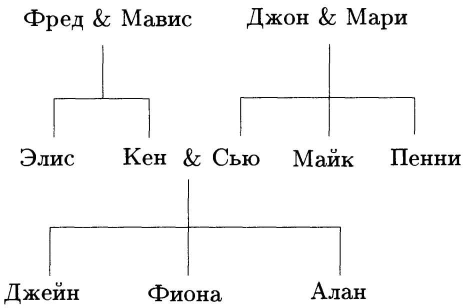

Рисунок 4.1.

Решение.

(а) R содержит упорядоченные пары: (Фред, Джейн), (Фред, Фиона), (Фред, Алан), (Джон, Джейн), (Джон, Фиона) и (Джон, Алан).

(б) S состоит из пар: (Сью, Пенни), (Пенни, Сью), (Джейн, Фиона), (Фиона, Джейн), (Алис, Кен), (Сью, Майк), (Пенни, Майк), (Джейн, Алан) и (Фиона, Алан).

Пример 4.2. Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям на множествах $A = \{1,\, 3,\, 5,\, 7\}$ и $B = \{2,\, 4,\, 6\}$:

(а) $U = \{(x,\, y) :\ x + y = 9\}$;

(б) $V = \{(x,\, y) :\ x < y\}$.

Решение.

(а) U состоит из пар: (3, 6), (5, 4) и (7, 2);

(б) $V = \{(1,\, 2),\ (1,\, 4),\ (1,\, 6),\ (3,\, 4),\ (3,\, 6),\ (5,\, 6)\}$.

Пример 4.3. Множество

$$R = \{(x,\, y) :\ x \text{ — делитель } y\}$$

определяет отношение на множестве $A = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$. Найдите все упорядоченные пары, ему принадлежащие.

Решение. R состоит из пар: (1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5) и (6, 6).

Теперь мы познакомимся с двумя более удобными способами перечисления упорядоченных пар, принадлежащих данному отношению. Первый из них основан на понятии «ориентированный граф», а второй опирается на матрицы.

Пусть A и B — два конечных множества и R — бинарное отношение между ними. Мы изобразим элементы этих множеств точками на плоскости. Для каждой упорядоченной пары отношения R нарисуем стрелку, соединяющую точки, представляющие компоненты пары. Такой объект называется *ориентированным графом* или *орграфом*, точки же, изображающие элементы множеств, принято называть вершинами графа.

В качестве примера рассмотрим отношение V между множествами $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$ из примера 4.2 (б). Соответствующий ориентированный граф показан на рис. 4.2.

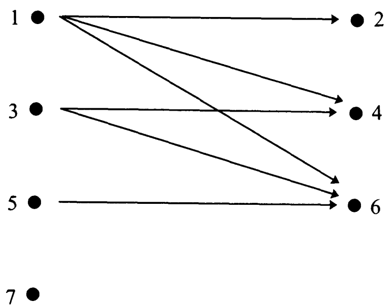

Рисунок 4.2. Отношение V между A и B

Для иллюстрации отношения на отдельном множестве A мы чертим орграф, чьи вершины соответствуют одному лишь множеству A, а стрелки, как обычно, соединяют элементы упорядоченных пар, находящихся в отношении.

Пример 4.4. Изобразите граф, представляющий отношение R из примера 4.3.

Решение. Поскольку R — отношение на множестве

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

то ориентированный граф будет иметь шесть вершин. Он приведен на рис. 4.3.

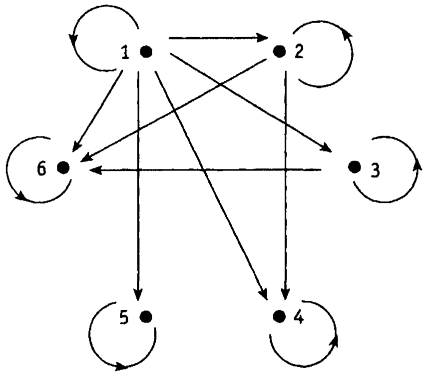

Рисунок 4.3. Отношение R на множестве A

Второй способ задания бинарного отношения на конечных множествах основан на использовании таблиц. Предположим, что мы хотим определить бинарное отношение R между множествами A и B. Необходимо обозначить элементы множеств и выписать их в каком-нибудь порядке. Сделаем это так:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}.$$

Для определения отношения R заполним таблицу M с n строками и m столбцами. Строки «перенумеруем» элементами множества A, а столбцы — элементами множества B в соответствии с порядком, в котором мы выписали элементы. Ячейку таблицы, стоящую на пересечении i-той строки и j-того столбца будем обозначать через $M(i, j)$, а заполнять ее будем следующим образом:

$$M(i, j) = \text{И}, \text{ если } (a_i, b_j) \in R,$$
$$M(i, j) = \text{Л}, \text{ если } (a_i, b_j) \notin R,$$

Такого сорта таблицы называются $n \times m$ *матрицами*.

