THÉORIE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES SIMPLEMENT PÉRIODIQUES.

PAR EDOUARD LUCAS, *Professeur au Lycée Charlemagne, Paris.*

CE mémoire a pour objet l'étude des fonctions symétriques des racines d'une équation du second degré, et son application à la théorie des nombres premiers. Nous indiquons dès le commencement, l'analogie complète de ces fonctions symétriques avec les fonctions circulaires et hyperboliques; nous montrons ensuite la liaison qui existe entre ces fonctions symétriques et les théories des déterminants, des combinaisons, des fractions continues, de la divisibilité, des diviseurs quadratiques, des radicaux continus, de la division de la circonférence, de l'analyse indéterminée du second degré, des résidus quadratiques, de la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, etc. Cette méthode est le point de départ d'une étude plus compléte, des propriétés des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique, de degré quelconque, à coefficients commensurables, dans leurs rapports avec les théories des fonctions elliptiques et abéliennes, des résidus potentiels, et de l'analyse indeterminee des degrés supérieurs.

SECTION I.

Définition des fonctions numériques simplement périodiques.

Désignons par a et b les deux racines de l'équation

$$x^2 = Px - Q\,, \tag{1}$$

dont les coefficients P et Q sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et premiers entre eux. On a

$$a + b = P\,, \qquad ab = Q\,;$$

et, en désignant par δ la différence $a - b$ des racines, et par Δ le carré de cette différence, on a encore

$$a = \frac{P+\delta}{2}\,, \qquad b = \frac{P-\delta}{2}\,, \qquad \delta = \sqrt{\Delta} = \sqrt{P^2 - 4\,Q}.$$

Cela posé, nous considérerons les deux fonctions numériques U et V définies par les égalités

$$(2) \qquad U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \qquad V_n = a^n + b^n .$$

Ces fonctions U_n et V_n donnent naissance, pour toutes les valeurs entières et positives de n, à trois séries d'espèces différentes, selon la nature des racines a et b de l'équation (1). Cette équation peut avoir :

1°. Les racines réelles et entières ;

2°. Les racines réelles et incommensurables ;

3°. Les racines imaginaires.

Les *fonctions numériques de première espèce* correspondent à toutes les valeurs entières de a et de b, et peuvent être calculées directement, pour toutes les valeurs entières et positives de n, par l'emploi des formules (2). Si l'on suppose plus particulièrement $a = 2$ et $b = 1$, on trouve, en formant les valeurs de U_n et de V_n, les séries récurrentes

n:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11, ... ,
U_n:	0,	1,	3,	7,	15,	31,	63,	127,	255,	511,	1023,	2047, ... ,
V_n:	2,	3,	5,	9,	17,	33,	65,	129,	257,	513,	1025,	2049, ...

étudiées pour la première fois par l'illustre FERMAT. Nous observerons, dès maintenant, que la série des V_n est contenue, pour les trois cas que nous considérons, dans la série des U_n, puisque les formules (2) nous donnent la relation générale

$$(3) \qquad U_{2n} = U_n V_n .$$

Les *fonctions numériques de seconde espèce* correspondent à toutes les valeurs incommensurables de a et de b dont la somme et le produit sont commensurables. On peut les calculer en fonction de la somme P et du discriminant Δ de l'équation proposée, au moyen des formules suivantes. Le développement du binôme nous donne

$$2^n a^n = P^n + \frac{n}{1} P^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{1.2} P^{n-2}\delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} P^{n-3}\delta^3 + \ldots + \delta^n,$$

$$2^n b^n = P^n - \frac{n}{1} P^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{1.2} P^{n-2}\delta^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} P^{n-3}\delta^3 - \ldots + (-\delta)^n;$$

et, par soustraction et par addition,

$$(4)\quad\begin{cases} 2^{n-1}U_n = \dfrac{n}{1}P^{n-1} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}P^{n-3}\Delta \\ \qquad\qquad + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}P^{n-5}\Delta^2 + \ldots\ldots, \\ 2^{n-1}V_n = P^n + \dfrac{n(n-1)}{1.2}P^{n-2}\Delta + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}P^{n-4}\Delta^2 + \ldots\ldots \end{cases}$$

