MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA | GOBIERNO DE COSTA RICA

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA — UNED 45 ANIVERSARIO — TEC Tecnológico de Costa Rica — UNA UNIVERSIDAD NACIONAL — OLCOMEP

Ministerio de Educación Pública
Dirección de Desarrollo Curricular
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Asesoría Nacional de Matemática

Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria - OLCOMEP

# Estrategias para el abordaje de PROBLEMAS Y RETOS PARA OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA EN PRIMARIA

510.1
C484e

Charpentier Díaz, Yeri María
Estrategias para el abordaje de problemas y retos para olimpiadas de matemática 6º, 2024 / Yeri María Charpentier Díaz; Ricardo Poveda Vásquez -- 1. ed. -- San José, Costa Rica. Ministerio de Educación Pública, 2024.

Documento en formato digital. (89 p.; 21 x 27 cm.; peso 4,33 Mb)

ISBN: 978-9977-60-530-2

1. MATEMÁTICAS. 2. ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE.
3. OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS. 4. EDUCACIÓN PRIMARIA.
I. TÍTULO.

## Créditos

Los ítems fueron tomados de las pruebas aplicadas en las diferentes etapas de la OLCOMEP 2023.

**Persona autora del cuadernillo:**

Yeri María Charpentier Díaz.

**Asesora nacional de Matemáticas, Ministerio de Educación Pública.**

**Persona revisora:**

Ricardo Poveda Vázquez.

**Profesor e investigador, Escuela de la Matemática.**

**Universidad Nacional de Costa Rica.**

**Diseño Gráfico**

Karla Guevara Murillo.

**Dirección de Recursos Tecnológicos en Educación, MEP.**



Esta obra es parte de los productos en el proyecto Olimpiada Costarricense de Matemáticas para la Educación Primaria del Ministerio de Educación Pública, con el apoyo de las universidades públicas de Costa Rica.

# PRESENTACIÓN

Es fundamental que el sistema educativo fomente en la sociedad, todas las actividades posibles orientadas a estimular el desarrollo matemático, científico y tecnológico, a efecto de formar personas críticas y analíticas, con habilidades necesarias para hacer frente a los retos y demandas contemporáneas.

Las olimpiadas de matemáticas ponen a prueba las habilidades de los participantes para resolver problemas de forma creativa y original. No se trata de memorizar fórmulas o realizar cálculos complejos, sino de utilizar la lógica, el ingenio y la capacidad de análisis para encontrar soluciones ingeniosas.

Este cuadernillo se dirige a cualquier persona que quiera mejorar sus habilidades matemáticas y disfrutar del desafío de resolver problemas de forma creativa. Ofrece una gran oportunidad para:

- Desarrollar el talento matemático: a través de problemas desafiantes que ayudan a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos y la capacidad para aplicarlos en diferentes situaciones.
- Fortalecer el pensamiento crítico: al analizar problemas de forma lógica, identificar las variables relevantes y formular soluciones creativas.
- Aprender nuevas estrategias de resolución de problemas: por medio de diferentes técnicas para abordar problemas matemáticos de forma eficiente.

## En este cuadernillo se encuentra:

- Una selección de problemas de diferentes niveles de dificultad, cuidadosamente seleccionados para estimular el pensamiento matemático.
- Estrategias de resolución para cada problema, explicadas paso a paso para su comprensión y aplicación en otros desafíos.

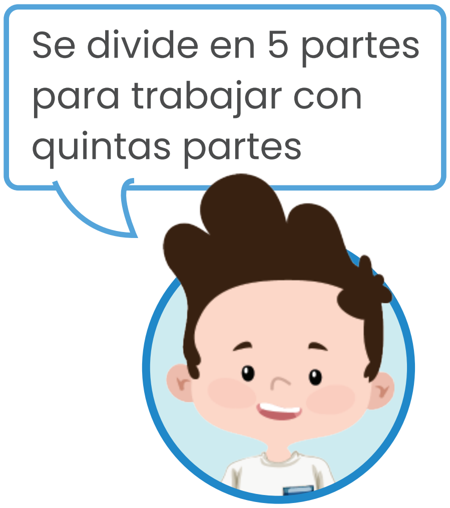
- Una oportunidad para poner a prueba habilidades y el potencial en el apasionante mundo de las matemáticas.

