

## 1. 级数收敛性与量子能级计算

问题描述：

量子谐振子能级修正项为

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{3/2}} e^{-k\beta}$$

其中  $\beta > 0$  为逆温度参数。

- (a) 证明当  $\beta \rightarrow 0^+$  时级数发散，而  $\beta > 0$  时绝对收敛
- (b) 推导渐近表达式  $E \sim \frac{\pi^2}{12}$  (当  $\beta \rightarrow \infty$ )
- (c) 设计数值算法计算  $\beta = 0.1$  时的积分近似值

## 2. 级数收敛性与结构共振分析

问题描述：

悬臂梁的振动响应可表示为

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-nt} \cos(nt)$$

- (a) 证明级数在  $t \geq 0$  时一致收敛（使用Weierstrass M判别法）。
- (b) 当  $t = 0$  时，讨论级数是否绝对收敛。
- (c) 若激励频率  $\omega$  接近  $n$ ，分析截断误差对共振幅值的影响。

## 3. 幂级数与电路阻抗分析

问题描述：

电路阻抗

$$Z(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \omega^{2k+1}$$

- (a) 求收敛半径并讨论  $\omega \rightarrow \infty$  时的渐近行为。
- (b) 若实际电路中  $|\omega| < 10$ ，截断级数为前3项，估计误差。

## 4. 傅里叶级数与信号滤波

问题描述：

脉冲信号

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2, \\ 0 & T/2 \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nT/2)}{n/2} \cos(nt)$$

- (a) 计算级数的收敛性（吉布斯现象）。
- (b) 设计一个滤波器，保留前  $N$  项谐波，计算滤波后信号的均方误差。

## 5. 隐函数求导与自动驾驶轨迹规划

问题描述：

车辆运动轨迹满足隐式方程

$$x^2 \sin y + ye^x = 1.$$

- (a) 求轨迹在  $(0, 1)$  处的切线方程和曲率半径
- (b) 若需避开圆形障碍物  $x^2 + (y - 1.5)^2 \leq 0.25$ ，建立最小偏离模型
- (c) 用二元泰勒展开设计局部绕行路径

## 6. 多元函数微分与机器人运动规划

问题描述：

机器人在平面上的运动路径由  $z(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$  描述。

- (a) 求梯度  $\nabla z$  并确定最大上升方向。
- (b) 计算路径在  $(0, \pi/2)$  处的二阶泰勒展开。
- (c) 若运动受约束  $x^2 + y^2 = 1$ ，求路径的极值点。

## 7. 梯度下降与神经网络训练

问题描述：

神经网络损失函数  $L(w_1, w_2) = \sin(w_1 w_2) + e^{w_1^2 + w_2^2}$ 。

- (a) 计算  $(0.5, 0.5)$  处的梯度及Hessian矩阵
- (b) 设计自适应学习率梯度下降算法
- (c) 分析鞍点  $(0, 0)$  对训练的影响

知识点：梯度、Hessian矩阵、优化算法

## 8. 条件极值与机械结构优化

问题描述：

设计一个长方体水箱，体积为  $V$ ，要求表面积最小。

- (a) 建立约束优化模型，利用拉格朗日乘数法求解。
- (b) 若材料成本与侧面积平方成正比，重新建模并求解。
- (c) 讨论解的物理意义（如长宽高比例）。

## 9. 二重积分与流体流量计算

问题描述：

流体通过区域

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

的流量为  $\iint_D \sqrt{1 + 4x^2} dA$

- (a) 用直角坐标系和极坐标系分别计算积分。
- (b) 比较两种方法的计算效率。
- (c) 若区域改为  $D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ , 重新计算积分。

## 10. 重积分与概率分布建模

问题描述:

二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)}$$

- (a) 验证  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$ 。
- (b) 计算  $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$ 。
- (c) 若变换为极坐标, 重新推导积分表达式。

## 11. 三重积分与核反应堆中子通量

问题描述:

圆柱形反应堆 (半径  $R=2\text{m}$ , 高  $H=5\text{m}$ ) 内中子通量密度  $\phi(x, y, z) = e^{-r^2} \cos(\pi z/H)$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

- (a) 用柱坐标计算总通量  $\iiint_V \phi dV$
- (b) 分析积分收敛性 (扩展至无穷域)
- (c) 若存在孔洞  $r < 0.5$ , 计算通量损失率

## 12. 格林公式与电磁场问题

问题描述:

电场强度  $\mathbf{E} = (P, Q)$  在区域  $D$  内满足  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

- (a) 证明  $\oint_C P dx + Q dy = 0$  ( $C$  为  $D$  的边界)。
- (b) 若  $\mathbf{E} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ , 验证格林公式在  $D = \{x^2 + y^2 > 1\}$  中的适用性。
- (c) 分析原点处的奇点如何影响积分值。

## 13. 格林公式与涡旋流场建模

问题描述:

速度场  $\mathbf{v} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \right)$ 。

- (a) 验证  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$  是否成立。
- (b) 计算沿椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的环量  $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ 。
- (c) 若分母改为  $x^2 + y^2$ , 分析奇点影响。

## 14. 曲面积分与热辐射计算

问题描述：

球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的热辐射通量为  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ 。

- (a) 用参数方程计算曲面积分。
- (b) 若辐射强度与倾角  $\theta$  成正比，修改积分表达式。
- (c) 验证高斯公式在闭合曲面上的应用。

## 15. 曲面积分与太阳能辐射收集

问题描述：

抛物面镜  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 4$ ) 接收光通量  $\mathbf{F} = (0, 0, -kz)$ 。

- (a) 计算总辐射通量  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  (法向量朝外)。
- (b) 比较直接投影法 vs. 高斯公式的计算效率。
- (c) 若镜面破损 ( $z \geq 1$ )，重算通量损失。

## 16. 旋度定理与台风环流强度

问题描述：

台风风速场  $\mathbf{v} = \left( -\frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x}{1+x^2+y^2}, 0 \right)$  (单位: m/s)。

- (a) 计算旋度  $\nabla \times \mathbf{v}$
- (b) 验证Stokes定理：取半球面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- (c) 分析中心风速奇异点对环流计算的影响