On obtient ainsi, pour les premiers termes,

$$\begin{array}{lllll} U_0=0, & U_1=1, & U_2=P, & U_3=P^2-Q, & U_4=P^3-2PQ, \\ V_0=2, & V_1=P, & V_2=P^2-2Q, & V_3=P^3-3PQ, & V_4=P^4-4P^2Q+2Q^2. \end{array}$$

Les fonctions numériques de seconde espèce les plus simples correspondent aux hypothèses

$$P=1, \qquad Q=-1, \qquad \Delta=5,$$

ou à l'équation $$x^2 = x+1;$$
on a, dans ce cas,

$$a = 2\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad b = -2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

et, par suite, en désignant par u_n et v_n les fonctions qui en résultent,

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}, \qquad v_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n}.$$

On forme ainsi, pour les premières valeurs de n entières et positives, les séries

n:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11, ... ,
u_n:	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	89, ... ,
v_n:	2,	1,	3,	4,	7,	11,	18,	29,	47,	76,	123,	199, ...

La série des u_n a été considérée pour la première fois par LÉONARD FIBONACCI, de Pise.* Elle a été étudiée par ALBERT GIRARD,† qui a observé que les trois nombres u_n, u_n, u_{n+1} forment un triangle isoscèle dont l'angle au sommet est à fort peu près égal à l'angle du pentagone régulier. ROBERT SIMSON ‡ a

* *Il liber Abbaci di Leonardo Pisano, pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano, da* B. BONCOMPAGNI. Roma, 1867. Pag. 283 et 284.

† *L'arithmétique de* SIMON STEVIN, *de Bruges, revue, corrigée et augmentée de plusieurs traictez et annotations par* ALBERT GIRARD, etc. Leide, 1633. Pag. 169 et 170.

‡ *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. xlviii, Part I, for the year 1753. An explication of an obscure passage in Albert Girard's Commentary upon Simon Stevin's Works. Pag. 368 et suiv.

fait remarquer en 1753, que cette série est donnée par le calcul des quotients et des fractions convergentes des expressions irrationnelles

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

En 1843, J. BINET * donne, au moyen de cette série, l'expression du dénombrement des combinaisons discontigues. En 1844, LAMÉ † indique l'application que l'on peut faire de cette série à la détermination d'une limite supérieure du nombre des operations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers.

Nous prendrons aussi quelquefois pour exemple la série U_n de seconde espèce, donnée par les hypothèses

$$P = 2, \qquad Q = -1, \qquad \Delta = 2^2.2,$$

ou par l'équation

$$x^2 = 2x + 1.$$

On a alors les séries

n:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	...
U_n:	0,	1,	2,	5,	12,	29,	70,	169,	408,	985,	2378,	5741,	...
V_n:	2,	2,	6,	14,	34,	82,	198,	478,	1154,	2786,	6726,	16238,	...

que nous désignerons sous le nom de SÉRIES DE PELL, en l'honneur du mathématicien de ce nom qui résolut, le premier, un célèbre problème d'analyse indéterminée proposé par FERMAT, et concernant la résolution en nombres entiers, de l'équation indéterminée

$$x^2 - \Delta y^2 = \pm 1.$$

Les *fonctions numériques de troisième espèce* correspondent à toutes les valeurs imaginaires de a et de b dont la somme et le produit sont réels et commensurables. Les plus simples proviennent des hypothèses

$$P = 1, \qquad Q = 1, \qquad \Delta = -3;$$

on a, dans ce cas,

$$a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad b = \frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

par conséquent a et b sont les racines cubiques imaginaires de l'unité négative; de plus,

$$U_{3n} = 0, \qquad U_{3n+1} = (-1)^n, \qquad U_{3n+2} = (-1)^n.$$

* *Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris*, tome, xvii, pag 562; tome xix, pag. 939.

† *Comptes rendus*, etc., tome xix, pag. 867.

Ainsi les valeurs de U_n reviennent périodiquement dans l'ordre

$$0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1, \ldots\ldots$$

et donnent lieu à un grand nombre de formules simples déduites des propriétés générales des fonctions U_n et V_n, et concernant la trisection de la circonférence.

