まとめ

周期性ディジタル信号

$$f[i] = f[i + n \cdot \mathrm{N}]$$

の関係を満たすディジタル信号を周期性ディジタル信号という。

N … 周期、正整数の 定数、単位は [点]

n … 任意の整数 ($n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$)

i … 時刻、整数の 変数、単位は無し (ディジタル信号なので秒の概念は無い)

・ 時間領域ディジタルサイン波は周期 $\mathrm{N} = \mathrm{T}_d$ [点] の周期性ディジタル信号

DFT と IDFT の定義

・ DFT (Discrete Fourier Transform: 離散フーリエ変換) の定義

$$\mathrm{C}[k] = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} \left\{ f[i] \cdot \mathrm{e}^{\{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{N}} \cdot i\}} \right\} \ , \ (k = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{N}-1)$$

・ IDFT(Inverse Discrete Fourier Transform: 逆離散フーリエ変換) の定義

$$f[i] = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \left\{ \mathrm{C}[k] \cdot \mathrm{e}^{\{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{N}} \cdot i\}} \right\} \ , \ (i = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{N}-1)$$

$f[i]$ … 周期 N [点] の周期性ディジタル信号

$\mathrm{C}[k]$ … k 番目の DFT 係数、複素数の 定数、個数は $\mathrm{C}[0], \mathrm{C}[1], \cdots, \mathrm{C}[\mathrm{N}-1]$ の N 個

・ IDFT はフーリエ級数展開のディジタル版に相当する

プログラミング

・ DFT をプログラミングで求める

$$\mathrm{A}[k] = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\left\{f[i]\cdot\cos(k\cdot\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot i)\right\}\ ,\ (k=0,1,2,\cdots,\mathrm{N}-1)$$

$$\mathrm{B}[k] = -\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\left\{f[i]\cdot\sin(k\cdot\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot i)\right\}\ ,\ (k=0,1,2,\cdots,\mathrm{N}-1)$$

・IDFT をプログラミングで求める

$$f[i] = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\left\{\mathrm{A}[k]\cdot\cos(k\cdot\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot i) - \mathrm{B}[k]\cdot\sin(k\cdot\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\cdot i)\right\}\ ,\ (i=0,1,2,\cdots,\mathrm{N}-1)$$

$f[i]$ ⋯ 周期 N [点] の周期性ディジタル信号

$\mathrm{A}[k]$ ⋯ k 番目の DFT 係数の実数成分、実数の 定数、個数は $\mathrm{A}[0],\mathrm{A}[1],\cdots,\mathrm{A}[\mathrm{N}-1]$ の N 個

$\mathrm{B}[k]$ ⋯ k 番目の DFT 係数の虚数成分、実数の 定数、個数は $\mathrm{B}[0],\mathrm{B}[1],\cdots,\mathrm{B}[\mathrm{N}-1]$ の N 個

絶対値 $|\mathrm{C}[k]| = \sqrt{\mathrm{A}^2[k]+\mathrm{B}^2[k]}$

偏角 $\angle\ \mathrm{C}[k] = \mathrm{atan2}(\mathrm{B}[k],\mathrm{A}[k])$

DFT と IDFT の意味

・ DFT 係数を求めると周期性時間領域ディジタル信号 $f[i]$ を直流成分、基本波、有限個 (無限個で無いことに注意！) の第 k 高調波の和に分解出来る

・ $f[i]$ の周期 N が奇数の場合

$$f[i] = a_0 + \sum_{k=1}^{(\mathrm{N}-1)/2}\left\{a_k\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_k}\cdot i+\phi_k\right)\right\}$$

$$\mathrm{T}_k = \frac{\mathrm{N}}{k}$$

$$a_0 = \mathrm{C}[0]$$

$$a_k = 2\cdot|\mathrm{C}[k]|$$

$$\phi_k = \angle\mathrm{C}[k]$$

$f[i]$ ⋯ 周期 N [点] (ただし奇数) の周期性時間領域ディジタル信号

T_k ⋯ 第 k 高調波 ($k=1$ の時は基本波) の周期、実数の 定数、単位は [点]

a_0 ⋯ 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

a_k ⋯ 第 k 高調波 ($k=1$ の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

ϕ_k ⋯ 第 k 高調波 ($k=1$ の時は基本波) の初期位相、実数の 定数、単位は [rad]

$\mathrm{C}[k]$ ⋯ k 番目の DFT 係数

・ $f[i]$ の周期 N が偶数の場合

$$f[i] = a_0 + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}/2-1} \left\{ a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_k} \cdot i + \phi_k \right) \right\} + a_{(\mathrm{N}/2)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_{(\mathrm{N}/2)}} \cdot i + \phi_{(\mathrm{N}/2)} \right)$$

$$\mathrm{T}_k = \frac{\mathrm{N}}{k}$$

$$a_0 = \mathrm{C}[0]$$

$$a_k = 2 \cdot |\mathrm{C}[k]|$$

$$\phi_k = \angle \mathrm{C}[k]$$

$$\mathrm{T}_{(\mathrm{N}/2)} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}/2} = 2$$

$$a_{(\mathrm{N}/2)} = |\mathrm{C}[\mathrm{N}/2]|$$

※ a_k と違って 2 倍しないことに注意!

$$\phi_{(\mathrm{N}/2)} = \angle \mathrm{C}[\mathrm{N}/2]$$

$f[i]$ ⋯ 周期 N [点] (ただし偶数) の周期性時間領域ディジタル信号

T_k ⋯ 第 k 高調波 ($k=1$ の時は基本波) の周期、実数の 定数、単位は [点]

a_0 ⋯ 直流成分、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

a_k ⋯ 第 k 高調波 ($k=1$ の時は基本波) の振幅、実数の 定数、範囲は実数全体、単位は扱う信号の種類による (ボルトとかアンペアとか度とか etc.)

ϕ_k ⋯ 第 k 高調波 ($k=1$ の時は基本波) の初期位相、実数の 定数、単位は [rad]

$\mathrm{T}_{(\mathrm{N}/2)}$ ⋯ 第 N/2 高調波の周期

$a_{(\mathrm{N}/2)}$ ⋯ 第 N/2 高調波の振幅

$\phi_{(\mathrm{N}/2)}$ ⋯ 第 N/2 高調波の初期位相

$\mathrm{C}[k]$ ⋯ k 番目の DFT 係数