

从“ $1+1=2$ ”谈起

——高等数学与初等数学的区别，联系与衔接

本科 19 级 数学科学学院 1 班 宗语轩

“ $1+1=2$ ”是我们接触数学的起点，但老师们几乎都是通过数数或是举具象的例子这样直观的方式来告诉我们什么是“ $1+1=2$ ”，而没有深入讲解加法的定义。我们对几何图形的了解，亦是通过直观感受图形，以及学习老师们所列举的性质、结论，而没有探究其背后的几何原理。至于有理数和无理数，数学教材带给我们的也仅仅是它们的存在性，并没有探究两者间的联系，甚至有很多老师都没有阐明有理数和无理数本质的区别（例如，很多学生并不了解任何有理数都能表示成“ $p/q, (p, q)=1$ ”的形式）。初等数学里这些直观上“显然”的内容却恰恰是学生踏入高等数学的大门后所需要细究的。很多同学对这一转变无法适应，这导致他们在学习第一门核心基础课程——数学分析时就开始掉队。

当然，笔者列举这些事实并不是要否定初等数学。相反，在初等数学教育阶段，绝大部分学生对数学的认知能力非常有限，他们很难绕开形象来接触抽象。因此，在这样的起步阶段，是需要通过这样直观的方式去引导学生学习数学的。较之于高等数学，初等数学所学习的内容就好比练武中蹲马步、打沙袋、举石锁的过程。如果急功近利，过早地去练复杂的招式，那么马脚就会逐渐败露，最后很可能一事无成。对此，笔者觉得很有必要从多个角度谈谈高等数学和初等数学的区别与联系，以及如何完成这二者的衔接。

我们先从定义本身讲起：

初等数学：以“ $1+1=2$ ”为既定事实建立的数学体系。通俗而言，就是更加直观，更强调数学的工具性。

高等数学：研究何为“ $1+1=2$ ”及其衍生出的一系列数学内容。较之初等数学更加抽象，更重视数学的本原性。

初等数学直接承认了很多直观上成立的命题。例如，初等函数连续性是可以直接使用的，其衍生出的各类性质也被视为“显而易见”。而高等数学正是去研究这些在初等数学体系中视为“直观上成立”的定义及性质，很多定义还被作为起点来构建出新的体系。例如，把“ $1+1=2$ ”作为抽象代数课程的起点，以此来引申出“群环域”的概念；在函数连续性、可导性、可积性的定义中，引入“无穷小”这一工具，亦是为了真正区分直观上的两个“1”，把“ $1+1=2$ ”真正抽丝剥茧。同时，在新的体系下，又衍生出新的定义、性质及结论。这些新的定义、性质及结论相比初等数学而言，不失直观却更为本原。

同时，初等数学中的内容或多或少都会被运用到高等数学中去。因为抽象的探索，离不开直观的形象；本原的洞察，少不了工具的驾驭。就如初等数学中直观化和形象化的方法，亦作为工具被用于高等数学的研究中。再如“变量代换及换元”这一我们在初等数学中学习的技巧，即使在积分及微分的处理中也经常使用，它甚至还起到了关键乃至决定性作用。这

些贯穿整个数学阶段的思想方法及工具，在不同阶段有不同的地位及用途，时而宏观，时而具化，亦或两者兼具。

再从学习模式的角度谈起：

初等数学的教学一般都是以“简单的定义—>适量的性质及推论—>大量的例子—>衍生出大量课本之外的技巧及结论”的模式进行。如前所说，这些内容始终是高等数学学习及数学研究的基本工具，在初等数学的学习阶段，必须对这些“工具”先要熟练掌握，再要灵活运用，最后融会贯通。在绝大部分学生几乎不具备抽象思维的时候，这种如同“学工具”的学习模式在初等数学的学习中是适用的。

高等数学的教学一般都是以“困难的定义—>大量的性质及推论—>适量的例子—>衍生出极少量课本之外的技巧及结论”的模式进行。高等数学里的课程本身起点很高，因此高等数学的学习绝不能抱着“学工具”的想法，而是要文火慢炖，勤于思考和探究，最后要融入所学课程的体系和思维方式，这是第一要义。就如数学分析这一课程，它开门见山地引入了无穷小的概念，进而定义了极限。要想尽快适应这样的转变，就要在学习过程中深入课程，适应体系，探明本质。

为了让同学们更好地适应高等数学的学习，笔者还想谈一谈如何更好地进行初高等数学间的衔接：

1.一定要理解无穷(包括大和小)的内涵，深究无穷性与有穷性的区别，并在无穷性中继续深挖根源。“无穷小”是研究为何“ $1+1=2$ ”成立（实数的构造）及其衍生出的内容的一个重要手段；

2.要以工具性的观点运用初等数学，要持求知的态度探索高等数学，切忌高等数学学习“工具化”；

3.学习高等数学不能忽视初等数学里常用的直观化和形象化的方法，他们很有可能为高等数学中一些问题的解决提供了动机，再加上数学本身具有理科语言学的特性。因此，具备良好的洞察力及语言逻辑能力是任何阶段的数学学习中不可或缺的一部分；

4.学习高等数学要要学会探索规律，追溯本质。看似复杂的体系及问题，其关键往往归结于核心的处理手段及思维方式，同时，在学习任何知识过程中都要具备类比、归纳、演绎以及多维推广等数学思想方法；

5.学习完高等数学中的每一门课程，都应该回头思考课程的真正核心内容，明确课程主线，理清一些重要的定理或命题的地位及用途，并探究其中的联系。

最后，祝各位 USTCer 在科大四年里能够治学修身，畅游数学之领域，感悟生活之乐趣。