МНОЖЕСТВА

1.1. Множества и их элементы. Способы задания множеств

Понятие множества является одним из фундаментальных понятий математики. Оно было введено в математику создателем теории множеств немецким ученым Георгом Кантором (1845 – 1918). Следуя ему, под *множеством* понимается совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое. Объекты, входящие в состав множества, называются его *элементами*.

Это описание понятия множества нельзя считать логическим определением, а всего лишь пояснением. Понятие множества принимается как исходное, первичное, то есть не сводимое к другим понятиям.

Примерами множеств могут служить множество всех книг, составляющих данную библиотеку, множество всех точек данной линии, множество всех решений данного уравнения, множество всех одноклеточных организмов и т.п.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, … Для числовых множеств будем использовать следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел;
N_0 – множество неотрицательных целых чисел;
Z – множество целых чисел;
Q – множество рациональных чисел;
I – множество иррациональных чисел;
R – множество действительных чисел;
C – множество комплексных чисел.

Элементы множества будем обозначать строчными латинскими буквами: a, b, c, …

Предложения вида «объект a есть элемент множества A», «объект a принадлежит множеству A», имеющие один и тот же смысл, кратко записывают в виде $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Символ $\in$ называется *знаком принадлежности*.

Множества могут содержать как конечное число элементов, так и бесконечное. Например, множество всех корней уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ конечно (два элемента), а множество всех точек прямой бесконечно. Рассматривают в математике и множество, не содержащее ни одного элемента.

Определение 1.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Число элементов конечного множества называется его *мощностью*. Если множество A содержит n элементов, то будем писать $|A| = n$. Если $A = \varnothing$, то $|A| = 0$. Мощность бесконечного множества является более сложным понятием. Оно будет рассмотрено в главе 3.

Замечание 1.1. Элементами множества могут быть множества. Например, можно говорить о множестве групп некоторого факультета университета.

Элементы этого множества – группы, являющиеся в свою очередь множествами студентов. Но конкретный студент одной из групп уже не является элементом множества групп факультета.

Определение 1.2. Множество, элементами которого являются другие множества, называется *семейством* (*классом*).

Определение 1.3. Если все элементы данной совокупности множеств принадлежат некоторому одному множеству, то такое множество называется *универсальным множеством*, или *универсумом*, и обозначается U.

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. ***Множество можно задать следующими способами***:

1) перечислением всех его элементов (списком);
2) характеристическим свойством элементов множества;
3) порождающей процедурой.

Первый способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Если a, b, c, d – обозначения *различных* объектов, то множество A этих объектов записывают так: $A = \{a; b; c; d\}$. Запись читают: «A – множество, элементы которого a, b, c, d».

Замечание 1.2. Порядок перечисления элементов множества *не имеет значения*. Так, множества $\{a; b; c; d\}$ и $\{b; c; d; a\}$ совпадают.

Вторым способом можно задавать как конечные, так и бесконечные множества. *Характеристическое свойство* – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. Обозначив символом $P(x)$ характеристическое свойство элементов множества A, будем писать: $A = \{x| P(x)\}$.

Порождающая процедура описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов. Тогда элементами множества считаются все объекты, которые могут быть получены с помощью этой процедуры. С помощью порождающей процедуры можно задавать множества, содержащие любое число элементов.

Пример 1.1. Определим различными способами множество M_{2n-1} всех нечетных чисел, не превышающих 10:

1) $M_{2n-1} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
2) $M_{2n-1} = \{2k-1 | k \in N, k \leq 5\}$;
3) порождающая процедура определяется правилами:
   а) $1 \in M_{2n-1}$;
   б) если $m \in M_{2n-1}$, то $(m + 2) \in M_{2n-1}$, $m \leq 7$.

1.2. Подмножества

Определение 1.4. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Пример 1.2. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, а $B = \{c, e, g, h, j, k\}$. Множество B является подмножеством множества A, поскольку каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Если множество B является подмножеством множества A, то говорят также, что B содержится в A или B включено в A и пишут $A \subseteq B$. Символ $\subseteq$ называется *знаком включения* (точнее, нестрого включения).

