ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются методы построения комбинаций элементов конечных множеств в соответствии со специальными правилами. Такие комбинации принято называть комбинаторными конфигурациями. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки элементов конечного множества и его конечные подмножества с наперед заданным числом элементов. При изучении комбинаторных конфигураций принципиально важными проблемами являются задачи существования таких конфигураций, нахождения методов их построения и определения правил подсчета числа таких конфигураций.

3.1. Основные правила комбинаторики

Простейшими правилами подсчета числа комбинаторных конфигураций являются следующие правила суммы, произведения и степени.

Правило суммы: если элемент можно выбрать способами и элемент x_2 можно выбрать способами, причем все эти способы выбора попарно различны, то выбор одного из элементов можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

В общем случае, если элемент можно выбрать n_1 способами, элемент x_2 можно выбрать способами и т.д., наконец, x_m можно выбрать способами, причем все эти способы выбора попарно различны, то выбор одного из элементов можно осуществить $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ способами.

В теоретико-множественной трактовке правило суммы означает, что для любых конечных взаимно непересекающихся множеств A ,
выполняется равенство: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|$.

Правило произведения: если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами и элемент x_2 можно выбрать n_2 способами, то упорядоченный набор (x_1, x_2) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

В общем случае, если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами и элемент x_2 можно выбрать n_2 способами и т.д., наконец, элемент x_m можно выбрать n_m способами, то упорядоченный набор $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ можно выбрать $n_1 . n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ способами.

В теоретико-множественной трактовке правило произведения означает, что для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$ выполняется равенство: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_m|$.

Правило степени: если каждый из элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$ можно выбрать n способами, то упорядоченный набор $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ можно выбрать n^m способами.

В теоретико-множественной трактовке правило степени означает, что для любых конечных множеств A, B множество A^B всех отображений *B* в *A* имеет $|A|^{|B|}$ элементов, т.е. выполняется равенство: $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$.

Задача 1. Рассматривается алфавит $A = \{0,1\}$. Конечная последовательность $a_1 \dots a_n$ символов алфавита *A* называется словом длины *n*. Определить число слов: а) длины 3; б) длины не больше 4.

Решение. Обозначим N_k – число слов длины k и $N_{\le k}$ – число слов длины не больше k.

Слово $a_1 a_2 a_3$ длины 3 определяется комбинаторной конфигурацией (a_1, a_2, a_3). Так как каждый из элементов можно выбрать двумя способами, то по правилу произведения: $N_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.

По правилу суммы: $N_{\le 4} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.

Задача 2. Какой длины слова из символов 0,1 достаточны для кодировки 33 букв русского алфавита?

Решение. Так как $N_{\le 4} = 30 < 33$, то словами длины не больше 4 невозможно закодировать 33 буквы русского алфавита. С другой стороны, $N_{\le 5} = N_{\le 4} + N_5 = 30 + 2^5 = 62 > 33$. Значит, для кодировки букв русского алфавита достаточны слова длины не больше 5.

Задача 3. В замке на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 7 секторов. Сколько наборов имеет такой замок?

Решение. Наборы замка моделируются комбинаторными конфигурациями вида $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – установленные на 5 дисках некоторые значения из 7 секторов. Значит, по правилу степени число таких наборов равно 7^5.

3.2. Основные комбинаторные конфигурации

Рассмотрим n-элементное множество $\mathrm{M} = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Определение. Упорядоченный набор $(x_1, \dots, x_m)$ m различных элементов $x_1, \dots, x_m$ множества M называется *размещением из n элементов по m.* Другими словами, размещения из n элементов по m – это комбинации из m различных элементов n-элементного множества M, которые различаются либо составом элементов, либо порядком их расположения в комбинации.

Число всех таких размещений обозначается A_n^m или $(n)_m$ (читается: «число размещений из n по m»). Из определения по правилу произведения получаем формулу:

$$\mathrm{A}_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1),$$

для значений $1 \leq m \leq n$. В остальных случаях считаем: $\mathrm{A}_n^0 = \mathrm{A}_0^0 = 1$ и $\mathrm{A}_n^m = 0$ при $m > n$.

В частности, при $m = n$ получим размещение из n по n элементов $(x_1, \dots, x_n)$ – упорядоченный набор всех n различных элементов множества M. Такие наборы называются *перестановками n-элементного множества M*. Другими словами, перестановки n элементов – это комбинации из всех элементов n-элементного множества M, которые различаются порядком расположения элементов.

Число всех таких перестановок обозначается P_n (читается «число перестановок n элементов»).

Из определения получаем формулу вычисления числа перестановок:

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ (читается: «}n\text{ факториал»).}$$

В случае $n = 0$ считаем: $\mathrm{P}_0 = 0! = 1$.

Определение. Подмножество $\{x_1, \dots, x_m\}$ множества M, состоящее из m различных элементов $x_1, \dots, x_m$, называется *сочетанием из n элементов по m*. Другими словами, сочетания из n элементов по m – это комбинации из m различных элементов n-элементного множества M, которые различаются составом элементов.

