

# DFT と IDFT の意味

複素フーリエ級数展開とスペクトルのアクティビティで学んだとおり、複素フーリエ級数展開と実フーリエ級数展開は同一の式でした。実フーリエ級数展開は次のように定義されます。

復習: 実フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cdot \cos(k \cdot w_1 \cdot t + \phi_k)\}$$

$f(t)$  ... 周期  $T$  [秒] の周期性時間領域アナログ信号

$w_1$  ... 基本角周波数、 $w_1 = 2\pi/T$ 、単位は [rad/秒]

$a_0$  ... 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$a_k$  ... 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$\phi_k$  ... 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の初期位相、実数の 定数、範囲は  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ 、単位は [rad]

ここで出てきた直流成分  $a_0$ 、振幅  $a_k$  と 初期位相  $\phi_k$  は複素フーリエ係数  $C[k]$  から次のようにして求めることが出来ました。

復習:  $a_0$ 、 $a_k$ 、 $\phi_k$  と複素フーリエ係数  $C[0]$ 、 $C[k]$  の関係

$$a_0 = C[0]$$

$$a_k = 2 \cdot |C[k]|$$

$$\phi_k = \angle C[k]$$

以上のことは

「複素フーリエ係数を求めると周期性時間領域アナログ信号  $f(t)$  を直流成分、基本波、無限個の第  $k$  高調波の和に分解出来る」

ことを意味しています。これがフーリエの定理でした。

一方、IDFT は複素フーリエ級数展開のデジタル版に相当しますので、やはり

「DFT 係数を求めると周期性時間領域デジタル信号  $f[i]$  を直流成分、基本波、有限個 (無限個で無いことに注意!) の第  $k$  高調波の和に分解出来る」

ことを意味しています。

以上のことを詳しく説明すると次の通りになります。ただし周期  $N$  が奇数か偶数かによって最後の高調波の振幅の求め方が若干変わるので場合分けする必要があります。

まず  $N$  が奇数の場合です。

周期  $N$  が奇数の場合

$$f[i] = a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left\{ a_k \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_k} \cdot i + \phi_k \right) \right\}$$

$$T_k = \frac{N}{k}$$

$$a_0 = C[0]$$

$$a_k = 2 \cdot |C[k]|$$

$$\phi_k = \angle C[k]$$

$f[i]$  … 周期  $N$  [点] (ただし奇数) の周期性時間領域デジタル信号

$T_k$  … 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の周期、実数の 定数、単位は [点]

$a_0$  … 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$a_k$  … 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$\phi_k$  … 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の初期位相、実数の 定数、単位は [rad]

$C[k]$  …  $k$  番目の DFT 係数

次は  $N$  が偶数の場合です。振幅の計算方法が他の高調波と異なるため最後の高調波が  $\sum$  の外に出ています。

周期  $N$  が偶数の場合

$$f[i] = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left\{ a_k \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_k} \cdot i + \phi_k \right) \right\} + a_{(N/2)} \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_{(N/2)}} \cdot i + \phi_{(N/2)} \right)$$

$$T_k = \frac{N}{k}$$

$$a_0 = C[0]$$

$$a_k = 2 \cdot |C[k]|$$

$$\phi_k = \angle C[k]$$

$$T_{(N/2)} = \frac{N}{N/2} = 2$$

$$a_{(N/2)} = |C[N/2]|$$

※  $a_k$  と違って 2 倍しないことに注意!

$$\phi_{(N/2)} = \angle C[N/2]$$

$f[i]$  … 周期  $N$  [点] (ただし偶数) の周期性時間領域デジタル信号

$T_k$  … 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の周期、実数の 定数、単位は [点]

$a_0$  … 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$a_k$  … 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

$\phi_k$  … 第  $k$  高調波 ( $k = 1$  の時は基本波) の初期位相、実数の 定数、単位は [rad]

$T_{(N/2)}$  … 第  $N/2$  高調波の周期

$a_{(N/2)}$  … 第  $N/2$  高調波の振幅

$\phi_{(N/2)}$  … 第  $N/2$  高調波の初期位相

$C[k]$  …  $k$  番目の DFT 係数