Согласно данному определению подмножества каждое множество является подмножеством самого себя: $(\forall A)\ A \subseteq A$. Кроме того, считается, что пустое множество есть подмножество любого множества A: $(\forall A)\ \varnothing \subseteq A$.

Различают два вида подмножеств множества A. Само множество A и $\varnothing$ называются *несобственными подмножествами* множества A. Любые подмножества множества A, отличные от A и $\varnothing$, называются *собственными подмножествами* множества A.

Определение 1.5. Множества A и B называются *равными* (пишут $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Справедливо следующее утверждение, которое также можно рассматривать в качестве определения равных множеств.

Утверждение 1.1. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Замечание 1.3. Из утверждения 1.1 вытекает *способ доказательства равенства двух множеств*: если доказать, что каждый элемент из множества A является элементом множества B и каждый элемент из множества B является элементом множества A, то делают вывод, что $A = B$.

Говорят, что множество B *строго включено* в множество A или, подругому, A строго включает B, если $B \subseteq A$ и $B \neq A$. В этом случае пишут $B \subset A$. Символ $\subset$ называется *знаком строгого включения*.

Пример 1.3. Имеют место следующие строгие включения числовых множеств: $N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, $I \subset R \subset C$.

Определение 1.6. Множество всех подмножеств множества A называется его *булеаном* (или *множеством-степенью*) и обозначается через $P(A)$ (или 2^A).

Пример 1.4. Если $A = \{a, b, c\}$, то
$P(A) = \{\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a, b\},\{b, c\}, \{a, c\},\{a, b, c\}\}$.

1.3. Операции над множествами

Определим операции над множествами, с помощью которых можно получать из любых имеющихся двух множеств новые множества.

Определение 1.7. *Объединением* (*суммой*) $A \cup B$ (или $A + B$) множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Таким образом, по определению, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Заметим, что в объединение двух множеств A и B могут входить элементы из A, не принадлежащие множеству B, элементы из B, не принадлежащие множеству A, и элементы, принадлежащие множествам A и B одновременно. Следовательно, $(\forall A, B)\ A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$.

Определение 1.8. *Пересечением* (*произведением*) $A \cap B$ (или $A \cdot B$, или AB) множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам А и В одновременно.

Таким образом, по определению, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Замечание 1.4. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то говорят, что множества A и B *пересекаются*. Если $A \cap B = \varnothing$, то в этом случае множества A и B называются *непересекающимися*.

Из определения пересечения следует, что $(\forall A, B)\ A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$.

Определение 1.9. *Разностью* $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Таким образом, по определению, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Замечание 1.5. Если $B \subseteq A$, то в этом случае разность $A \setminus B$ называют *дополнением B до A*.

Определим, опираясь на определения 1.7–1.9, операции симметрической разности и дополнения множества.

Определение 1.10. *Симметрической разностью* (*кольцевой суммой*) $A \Delta B$ (или $A \oplus B$) множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одному из множеств A либо B, но не являются их общими элементами.

Таким образом, по определению,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение 1.11. *Дополнением* $\overline{A}$ (или A') множества A (до универсума U) называется множество $U \setminus A$.

Таким образом, по определению, $\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$.

Пример 1.5. Пусть $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, d, e, f, h\}$, $B = \{b, d, f, h\}$. Найти: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение. $A \cup B = \{a, b, d, e, f, h\}$, $A \cap B = \{d, f, h\}$, $A \setminus B = \{a, e\}$, $B \setminus A = \{b\} \Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A$, $A \Delta B = \{a, b, e\}$, $\overline{A} = \{b, c, g\}$, $\overline{B} = \{a, c, e, g\}$.

Введем некоторые обобщения вышеприведенных определений. Пусть I – любое конечное или бесконечное множество индексов. Тогда объединение или пересечение произвольного семейства множеств $\{A_i\}$, $i \in I$, определяется следующим образом:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ ,хотя бы для одного } i\,(i \in I)\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ для всех } i\,(i \in I)\}.$$

Если $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, то используются записи $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ и $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, или $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Определение 1.12. Пусть E – некоторое семейство подмножеств множества A, то есть $E = \{E_i\}$, $i \in I$, где $(\forall\ i \in I)\ E_i \subseteq A$. Семейство E называется *по-*

крытием множества A, если каждый элемент множества A принадлежит хотя бы одному множеству семейства Е.

