

请输入商品名称

搜索商品

loner | 空间 | 提醒 | 短消息 | 论坛任务 | 个人中心 | 退出

精弘论坛

精弘论坛

“感悟青春”第四届原创图文征集大赛

主办：经贸学院研究生会

报名时间：4月28日-5月8日

投稿邮箱：jmyh2009@126.com

照片拼图

分栏模式 | 论坛 | [导航] | [商铺] | [FEEL电台] | [下载] | 资讯 | 家园 | 邮件 | 搜索 | 帮助

浙江工业大学论坛-精弘论坛 » 『 编程 』 » 求期望问题小结（36楼Left Library Lift39楼Generator）

回复 | 发帖

返回列表

1

2

3


4

下一页

容老夫喘口气

发表于 2009-4-10 00:13 | 只看该作者

打印 | 字体大小: | 倒序看帖 | 跳转到 » 楼主



初级会员

☆

帖子 2712

精华 1

积分 1477

精弘币 1477 枚

性别 男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

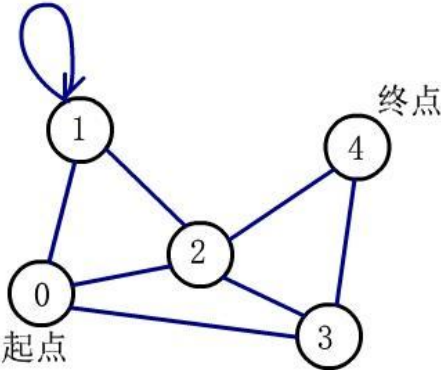
[ACM] 求期望问题小结（36楼Left Library Lift39楼Generator）

Generator , Lift , Library , 小结 , Left

本帖最后由 容老夫喘口气 于 2009-6-24 07:32 编辑

前几天一直纠结在《[地下迷宫](#)》那题中，苦苦思索无果。在一个月黑风高的夜晚，终于开窍，原来**期望**就是这么回事。赛后DK跟我说求**期望**很简单，我以为是诓我去做这个题目。我心说，您老人家看什么不简单啊，何况你还是**期望**控。现在觉得果然是简单的，用我的人品做担保，真的很简单。

先来看一个小例子：如图，从起点0，走到终点4。每次等概率地随机选择一条路走，（比如当前在0点，下一步分别有1/3的可能走到1，2，3点；对于1点，下一步各有1/3的可能走到1点，0点，2点），求平均需要用几步走到终点4，也就是求走到4点所花步数的**期望**。



分析：

要从0走到4，从第一步的角度来看，无非是三种途径：①先走到1，然后经过若干过程从1走到4；②先走到2，然后经过若干过程从2走到4；③先走到3，然后经过若干过程从3走到4。

假如我们已经知道了从1、2、3走到4所要花的平均步数分别是 $E(1)$ 、 $E(2)$ 、 $E(3)$ ，那么从0走到4的步数，有三种可能： $E(1)+1$ 、 $E(2)+1$ 、 $E(3)+1$ ，而且这三种是等概率的。那么从0走到4的平均步数就是 $(E(1)+1+E(2)+1+E(3)+1)/3$ 。现在我们并不知道 $E(1)$ 、 $E(2)$ 、 $E(3)$ 的值，得到的只是一个方程 $E(0)=(E(1)+E(2)+E(3))/3+1$

同样的，对于点2，我们可以列出方程 $E(2)=(E(0)+E(1)+E(3)+E(4))/4+1$ 。

有人说了，我靠， $E(4)$ 是什么东东？

$E(4)$ 当然就是从4点走到4点所花的平均步数，显然有 $E(4)=0$ 。

联立方程组

$$\begin{aligned} E(0) &= (E(1)+E(2)+E(3))/3+1 \\ E(1) &= (E(0)+E(1)+E(2))/3+1 \\ E(2) &= (E(0)+E(1)+E(3)+E(4))/4+1 \\ E(3) &= (E(0)+E(2)+E(4))/3+1 \end{aligned}$$

请输入商品名称

搜索商品

$$E(4)=0$$

图是我随手画的，求出来的解不整，保留两位小数如下：

$$E[0]=8.38$$

$$E[1]=9.14$$

$$E[2]=6.90$$

$$E[3]=6.10$$

$$E[4]=0.00$$

现在只要会编程解方程组就大功告成了。线性代数里讲过，可以用矩阵来表示线性方程组，用高斯消元法对矩阵进行处理，即可求解。有的小朋友没学线性代数，有的和我一样学完后早忘到脚后跟去了。我是从网上搜了个高斯消元的代码来研究学习的。要不老衲买一赠一，顺道把高斯消元也解释一下吧。

