四則演算

1　足し算

複素数と複素数の足し算は直交形式で考えると楽です。

足し算

直交形式を使って実数、虚数成分別に足し合わせる。つまり

$$z_1 = a + j \cdot b$$

$$z_2 = c + j \cdot d$$

の時、

$$z_1 + z_2 = (a + c) + j \cdot (b + d)$$

実際には複素数どうしの足し算は複素平面上のベクトルの足し算になります (図 1)。

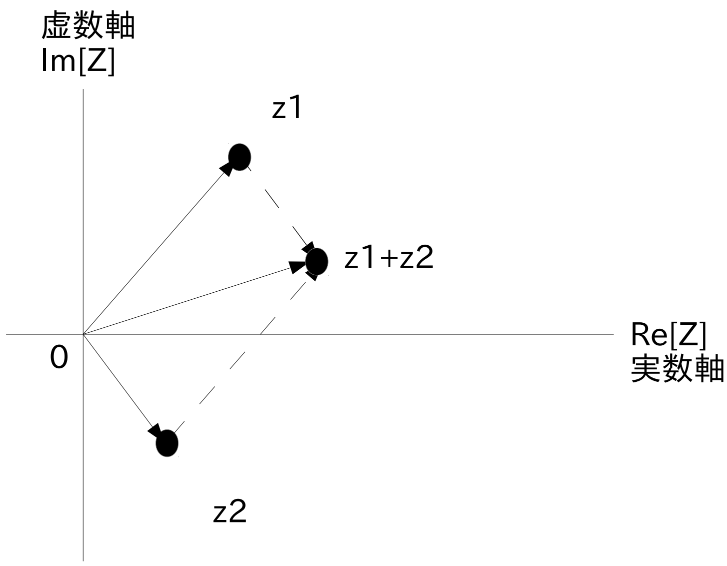

図 1: 足し算は複素平面上のベクトルの足し算である

2　掛け算

掛け算は極形式で考えたほうが楽です。

掛け算

極形式を使ってネイピア数 e の掛け算をおこなう。つまり

$$z_1 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z_1\}}$$

$$z_2 = |z_2| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z_2\}}$$

の時、

$$z_1 \times z_2 = (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot (\angle\ z_1 + \angle\ z_2)\}}$$

この様に、掛け算では**絶対値どうしはかけて、偏角どうしは足す**という演算手順になります。

3　回転

引き算の話をする前に、掛け算の特殊な場合である回転について話します。

回転

θ を任意の角度 (ラジアン) とする。ある複素数 z に

$$\mathrm{e}^{\{j \cdot \theta\}}$$

を掛けることは、原点を中心として z を逆時計回りに回転させることに相当する。つまり

$$z \times \mathrm{e}^{\{j \cdot \theta\}} = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot (\angle\ z + \theta)\}}$$

回転は図で考えた方が分かりやすいでしょう。図 2 を見れば一目瞭然です。なお念の為に言っておきますが θ **がマイナスの時は逆回転して時計回りに回転します。**

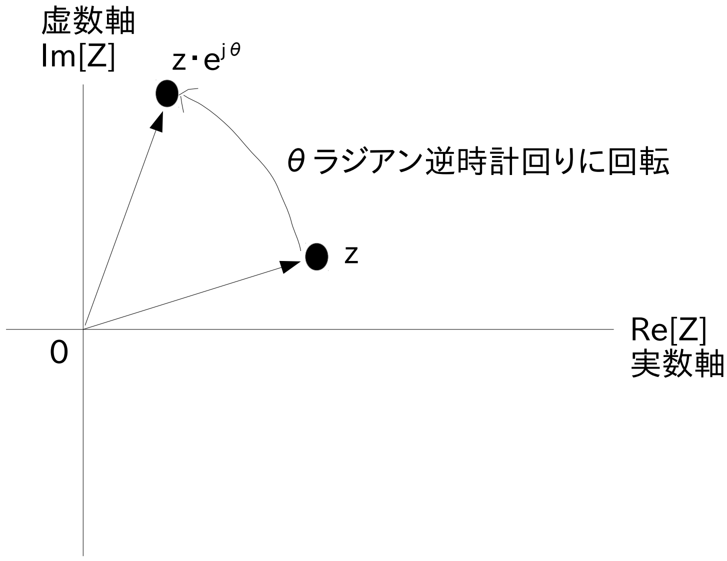

図 2: 回転

4　-1 をかける

次は回転の特別に場合として複素数に -1 をかけた時の話をします。

ある複素数に -1 をかけるという行為は、その複素数を直交形式で考えているのか、極形式で考えているのかによって意味が変わってきます。まず直交形式の場合ですが至極当たり前の話になります。