Таким образом, $E = \{E_i\}$, $i \in I$, где $(\forall\ i \in I)\ E_i \subseteq A$ – покрытие множества $A \Leftrightarrow A = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$.

Пример 1.6. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. Выяснить, какие из следующих семейств являются покрытиями множества A:

$E_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{f, g, h\}, \{i, j, k\}\}$;

$E_2 = \{\{i, j, k\}, \{e, f, g, h\}, \{a, b, c, d\}\}$;

$E_3 = \{\{a, f, i, k, d\}, \{b, c, g, h\}, \{d\}, \{e, j\}\}$;

$E_4 = \{\{c, d, e, f\}, \{a, b, c\}, \{i, j, k\}, \{g, k\}\}$.

Решение. Семейства E_2 и E_3 – покрытия множества A, а семейства E_1 и E_4 не являются покрытиями множества A.

Определение 1.13. Покрытие E называется *разбиением* множества A, если каждый элемент множества A принадлежит в точности одному множеству семейства E.

Таким образом, $E = \{E_i\}$, $i \in I$, где $(\forall\ i \in I)\ E_i \subseteq A$ – разбиение множества $A \Leftrightarrow$ $\mathrm{A} = \bigcup_{i \in I} E_i$ и $E_i \cap E_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

Пример 1.7. Пусть $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выяснить, какие из следующих семейств образуют разбиения множества B:

$E_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\}$;

$E_2 = \{\{5\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{1, 6\}\}$;

$E_3 = \{\{1, 3, 7\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 5, 6, 9\}\}$;

$E_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\}\}$.

Решение. Среди перечисленных семейств только E_1 и E_4 образуют разбиения множества B. Семейство E_2 не является разбиением множества B, так как $B \neq \{5\} \cup \{2, 4, 8, 9\} \cup \{1,6\}$, а семейство E_3 – так как $\{4, 6, 8\} \cap \{2, 5, 6, 9\} \neq \varnothing$.

Рассмотрим основные, наиболее важные свойства операций объединения, пересечения и дополнения над множествами.

Свойства операций над множествами

Пусть задан универсум U. Тогда $(\forall\ A, B, C)\ A, B, C \subseteq U$ выполняются следующие свойства:

1. ***идемпотентность:***

   $A \cup A = A$ (идемпотентность $\cup$), $A \cap A = A$ (идемпотентность $\cap$);

2. ***коммутативность:***

   $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$), $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$);

3. ***ассоциативность:***

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$),

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$);

4. ***дистрибутивность:***

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$),

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$);

5. ***поглощение:*** $(A \cap B) \cup A = A$, $(A \cup B) \cap A = A$;
6. ***свойства нуля:*** $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;
7. ***свойства единицы:*** $A \cup U = U$, $A \cap U = A$;
8. ***инволютивность (свойство двойного дополнения):*** $\overline{\overline{A}} = A$;
9. ***законы де Моргана:*** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
10. ***свойства дополнения:*** $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
11. ***выражение для разности:*** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Доказательство. Справедливость каждого из этих свойств можно доказать, используя утверждение 1.1 и замечание 1.3.

В качестве примера приведем доказательство дистрибутивности объединения относительно пересечения: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть $X = A \cup (B \cap C)$, $Y = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Надо доказать, что множества X и Y равны, то есть (a) $X \subseteq Y$; (b) $Y \subseteq X$.
$X \subseteq Y$, если каждый элемент множества X принадлежит множеству Y. Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда возможны два случая: (a_1) $x \in A$ и (a_2) $x \in B \cap C$.

В случае (a_1) $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$; следовательно, $x \in Y$. В случае (a_2) $x \in B$ и $x \in C$, поэтому $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$; отсюда $x \in Y$. Из произвольности элемента x следует, что $X \subseteq Y$.

Предложим теперь, что $y \in Y$; то есть $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, тогда $y \in A \cup B$ и $y \in A \cup C$.

При этом если $y \notin A$, то $y \in B$ и $y \in C$, значит $y \in B \cap C$; следовательно, $y \in A \cup (B \cap C)$. Если же $y \in A$, то $y \in A \cup (B \cap C) = X$. Из произвольности элемента y вытекает, что $Y \subseteq X$.