Confiamos en que este material será de gran utilidad para contribuir a la mejora de la educación matemática.

**Comisión Central de OLCOMEP**

**1.** María es una arquitecta que ha construido una piscina olímpica para un complejo deportivo. La piscina se llena por completo con 2500 metros cúbicos de agua.  Los dueños del complejo quieren dejar vacía una quinta parte de la piscina, ¿cuántos litros de agua se necesitan en la piscina?

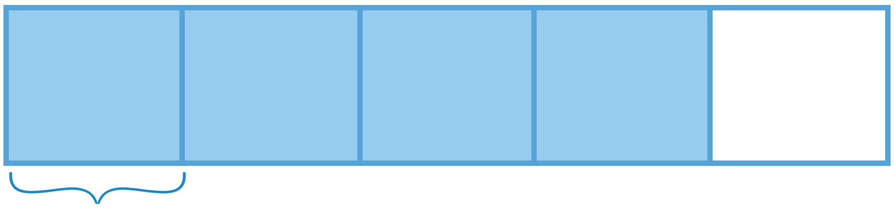
a. 250 000 litros de agua
b. 500 000 litros de agua
c. 2 000 000 litros de agua




**Solución:**
**Estrategia 1. Método gráfico.**

Se dibuja una piscina rectangular y se divide en 5 partes iguales.

Luego, se colorea 4 partes de la piscina para representar la cantidad de agua que se quiere dejar y calcula la cantidad de agua que hay en cada una de las partes:



**2500 ÷ 5 =** 500.

Entonces, cada quinta parte corresponde a 500 m³.

Ahora bien, como se deben llenar 4 de esas quintas partes, en metros cúbicos se debe tener 500 x 4= 2000 $m^3$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **500 $m^3$** | **500 $m^3$** | **500 $m^3$** | **500 $m^3$** | |

Finalmente, convierte los metros cúbicos a litros, para ello, debemos recordar que: 1$m^3$ = 1000 litros

2000 x 1000 = **2 000 000.**

Por lo que, se necesitan **2 000 000 litros.**

**Estrategia 2. Operaciones aritméticas.**

Es importante tener presente que: 1$m^3$ = 1000 litros

De esta forma la capacidad de la piscina es de:

2500 $m^3$ × 1000 litros = 2 500 000 litros

Los dueños requieren vaciar $\frac{1}{5}$ de la capacidad de la piscina por lo que debes realizar el siguiente calculo:

2 500 000 litros × $\frac{1}{5}$ = 500 000 litros

Entonces, deben quitar 500000 litros. La diferencia es:

$$2\,500\,000 - \mathbf{500\,000} = 2\,000\,000$$

Por tanto, se necesitan **2 000 000 litros**.

**R/** Se requieren 2 000 000 litros.

**2.** A Gerardo le compraron una bolsa con chocolates para compartir, los cuales terminó regalando en 5 días. El primer día regaló dos chocolates y en los días siguientes regaló el doble de los chocolates que el día anterior. ¿Cuántos chocolates tenía la bolsa?

a. 10
b. 32
c. 62

**Solución:**
**Estrategia 1. Método gráfico.**

Para que puedas resolver este problema podemos construir una tabla con el siguiente patrón:

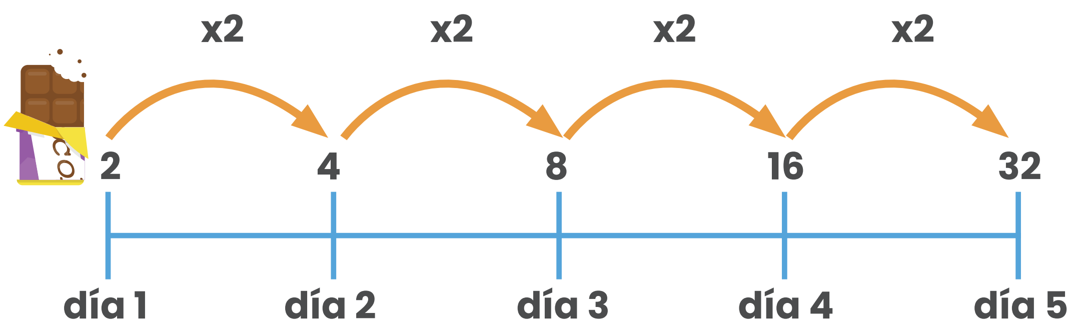
| Días | Chocolates consumidos por día |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |

