複素正弦波を使う理由

前のページで「時間領域アナログサイン波は 2 つの時間領域複素正弦波の和に分解出来る」ので「時間領域アナログサイン波の代わりに時間領域複素正弦波を使って諸問題が解ける」と書きました。しかし複素正弦波に慣れていない初学者は「何故ワザワザそんな面倒くさいことするの？」と疑問に思うのではないでしょうか。

恐らくみなさまも経験があると思いますが、計算式の中にアナログサイン波 (というか sin や cos) が入っていると解くのがいきなり難しくなります。ところがアナログサイン波を複素正弦波の和に分解すると、そのような難解な計算式が簡単に解けるようになることが多いです。その理由は以下の通りです。

時間領域アナログサイン波の代わりに時間領域複素正弦波を使う理由

・ 振幅と初期位相を同時に計算できるから

・ ネイピア数 (e) どうしの単純な四則演算に置き換わって簡単に解ける (ことが多い) から

・ 自然対数を取ると $\log_e z(t) = \log_e a + j \cdot \phi + j \cdot w \cdot t$ とただの足し算式に変わるから

これらはシンプルですが意外に強力な理由です。例えば次の公式を証明することを考えてみましょう。

$$a \cdot \sin(w \cdot t + \pi/2) = a \cdot \cos(w \cdot t)$$

これをまともに証明しようとすると案外難しいので、恐らくみなさまはこの公式を丸暗記して覚えたと思います。ところがサイン波を複素正弦波の和に分解して考えるとこの公式が正しいことを計算からあっさり確かめられます。

$$\begin{aligned}
a \cdot \sin(w \cdot t + \pi/2) &= \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j(\pi/2-\pi/2)\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j(\pi/2-\pi/2)\}}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}} \\
&= \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{0}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot w \cdot t\}} + \left\{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{e}^{0}\right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot w \cdot t\}} \\
&= a \cdot \cos(w \cdot t + 0)
\end{aligned}$$

これは単純な例でしたが、「アナログサイン波を複素正弦波の和に分解すると計算が楽になる」ことは感じることが出来たと思います。