Quelquefois aussi nous considèrerons les séries analogues déduites de l'équation

$$x^2 = 2x - 2,$$

dans laquelle

$$a = 1 + \sqrt{-1}, \qquad b = 1 - \sqrt{-1}, \qquad \Delta = -2^2,$$

et les séries déduites de l'équation

$$x^2 = 2x - 3,$$

dans laquelle

$$a = 1 + \sqrt{-2}, \qquad b = 1 - \sqrt{-2}, \qquad \Delta = -2 \times 2^2;$$

nous désignerons les séries obtenues dans cette dernière hypothèse, sous le nom de *séries conjuguées* de PELL.

SECTION II.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec les fonctions circulaires et hyperboliques.

Si l'on fait

$$z = \frac{n}{2} \text{ Log. nép. } \frac{a}{b},$$

dans les formules

$$\cos\left(z\sqrt{-1}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\sin\left(z\sqrt{-1}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2\sqrt{-1}},$$

on obtient

$$\cos\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \text{ Log. } \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}} + \frac{b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}}\right],$$

$$\sin\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \text{ Log. } \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}} - \frac{b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}}\right];$$

on a donc, entre les fonctions U_n et V_n, et les fonctions circulaires, les deux relations

$$(5) \left\{ \begin{aligned} V_n &= 2Q^{\frac{n}{2}} \cos \left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \text{Log. } \frac{a}{b}\right), \\ U_n &= \frac{2Q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{-\Delta}} \sin \left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \text{Log. } \frac{a}{b}\right). \end{aligned} \right.$$

Il résulte immédiatement de ce rapprochement que chacune des formules de la trigonométrie rectiligne conduit à des formules analogues pour U_n et V_n, et inversement.

Ainsi la formule (3)

$$U_{2n} = U_n V_n,$$

correspond à la formule

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z;$$

les équations

$$(6) \qquad V_n + \delta U_n = 2a^n, \qquad V_n - \delta U_n = 2b^n,$$

que l'on déduit immédiatement des formules (2) correspondent exactement aux relations

$$\cos z + \sqrt{-1} \sin z = e^{z\sqrt{-1}}, \qquad \cos z - \sqrt{-1} \sin z = e^{-z\sqrt{-1}},$$

et les formules (4) sont entièrement analogues à celles qui ont été données dans les *Actes de Leipzick*, en 1701, par JEAN BERNOULLI, pour le développement de $\frac{\sin nz}{\sin z}$ et de $\cos nz$ suivant les puissances du sinus et du cosinus de l'arc z. Ainsi encore les formules

$$(7) \left\{ \begin{aligned} [V_m + \delta U_m][V_n + \delta U_n] &= 2[V_{m+n} + \delta U_{m+n}], \\ [V_n + \delta U_n]^r &= 2^{r-1}[V_{nr} + \delta U_{nr}], \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit des relations (6) coïncident avec les formules

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = \cos (x + y) + \sqrt{-1} \sin (x + y),$$
$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^r = \cos rx + \sqrt{-1} \sin rx,$$

qui ont été données par MOIVRE.

Nous ferons encore observer que si, dans l'équation (1), on pose

$$X = x^r, \qquad \alpha = a^r, \qquad \beta = b^r,$$

les quantités α et β sont les racines de l'équation

$$(8) \qquad X^2 = V_r X - Q^r.$$

Par conséquent, chacune des formules qui appartiennent à la théorie présente peut être généralisée, en y remplaçant U_n et V_n par $\frac{U_{nr}}{U_r}$ et V_{nr}, P par V_r, Q par Q^r, et la différence δ des racines a et b par la différence δU_r des racines α et β de l'équation (8).

Les formules (4) deviennent ainsi

$$(9)\left\{\begin{aligned} 2^{n-1}\frac{U_{nr}}{U_r} &= \frac{n}{1}V_r^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta U_r^2 V_r^{n-3} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^2 U_r^4 V_r^{n-5} + \ldots \\ 2^{n-1} V_{nr} &= V_r^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta U_r^2 V_r^{n-2} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\Delta^2 U_r^4 V_r^{n-4} + \ldots \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, nous laisserons de côté, pour l'instant, les autres procédés de transformation de l'équation (1) par substitution de variable, ainsi que l'étude des fonctions plus générales

$$A U_n + B V_n + C,$$

dans lesquelles A, B, C désignent des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

SECTION III.

