オイラー公式

1　オイラー公式とは

オイラー公式は極形式の複素数を sin と cos を使って直交形式に変換するための公式です (もっとも歴史的にはオイラー公式の発見が先で、オイラー公式から極形式が生まれたらしいですが)。大元の定義は次のとおりです。

定義: オイラー公式その 1

θ を任意の実数とした時、

$$\mathrm{e}^{\{j\cdot\theta\}} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$$

このオイラー公式を変形することで cos と sin を複素数の和または差で表す事ができます。文献によってはこちらをオイラー公式の定義としている場合もあります。

定義: オイラー公式その 2

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\{j\cdot\theta\}} + \mathrm{e}^{\{-j\cdot\theta\}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\mathrm{e}^{\{j\cdot\theta\}} - \mathrm{e}^{\{-j\cdot\theta\}}}{2\cdot j} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\{-j\cdot\pi/2\}}}{2}\left\{\mathrm{e}^{\{j\cdot\theta\}} - \mathrm{e}^{\{-j\cdot\theta\}}\right\}\end{aligned}$$

sin の 2 行目の変形は

$$1/j = j/j^2 = -j = \mathrm{e}^{\{-j\cdot\pi/2\}}$$

の関係を利用して求めました。どちらの定義も同じくらい良く使われるので両方覚えておきましょう。

2　極形式と直交形式の変換

オイラー公式を極形式に当てはめることで、極形式を簡単に直交形式に変換することができます。

極形式 → 直交形式に変換

$$|z| \cdot \mathrm{e}^{\{j\cdot\angle\, z\}} = |z| \cdot \cos\angle\, z + j \cdot |z| \cdot \sin\angle\, z$$

一方直交形式を極形式に変換する場合、実際に複素平面に矢印を描いて、矢印の長さを定規で測って、角度を分度器で測るという原始的な手段もありますが、プログラミング言語や表計算ソフト、または関数電卓にある atan2 関数を使って求めるのが一番楽です (とは言うものの、紙に書いて極形式を求めるという手段も実際には良く使います)。

直交形式 → 極形式に変換

$$z = a + j \cdot b$$

に対し、絶対値と偏角を以下のようにして求める。

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \angle\, z = \mathrm{atan2}(b, a)$$

※ プログラミング言語や表計算ソフトによっては $\mathrm{atan2}(a, b)$ の時もあるので注意

このように、極形式と直交形式は **1** 対 **1** で簡単に相互変換出来るので、状況に応じて扱いやすいとか計算しやすい方の形式に変換して使うことが可能です。