В этих терминах, отношение U из примера 4.2(а) с помощью матрицы задается следующим образом:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Л & Л & Л \\ Л & Л & И \\ Л & И & Л \\ И & Л & Л \end{bmatrix} \end{array} .$$

Чтобы лучше понять такой способ задания отношений, мы явно пометили столбцы и строки матрицы. В общем случае это делать не обязательно.

Пример 4.5. Отношение R на множестве $A = \{a, b, c, d\}$ задается матрицей:

$$\begin{bmatrix} Л & И & И & Л \\ Л & Л & И & И \\ Л & И & Л & Л \\ И & И & Л & И \end{bmatrix},$$

порядок строк и столбцов в которой соответствует порядку выписанных элементов множества A. Назовите упорядоченные пары, принадлежащие R.

Решение. Отношение R содержит упорядоченные пары: (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, b), (d, a), (d, b) и (d, d).

Пример 4.6. Выпишите матрицу, представляющую отношение R из примера 4.3.

Решение. Матрица отношения R имеет вид:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} И & И & И & И & И & И \\ Л & И & Л & И & Л & И \\ Л & Л & И & Л & Л & И \\ Л & Л & Л & И & Л & Л \\ Л & Л & Л & Л & И & Л \\ Л & Л & Л & Л & Л & И \end{bmatrix} \end{array}.$$

Если R — бинарное отношение, то вместо записи $(x, y) \in R$ можно употреблять обозначение $x\,R\,y$. Например, предикат «x — сестра y» определяет отношение на множестве всех людей. В примере 4.3 предикат «x — делитель y» дает ясное словесное описание еще одного отношения.

Подводя итог вводной части теории отношений, полезно напомнить, что бинарное отношение между конечными множествами может быть задано одним из следующих способов:

- словами (с помощью подходящих предикатов);
- как множество упорядоченных пар;
- как орграф;
- как матрица.

Пример 4.7. Отношение R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ представлено графом на рис. 4.7.
Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие R, выпишите соответствующую матрицу и определите это отношение с помощью предикатов.

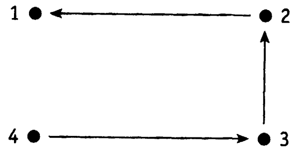

Рисунок 4.3.

Решение. В терминах упорядоченных пар $R = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.

Матрица (относительно данного в условии порядка элементов множества) имеет вид:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} Л & Л & Л & Л \\ И & Л & Л & Л \\ Л & И & Л & Л \\ Л & Л & И & Л \end{bmatrix}
\end{array}.$$

С помощью предикатов данное отношение может быть описано как

$$x - y = 1.$$

4.2. Свойства отношений

Ограничимся рассмотрением бинарных отношений, заданных на одном множестве и введем некоторый набор их свойств.

Говорят, что отношение R на множестве A

рефлексивно, если для всех $x \in A$ $\; x R x$;

симметрично, если $x R y \Rightarrow y R x$ для каждой пары x и y из A;

кососимметрично, если ($x R y$ и $y R x \Rightarrow x = y$) для всех x и y из A;

транзитивно, если ($x R y$ и $y R z \Rightarrow x R z$) для любой тройки элементов $x, y, z \in A$.

В терминах упорядоченных пар эти свойства определяются следующим образом. Данное отношение R рефлексивно, если $(x, x) \in R$ для любого возможного значения переменной x; симметрично, если из включения $(x, y) \in R$ следует, что $(y, x) \in R$; кососимметрично, если из предположений: $(x, y) \in R$ и $x \neq y$ вытекает, что $(y, x) \notin R$; транзитивно, если включения $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ влекут $(x, z) \in R$.

