第 12 回 「複素数と複素平面」 達成度評価試験　　2023/1/27(金)

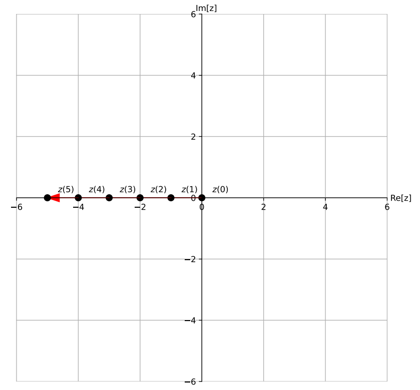
Q1　(10 点)　　ID: complex/text02/page01/008

$t > 0$ [秒] の範囲における時間領域複素信号

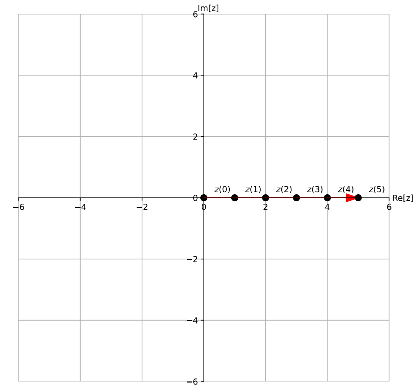
$$z(t) = \frac{t}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi/8 \cdot t\}}$$

の動きを選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

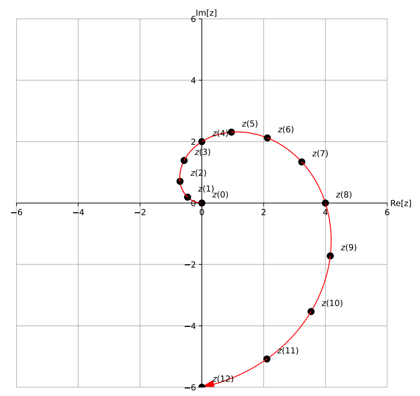
(a)



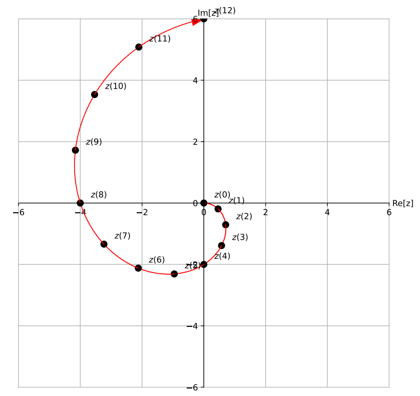
(b)



(c)



(d)



Q1 (10 点) ID: complex/text02/page01/008

正解 **(d)**

【出題意図】

与えられた時間領域複素信号 $z(t)$ の動き方を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

・ 絶対値及び偏角が t [秒] の関数で表される複素数

$$z(t) = |z(t)| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z(t)\}}$$

を「時間領域 (アナログ) 複素信号」と呼び、複素平面の上を移動する運動体 (ベクトル) となる。

【解説】

実際に具体的な値をいくつか選んで代入してみることで動き方を求められる。

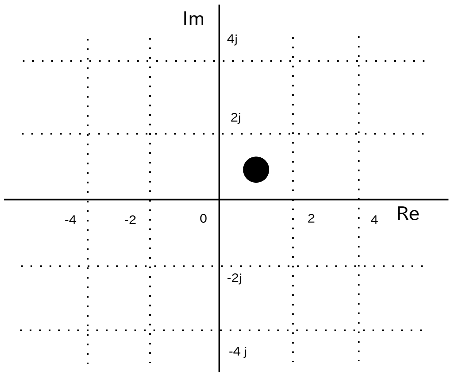
Q2 (10 点) ID: complex/text02/page01/024

時間領域複素信号

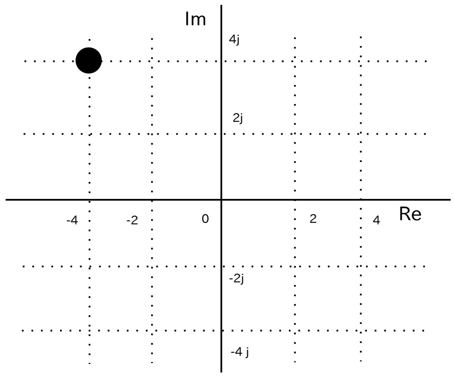
$$z(t) = \mathrm{e}^{\{j \cdot t\}} + j$$

