フーリエ級数展開の定義

フーリエの定理を時間領域複素正弦波を使って書き直すと次のような級数になります。この式を「複素フーリエ級数展開」といいます。何故フーリエの定理からこの式が出てくるのかについては次のページから順を追って説明します。

定義： 複素フーリエ級数展開

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right\}$$

$f(t)$ ⋯ 周期 T [秒] の周期性時間領域アナログ信号

C[k] ⋯ k 番目の複素フーリエ係数、複素数の <u>定数</u>、個数は $\cdots, \mathrm{C}[-1], \mathrm{C}[0], \mathrm{C}[1], \mathrm{C}[2], \cdots$ の無限個

w_1 ⋯ 基本角周波数、$w_1 = 2\pi/\mathrm{T}$、単位は [rad/秒]

上の式に出てきた無限個の複素フーリエ係数 C[k] は次の式で求められます。

定義： 複素フーリエ係数の求め方

$$\mathrm{C}[k] = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left\{ f(t) \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right\} \mathrm{dt} \ , \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$f(t)$ ⋯ 周期 T [秒] の周期性時間領域アナログ信号

C[k] ⋯ k 番目の複素フーリエ係数、複素数の <u>定数</u>、個数は $\cdots, \mathrm{C}[-1], \mathrm{C}[0], \mathrm{C}[1], \mathrm{C}[2], \cdots$ の無限個

w_1 ⋯ 基本角周波数、$w_1 = 2\pi/\mathrm{T}$、単位は [rad/秒]

当然ながら C[k] は $f(t)$ が異なれば違う値になりますのでご注意下さい。また C[k] の求め方の式は「直交関数展開」という理論から出てきたのですが、結構難しい理論なので今回のアクティビティでは触れません。もし興味のある人は自分で調べて下さい。

ところで C[k] の定義から C[k] と C[$-k$] は複素共役関係、つまり

$$\mathrm{C}[k] = \mathrm{C}^*[-k]$$

あるいは同じ意味ですが

$$\mathrm{C}^*[k] = \mathrm{C}[-k]$$

となることが分かりますので、実は $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対応する複素フーリエ係数さえ求めれば $k = -1, -2, \cdots$ に対応する複素フーリエ係数は求める必要がありません。