У ориентированного графа, изображающего рефлексивное отношение, каждая вершина снабжена петлей, т. е. стрелкой, начинающейся и заканчивающейся в одной и той же вершине. Орграф симметричного отношения вместе с каждой стрелкой из вершины x в вершину y имеет стрелку, направленную в обратную сторону: из y в x. Если отношение кососимметрично, то при наличии стрелки из вершины x в несовпадающую с ней вершину y, стрелка из y в x будет обязательно отсутствовать. И, наконец, орграф транзитивного отношения устроен так, что вместе со стрелками из вершины x в y и из y в z у него будет стрелка и из x в z.

Перечислим свойства матриц, задающих отношения. Прежде всего заметим, что матрица отношения на отдельном множестве A будет квадратной, т. е. количество ее строк будет равно количеству столбцов. Так вот, матрица M, задающая рефлексивное отношение, отличается от других тем, что каждый ее элемент, стоящий на главной диагонали ($M(i, i)$), равен И; матрица M симметричного отношения будет симметричной, т. е. $M(i, j) = M(j, i)$; в матрице кососимметричного отношения выполнено условие:

$$\big(M(i, j) = \text{И } \textbf{и } i \neq j\big) \Rightarrow M(j, i) = \text{Л}.$$

К сожалению, отличительное свойство матрицы транзитивного отношения довольно трудно сформулировать четко и наглядно.

Пример 4.8. Что можно сказать о свойствах (рефлексивности, симметричности, кососимметричности и транзитивности) следующих отношений:

(а) «x делит y» на множестве натуральных чисел;

(б) «$x \neq y$» на множестве целых чисел;

(в) «количество лет x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей.

Решение.

(а) Поскольку x всегда делит сам себя, то это отношение рефлексивно. Оно, конечно, не симметрично, поскольку, например, 2 является делителем 6, но не наоборот: 6 не делит 2. Проверим, что отношение делимости транзитивно. Предположим, что x делит y, а y в свою очередь делит z. Тогда из первого предположения вытекает, что $y = mx$ для некоторого натурального числа m, а из второго — $z = ny$, где n — натуральное число. Следовательно, $z = ny = (nm)x$, т. е. x делит z. Значит, данное отношение транзитивно. Наконец, наше отношение кососимметрично, поскольку из предположений: x делит y и y делит x немедленно вытекает, что $y = x$.

(б) Так как высказывание «$x \neq x$» ложно, то это отношение не рефлексивно. Оно симметрично, поскольку $x \neq y$ тогда и только тогда, когда $y \neq x$. Наше отношение не обладает свойством транзитивности, так как, например, $2 \neq 3$ и $3 \neq 2$, но, тем не менее, $2 = 2$. Наше отношение не кососимметрично, поскольку из условий $x \neq y$ и $y \neq x$ нельзя заключить, что $x = y$.

(в) Отношение этого пункта рефлексивно, так как возраст любого человека x совпадает с количеством прожитых им лет. Оно симметрично, поскольку высказывание «количество лет x совпадает с возрастом y» равносильно высказыванию «количество лет y совпадает с возрастом x». Отношение и транзитивно, так как, если найдутся такие три человека x, y и z, что «количество лет x совпадает с возрастом y», а «количество лет y совпадает с возрастом z», то все трое будут одинакового возраста. Так как мы можем найти много ровесников, то данное отношение не кососимметрично.

Если отношение R на множестве A не обладает тем или иным свойством, то его стоит попытаться продолжить до отношения R^*, которое будет иметь нужное свойство. Под «продолжением» мы понимаем присоединение некоторых упорядоченных пар к подмножеству $R \subset A \times A$ так, что новое полученное множество R^* уже будет обладать требуемым свойством. Ясно, что исходное множество R будет подмножеством в R^*. В том случае, если вновь построенное множество R^* будет минимальным среди всех расширений R с выделенным свойством, то говорят, что R^* является замыканием R относительно данного свойства.

Более строго, R^* называется *замыканием отношения* R относительно свойства P, если

1. R^* обладает свойством P;
2. $R \subset R^*$;
3. R^* является подмножеством любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P.

Пример 4.9. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, а отношение R на A задано упорядоченными парами:

$$R = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (2, 3)\}.$$

Оно не рефлексивно, не симметрично и не транзитивно. Найдите соответствующие замыкания.

