フーリエの定理から実フーリエ級数展開を導く

フーリエの定理から複素フーリエ級数展開を導く前にまずは「実フーリエ級数展開」を導きます。

「実フーリエ級数展開」はフーリエの定理を時間領域複素正弦波ではなくて時間領域アナログサイン波 (cos 版) を使って表現した式です。

まずフーリエの定理に出てきた「直流成分」を式で表すと実数定数 a_0 になります。

次に「基本角周波数 w_1 [rad/秒] の時間領域アナログサイン波」を式で表すと $a_1 \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$ になります。このサイン波の事を「基本波」と呼びます。なお基本波の振幅 a_1 と位相 ϕ_1 は実数の定数です。

同様に「w_1 の正整数倍の角周波数の無限個の時間領域アナログサイン波」を式で表すと $a_k \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t + \phi_k)$ になります。このサイン波を「第 k 高調波」と呼びます。高調波の振幅 a_k と位相 ϕ_k も実数の定数です。例えば $k = 2$ 、つまり第 2 高調波の式は $a_2 \cdot \cos(2 \cdot w_1 \cdot t + \phi_2)$ です。

フーリエの定理は $f(t)$ が周期性時間領域アナログ信号なら、どんな信号でも直流成分、基本波、無限個の第 k 高調波が足し合わされて出来ていると主張する定理ですので、これを式で表すと次のようになります。

定義： フーリエの定理を式で表すと ⋯

$$
\begin{aligned}
f(t) = a_0 & \cdots \text{直流成分} \\
& + a_1 \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1) \cdots \text{基本波} \\
& + a_2 \cdot \cos(2 \cdot w_1 \cdot t + \phi_2) \cdots \text{第 2 高調波} \\
& + a_3 \cdot \cos(3 \cdot w_1 \cdot t + \phi_3) \cdots \text{第 3 高調波} \\
& + \cdots \\
& + a_k \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t + \phi_k) \cdots \text{第 } k \text{ 高調波} \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

$f(t)$ ⋯ 周期 T [秒] の周期性時間領域アナログ信号

w_1 ⋯ 基本角周波数、$w_1 = 2\pi/\mathrm{T}$、単位は [rad/秒]

a_0 ⋯ 直流成分、実数の定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

a_k ⋯ 第 k 高調波 ($k = 1$ の時は基本波) の振幅、実数の定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

ϕ_k ⋯ 第 k 高調波 ($k = 1$ の時は基本波) の初期位相、実数の定数、範囲は $-\pi \leq \phi \leq \pi$、単位は [rad]

上の式を $\sum$ を使って級数の形にまとめたのが次の実フーリエ級数展開です。

定義： 実フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t + \phi_k)\}$$

$f(t)$ … 周期 T [秒] の周期性時間領域アナログ信号

w_1 … 基本角周波数、$w_1 = 2\pi/\mathrm{T}$、単位は [rad/秒]

a_0 … 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

a_k … 第 k 高調波 ($k = 1$ の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

ϕ_k … 第 k 高調波 ($k = 1$ の時は基本波) の初期位相、実数の 定数、範囲は $-\pi \leq \phi \leq \pi$、単位は [rad]

なお文献によっては次の様に初期位相 ϕ_k を消して、代わりに sin と cos の両方を含んだ定義になっている場合もありますが (※)、意味は上の定義と同じです。

※ というか、そちらの方が一般的な定義です。

一般的な実フーリエ級数展開の定義

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha_k \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(k \cdot w_1 \cdot t)\}$$

a_0 … 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t) \mathrm{d}t$$

α_k … cos 項の第 k 高調波 ($k = 1$ の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$$\alpha_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \{f(t) \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t)\} \mathrm{d}t$$

β_k … sin 項の第 k 高調波 ($k = 1$ の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$$\beta_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \{f(t) \cdot \sin(k \cdot w_1 \cdot t)\} \mathrm{d}t$$