角周波数、周波数、周期

復習: 周期

$$f[i] = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_d} \cdot i + \phi\right)$$

または

$$f[i] = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_d} \cdot i + \phi\right)$$

T_d ⋯ 周期、実数の 定数、範囲は $\mathrm{T}_d > 0$、単位は点

時間領域ディジタル信号の一種である時間領域ディジタルサイン波に秒の概念はありませんので、周波数、つまり 1 秒で何回波が振動するかという概念はありません。よって 角周波数という概念は本来はありません。その代わり周期 T_d を使って時間領域ディジタルサイン波は定義されます。

周期 T_d は、 i が何点進めば波が 1 回振動するのかを表す数字です。この T_d の値を変えるとグラフでは横方向の伸縮が変わります。T_d が大きいとグラフは横方向で伸びます。逆に小さいと横方向で縮みます。

なお T_d は実数でも構いませんが、特に整数の場合はきれいにアップダウンするようなグラフになります。例えば図 1 のサイン波は T_d が整数 5 ですが、 i が 5 点進む毎に 1 回サイン波がアップダウンしていることが分かります。

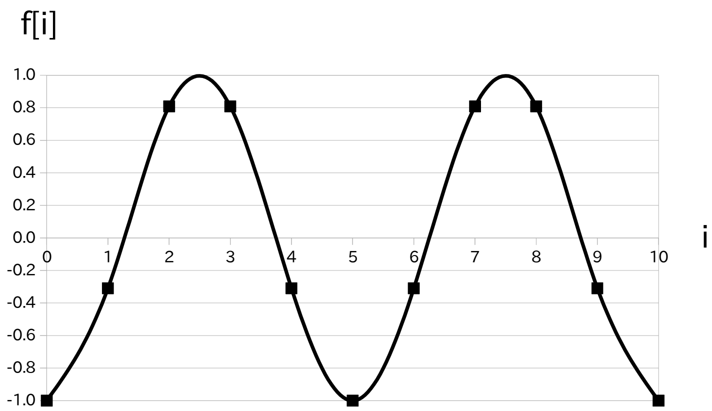

図 1: $f[i] = 1 \cdot \sin(2\pi/5 \cdot i - \pi/2)$

ところで、時間領域ディジタルサイン波には本来なら角周波数という概念は無いと言いましたが、実際には角周波数があった方が計算時などに色々都合の良い場合が多いです。そこで、

「角周波数 w (rad/秒) の時間領域アナログサイン波 $f(t)$ をサンプリング周波数 f_s (Hz) でサンプリングして時間領域ディジタルサイン波 $f[i]$ を手に入れた」

という状況を仮定し、元のアナログサイン波 $f(t)$ の角周波数 w (又は周波数 f) をディジタルサイン波 $f[i]$ の角周波数 (又は周波数) とみなすことにします。

さて、アナログサイン波を f_s (Hz) でサンプリングした場合、i が 1 点進む毎にアナログの世界ではサンプリング間隔 $\tau = 1/f_s$ (秒) だけ経過します。つまり (ディジタル世界での) 周期 T_d (点) だけ i が進むと現実世界では $\mathrm{T}_d \cdot \tau$ (秒) だけ経過しています。

　このことから、次のように時間領域ディジタルサイン波の角周波数や周波数が定義できます。

f_s と $\mathbf{T}_d$ から時間領域ディジタルサイン波の (角) 周波数を定義

サンプリング周波数 ⋯ f_s (Hz)

サンプリング間隔 ⋯ $\tau = 1/f_s$ (秒)

周期 ⋯ T_d (点)

秒に換算した周期 ⋯ $\mathrm{T} = \mathrm{T}_d \cdot \tau$ (秒)

時間領域ディジタルサイン波の周波数 ⋯ $f = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}_d \cdot \tau} = \frac{f_s}{\mathrm{T}_d}$ (Hz)

時間領域ディジタルサイン波の角周波数 ⋯ $w = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{f_s}{\mathrm{T}_d}$ (rad/秒)

　なお、最後の公式を変形すると

$$\mathrm{T}_d = 2\pi \cdot \frac{f_s}{w}$$

となりますので角周波数 w (rad/秒) とサンプリング周波数 f_s を使って時間領域ディジタルサイン波の定義を書きなおすことも出来ます。

w と f_s を用いた時間領域ディジタルサイン波の定義

$$f[i] = a \cdot \sin\left(\frac{w}{f_s} \cdot i + \phi\right)$$

または

$$f[i] = a \cdot \cos\left(\frac{w}{f_s} \cdot i + \phi\right)$$

　何れにしろサンプリング周波数 f_s が分からない限りは時間領域ディジタルサイン波の角周波数 w は決められないということに気を付けて下さい。