直交形式でのマイナスをかける意味

実数成分と虚数成分の符号を変える。つまり

$$z = a + j \cdot b$$

の時、

$$-z = (-a) + j \cdot (-b)$$

極形式の場合は $-1 = \mathrm{e}^{j\pi}$ ですので、実は複素数を 180 度回転させることを意味しています。

極形式でのマイナスをかける意味

π ラジアン回転させる。つまり

$$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z\}}$$

の時、

$$-z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z\}} \cdot \mathrm{e}^{j\pi} = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot (\angle\ z + \pi)\}}$$

いずれにしろ、複素数に -1 を掛けるという行為は複素平面上ではベクトルの向きが逆になることを意味します (図 3)。

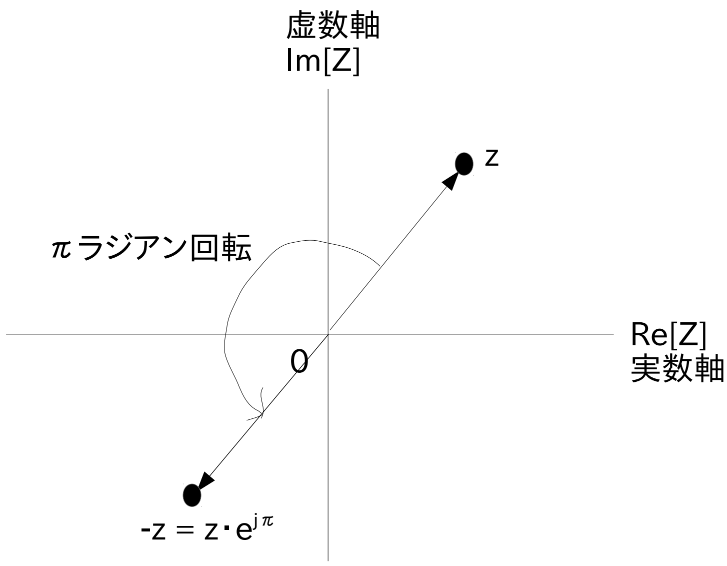

図 3: マイナスをかけるとベクトルの向きが 180 度逆になる

5 実数をかける

実数 a を z にかける場合は a の符号に気を付けて下さい。$a>0$ ならそのまま $z=(a\cdot|z|)\cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot\angle\ z\}}$ で結構ですが、$a<0$ ならベクトルの向きが逆になりますので 180 度回転させて $z=(|a|\cdot|z|)\cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot(\angle\ z+\pi)\}}$ になります。

6 引き算

次に引き算の話をします。

引き算

直交形式を使って実数、虚数成分別に引く。つまり

$$z_1 = a + j\cdot b$$

$$z_2 = c + j\cdot d$$

の時、

$$z_1 - z_2 = (a-c) + j\cdot(b-d)$$

なおベクトル的には z_1 から z_2 を引くという行為は、z_2 に -1 をかけた $-z_2$ と z_1 と足すことを意味します。図 4 が引き算をベクトルで表した図です。

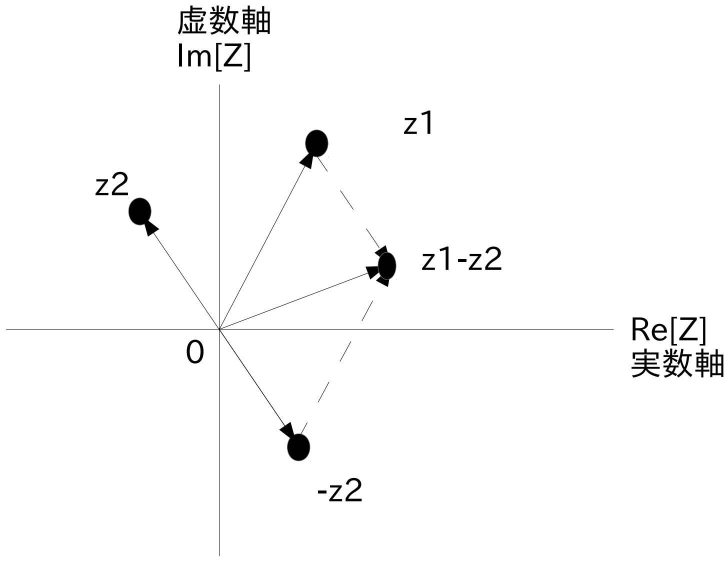

図 4: 複素数どうしの引き算

7　割り算

最後に割り算について話します。

掛け算

極形式を使ってネイピア数 e の割り算をおこなう。つまり

$$z_1 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z_1\}}$$

$$z_2 = |z_2| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z_2\}}$$

の時、

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \angle\ z_2\}}$$

なので

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot (\angle\ z_1 - \angle\ z_2)\}}$$

要するに割り算は絶対値どうしは割って、偏角どうしは引くという演算手順になります。