の $t = 0$ [秒] 地点の位置を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

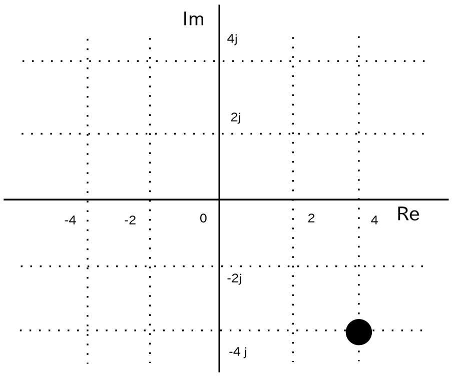
(a)



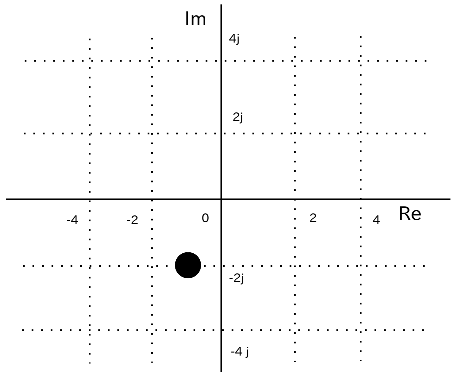
(b)



(c)



(d)



Q2　(10 点)

ID: complex/text02/page01/024

正解　**(a)**

【出題意図】

与えられた時間領域複素信号 $z(t)$ のある時刻における位置を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

・ 絶対値及び偏角が t [秒] の関数で表される複素数

$$z(t) = |z(t)| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z(t)\}}$$

を「時間領域 (アナログ) 複素信号」と呼び、複素平面の上を移動する運動体 (ベクトル) となる。

【解説】

直交形式で表された複素信号である。そのまま時刻を代入して $z(0) = 1 + j$ により位置を求められる。

Q3 (10 点)

ID: complex/text02/page02/009

時間領域複素正弦波

$$z(t) = \left\{1 \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi/4\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi \cdot t\}}$$

の周波数 f [Hz] を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

(a)

$$f = 1/4 \text{ [Hz]}$$

(b)

$$f = 1 \text{ [Hz]}$$

(c)

$$f = 2 \text{ [Hz]}$$

(d)

$$f = 1/2 \text{ [Hz]}$$

Q3 (10 点) ID: complex/text02/page02/009

正解 **(d)**

【出題意図】

与えられた時間領域複素正弦波 $z(t)$ の式から周波数を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

$$z(t) = \left\{a \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

を時間領域複素正弦波と呼び、複素平面の上の回転運動体 (ベクトル) となる。

a・・・振幅 (または半径)

w ・・・角周波数、単位は [rad/秒]

ϕ ・・・初期位相、単位は [rad]

$$w = 2\pi \cdot f$$

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{|f|} = \frac{2\pi}{|w|}$$ ※ 周期は正なので絶対値を取る

【解説】

$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 1/2$ により求まる。

Q4 (10 点)

ID: complex/text02/page02/024

周期が T = 4 [秒] である時間領域複素正弦波を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

(a)

$$z(t) = \left\{4 \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot 2\pi \cdot t\}}$$

(b)

$$z(t) = 5 \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi/2 \cdot t\}}$$

(c)

$$z(t) = \left\{\frac{5}{3} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi/2\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi/8 \cdot t\}}$$