Des relations de récurrence pour le calcul des valeurs des fonctions U_n et V_n.

Le calcul des valeurs de U_n et de V_n qui correspondent aux valeurs entières et consécutives de n, s'effectue rapidement au moyen de formules entièrement analogues à celles de THOMAS SIMPSON:

$$\sin(n+2)z = 2\cos z \sin(n+1)z - \sin nz,$$
$$\cos(n+2)z = 2\cos z \cos(n+1)z - \cos nz.$$

En effet, multiplions par x^n les deux membres de l'équation (1), et remplaçons successivement x par a et b, nous obtenons

$$a^{n+2} = Pa^{n+1} - Qa^n, \qquad b^{n+2} = Pb^{n+1} - Qb^n,$$

et, par soustraction et par addition,

$$(10)\left\{\begin{aligned} U_{n+2} &= P U_{n+1} - Q U_n, \\ V_{n+2} &= P V_{n+1} - Q V_n. \end{aligned}\right.$$

Ces formules nous font voir que les fonctions U et V forment, pour les valeurs entières et consécutives de n, deux séries récurrentes de nombres entiers. Ces séries ont la même loi de formation, mais elles diffèrent par les conditions initiales. Nous généraliserons ces formules par l'emploi du calcul symbolique. En effet, en désignant par F une fonction quelconque, on tire évidemment de l'équation (1)

$$F\,(x^2) = F\,(Px - Q)\ ;$$

si l'on remplace x par a et b, on a

$$a^n F\,(a^2) = a^n F\,(Pa - Q)\,, \qquad b^n F\,(b^2) = b^n F\,(Pb - Q)\,,$$

et, par soustraction et par addition, on obtient les égalités symboliques

$$(11)\ \left\{\begin{aligned} U^n F\,(U^2) &= U^n F\,(PV - Q)\,, \\ V^n F\,(V^2) &= V^n F\,(PV - Q)\,, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on remplace, après le développement, les exposants de U et de V par des indices, en tenant compte de l'exposant zéro. Ainsi les symboles U^2 et $PU - Q$, V^2 et $PV - Q$ sont respectivement équivalents, et peuvent être remplacés l'un par l'autre dans les transformations algébriques.

On a, par exemple, dans la série de FIBONACCI, les résultats suivants

$$(12)\ \left\{\begin{aligned} u^{n+p} &= u^{n-p}\,(u+1)^p\,, \\ u^{n-p} &= u^n\,(u-1)^p\,, \end{aligned}\right.$$

qui sont entièrement analogues à ceux que l'on peut obtenir dans la théorie des combinaisons ou du triangle arithmétique, et, en particulier dans la formule du binôme des factorielles, due à VANDERMONDE.

En prenant, pour point de départ, l'équation

$$x^2 = x - 1\,,$$

on trouvera encore de nouvelles relations entre les coefficients de la même puissance du binôme.

La considération de l'équation (8) conduit aux relations suivantes

$$(13)\ \left\{\begin{aligned} U_{n+2r} &= V_r\,U_{n+r} - Q^r\,U_n\,, \\ V_{n+2r} &= V_r\,V_{n+r} - Q^r\,V_n\,, \end{aligned}\right.$$

qui permettent de calculer les valeurs des fonctions U_n et V_n qui correspondent à des valeurs de l'argument n en progression arithmétique de raison r.

Inversement, on trouvera, dans la théorie des fonctions circulaires et hyperboliques, des formules analogues aux formules (11) et (13).

SECTION IV.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec les déterminants.