Число всех таких сочетаний обозначается C_n^m (читается: «число сочетаний из n по m»).

Поскольку в случае $1 \leq m \leq n$ каждое сочетание из n элементов по m можно упорядочить $m!$ способами и получить из такого сочетания $m!$ размещений из n элементов по m, то выполняется равенство $\mathrm{A}_n^m = \mathrm{C}_n^m \cdot m!$ Отсюда получаем формулу вычисления числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}.$$

В остальных случаях считаем: $C_n^0 = C_0^0 = 1$ и $C_n^m = 0$ при $m > n$.

После умножения числителя и знаменателя последней дроби на выражение $(n-m)!$ получаем компактную формулу вычисления числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

для значений $1 \le m \le n$.

Свойства числа сочетаний.

1)$C_n^m = C_n^{n-m}$;

2)$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;

3)$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m$ – эта формула называется *биномом Ньютона* (в силу чего комбинаторные числа C_n^m называются также *биномиальными коэффициентами*),

4)$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Первые два свойства легко доказываются с помощью последней формулы вычисления числа сочетаний. Третье свойство доказывается индукцией по переменной *n* (см. раздел 3.3). Последнее свойство получается из бинома Ньютона подстановкой значения $x = 1$.

Заметим, что второе свойство дает рекуррентное соотношение для последовательного вычисления биномиальных коэффициентов C_n^m с помощью таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*.

Определение. Упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_m)$ элементов $x_1, \ldots, x_m$ множества *M* называется *размещением с повторением из n элементов по m.* В отличие от обычных размещений из *n* элементов по *m*, в этом случае элементы $x_1, \ldots, x_m$ не обязательно различные.

Число всех таких размещений с повторением обозначается $\overline{A}_n^m$ (читается: «число размещений с повторением из *n* по *m*»).

Так как на каждом из *m* мест в размещении с повторением $(x_1, \ldots, x_m)$ может стоять любой из *n* элементов множества *M*, то по правилу произведения получаем формулу:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

В частности, при $m = n$ получим размещения с повторением из *n* элементов по *n*, которые называются также *перестановками с повторениями из n элементов.* Если рассматриваются перестановки с повторением из *n* элементов, в которых имеется *k* различных элементов, каждый из которых встречается соответственно $\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_\mathrm{k}$ раз, то число всех таких перестановок обозначается $\mathrm{P}_\mathrm{n}(\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_\mathrm{k})$ и вычисляется по формуле:

$$\mathrm{P}_\mathrm{n}(\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_\mathrm{k}) = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{n}_1! \dots \mathrm{n}_\mathrm{k}!}.$$

Определение. Неупорядоченный набор $\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}\}$ элементов $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}$ множества *M* называется *сочетанием с повторением из n элементов по m.* В отличие от обычных сочетаний из n элементов по m, в этом случае элементы $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}$ не обязательно различные.

Число всех таких сочетаний с повторением обозначается $\bar{\mathrm{C}}_\mathrm{n}^\mathrm{m}$ (читается: «число сочетаний с повторением из n по m»).

Формула вычисления числа сочетаний с повторением имеет вид:

$$\bar{\mathrm{C}}_\mathrm{n}^\mathrm{m} = \mathrm{C}_{\mathrm{n+m-1}}^\mathrm{m} = \frac{(\mathrm{n}+\mathrm{m}-1)!}{\mathrm{m}!\,(\mathrm{n}-1)!}.$$

Задача 1. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: а) все путевки различны (т.е. трех категорий); б) все путевки одинаковы (т.е. одной категории)?

Решение. В случае а) элементарные исходы моделируются комбинаторными конфигурациями вида (x_1, x_2, x_3), где x_1 – сотрудник, получивший путевку 1-й категории, x_2 – сотрудник, получивший путевку 2-й категории, и x_3 – сотрудник, получивший путевку 3-й категории. Так как эта конфигурация является размещением из 5 элементов по 3, то общее число способов распределения путевок равно значению $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$
В случае б) элементарные исходы моделируются комбинаторными конфигурациями вида $\{x_1, x_2, x_3\}$, где x_1, x_2, x_3 – сотрудники, получившие путевки одной категории. Так как эта конфигурация является сочетанием из 5 элементов по 3, то общее число способов распределения путевок равно значению $C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10.$

Задача 2. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколько существует способов выделения одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

Решение. Назначения патрулей моделируются комбинаторными конфигурациями вида $(x_1, \{y_1, y_2, y_3\})$, где x_1 – один сержант, выделенный в патруль, и – три солдата, выделенных в патруль. Элемент можно выбрать 3 способами, а конфигурация $\{y$ $\}$ является сочетанием из 30 элементов по 3, которую можно выбрать способами. Тогда по правилу произведения общее число патрулей равно

Следовательно, всего существует 12180 способов выделения одного сержанта и трех солдат для патрулирования.

3.3. Методы вычисления комбинаторных конфигураций

Принцип включения и исключения.