Ahora debes sumar todos los chocolates consumidos para conocer el total:

2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62

**R/** La bolsa tenía 62 chocolates

**Estrategia 2. Cada día se duplica la cantidad de chocolates.**





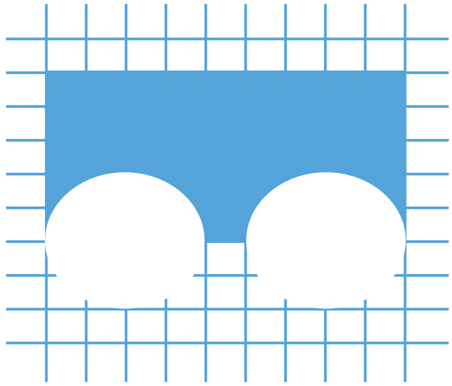
No olvidemos  sumar todos los chocolates de cada día para conocer el total:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

**R/** La bolsa tenía 62 chocolates.

**3.** Se desea calcular el área de la región representada en la imagen en color negro. Si cada cuadrado de la cuadrícula en la imagen corresponde a un centímetro cuadrado en la realidad, ¿cuál es el área aproximada, en centímetros cuadrados, de la figura negra?

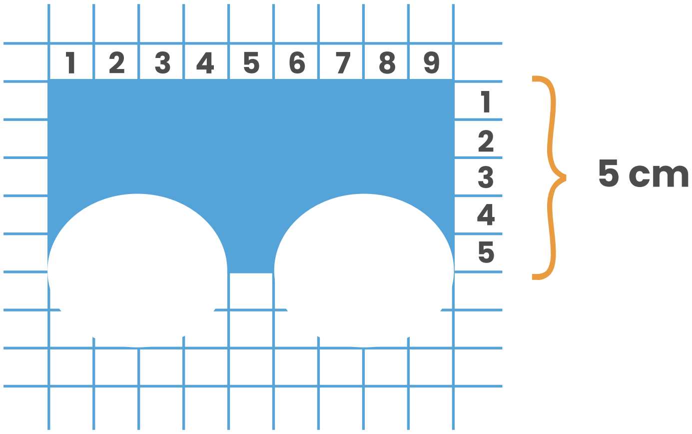
a. 32,44
b. 45
c. 57,56



**Solución 1:**
Para resolver este problema debemos tomar en cuenta que:

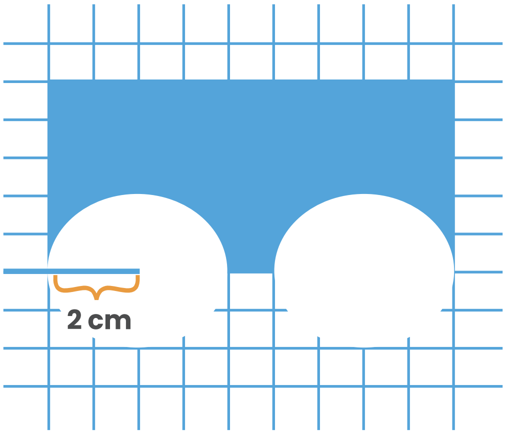
Cada cuadrito tiene 1 $cm^2$ de área por lo que cada lado de cada cuadrito mide 1 $cm$ de lado.