Решение. Замыкание относительно рефлексивности должно содержать все пары вида (x, x). Поэтому, искомое замыкание имеет вид:

$$R^* = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (2, 3);\ \ (2, 2),\ (3, 3)\},$$

где добавленные пары отделены от исходных точкой с запятой.

Замыкание относительно симметричности должно содержать все пары, симметричные исходным. Значит,

$$R^* = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (2, 3);\ \ (2, 1),\ (3, 2)\}.$$

Чтобы найти замыкание относительно транзитивности, необходимо выполнить несколько шагов. Так как R содержит пары $(3, 1)$ и $(1, 2)$, замыкание обязано включать в себя и пару $(3, 2)$. Аналогично, пары $(2, 3)$ и $(3, 1)$ добавляют пару $(2, 1)$, а пары $(3, 1)$ и $(1, 3)$ — пару $(3, 3)$. Добавим сначала эти пары:

$$R^* \supset \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (2, 3);\ \ (3, 2),\ (2, 1),\ (3, 3)\}.$$

Теперь у нас возникло сочетание $(2, 1)$ и $(1, 2)$. Стало быть, замыкание R^* должно содержать пару $(2, 2)$. Теперь можно увидеть, что все необходимые пары мы добавили (хотя бы потому, что перебрали все пары из A^2). Следовательно,

$$R^* = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (2, 3);\ \ (3, 2),\ (2, 1),\ (3, 3),\ (2, 2)\}.$$

Метод, которым мы нашли замыкание по транзитивности в примере 4.9, довольно специфичен. В главе 8 мы обсудим более систематический подход, использующий алгоритм, который по матрице отношения вычисляет матрицу замыкания относительно транзитивности.

Замыкание по транзитивности имеет массу приложений. Допустим, нам дан ориентированный граф, отражающий коммуникационную сеть. В этом случае матрица замыкания по транзитивности позволит нам определить, существует ли возможность переправить сообщение из одного места в другое.

4.3. Отношения эквивалентности и частичного порядка

В этом параграфе мы сосредоточимся на двух важных специальных типах бинарных отношений.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение на множестве A называется *отношением эквивалентности*. Отношение эквивалентности в некотором смысле обобщает понятие равенства. *Эквивалентные элементы* (т. е. находящиеся в отношении эквивалентности), как правило, обладают какими-то общими признаками.

Приведем примеры отношения эквивалентности.

- Отношение «... имеет те же углы, что и ...» на множестве всех треугольников. Очевидно, треугольники эквивалентны относительно этого отношения тогда и только тогда, когда они подобны.

- Отношение R, заданное условием: $x\,R\,y$, если и только если $xy > 0$ на множестве ненулевых целых чисел является отношением эквивалентности. При этом эквивалентные числа имеют одинаковый знак.

- Отношение «... имеет тот же возраст, что и ...» на множестве всех людей. «Эквивалентные» люди принадлежат к одной и той же возрастной группе.

Примеры наводят на мысль, что если на множестве задано отношение эквивалентности, то все его элементы можно естественным способом разбить на непересекающиеся подмножества. Все элементы в любом из таких подмножеств эквивалентны друг другу в самом прямом смысле. Наличие такого разбиения — движущая сила любой классификационной системы.

Разбиением множества A называется совокупность непустых подмножеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ множества A, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$;

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Подмножества A_i называются *блоками* разбиения.

Диаграмма Венна разбиения множества A на пять блоков показана на рис. 4.4. Заметим, что блоки изображены как лоскуты, не заходящие один на другой. Это связано с тем, что блоки разбиения не могут иметь общих элементов.

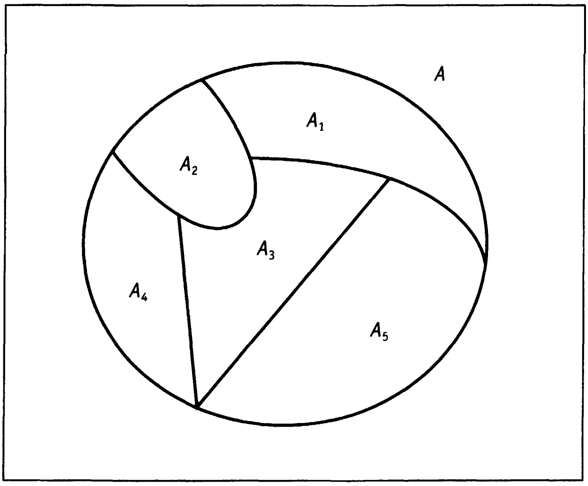

Рисунок 4.4.

