極形式

一つ前のテキストで学んだ複素数の表現方法を直交形式といいますが、複素数にはもうひとつ極形式という表現方法もあります。直交形式と極形式はオイラー公式を使って 1 対 1 で相互変換できます。

1　極形式の定義

前のテキストで示した複素数の定義では、複素数を実数軸の座標と虚数軸の座標を使って表していました。このように複素数を複素平面の座標で表す方式を**直交形式**といいます。直交形式による複素数の定義を再掲します。

定義： 直交形式で表した複素数

a と b が実数の時

$$z = a + j \cdot b$$

この直交形式の例として前のテキストでは $z = 1 + j \cdot 2$ をあげていました (図 1)。

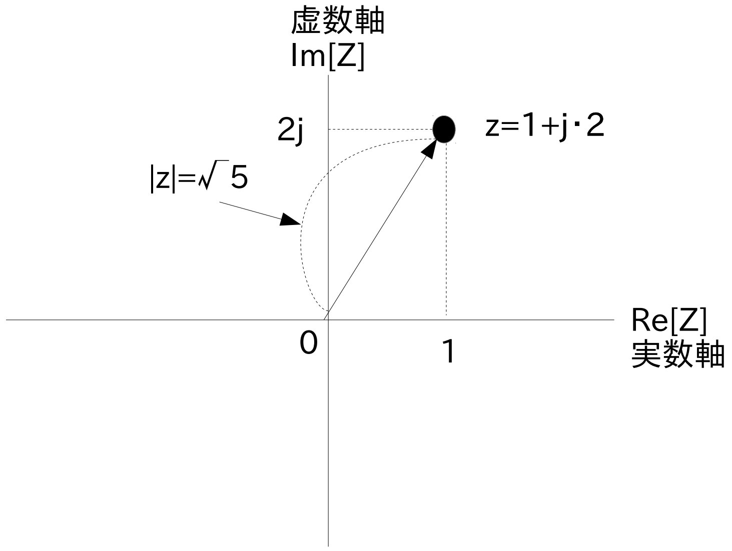

図 1: 複素数の例: 直交形式 $z = 1 + j \cdot 2$

ところで複素数は複素平面上の点 (又はベクトル) でしたので、全く同じ複素数の位置を座標ではなく、図 2 の様に原点から点までの距離と角度で表すことも出来ます。

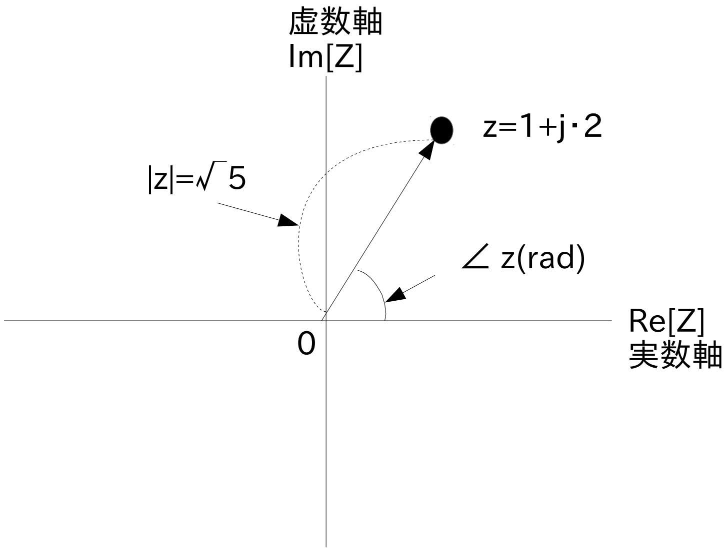

図 2: 複素数の例: $z = 1 + j \cdot 2$ の位置を距離と角度を使って示した場合

距離は前のテキストの絶対値 $|z|$ そのものです。一方角度は実数軸から反時計回りに測った値を使います (単位はラジアン)。この角度の事を**偏角**と言って、図のように $\angle z$ と書いたり、$\arg z$ と書いたり、θ で表したりします。このテキストでは特に指示が無い限り z の偏角として $\angle z$ を使うことにします。

さて、$|z|$ と $\angle z$ を使って複素数を表現する方法を**極形式**、またはフェーザ形式、またはオイラー表現と言い、ネイピア数 e の指数を使って次のように書きます。

定義： 極形式 (またはフェーザ形式、オイラー表現)

絶対値が $|z|$、偏角が $\angle z$ の時、

$$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\ z\}}$$

さてこの極形式を初めて見た人は必ず大混乱を起こします。何故いきなり e が出てくるのか？何故 e の指数に虚数単位 j が入ってるのか？

その辺を考え始めると訳が分からなくなりますが、とりあえず複素数をこのような極形式で表すようにしたお陰で物理学、信号処理、その他の様々な計算問題が簡単に解けるようになって人間社会が発展しました。従ってまた繰り返しますが極形式も計算を楽にするための単なる道具ですので、やはり深く考えず素直に覚えて下さい。

2　偏角の範囲

絶対値 $|z|$ は定義から 0 以上の実数と分かります。一方、偏角 $\angle z$ は点の角度ですので $-\infty$ から ∞ までの値を取れますが、ある z を 360 度回転させると全く同じ位置に戻ります (これを演習で確かめます)。

従って一般的には偏角の範囲は $-\pi$ から π までに限定することが多い (この範囲を「主値」と呼びます) のですが、文献によっては $-\infty$ から ∞ の場合もあるので注意して下さい。このテキストでは偏角の範囲は $-\pi$ から π までとします。

3　複素共役と極形式

虚部の符号が異なる複素数の組のことを複素共役といいましたが、図 3 より虚部の符号が異なるということは偏角の符号が異なることを意味します。

複素共役を極形式で表現した場合

例えば $z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot \angle\, z\}}$ の複素共役 z^* は

$$z^* = |z| \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot \angle\, z\}}$$

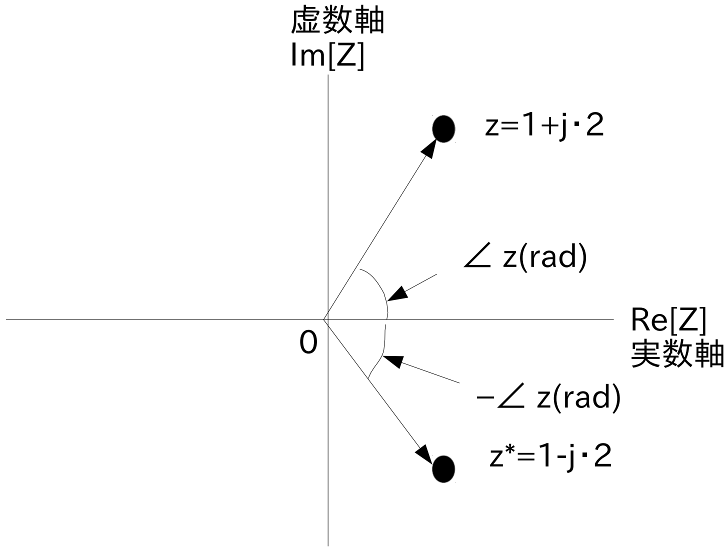

図 3: 複素共役の関係