例 4: 等比数列

実数 $a(\neq 0)$ に対する等比数列 $f[i] = a^i$ の Z 変換を求めてみましょう。

(手順 2) とりあえず $f[i]$ を Z 変換の定義にそのまま代入して $\mathbf{F}(z)$ を求める

そのまま定義に代入すると

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\{a^i \cdot z^{-i}\} = \sum_{i=0}^{\infty}\{a \cdot z^{-1}\}^i$$

です。

(手順 3) 無限級数のままだと何かと都合が悪いので場合分けをして収束後の式を求める。

例 1 と違って Σ の上の数字が ∞ のままなので、

(場合 3-2) (手順 2) の段階で無限級数になっている場合

になります。そこで公式を利用して $\mathrm{F}(z)$ を ∞ が含まない式に変形してみます。

さて等比数列の無限級数の公式 (忘れた人は検索しましょう) を使うと $|a \cdot z^{-1}| < 1$ 、つまり $|z| > |a|$ ならば $\mathrm{F}(z)$ は収束して

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

となります。収束領域は公式を適用できる条件からそのまま $|z| > |a|$ と求まります。この収束領域を図で表したのが図 1 で、図中の半径 $|a|$ の円の外側が収束領域になります。半径 $|a|$ の円上の点 (例えば $z = a$) は収束領域では無いので注意して下さい。

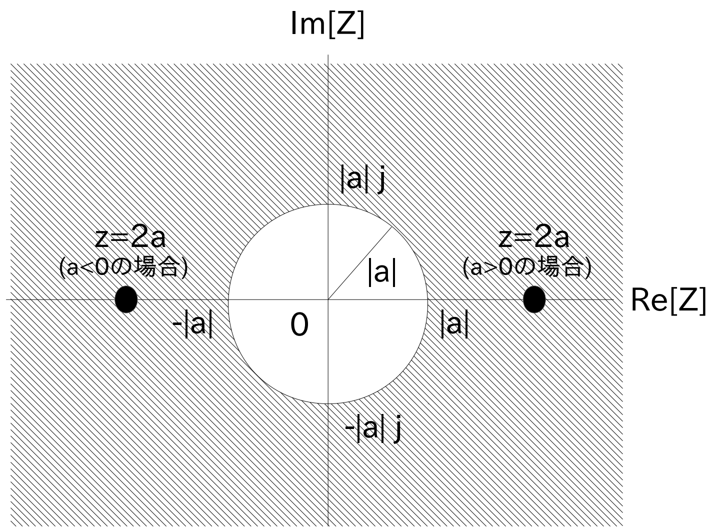

図 1: 収束領域 (半径 $|a|$ の円の外側の斜め線の領域)。

(手順 4) 具体的な z の値を代入する。 z が収束領域に含まれるかどうかで場合分けする。

試しに $z = 2a$ を代入した $\mathrm{F}(2a)$ の値を求めてみます。図 1 に $z = 2a$ の Z 平面上の位置を示していますが (a の符号により場所が変わります)、どちらにしろ図を見る限り

(場合 4-1) z が収束領域に含まれる場合

が適用されますので、収束後の $\mathrm{F}(z)$ の式にそのまま $z = 2a$ の値を代入して

$$\mathrm{F}(2a) = \frac{1}{1 - \frac{a}{2a}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

が求められます。

一方 原点 $z = 0$ は

(場合 4-2) z **が収束領域に含まれない場合**

が適用されますので、「$z = 0$ の時 $\mathrm{F}(z)$ は発散する」が求める答となります。