W1-TR 挑战作业

（TR: Theoretical Research）

1.1 用概率论想法求N阶行列式的展开式中包含主对角线元素的个数。

解：设N阶行列式中元素为a_{ij}，行列式展开式的每一项为不同行不同列元素的乘积。对于每一项中的各个元素，从第一列中取一个元素有N种取法，当从第一列中取的元素取定后，再从第二列中取一个元素有$N-1$种取法，接着从第三列中取一个元素有$N-2$种取法等等。每一种取法都是等可能的，共有$N1!$种取法。

设A_k表事件$\{N$阶行列式的项含$a_{kk}\}$，$k=1,2,\cdots,N$,则

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N},\\
P(A_iA_j) &= \frac{(N-2)!}{N!},\\
P(A_1A_2\cdots A_N) &= \frac{1}{N!},
\end{aligned}
$$

至少含一个主对角线元素的项的概率为

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{1\le i<j\le N} P(A_iA_j)\\
&\quad + \cdots + (-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)\\
&= C_N^1\frac{1}{A_N^1} - C_N^2\frac{1}{A_N^2} + \cdots + C_N^N\frac{1}{A_N^N}\\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{N-1}\frac{1}{N!}
\end{aligned}
$$

由此得包含主对角线元素的项数为

$$
N!\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{1}{k!}.
$$

1.2 利用概率论的想法证明下列恒等式：

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{M-m}{M-1}+\frac{(M-m)(M-m-1)}{(M-1)(M-2)}\\
&+\cdots+\frac{(M-m)\cdots 2\cdot 1}{(M-1)\cdots(m+1)m}=\frac{M}{m}
\end{aligned}
$$

其中M,m都是正整数，且$M>m$.

证明：设袋中有M个球，其中m个是白球，不放回随机取出，第k次才首次取得白球(设为事件A_k)的概率为

$$
P(A_k)=\frac{A_{M-m}^{k-1}A_m^1}{A_M^k}
$$

因为袋中有m个白球，$M-m$个黑球，若一开始总是取到黑球，直到把黑球取完为止，则最迟到$M-m+1$次一定会取到白球；也就是说，第一次或第二次...或最迟到第$M-m+1$次取到白球事件是必然事件，其概率为1。所以

$$
\begin{aligned}
1 &= P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{M-m+1})\\
&= \frac{A_{M-m}^{1-1}A_m^1}{A_M^1}+\frac{A_{M-m}^{2-1}A_m^1}{A_M^2}+\cdots+\frac{A_{M-m}^{M-m+1-1}A_m^1}{A_M^{M-m+1}}\\
&= \frac{m}{M}+\frac{m(M-m)}{M(M-1)}+\cdots+\frac{m(M-m)\cdots 2\cdot 1}{M-1)\cdots(m+1)m}.
\end{aligned}
$$

等式两边同时乘以M/m得

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{M-m}{M-1}+\frac{(M-m)(M-m-1)}{(M-1)(M-2)}\\
&+\cdots+\frac{(M-m)\cdots 2\cdot 1}{(M-1)\cdots(m+1)m}=\frac{M}{m}.
\end{aligned}
$$

1.3 样本空间的一切子集组成的集合一定是一个事件域吗？

1.4 事件域的交还是事件域吗？

1.5 为什么要引入$\sigma-$代数才能严谨给出概率的公理化定义？（提示：查阅Lebesgue不可测集，例：Vitali集）

W1-ET 挑战作业

（ET: Expansion Training）

1.1 生日问题

n人的班级中至少有两个人生日相同的概率。1）展示随着n从2到60的变化时，生日相同的理论概率值的变化情况； 2）做100次数值模拟试验，每一纵列是一次试验结果，蓝点表示30人的生日，红点表示有生日相同的情况。 3）数值展示至少有两人生日相同和有人与“我”生日相同的概率对比图。

1.2 几何概率

利用几何概型研究其他几何形状（如多边形、椭圆）的面积或周长的估计方法。

1.3 蒲丰投针

1）课上讨论的投针问题是矩形区域中，把投掷区域改为三角形呢？还能由该实验得到 π 的近似值吗？

2）投在矩形区域的针是不是直的，是弯曲的呢？会是什么情况。