-----促销大派送之高斯消元-----

上述方程组整理可得（为了减少精度损失，在某些式子上乘个常数，使系数整一点）：

$$3 \cdot E(0) - E(1) - E(2) - E(3) + 0 \cdot E(4) = 3$$

$$-E(0) + 2 \cdot E(1) - E(2) + 0 \cdot E(3) + 0 \cdot E(4) = 3$$

$$-E(0) - E(1) + 4 \cdot E(2) - E(3) - E(4) = 4$$

$$-E(0) - 0 \cdot E(1) - E(2) - 3 \cdot E(3) - E(4) = 3$$

$$0 \cdot E(0) + 0 \cdot E(1) + 0 \cdot E(2) + 0 \cdot E(3) + E(4) = 0$$

我们用一个5*5的二维数组a来描述等号左边各项的系数，用数组b来表示等号右边的常数项。

直接用一个5*6的矩阵来表示当然也是可以的。数组的数据类型为double

```

a      b
[0] 3 -1 -1 -1 0 | 3
[1] -1 2 -1 0 0 | 3
[2] -1 -1 4 -1 -1 | 4
[3] -1 0 -1 3 -1 | 3
[4] 0 0 0 0 1 | 0

```

注意，在我的叙述中，行号列号都是从0开始编的。

由方程组的性质，我们知道，可以给某一行乘上一个非零常数，可以把某一行乘一个非零常数加到另一行上去，可以任意调换两行的位置。这些操作都不影响方程组的解，叫做行初等变换。我们利用行初等变换来处理矩阵。首先，我想让左边只留一个E(0)，其他的E(0)系数都消掉。我们选择保留第0行，在第1、2、3行上都加上第0行的1/3，矩阵变成了这样（只显示两位小数，下同）：

```

3.00 -1.00 -1.00 -1.00 0.00 | 3.00
0.00 1.67 -1.33 -0.33 0.00 | 4.00
0.00 -1.33 3.67 -1.33 -1.00 | 5.00
0.00 -0.33 -1.33 2.67 -1.00 | 4.00
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 | 0.00

```

第0行就固定不动了，接着我让下面四行只留一个E(1)，其他的消掉。方法是在第2行上加上第1行的4/5，在第3行上加上第1行的1/5。处理后：

```

3.00 -1.00 -1.00 -1.00 0.00 | 3.00
0.00 1.67 -1.33 -0.33 0.00 | 4.00
0.00 0.00 2.60 -1.60 -1.00 | 8.20
0.00 0.00 -1.60 2.60 -1.00 | 4.80
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 | 0.00

```

从上面的步骤可以看出，在消元的时候，我们需要从下面剩下的行中选择一个需要保留的行，这里称为主元行。选择的标准是什么？比如上一步，我们完全可以把第1行加上第3行的5倍，把第2行加上第3行的-4倍。我看的那篇文章上说，选择该列中绝对值最大的那一行作为主元行，这样可以减少精度损失。好吧，我们相信这个说法。假设a[1][1]这个位置不是1.67，而是0.67，那么这一列中绝对值最大的系数就是a[2][1]的-1.33（注意，第0行是不参与比较的，它已经固定下来了）。那我们就交换第1、2行，把-1.33这一行提到上面，然后再执行消元操作，把这一列的下面都消成0。

如果处理到某一列的时候，发现这一列剩下的系数竟然全是0了，比如这样的：

```

1 2 3 4 | 5
0 6 7 8 | 9
0 0 0 1 | 2
0 0 0 2 | 4

```

第2列剩下的全是0了，找不到主元行了，这说明该矩阵的秩小于元数，方程组解不出唯一解来。通俗点说，就是这些方程里有水货，表面上看是4个方程，可仔细一瞧，第2行和第3行本质

请输入商品名称

搜索商品

上是一样的，当然解不出。

好了，回到我们刚才的例子，通过一番处理之后，矩阵的左下角全变成0了。这称为行阶梯式。

```
3.00 -1.00 -1.00 -1.00 0.00| 3.00
0.00 1.67 -1.33 -0.33 0.00| 4.00
0.00 0.00 2.60 -1.60 -1.00| 8.20
0.00 0.00 0.00 1.62 -1.62| 9.85
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00| 0.00
```

根据最后一行，可以确定E(4)的值，我们把它存到x[4]里。把E(4)代入到3式，可以解出E(3)；把E(3)、E(4)代入2式，解出E(2).....