Из (a) и (b) следует равенство $X = Y$.

1.4. Диаграммы Эйлера – Венна

Для графического (наглядного) изображения множеств и их свойств используются диаграммы Эйлера – Венна (Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский математик, механик и физик; Джон Венн (1834 – 1923) – английский логик). На них множество отождествляется с множеством точек на плоскости, лежащих внутри некоторых замкнутых кривых, например окружностей (так называемые круги Эйлера). В частности, универсальное множество U изображается множеством точек некоторого прямоугольника.

Проиллюстрируем с помощью диаграмм Эйлера – Венна введенные определения. На рисунках 1.1 – 1.5 результат выполнения операции выделен штриховкой.

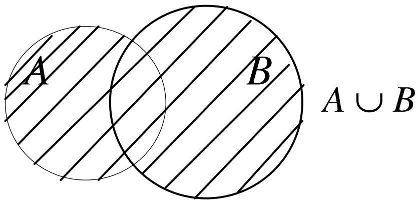


Рис. 1.1

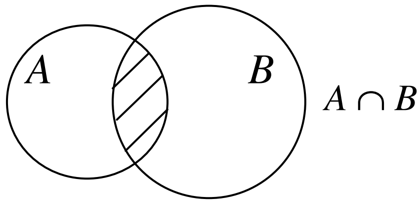


Рис. 1.2

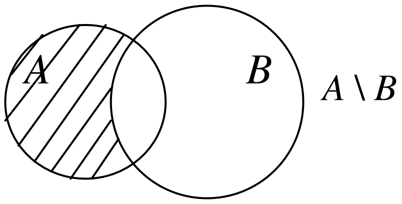


Рис. 1.3

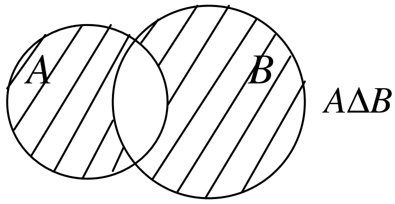


Рис. 1.4

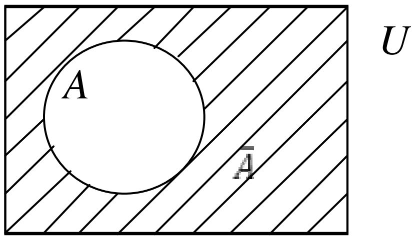


Рис. 1.5

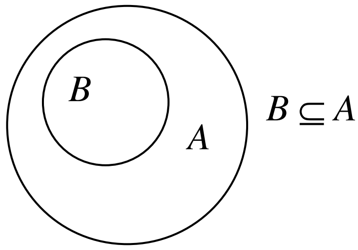


Рис. 1.6

1.5. Прямое произведение множеств

При задании некоторого конечного множества списком его элементов порядок указания элементов этого множества не имеет значения. Например, множества $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ совпадают, так как они состоят из одних и тех же элементов, хотя порядок указания элементов в этих записях различен. Кроме этого, каждый элемент входит в множество в точности один раз, то есть среди элементов множества нет повторяющихся. Так, запись $\{a, a\}$ означает множество, состоящее из единственного элемента a, то есть $\{a, a\} = \{a\}$.

Введем новое исходное понятие – понятие *упорядоченной пары* (a, b), которая представляет собой набор двух объектов a и b, не обязательно различных, первым элементом которого является a, а вторым – b.

Определение 1.14. Упорядоченные пары (a, b) и (c, d) называются *равными* (пишут $(a, b) = (c, d)$), если $a = b$ и $c = d$.

В частности, $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$ (сравните: из равенства $\{a, b\} = \{b, a\}$ не следует, что $a = b$).

Обобщением понятия упорядоченной пары является понятие *кортежа* (*вектора*) – упорядоченного набора произвольных, не обязательно различных n объектов. Кортеж, состоящий из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обозначается
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$. Элементы x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) называются *координатами* или *компонентами* кортежа. Число координат называется *длиной кортежа* (*размерностью вектора*). Кортежи длины 2 называют также упорядоченными парами, кортежи длины 3 – упорядоченными тройками и т.д., кортежи длины n – упорядоченными n-ми («энками»).