Как мы уже говорили, отношение эквивалентности R на множестве A задает на нем разбиение. Блоки разбиения при этом состоят из эквивалентных друг другу элементов. Мы сейчас докажем это утверждение. Но прежде определим *класс эквивалентности* E_x произвольного элемента $x \in A$ как подмножество $E_x = \{z \in A: \ z\,R\,x\}$. Докажем теорему.

Теорема. Пусть R — отношение эквивалентности на непустом множестве A. Тогда различные классы эквивалентности определяют разбиение A.

Доказательство. Доказательство состоит из четырех частей.

Сначала покажем, что классы эквивалентности являются непустыми подмножествами в A. По определению, E_x — подмножество в A. Кроме того, R — рефлексивное отношение, т. е. $x\,R\,x$. Следовательно, $x \in E_x$ и E_x не пусто.

Далее проверим, что из $x\,R\,y$ вытекает равенство $E_x = E_y$. Предположим, что $x\,R\,y$ и возьмем произвольный $z \in E_x$. Тогда $z\,R\,x$ и $x\,R\,y$. Поскольку R — транзитивное отношение, мы получаем, что $z\,R\,y$. Иными словами, $z \in E_y$. Следовательно, $E_x \subset E_y$. Аналогично можно показать, что $E_y \subset E_x$, откуда $E_x = E_y$, что и требовалось.

Теперь мы покажем, что классы эквивалентности удовлетворяют первому свойству разбиения, а именно, что A является объединением всех классов эквивалентности. Как уже отмечалось в первой части нашего доказательства, E_x — подмножество в A и поэтому объединение всех классов эквивалентности тоже будет подмножеством в A. В обратную сторону, если $x \in A$, то $x \in E_x$. В частности, x принадлежит объединению классов эквивалентности. Значит, и A является подмножеством нашего объединения. Следовательно, A совпадает с объединением классов эквивалентности.

И, наконец, в последней части мы покажем, что два разных класса эквивалентности не пересекаются. Этим мы проверим, что классы удовлетворяют второму свойству разбиения. Воспользуемся методом «от противного». Допустим, что $E_x \cap E_y \neq \varnothing$. Тогда найдется элемент z в A, принадлежащий пересечению $E_x \cap E_y$. Следовательно, $z\,R\,x$ и $z\,R\,y$. Так как R — симметричное отношение, можно утверждать, что $x\,R\,z$ и $z\,R\,y$. Ввиду транзитивности R, это влечет $x\,R\,y$. Значит, по второй части доказательства, $E_x = E_y$. Итак, мы предположили, что *разные* классы эквивалентности E_x и E_y пересекаются и доказали, что они на самом деле совпадают. Полученное противоречие доказывает последнюю часть наших рассуждений. Теорема доказана. ■

Заметим, чтобы показать, что классы эквивалентности служат блоками разбиения множества A, мы использовали *все* определяющие свойства отношения эквивалентности: рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Пример 4.10. Отношение R на вещественной прямой $\mathbb{R}$ задано условием: $x\,R\,y$, если и только если $x - y$ — целое число. Докажите, что R — отношение эквивалентности и опишите классы эквивалентности, содержащие 0, $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{2}$.

Решение. Так как $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ для любого вещественного числа x, отношение R рефлексивно. Если $x - y$ число целое, то и противоположное к нему $y - x = -(x - y)$ является целым. Следовательно, R — симметричное отношение. Пусть $x - y$ и $y - z$ — целые числа. Тогда $x - z = (x - y) + (y - z)$ — сумма целых чисел, т. е. целое число. Это означает, что R транзитивно.

Итак, мы показали, что R рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, R — отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности E_x произвольного вещественного числа x определяется по формуле:

$$E_x = \{z \in \mathbb{R} : \ z - x \text{ — целое число}\}.$$

Поэтому,

$$E_0 = \mathbb{Z};$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \{z \in \mathbb{R} :\ z - \frac{1}{2} \text{ — целое число}\} = \\ = \{\ldots, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \ldots\};$$

$$E_{\sqrt{2}} = \{z \in \mathbb{R} :\ z - \sqrt{2} \text{ — целое число}\} = \\ = \{\ldots, -1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \ldots\}.$$

Рефлексивное, транзитивное, но кососимметричное отношение R на множестве A называется *частичным порядком.* Частичный порядок важен в тех ситуациях, когда мы хотим как-то охарактеризовать старшинство. Иными словами, решить при каких условиях считать, что один элемент множества превосходит другой.