代码实现如下：

```
1.  #define EPS 1e-10
2.  int N;
3.  #define MAX 100
4.  double a[MAX][MAX], b[MAX], x[MAX];
5.  bool flag;
6.
7.  double ab(double x)
8.  {
9.      return (x>=0)?x: -x;
10. }
11. void Gauss()
12. {
13.     flag=1;
14.     double maxi, d;
15.     int index, i, j, k;
16.     for(k=0; k<N; k++)
17.     {
18.         maxi=0;
19.         for(i=k; i<N; i++) //找该行绝对值最大的行
20.         {
21.             if(ab(a[i][k])>maxi)
22.             {
23.                 index=i;
24.                 maxi=ab(a[i][k]);
25.             }
26.         }
27.         if(maxi<EPS) //如果剩下的全是0，失败返回
28.         {
29.             flag=0;
30.             return;
31.         }
32.         if(index!=k) //把主元行交换到上面来
33.         {
34.             swap(b[index], b[k]);
35.             for(j=k; j<N; j++)
36.                 swap(a[index][j], a[k][j]);
37.         }
38.         for(i=k+1; i<N; i++) //把非主元行的系数消掉
39.         {
40.             d=a[i][k]/a[k][k];
41.             b[i]-=b[k]*d;
42.             a[i][k]=0;
43.             for(j=k+1; j<N; j++)
44.                 a[i][j]-=a[k][j]*d;
45.         }
46.     }
```

请输入商品名称

搜索商品

```

47.          //至此，已经得到一个行阶梯式
48.          for(i=N-1; i>=0; i--)//从底向上依次代入求解
49.          {
50.              for(j=i+1; j<N; j++)
51.                  b[i] -=a[i][j]*x[j];
52.              x[i] =b[i]/a[i][i];
53.          }
54.      }

```

复制代码

-----赠品End-----

高斯消元解方程组的复杂度是 $O(N^3)$ ，回到地下迷宫这题，对所有的连通点联立方程组。连通点的个数不超过100，代码见这里

<http://bbs.zjut.com/viewthread.php?tid=1167909&page=1#pid6158985>

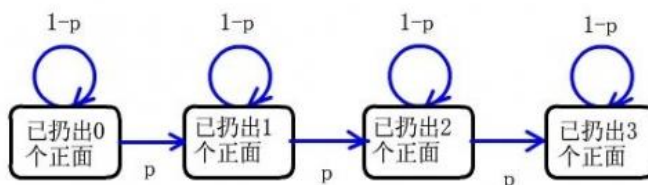
扩展1: POJ 3682 King Arthur's Birthday Celebration

<http://acm.pku.edu.cn/JudgeOnline/problem?id=3682>

题目大意是说扔硬币，有 p 的概率是正面， $1-p$ 的概率是反面。每天扔一次，直到累计扔出 k 个正面为止。在扔硬币期间，第一天花1千块钱，第二天花3千，第三天花5千……

求平均扔几次会停止，平均会花多少钱。

以 $k=3$ ， $p=0.5$ 为例，按已扔出几个正面来区分，共有4种状态。各状态之间按如下的概率转移。



1

评分人数



Red0ForEs

收藏 分享

0

0

支持

反对

他喵的

回复

引用

报告

容老夫喘口气

发表于 2009-4-10 00:13 | 只看该作者

沙发

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

本帖最后由 容老夫喘口气 于 2009-4-10 00:29 编辑

很容易列出方程组

$$E(i) = (1-p) * (E(i) + 1) + p * (E(i+1) + 1) \quad (i=0, 1, 2)$$



初级会员

请输入商品名称

搜索商品



帖子 2712
精华 1
积分 1477
精弘币 1477 枚
性别 男

 $E(3)=0$

方程很简单，化简之后是 $E(i)=1/p+E(i+1)$ 。数据量是1000，高斯消元的复杂度是 $O(N^3)$ 。用这么重型的武器来解会超时，递推一下就可以了。

再来看第二问，求平均会花多少钱。有小朋友很配合地插嘴道，这还不简单，直接就 $1+3+5\cdots$ 前 $E(0)$ 个奇数累加，也就是 $E(0)*E(0)$