(d)

$$z(t) = 4 \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot 4\pi \cdot t\}}$$

Q4 (10 点) ID: complex/text02/page02/024

正解 **(b)**

【出題意図】

与えられた振幅から時間領域複素正弦波 $z(t)$ の式を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

$$z(t) = \left\{a \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

を時間領域複素正弦波と呼び、複素平面の上の回転運動体 (ベクトル) となる。

a・・・振幅 (または半径)

w ・・・角周波数、単位は [rad/秒]

ϕ ・・・初期位相、単位は [rad]

$$w = 2\pi \cdot f$$

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{|f|} = \frac{2\pi}{|w|}$$ ※ 周期は正なので絶対値を取る

【解説】

周期が $\mathrm{T} = 4$ [秒] 、つまり $w = \pm\pi/2$ [rad/秒] である $z(t)$ を求める。

Q5 (10 点) ID: complex/text02/page03/002

時間領域複素正弦波の和

$$\left\{\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{\{-j\cdot(\pi/3-\pi/2)\}}\right\}\cdot \mathrm{e}^{\{-j\cdot\pi/4\cdot t\}}+\left\{\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot(\pi/3-\pi/2)\}}\right\}\cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot\pi/4\cdot t\}}$$

から復元したサイン波の式を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

(a)

$$\frac{3}{2}\cdot\sin(\pi/3\cdot t+\pi/4)$$

(b)

$$3\cdot\sin(\pi/4\cdot t+\pi/3)$$

(c)

$$3\cdot\cos(\pi/4\cdot t+\pi/3)$$

(d)

$$\frac{3}{2}\cdot\cos(\pi/3\cdot t+\pi/4)$$

Q5　(10 点) ID: complex/text02/page03/002

正解　**(b)**

【出題意図】

時間領域複素正弦波を合成してサイン波を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

・ 時間領域アナログサイン波はオイラー公式を用いて 2 つの時間領域複素正弦波の和に分解できる

(sin 版)

$$a \cdot \sin(w \cdot t + \phi) = \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j(\phi-\pi/2)\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j(\phi-\pi/2)\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

(cos 版)

$$a \cdot \cos(w \cdot t + \phi) = \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

a・・・振幅

w ・・・角周波数、単位は [rad/秒]

ϕ ・・・初期位相、単位は [rad]

【解説】

sin 版で、かつ $a = 3$、$w = \pi/4$、$\phi = \pi/3$ により求まる。

Q6 (10 点) ID: complex/text02/page03/023

$$\sin(2) \cdot \cos(\pi \cdot t + 1)$$

を時間領域複素正弦波で表した式を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

(a)

$$\{\cos(2)\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \sin(2) \cdot t\}} + \{\cos(2)\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \sin(2) \cdot t\}}$$

(b)

$$\left\{2 \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi/2 - \pi 2\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot t\}} + \left\{2 \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi/2 - \pi 2\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot t\}}$$

(c)

$$\left\{\frac{\sin(2)}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot 1\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}} + \left\{\frac{\sin(2)}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot 1\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi \cdot t\}}$$

(d)

$$\sin(2) + \mathrm{e}^{\{-j \cdot \cos(\pi) \cdot t\}}$$

Q6 (10 点) ID: complex/text02/page03/023

正解 **(c)**

【出題意図】

サイン波を時間領域複素正弦波の和に分解できるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

・ 時間領域アナログサイン波はオイラー公式を用いて 2 つの時間領域複素正弦波の和に分解できる

(サイン波として sin を使う場合)

$$a \cdot \sin(w \cdot t + \phi) = \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j(\phi - \pi/2)\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j(\phi - \pi/2)\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

(サイン波として cos を使う場合))

$$a \cdot \cos(w \cdot t + \phi) = \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \phi\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

a・・・アナログサイン波の振幅

w ・・・アナログサイン波の角周波数、単位は [rad/秒]