On peut exprimer U_n et U_{nr}, V_n et V_{nr} au moyen de déterminants; en effet, on a les formules

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & U_2 - PU_1 & = 0, \\
 & & & U_3 - PU_2 + & QU_1 & = 0, \\
 & & U_4 - PU_3 + & QU_2 & * & = 0, \\
 & U_5 - PU_4 + & QU_3 & * & * & = 0, \\
 \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
U_{n+1} - & PU_n + & QU_{n-1} & * & * & = 0;
\end{array}$$

on en déduit

$$(14) \qquad U_{n+1} = (-1)^n \begin{vmatrix} -P, & +1, & 0, & 0, & \ldots \\ +Q, & -P, & +1, & 0, & \ldots \\ 0, & +Q, & -P, & +1, & \ldots \\ 0, & 0, & +Q, & -P, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \; (n \text{ colonnes}).$$

On obtient aussi

$$(15) \qquad V_n = (-1)^n \begin{vmatrix} -P, & +2, & 0, & 0, & \ldots \\ +Q, & -P, & +1, & 0, & \ldots \\ 0, & +Q, & -P, & +1, & \ldots \\ 0, & 0, & +Q, & -P, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \; (n \text{ colonnes}).$$

On vérifie les résultats que nous venons de trouver, en développant les déterminants suivant les éléments de la derniére ligne ou de la derniére colonne. Les valeurs de $\frac{U_{nr}}{U_r}$ et de V_{nr} s'obtiennent encore au moyen des déterminants, en remplaçant comme à l'ordinaire P par V_r, et Q par Q^r.

Enfin, nous ferons observer que ces formules sont susceptibles d'une grande généralisation; en effet, dans les formules (11) qui contiennent une fonction arbitraire, faisons n successivement égal à $1, 2, 3, \ldots . m$; nous obtenons alors m équations desquelles on tirera la valeur de l'une ou l'autre des fonctions U et V.

REMARQUE.— On peut encore pour le développement de U_n employer la formule suivante,

$$(16) \qquad U_{n+1} = \begin{vmatrix} P, & \sqrt{Q}, & 0, & 0, \dots \\ \sqrt{Q}, & P, & \sqrt{Q}, & 0, \dots \\ 0, & \sqrt{Q}, & P, & \sqrt{Q}, \dots \\ 0, & 0, & \sqrt{Q}, & P, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (n \text{ colonnes}),;$$

cependant l'emploi de la formule (14) est bien préférable.

SECTION V.

Des relations des fonctions U_n et V_n avec les fractions continues.

Les fonctions U_n et V_n sont développables en fractions continues; en effet, considérons l'expression

$$(17) \qquad \frac{R_n}{S_n} = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}},$$

et désignons par R_n et S_n le numérateur et le dénominateur de la $n^{ième}$ réduite; on sait que l'on a

$$(18) \quad \begin{cases} R_{n+2} = b_{n-2} R_{n+1} + a_{n+2} R_n, \\ S_{n+2} = b_{n+2} S_{n+1} + a_{n+2} S_n; \end{cases}$$

et, de plus

$$(19) \qquad R_n S_{n+1} - R_{n+1} S_n = (-1)^n a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$a_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_n = P,$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = -Q,$$

on obtient l'expression

$$(20) \qquad \frac{U_{n+1}}{U_n} = P - \cfrac{Q}{P - \cfrac{Q}{P - \cfrac{Q}{P - \cdots}}}$$

dans laquelle n désigne le nombre des quantités égales à P.

On a ainsi, dans la série de FIBONACCI:

$$(21)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}};$$

dans la série de FERMAT:

$$(22)\qquad \frac{2^{n+1}-1}{2^{n}-1}=3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cdots}}};$$

et dans la série de PELL,

$$(23)\qquad \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}}=2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cdots}}}}.$$

D'ailleurs, on a généralement

$$(24)\qquad \frac{U_{n+1}}{U_n}=a\,\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n}};$$

donc, en désignant par a la plus grande des racines, prises en valeur absolue, de l'équation (1), on a

$$(25)\qquad \operatorname{Lim}\frac{U_{n+1}}{U_n}=a,$$

lorsque n augmente indéfiniment. Cependant, nous ferons observer que ce dernier résultat ne s'applique pas dans le cas des séries de troisième espèce, c'est-à-dire lorsque les racines de l'équation proposée (1) sont imaginaires.