Примеры частичных порядков.

- « $\leqslant$ » на множестве вещественных чисел;
- « $\subset$ » на подмножествах универсального множества;
- «... делит ...» на множестве натуральных чисел.

Множества с частичным порядком принято называть *частично упорядоченными множествами.*

Если R — отношение частичного порядка на множестве A, то при $x \neq y$ и $x\,R\,y$ мы называем x *предшествующим элементом* или *предшественником*, а y — *последующим.* У произвольно взятого элемента y может быть много предшествующих элементов. Однако если x предшествует y, и не существует таких элементов z, для которых $x\,R\,z$ и $z\,R\,y$, мы называем x *непосредственным предшественником*[1] y и пишем $x \prec y$.

Непосредственных предшественников можно условно изобразить с помощью графа, известного как *диаграмма Хассе*. Вершины графа изображают элементы частично упорядоченного множества A, и если $x \prec y$, то вершина x помещается ниже вершины y и соединяется с ней ребром.

Диаграмма Хассе выдаст полную информацию об исходном частичном порядке, если мы не поленимся подняться по всем цепочкам ребер.

---

[1]Иногда также говорят, что y покрывает x. — *Прим. перев.*

Пример 4.11. Дано, что отношение «... делитель ...» определяет частичный порядок на множестве $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$. Составьте таблицу предшественников и непосредственных предшественников, после чего постройте соответствующую диаграмму Хассе.

Решение. Таблица и диаграмма приведены ниже.

Таблица 4.1

элемент	предшественник	непосредственный предшественник
1	нет	нет
2	1	1
3	1	1
6	1, 2, 3	2, 3
12	1, 2, 3, 6	6
18	1, 2, 3, 6	6

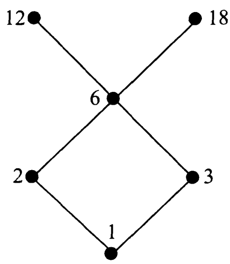

Рисунок 4.5. Диаграмма Хассе

Линейным порядком на множестве A называется отношение частичного порядка, при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий.

Примеры линейного порядка.

- «$\leqslant$» на множестве вещественных чисел;
- лексикографическое упорядочение слов в словаре.

Различные сортирующие процедуры в информатике требуют, чтобы элементы сортируемых множеств были линейно упорядочены. В этом случае они могут выдавать упорядоченный список. Другие приложения используют частичный порядок, предполагая, что в любом частично упорядоченном множестве найдется[2] *минималь-*

[2]Заметим, что в случае бесконечных множеств это не так. Например, в множестве $\mathbb{Z}$ относительно порядка «$\leqslant$» нет не минимального, ни максимального элемента. — *Прим. перев.*

ный элемент (не имеющий предшественников) и *максимальный* (не имеющий последующих элементов).

Частично упорядоченное множество из примера 4.11 обладает одним минимальным элементом, а именно, числом 1. С другой стороны, в нем есть два максимальных: 12 и 18. В этом множестве содержится несколько линейно упорядоченных подмножеств. Каждое из них соответствует цепочке ребер на диаграмме Хассе. Например, множество $\{1, 2, 6, 18\}$ линейно упорядочено относительно отношения «... делитель ...».

Набор упражнений 4

4.1. Выпишите множество упорядоченных пар и начертите ориентированный граф отношения, заданного матрицей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} И & Л & И & Л \\ И & Л & И & Л \\ Л & И & И & Л \end{array}\right] \end{array}.$$

4.2. Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y): \ 2x + y = 9\}; \\ S &= \{(x, y): \ x + y < 7\}; \\ T &= \{(x, y): \ y = x^2\}. \end{aligned}$$

4.3. Пусть R — отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, определяемое условием: $u\,R\,v$ тогда и только тогда, когда $u + 2v$ — нечетное число. Представьте R каждым из способов:

(а) как множество упорядоченных пар;

(б) в графической форме;

(в) в виде матрицы.