ϕ ・・・アナログサイン波の初期位相、単位は [rad]

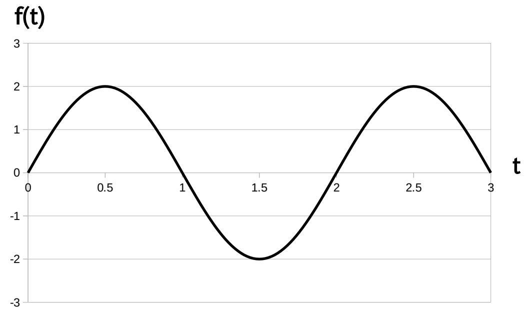
【解説】

cos 版で、かつ $a = \sin(2)$、$w = \pi$、$\phi = 1$ により求まる。

Q7 (10 点)

ID: complex/text02/page03/024

以下のグラフを時間領域複素正弦波の和で表した式を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。



(a)

$$\pi \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot 2\cdot\pi\cdot t\}}$$

(b)

$$\{1\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j\cdot\pi\cdot t+2\}} + \{1\} \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot\pi\cdot t+2\}}$$

(c)

$$\left\{\frac{2}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j(0-\frac{\pi}{2})\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j\cdot\pi\cdot t\}} + \left\{\frac{2}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j(0-\frac{\pi}{2}\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot\pi\cdot t\}}$$

(d)

$$\left\{\pi \cdot \mathrm{e}^{\{-j\cdot 2\pi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j\cdot 0\cdot t\}} + \left\{\pi \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot 2\pi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot 0\cdot t\}}$$

Q7 (10 点) ID: complex/text02/page03/024

正解 **(c)**

【出題意図】

サイン波のグラフから時間領域複素正弦波の和の式を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

・ 時間領域アナログサイン波はオイラー公式を用いて 2 つの時間領域複素正弦波の和に分解できる

(サイン波として sin を使う場合)

$$a \cdot \sin(w \cdot t + \phi) = \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j(\phi - \frac{\pi}{2})\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j(\phi - \frac{\pi}{2})\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

(サイン波として cos を使う場合))

$$a \cdot \cos(w \cdot t + \phi) = \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

a・・・アナログサイン波の振幅

w ・・・アナログサイン波の角周波数、単位は [rad/秒]

ϕ ・・・アナログサイン波の初期位相、単位は [rad]

【解説】

$2 \cdot \sin(\pi t)$ のグラフなので、sin 版でかつ $a = 2$、$w = \pi$、$\phi = 0$ により求まる。

Q8 (10 点)

ID: complex/text02/page04/022

身の回りにあるもので、複素数 (虚数) や複素正弦波がその設計やプログラミングなどに使われている事例を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

(a)

Wifi

(b)

USB メモリ

(c)

3 次元ゲーム

(d)

以上で挙げた全て

Q8 (10 点) ID: complex/text02/page04/022

正解 (d)

【出題意図】

複素数や複素正弦波を使うメリットが分かるどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

複素数や複素正弦波は電気・電子回路の設計や信号処理、画像処理などで多用されている。

【解説】

重要事項を参照

Q9 (10 点) ID: complex/text02/page04/023

$$\sin(\pi \cdot t + \pi/2) - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}}$$

を時間領域複素正弦波で表した式を選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

(a)

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}}$$

(b)

$$\mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi/2 \cdot t\}} + \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi/2 \cdot t\}} + \pi$$

(c)

$$\mathrm{e}^{\{j \cdot \pi \cdot t\}} + \frac{\pi}{2}$$

(d)

$$\mathrm{e}^{\{\pi \cdot t\}} + \mathrm{e}^{\{\pi \cdot t\}}$$

Q9 (10 点) ID: complex/text02/page04/023

正解 **(a)**

【出題意図】

サイン波を含む式を変形して時間領域複素正弦波を含む式を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

・ 時間領域アナログサイン波はオイラー公式を用いて 2 つの時間領域複素正弦波の和に分解できる

(sin 版)

$$a \cdot \sin(w \cdot t + \phi) = \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j(\phi - \pi/2)\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j(\phi - \pi/2)\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

