DFT と IDFT の定義

周期性ディジタル信号 $f[i]$ から DFT 係数 $\mathrm{C}[k]$ を求める演算を DFT(Discrete Fourier Transform: 離散フーリエ変換) と言います。DFT の定義は以下の通りです。

定義: DFT (Discrete Fourier Transform: 離散フーリエ変換)

$$\mathrm{C}[k] = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} \left\{ f[i] \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{N}} \cdot i\}} \right\} \;,\; (k = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{N}-1)$$

$f[i]$ ⋯ 周期 N [点] の周期性ディジタル信号

$\mathrm{C}[k]$ ⋯ k 番目の DFT 係数、複素数の 定数、個数は $\mathrm{C}[0], \mathrm{C}[1], \cdots, \mathrm{C}[\mathrm{N}-1]$ の N 個

DFT とは逆に、DFT 係数 C_k から元の $f[i]$ を復元する演算を IDFT(Inverse Discrete Fourier Transform: 逆離散フーリエ変換) と言います。IDFT の定義は以下の通りです。

定義: IDFT(Inverse Discrete Fourier Transform: 逆離散フーリエ変換)

$$f[i] = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \left\{ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{N}} \cdot i\}} \right\} \;,\; (i = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{N}-1)$$

$f[i]$ ⋯ 周期 N [点] の周期性ディジタル信号

$\mathrm{C}[k]$ ⋯ k 番目の DFT 係数、DFT 係数、複素数の 定数、個数は $\mathrm{C}[0], \mathrm{C}[1], \cdots, \mathrm{C}[\mathrm{N}-1]$ の N 個

この IDFT の式を見てフーリエ級数展開の式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right\}$$

を思い出した人がいると思いますが、実は IDFT はフーリエ級数展開のディジタル版に相当します。違いは t [秒] が i に代わったこと、w_1 [rad/秒] が 2π/N に代わったこと、$\sum$ の範囲が代わったことだけです。

またフーリエ級数展開の時と同様に DFT 係数 $\mathrm{C}[k]$ は複素共役関係の性質を持っています。つまり

・ $|\mathrm{C}[k]|$ は N/2 を中心として対称

・ $\angle\mathrm{C}[k]$ は N/2 を中心として点対称

となります。よって DFT 係数は全て求める必要は無く、半分だけ求めれば残り半分の DFT 係数は簡単に求まります。