4.4. Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

(а) «... имеет тех же родителей, что и ...»;

(б) «... является братом ...»;

(в) «... старше или младше, чем ...»;

(г) «... не выше, чем ...».

4.5. Определите, какие из приведенных ниже отношений на $\mathbb{Z}$ являются рефлексивными, симметричными, а какие транзитивными?

(а) «$x + y$ — нечетное число»;

(б) «$x + y$ — четное число»;

(в) «xy — нечетное число»;

(г) «$x + xy$ — четное число».

4.6. Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям, заданным на множестве $\{x : x \in \mathbb{Z} \text{ и } 1 \leqslant x \leqslant 12\}$.

(а) $R = \{(x, y) : xy = 9\}$;

(б) $S = \{(x, y) : 2x = 3y\}$;

(в) замыкание R по транзитивности;

(г) замыкание S по транзитивности.

4.7. Ниже определены отношения на множествах. Опишите на словах замыкание по транзитивности в каждом случае.

(а) «x на один год старше, чем y» на множестве людей;

(б) $x = 2y$ на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел;

(в) $x < y$ на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел;

(г) «x является дочерью y» на множестве женщин.

4.8. Найдите замыкания по рефлексивности, по симметричности и по транзитивности отношения

$$\{(a, a),\ (b, b),\ (c, c),\ (a, c),\ (a, d),\ (b, d),\ (c, a),\ (d, a)\},$$

заданного на множестве $\{a, b, c, d\}$. Имеет ли смысл строить замыкание по антисимметричности?

4.9. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве A опишите блоки, на которые разбивается множество A:

(а) A — множество книг в библиотеке, а R определяется условием: $x\,R\,y$, если и только если цвет переплета x совпадает с цветом переплета y;

(б) $A = \mathbb{Z}$, R задается условием: $x\,R\,y$ тогда и только тогда, когда $x - y$ — четное число;

(в) A — множество людей, и $x\,R\,y$, если x имеет тот же пол, что и y;

(г) $A = \mathbb{R}^2$, R задается по правилу: $(a,\ b)\, R\, (c,\ d)$ в том случае, когда $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

4.10. Отношение R на множестве $\mathbb{Z}$ определяется так: $x\, R\, y$ в том и только том случае, когда $x^2 - y^2$ делится на 3. Покажите, что R является отношением эквивалентности и опишите классы эквивалентности.

4.11. Нарисуйте диаграмму Хассе для каждого из следующих частично упорядоченных множеств:

(а) множество $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$ с отношением «x делит y»;

(б) множество всех подмножеств в $\{1,\ 2,\ 3\}$ с отношением «X — подмножество Y».

4.12. Диаграмма Хассе частичного порядка R на множестве $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$ показана на рис. 4.6. Перечислите элементы R и найдите минимальный и максимальный элементы частично упорядоченного множества A.

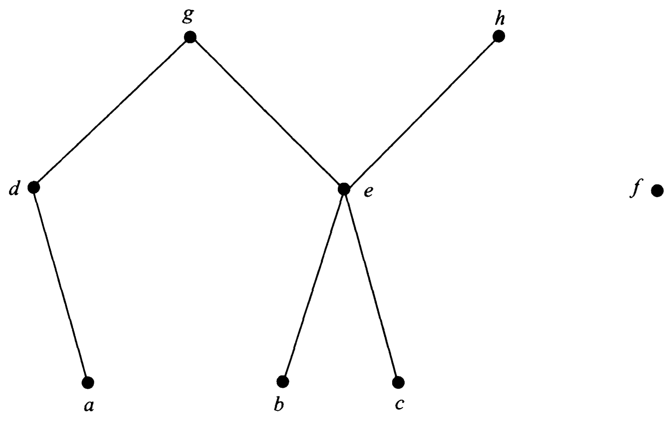

Рисунок 4.6.

4.13. Лексикографический (алфавитный) порядок работает следующим образом: у данных слов X и Y сравниваем букву за буквой, оставляя без внимания одинаковые, пока не найдем пару разных. Если в этой паре буква слова X стоит раньше (по алфавиту), нежели соответствующая буква слова Y, то X предшествует Y; если все буквы слова X совпадают с соответствующими буквами Y, но оно короче, то X предшествует Y, в противном случае, Y предшествует X.