Au moyen de cette dernière formule, il est facile de calculer rapidement un terme de la série U_n lorsque l'on ne connait que le précédent. Soit, par exemple, dans la série de FIBONACCI

$$u_{44} = 7014\ 08733,$$

et

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,\ 61803\ 39887\ 39894\ 8482\ldots;$$

si l'on calcule par les méthodes abrégées le produit $a.u_{44}$, à moins d'une unité près, on trouve exactement, puisque u_n est entier

$$u_{45} = 11349\ 03170.$$

On peut, d'ailleurs, déterminer directement le dernier chiffre de u_n; ainsi dans ce cas particulier, il est facile de faire voir que deux termes, dont les rangs différent d'un multiple quelconque de 60, sont terminés par le même chiffre; si l'on suppose alors p intérieur à 60, on peut démontrer que les derniers chiffres de u_p et de u_q sont complémentaires, lorsque la somme $p+q$ est égale à 60; on peut donc supposer maintenant p égal à 30; et même p inférieur à 15, si l'on observe que les termes u_{15+p} et u_{15-p} ont les mêmes derniers chiffres, lorsque p est impair, et leurs derniers chiffres complémentaires, lorsque p est pair.

On a, plus généralement, la formule

$$(26) \qquad \frac{U_{(n+1)r}}{U_{nr}} = V_r - \cfrac{Q^r}{V_r - \cfrac{Q^r}{V_r - \cfrac{Q^r}{V_r - \ddots}}},$$

dans laquelle les V_r sont en nombre n, et, lorsque n augmente indéfiniment,

$$(27) \qquad \operatorname{Lim} \frac{U_{(n+1)r}}{U_r} = a^r.$$

A la formule (26), correspond, dans la théorie des fonctions circulaires la formule

$$(28) \qquad \frac{\sin(n+1)z}{\sin nz} = 2\cos z - \cfrac{1}{2\cos z - \cfrac{1}{2\cos z - \cfrac{1}{2\cos z - \ddots}}},\ *$$

dans laquelle l'expression $2\cos z$ est repétée n fois.

* Journal de Crelle, tome xvi, pag. 95; 1837.

On a aussi pour la série des V_n, la relation

$$(29)\qquad \frac{V_{nr}}{V_{\overline{n-1}\,r}} = V_r - \cfrac{Q^r}{V_r - \cfrac{Q_r}{V_r - \cfrac{Q^r}{V_r - \cdots - \cfrac{Q^r}{\left(\frac{V_r}{2}\right)}}}},$$

dans laquelle la quantité V_r est répétée n fois.

Les nombreuses propriétés des déterminants et des fractions continues donnent lieu à des propriétés analogues pour les fonctions U_n et V_n. Ainsi la propriété bien connue de deux réduites consécutives, renfermée dans la formule (19) donne

$$(30)\qquad \begin{cases} U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = Q^{n-1}, \\ V_n^2 - V_{n-1}V_{n+1} = -Q^{n-1}\Delta, \end{cases}$$

et, plus généralement

$$(31)\qquad \begin{cases} U_{nr}^2 - U_{(n-1)r}U_{(n+1)r} = Q^{(n-1)r}U_r^2, \\ V_{nr}^2 - V_{(n-1)r}V_{(n+1)r} = -Q^{(n-1)r}\Delta U_r^2; \end{cases}$$

on a, dans la théorie des fonctions circulaires, les formules analogues

$$\sin^2 x - \sin(x-y)\sin(x+y) = \sin^2 y,$$
$$\cos^2 x - \cos(x-y)\cos(x+y) = \sin^2 y,$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier immédiatement les formules (31), en remplaçant U, V et Q en fonction de a et b. Ainsi, on a encore

$$\Delta U_{n+r}^2 = a^{2n+2r} + b^{2n+2r} - 2Q^{n+r},$$
$$\Delta U_n^2 \;= a^{2n} \;+ b^{2n} \;- 2Q^n \;;$$

donc, par soustraction :

$$\Delta\left[U_{n+r}^2 - Q^r U_n^2\right] = \left[a^{2n+r} - b^{2n+r}\right]\left[a^r - b^r\right],$$

et, par suite

$$(32)\qquad U_{n+r}^2 - Q^r U_n^2 = U_r U_{2n+r};$$

on aura, par la même voie, la relation

$$(33)\qquad V_{n+r}^2 - Q^r V_n^2 = \Delta U_r U_{2n+r}.$$

La formule (32) donne plus particulièrement, pour $r = 1$, la relation

$$(34)\qquad U_{n+1}^2 - QU_n^2 = U_{2n+1}.$$