Обобщением правила суммы на произвольные два множества A,B является очевидное равенство: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

В общем случае, для произвольных множеств $A_1, \dots, A_n$ значение $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$ вычисляется по следующему правилу, которое называется *принципом включения и исключения*:

$$\left|\bigcup \quad \right| = \sum |A_i| \quad \sum \; |A \quad |$$

$$+\sum \quad |A \quad | \quad |A \quad |.$$

Пример. Найдем количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 5.

Для каждого $1 \leq i \leq 3$ обозначим A_i множество всех трехзначных чисел, в записи которых цифра 5 стоит на i-м месте. Тогда искомое количество трехзначных чисел вычисляется по принципу включения и исключения следующим образом:

$$|A \quad | = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A \quad | - |A \quad | - |A \quad |$$
$$+|A \quad |$$

Пусть элементы множества A могут обладать n свойствами и – число элементов множества A, обладающих свойствами . Тогда число элементов множества A, обладающих ровно r свойствами вычисляется по формуле:

$$\sum$$

где $\mathrm{S_0} = |\mathrm{A}|$; $\mathrm{S_k} = \sum_{1 \le \mathrm{i_1} < \cdots < \mathrm{i_k} \le \mathrm{n}} \mathrm{N_{i_1,\dots,i_k}}, \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}}$.

В частности, число $\mathrm{N}(0)$ элементов множества A, не обладающих ни одним из n свойств, вычисляется по формуле:

$$\mathrm{N}(0) = \mathrm{S_0} - \mathrm{S_1} + \mathrm{S_2} - \cdots + (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{S_n}.$$

Пример. Если $|X| = n$ и $|Y| = m$, то число $F_{n,m}$ всех отображений множества X на множество Y, вычисляется по формуле:

$$F_{n,m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)^n ,$$

так как любое отображение $f: X \to Y$ может обладать m свойствами α_{i} – множество значений $f(X)$ не содержит элемент $\mathrm{y_i} \in Y$ $(i = \overline{1,m})$ и число отображений $f: X \to Y$, обладающих свойствами $\alpha_{\mathrm{i_1}}, \dots, \alpha_{\mathrm{i_k}}$, вычисляется по формуле

$$\mathrm{N_{i_1,\dots,i_k}} = \left| \left(\mathrm{Y} \setminus \{ \mathrm{y_{i_1}}, \dots, \mathrm{y_{i_k}} \} \right)^{\mathrm{X}} \right| = (\mathrm{m} - \mathrm{k})^{\mathrm{n}}.$$

Тогда $S_k = C_m^k (m-k)^n$ и $F_{n,m} = N(0)$ вычисляется по приведенной выше формуле.

Производящие функции.

Определение. Производящей функцией последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называется формальный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Если такой ряд имеет сумму $f(x)$, то по формуле Тейлора коэффициенты исходного степенного ряда вычисляются по формуле:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

где $n = 0,1,\dots$

Примеры.

1. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$, то $f(x) = (1-x)^{-1}$ – производящая функция последовательности 1,1,…
2. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n$, то $f(x) = (1+x)^n$ – производящая функция последовательности $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$.

Математическая индукция.

Одним из главных свойств системы натуральных чисел является следующий принцип.

Принцип математической индукции. Если $P = P(n)$ – такое свойство натуральных чисел n, что n=1 обладает этим свойством P и вместе с любым натуральным числом n этим свойством P обладает следующее за ним число n+1, то данным свойством P обладает каждое натуральное число.

Пример. Докажем формулу бинома Ньютона индукцией по переменной n. В этом случае для произвольного значения $x \in \mathbf{R}$ свойство $P = P(n)$ натуральных чисел n выражается равенством $(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m$.

При $\mathrm{n} = 1$ это свойство имеет вид очевидного равенства: $(1+x)^1 = \sum_{m=0}^{1} C_1^m x^m = C_1^0 x^0 + C_1^1 x^1 = 1 + x$. Предположим теперь, что свойство P выполняется для натурального числа n, и докажем, что этим свойством P обладает следующее за ним число $n+1$, т.е. выполняется равенство:

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m.$$

Тогда по нашему предположению с учетом второго свойства числа сочетаний получаем равенства:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m\right)(1+x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m + \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{m+1} =$$

$$= C_n^0 x^0 + \sum_{m=1}^{n} C_n^m x^m + \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} x^m + C_n^n x^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 x^0 + \sum_{m=1}^{n} (C_n^m + C_n^{m-1}) x^m + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m.$$

Контрольные вопросы для среза знаний

1) Правило суммы и его теоретико-множественное истолкование.
2) Правило произведения и его теоретико-множественное истолкование.
3) Правило степени и его теоретико-множественное истолкование.
4) Определение основных комбинаторных конфигураций и формулы вычисления их количества.
5) Свойства числа сочетаний и их приложения.
6) Треугольник Паскаля.
7) Доказательство формулы бинома Ньютона.
8) Формулировка и обоснование принципа включения и исключения.
9) Определение, примеры и приложения производящей функции.
10) Принцип математической индукции.