# Ejemplo de una función no medible

Consideremos el espacio muestral {a,b,c}, la sigma álgebra {{a},{b,c},∅,{a,b,c}}, y la medida de probabilidad P:{{a},{b,c},∅,{a,b,c}}→[0,1], definida por

|  |  |
| --- | --- |
| {a} | 1/3 |
| {b,c} | 2/3 |
| ∅ | 0 |
| {a,b,c} | 1 |

Consideremos también el conjunto {r1,r2} (r1≠r2), la sigma álgebra {{r1},{r2},∅,{r1,r2}}, y la medida μ:{{r1},{r2},∅,{r1,r2}}→[0,1], definida por

|  |  |
| --- | --- |
| {r1} | 1/2 |
| {r2} | 1/2 |
| ∅ | 0 |
| {r1,r2} | 1 |

Una función X:({a,b,c},{{a}.{b,c},∅,{a,b,c}},P)→({r1,r2},{{r1},{r2},∅,{r1,r2}},μ) es medible si para cualquier B elemento de {{r1},{r2},∅,{r1,r2}}, la imagen inversa A=X^{-1}(B) es un elemento de la sigma álgebra {{a}.{b,c},∅,{a,b,c}}.

A continuación, definiremos una función del espacio de probabilidad

({a,b,c},{{a},{b,c},∅,{a,b,c}},P)

al espacio de probabilidad

({r1,r2},{{r1},{r2},∅,{r1,r2}},μ)

y comprobaremos que se trata de una función no medible.

Sea la función X:({a,b,c},{{a},{b,c},∅,{a,b,c}},P)→({r1,r2},{{r1},{r2},∅,{r1,r2}},μ) definida por

|  |  |
| --- | --- |
| a | r1 |
| b | r1 |
| c | r2 |

Entonces

X^{-1}({r1}) = {a,b} no es un elemento de la sigma álgebra {{a},{b,c},∅,{a,b,c}}, y

X^{-1}({r2}) = {c} no es un elemento de la sigma álgebra {{a},{b,c},∅,{a,b,c}}.

Por lo tanto, la función X:({a,b,c},{{a},{b,c},∅,{a,b,c}},P)→({r1,r2},{{r1},{r2},∅,{r1,r2}},μ) definida por

|  |  |
| --- | --- |
| a | r1 |
| b | r1 |
| c | r2 |

no es una función medible, y por lo tanto, no es una variable aleatoria.

Por otra parte, si se considera la sigma álgebra {{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}}, y la medida P definida por

|  |  |
| --- | --- |
| {a} | 1/3 |
| {b,c} | 2/3 |
| {a,b} | 2/3 |
| {c} | 1/3 |
| ∅ | 0 |
| {a,b,c} | 1 |

la misma función pero definida del espacio de probabilidad

({a,b,c},{{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}},P),

al espacio de probabilidad

({r1,r2},{{r1},{r2},∅,{r1,r2}},μ), es decir, la función

X:({a,b,c},{{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}},P)->({r1,r2},{{r1},{r2},∅,{r1,r2}},μ)

definida por

|  |  |
| --- | --- |
| a | r1 |
| b | r1 |
| c | r2 |

si será medible, debido a que

X^{-1}({r1}) = {a,b} es elemento de {{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}},

X^{-1}({r2}) = {c} es un elemento de {{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}},

X^{-1}(∅) = ∅ es un elemento de {{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}},

X^{-1}({r1,r2}) = {a,b,c} es un elemento de{{a},{b,c},{a,b},{c},∅,{a,b,c}}.