Определение 1.15. Два кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ называются *равными* (пишут $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$), если:

1) $n = m$;
2) $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Введем еще одну операцию над множествами.

Определение 1.16. *Прямым* (*декартовым*) *произведением* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех кортежей длины n $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$.

Таким образом, по определению,

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$.

В частности, если $n = 2$, то $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Пример 1.8. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогда

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$;

$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$;

$A \times A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$; $B \times B = \{(1, 1), (2, 2)\}$.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то множество $A_1 \times A_2 \times .. \times A_n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$ называется *n-кратным прямым произведением множества A* или *n-й степенью множества A* и обозначается через A^n. При этом будем считать, что $A^1 = A$.

Рассмотрим ***геометрическую интерпретацию прямого произведения двух числовых множеств*** A и B – множество всех точек координатной плоскости Oxy с координатами (x, y) такими, что $x \in A$, а $y \in B$. Тогда для двух заданных числовых множеств можно наглядно изображать их прямое произведение и, обратно, по изображению прямого произведения двух множеств определять их элементы.

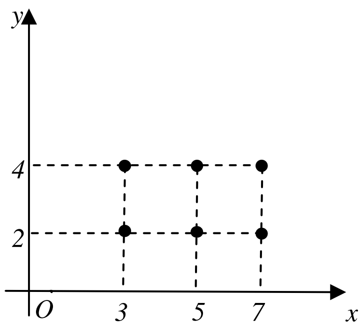
Пример 1.9. Изобразить на координатной плоскости Oxy $A \times B$, если:

а) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4\}$;

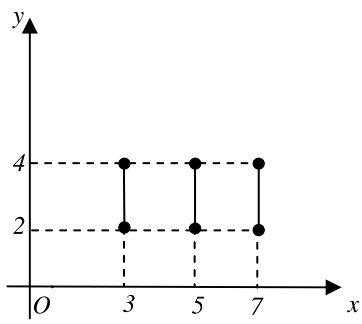
б) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = [2; 4]$;

в) $A = [3, 7]$, $B = [2; 4]$.

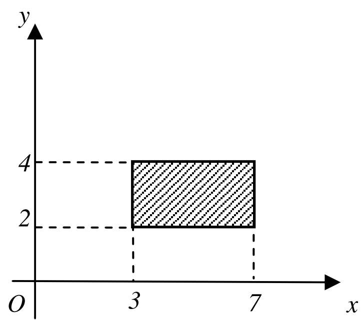
Решение.



а

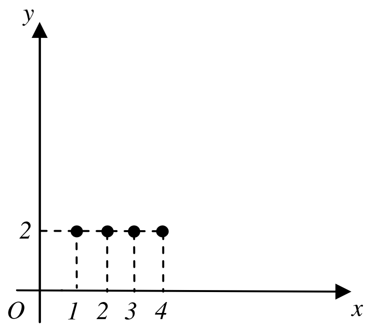


б

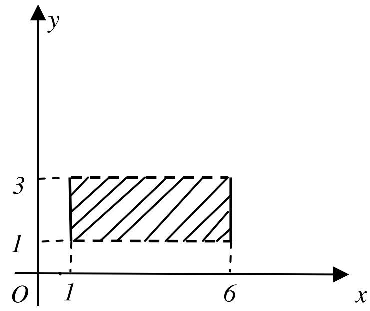


в

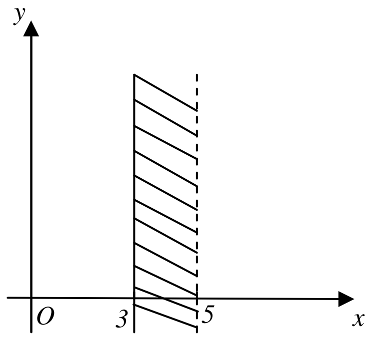
Пример 1.10. Определить, прямое произведение каких множеств A и B изображено на рисунках:



а



б



в

Решение. а – $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2\}$; б – $A = [1;6]$, $B = (1;3)$; в – $A = [3;5)$, $B = R$.