# 実フーリエ級数展開から複素フーリエ級数展開を導く

次は実フーリエ級数展開から複素フーリエ級数展開を導出してみます。

まず実フーリエ級数展開の式を複素正弦波のアクティビティの「時間領域アナログサイン波との関係 」に出てきた式 (cos 版) を使って書き直すと次のような複素正弦波の和の級数になります。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t + \phi_k)\} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{a_k}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \phi_k\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} + \left\{ \frac{a_k}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi_k\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{a_k}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \phi_k\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{a_k}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi_k\}} \right\} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right]
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}[0] &= a_0 \\
\mathrm{C}[k] &= \frac{a_k}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi_k\}}\ ,\ (k \geq 1)
\end{aligned}
$$

と置いて代入し、

$$
f(t) = \mathrm{C}[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mathrm{C}^*[k] \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right]
$$

さらに $\mathrm{C}^*[k] = \mathrm{C}[-k]$ の関係があるから

$$
f(t) = \mathrm{C}[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mathrm{C}[-k] \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right]
$$

ここで $k' = -k$ と置いて

$$
f(t) = \mathrm{C}[0] + \sum_{k'=-\infty}^{-1} \left[ \mathrm{C}[k'] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k' \cdot w_1 \cdot t\}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right]
$$

よって $k'$ を $k$ に戻し、$\mathrm{C}[0] = \mathrm{C}[0] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot 0 \cdot w_1 \cdot t\}}$ を考慮すると複素フーリエ級数展開

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot w_1 \cdot t\}} \right\}
$$

が求まります。

ところで計算途中で出てきた

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}[0] &= a_0 \\
\mathrm{C}[k] &= \frac{a_k}{2} \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \phi_k\}}\ ,\ (k \geq 1)
\end{aligned}
$$

はスペクトル解析の基礎となる重要な式なので覚えておいて下さい。