

4.3. Определить число графов с n вершинами, в которых допускаются ребра следующих типов:

- 1) неориентированные и петли;
- 2) ориентированные и петли;
- 3) ориентированные, но не петли.

4.4. Определить число ориентированных графов с n вершинами, в которых каждая пара различных вершин соединена:

- 1) не более чем одним ребром;
- 2) точно одним ребром.

4.5. Выяснить, существуют ли графы с набором степеней:

- 1) $(0,2,2,3,3)$;
- 2) $(2,2,2,3,3)$;
- 3) $(2,2,3,3,3)$;
- 4) $(0,1,2,3,4)$.

4.6. Определить число ребер в каждом из графов K_n , $K_{p,q}$, Q_n .

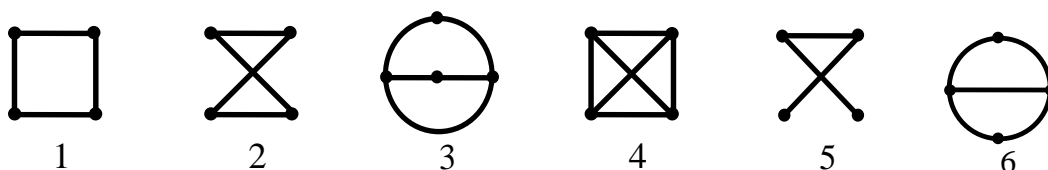
4.7. Граф перестановок порядка k строится следующим образом. Его вершины соответствуют всевозможным перестановкам элементов $1, 2, \dots, k$. Две вершины смежны тогда и только тогда, когда одна из соответствующих перестановок может быть получена из другой перестановки одной транспозицией. Определите число ребер в этом графе.

4.8. При каких n существуют графы с n вершинами, каждая из которых имеет степень 3? степень 4?

4.9. Вершина степени 0 называется *изолированной*. Определите число графов с n вершинами, в которых

- 1) данные k вершин являются изолированными;
- 2) нет изолированных вершин (примените метод включения и исключения).

4.10. Графы, изображенные на рис. 2, разбить на классы попарно неизоморфных графов.



4.20. Доказать, что в каждом графе с не менее чем двумя вершинами найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

4.21. Найти радиус и диаметр каждого из графов $P_n, C_n, Q_n, K_{p,q}$.

4.22. Найти радиус, диаметр, центр графа, заданного матрицей смежности:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить, является ли граф эйлеровым. В случае положительного ответа построить в нем эйлеров цикл.

4.23. Построить граф, центр которого:

- 1) состоит ровно из одной вершины;
- 2) состоит из двух вершин;
- 3) состоит из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;
- 4) совпадает с множеством всех вершин.

4.24. Найти радиус, диаметр, центр графа, заданного матрицей смежности:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить, является ли граф гамильтоновым. В случае положительного ответа построить в нем гамильтонов цикл.

4.25. Какое наименьшее число ребер может быть в связном графе с n вершинами?

4.26. Могут ли графы G и \bar{G} оба быть несвязными?

4.27. Найти граф G с минимальным числом вершин $n > 1$, такой, что G и \bar{G} оба связны.

- 4.28. Какое наибольшее число ребер может быть в несвязном графе с n вершинами?
- 4.29. При каких p и q в графе $K_{p,q}$ есть эйлеров цикл? Эйлеров путь? Гамильтонов цикл? При каких n в графе Q_n есть эйлеров цикл?
- 4.30. Доказать, что в графе Q_n при любом $n \geq 2$ имеется гамильтонов цикл.
- 4.31. Найти граф с шестью вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.
- 4.32. Найти граф с шестью вершинами, который имеет гамильтонов цикл, но не имеет эйлерова цикла.
- 4.33. Какие из графов, изображенных на рис. 5, являются двудольными?
- 4.34. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе с n вершинами?
- 4.35. Двудольный граф имеет k компонент связности. Каким числом способов его можно разбить на две доли?
- 4.36. Перечислить все попарно неизоморфные деревья с числом вершин, не превышающим 6.
- 4.37. Найти два неизоморфных дерева с одинаковыми наборами степеней.
- 4.38. Сколько ребер в лесе с n вершинами и k компонентами связности?
- 4.39. Сколько ребер в связном графе с n вершинами, если в нем имеется единственный цикл?
- 4.40. В дереве с n вершинами степень каждой вершины равна 1 или k . Сколько листьев в таком дереве?
- 4.41. Найти число корневых деревьев с множеством вершин $(1, \dots, n)$.
- 4.42. Построить код Прюфера для деревьев, изображенных на рис. 7.

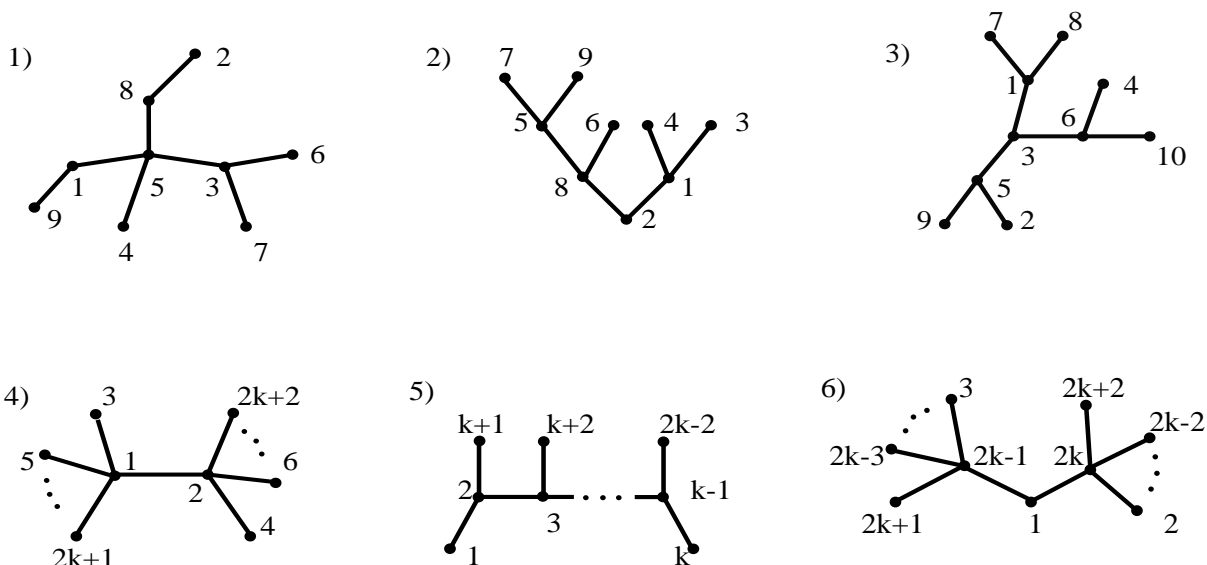


Рис. 7. К задаче 4.42

4.43. По заданному коду Прюфера $p(T)$ восстановить дерево. Найти центральные вершины восстановленного дерева.

- 1) $P(T) = (4, 1, 6, 2, 2, 2, 7);$
- 2) $P(T) = (4, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 1);$
- 3) $P(T) = (5, 2, 5, 3, 5, 4, 9, 6);$
- 4) $P(T) = (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-2});$
- 5) $P(T) = (1, 2, \dots, n-2);$
- 6) $P(T) = (3, 3, 4, 5, \dots, n-2, n-2).$

4.44. Найти все графы, которые являются деревьями вместе со своими дополнениями.

4.45. Какие из графов, изображенных на рис. 8, планарны?