(cos 版)

$$a \cdot \cos(w \cdot t + \phi) = \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \phi\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{ \frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}}$$

a・・・振幅

w ・・・角周波数、単位は [rad/秒]

ϕ ・・・初期位相、単位は [rad]

【解説】

$$\sin(\pi \cdot t + \pi/2) - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \pi \cdot t\}} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \pi \cdot t\}}$$

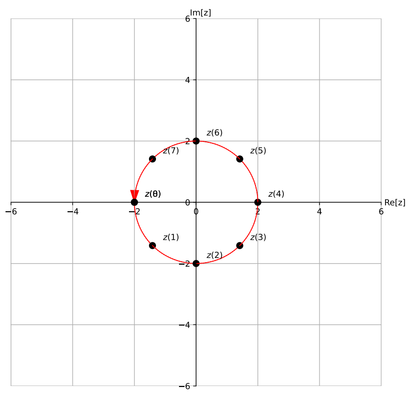
Q10 (10 点) ID: complex/text02/page04/024

$t \geq 0$ [秒] の範囲において、時間領域複素正弦波

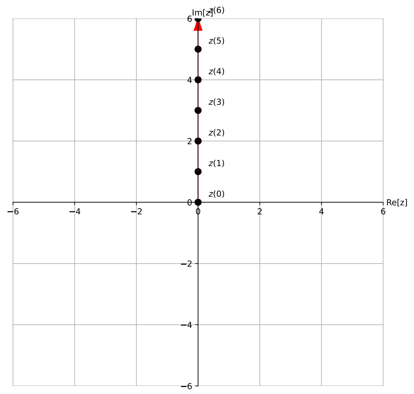
$$z(t) = \mathrm{e}^{\{j \cdot 1 \cdot t\}}$$

の自然対数 $\log_e z(t)$ の動きを選択肢 a〜d の中から 1 つ選びなさい。

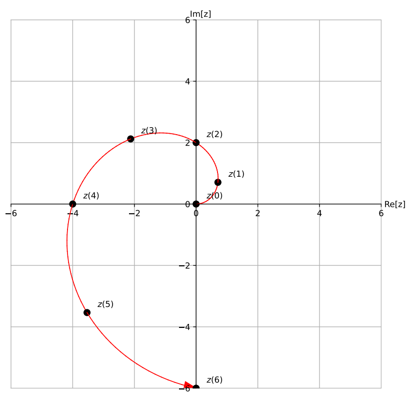
(a)



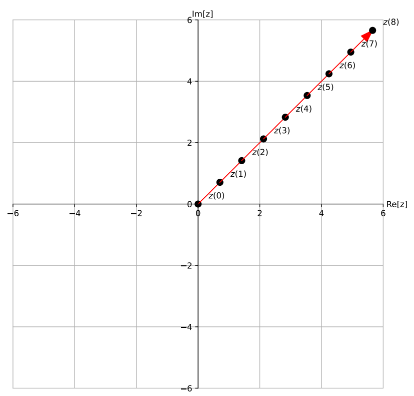
(b)



(c)



(d)



Q10 (10 点) ID: complex/text02/page04/024

正解 **(b)**

【出題意図】

時間領域複素正弦波の自然対数の動き方を求めることができるかどうかを確かめる問題である。

【重要事項】

自然対数の公式より、時間領域複素正弦波

$$z(t) = \left\{a \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot\phi\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot w\cdot t\}}$$

の自然対数は $\log_e z(t) = \log_e a + j \cdot \phi + j \cdot w \cdot t$ と求められる。

【解説】

$\log_e z(t) = j \cdot 1 \cdot t$ に具体的な値をいくつか選んで代入してみることで動き方を求められる。