想法是淳朴美好的，答案是不对的。

期望，本质是所有可能的情况的加权平均。拖得越久，每天所要花的钱就越多。拖得很久的情況虽然概率小，但是花钱数很多，这就抬高了总花钱数的**期望**值。不能用简单地按平均天数来累加。

还是上面的图为例，第一问我们已经解出 $E(0)=6, E(1)=4, E(2)=2$ 。设从状态 i 转移到状态 3 ，花钱数的**期望**是 $F(i)$

假设我们当前在状态 1 （即已掷出 1 个正面），再掷一次，有 p 的概率会来到状态 2 ，即掷到正面。而我们已知从 2 到 3 平均要花 2 步，花钱数是 $1+3$ ，那么多了刚才掷的一次，花的钱就是 $1+3+5$ ，掷的这一次导致多花了 5 千块钱。而一旦不幸掷到反面，则来到状态 1 。从状态 1 到 3 平均要走 4 步，花钱是 $1+3+5+7$ ，那多掷了这一次，花的钱是 $1+3+5+7+9$ ，将导致多花 9 千块钱。列出方程来就是 $F(1)=p*(F(2)+5)+(1-p)*(F(1)+9)$

推广到一般的形式即是 $F(i)=p*(F(i+1)+2*E[i+1]+1)+(1-p)*(F(i)+2*E[i]+1)$ ，其中 $F(k)=0$

$E(i)$ 已全部已知， $F(i)$ 同样可以用递推来求解。

```
1.  #include<iostream>
2.  using namespace std;
3.
4.  int main()
5.  {
6.      double p, e[1001], f[1001];
7.      int i, k;
8.      while(scanf("%d%f", &k, &p)==2)
9.      {
10.          e[k]=0;
11.          for(i=k-1; i>=0; i--)
12.          {
13.              e[i]=1.0/p+e[i+1];
14.          }
15.          f[k]=0;
16.          for(i=k-1; i>=0; i--)
17.          {
18.              f[i]=(1.0-p)*(2*e[i]+1)/p+(2*e[i+1]+1)+f[i+1];
19.          }
20.          printf("%.31f %.31f\n", e[0], f[0]);
21.      }
22.      return 0;
23.  }
```

[复制代码](#)

扩展二: [zjut 1317 掷飞盘](#)

<http://acm.zjut.edu.cn/ShowProblem.aspx?ShowID=1317>

附上lyp前辈的题解

<http://www.cppblog.com/l-y-p/archive/2008/07/09/55750.html>

提示：两个飞盘相距 i 的状态设为状态 i ，起点为状态 n ，终点为状态 0 。每次抛掷后，有 $1/4$ 概率转移到状态 $i-2$ ，有 $1/4$ 概率转移到状态 $i+2$ ，有 $1/2$ 概率回到状态 i 。

他喵的

回复 引用

报告 TOP

lxghost

发表于 2009-4-10 00:15 | 只看该作者

板凳

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！



中级会员



帖子 5015
精华 0
积分 4441
精弘币 4441 枚
性别 男
来自 创e网络

太长...有空再看

自从发现论坛可以挂机 我就不上了...

回复 引用

报告 TOP

容老夫喘口气

发表于 2009-4-10 00:18 | 只看该作者

地板



初级会员



帖子 2712
精华 1
积分 1477
精弘币 1477 枚
性别 男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

太长...有空再看
lxghost 发表于 2009-4-10 00:15

有些简单的部分可以跳过

他喘的

回复 引用

报告 TOP

仙剑魔

发表于 2009-4-10 00:19 | 只看该作者

地下室



中级会员



帖子 1537
精华 0
积分 1685
精弘币 1685 枚
性别 男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

我的理论和你的一样
gauss可以保证正确(曾经AC飞盘)
但是WA...我郁闷啊...



金铁之剑,因锋锐而易折,精气之剑,源天地而不毁
剑本凡铁,因执拿而通灵,因心而动,因血而活,因非念而死...

回复 引用

报告 TOP

容老夫喘口气

发表于 2009-4-10 00:56 | 只看该作者

6 #



初级会员



精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

5# 仙剑魔
莫非是低级失误？

请输入商品名称

搜索商品


帖子 2712
精华 1
积分 1477
精弘币 1477 枚
性别 男

他喵的

回复引用

报告TOP

g100my888

 发表于 2009-4-10 09:14 | 只看该作者

7 #



初级会员



帖子 793
精华 0
积分 782
精弘币 782 枚
性别 男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

<http://acm.zju.edu.cn/onlinejudge/showProblem.do?problemCode=2619>
<http://acm.zju.edu.cn/onlinejudge/showProblem.do?problemCode=2837>

附两个比较好的期望问题

SB下去

回复引用

报告TOP

happyboy1

 发表于 2009-4-10 09:52 | 只看该作者

8 #



初级会员



帖子 1288
精华 0
积分 1236
精弘币 1236 枚

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

本帖最后由 happyboy1 于 2009-4-10 10:12 编辑

shihui好强大！狂顶……

回复引用

报告TOP

容老夫喘口气

 发表于 2009-4-10 10:06 | 只看该作者

9 #



初级会员



帖子 2712
精华 1
积分 1477
精弘币 1477 枚
性别 男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

shuishui好强大！狂顶……
happyboy1 发表于 2009-4-10 09:52

shuishui是啥



他喵的

回复引用

报告TOP

happyboy1

 发表于 2009-4-10 10:11 | 只看该作者

10 #

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！



初级会员

☆

帖子 1288

精华 0

积分 1236

精弘币 1236 枚

9# 容老夫喘口气

搞错了😅

回复 引用 报告 TOP

happyboy1

发表于 2009-4-10 10:12 | 只看该作者 11 #



初级会员

☆

帖子 1288

精华 0

积分 1236

精弘币 1236 枚

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

是这个不

回复 引用 报告 TOP

容老夫喘口气

发表于 2009-4-10 10:18 | 只看该作者 12 #



初级会员

☆

帖子 2712

精华 1

积分 1477

精弘币 1477 枚

性别 男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

如果你指的是我，那多了俩字母

他喵的

回复 引用 报告 TOP

cryboy

发表于 2009-4-10 10:18 | 只看该作者 13 #



优秀会员

😊😊

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

shuishui是啥

容老夫喘口气 发表于 2009-4-10 10:06 🍌

去掉两个字母不就是你。。

请输入商品名称

搜索商品

帖子 2275
精华 1
积分 3564
精弘币 3564 枚
性别 男
来自 义乌



QQ : 284604208 毕业倒计时

回复引用

报告TOP

happyboy1

发表于 2009-4-10 10:29 | 只看该作者

14 #



精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！



初级会员

帖子 1288
精华 0
积分 1236
精弘币 1236 枚

回复引用

报告TOP

g100my888

发表于 2009-4-10 10:34 | 只看该作者

15 #



精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

最长公共子串

初级会员

帖子 793
精华 0
积分 782
精弘币 782 枚
性别 男

SB下去

回复引用

报告TOP

yaojiank

发表于 2009-4-10 10:35 | 只看该作者

16 #



精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！



又见强帖

初级会员

帖子 163
精华 0
积分 508
精弘币 508 枚
性别 男

继续努力

回复引用

报告TOP

Red0ForEst

发表于 2009-4-10 10:44 | 只看该作者

17 #

请输入商品名称

搜索商品



注册会员

帖子	0
精华	0
积分	20
精弘币	20 枚
来自	小波斯基

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

我的代码缺精度

<http://bbs.zjut.com/images/smilies/oniontou/face006.gif>
it's "XD"

回复 引用 报告 TOP

SMart~

发表于 2009-4-10 10:55 | 只看该作者 18 #



初级会员

☆

帖子	315
精华	0
积分	335
精弘币	335 枚
性别	男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

shihui介绍东西感觉挺容易懂的

强大~~~

下次有空 去看看你那webotu的并查集~

回复 引用 报告 TOP

容老夫喘口气

发表于 2009-4-10 11:25 | 只看该作者 19 #



初级会员

☆

帖子	2712
精华	1
积分	1477
精弘币	1477 枚
性别	男

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

18# SMart~



他喵的

回复 引用 报告 TOP

happyboy1

发表于 2009-4-10 12:00 | 只看该作者 20 #



初级会员

☆

精弘网络长期在线招新，欢迎有兴趣的同学加入精弘网络！

要好好学习下了

帖子1288
精华0
积分1236
精弘币1236 枚

请输入商品名称

搜索商品

回复引用

报告TOP

返回列表

1

2

3

4

下一页



高级模式 | 发新话题

发表回复

☐ 回帖后跳转到最后一页