Ahora podemos contar cuantos cuadritos hay por cada lado del rectángulo para determinar su área, de la siguiente forma:



De esta forma el área del rectángulo negro es:
l × a = 9 cm × 5 cm = 45 $cm^2$

Ahora, es importante notar que hay dos circunferencias en blanco, de las cuales solo la mitad de cada una de ellas está dentro del área negra, a esa mitad de la circunferencia se le llama semicircunferencia, también debes notar lo siguiente:

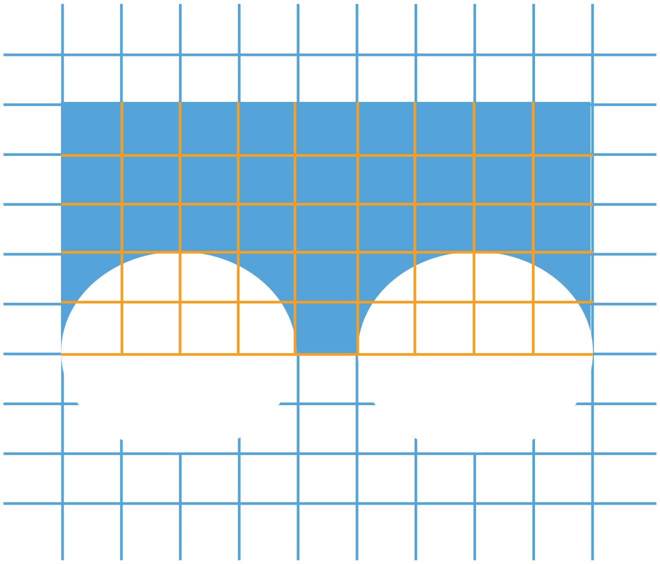



Las semicircunferencias miden lo mismo, por lo que puedes calcular el área de una sola circunferencia (que es lo mismo que encontrar el área de una semicircunferencia y multiplicarla por 2, en este caso) y restarla al área negra, así:

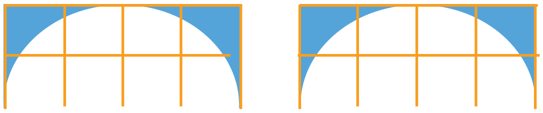
$A_{círculo} = \pi \times r^2 = \pi \times (2\ cm)^2 = 3{,}14 \times 4\ cm^2$
$A_{negra} = 45\ cm^2 - 12{,}56\ cm^2 = 32{,}44\ cm^2$

**R/** El área aproximada de la región negra es 32,44 $cm^2$

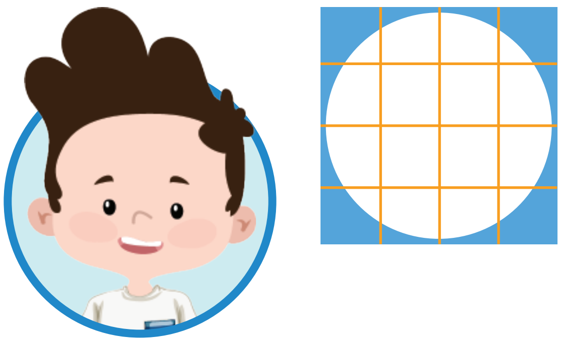
**Estrategia 2:**
También podemos dividir la figura negra en cuadrados completos: hay 29 cuadrados negros completos.



**Luego**, hay dos partes que no contienen cuadrados enteros negros, a saber:



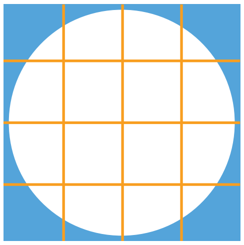
Esas partes las podemos unir. Así:



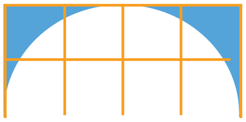
Tenemos, entonces, un cuadrado negro con un "hueco circular" blanco, por lo que al determinar el área del cuadrado y restarle el área del círculo, de esta forma queda solo el área **celeste**:

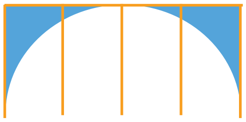
- el área del cuadrado negro es: l × l = 4 cm × 4 cm = 16 $cm^2$
- el área del círculo es $\pi$ x $2^2$ $cm^2$ = 3,14 x 4 $cm^2$ = 12,56 $cm^2$

Entonces, el área negra en esta figura es: 16 – 12,56 = 3,44 $cm^2$



Y es igual a:



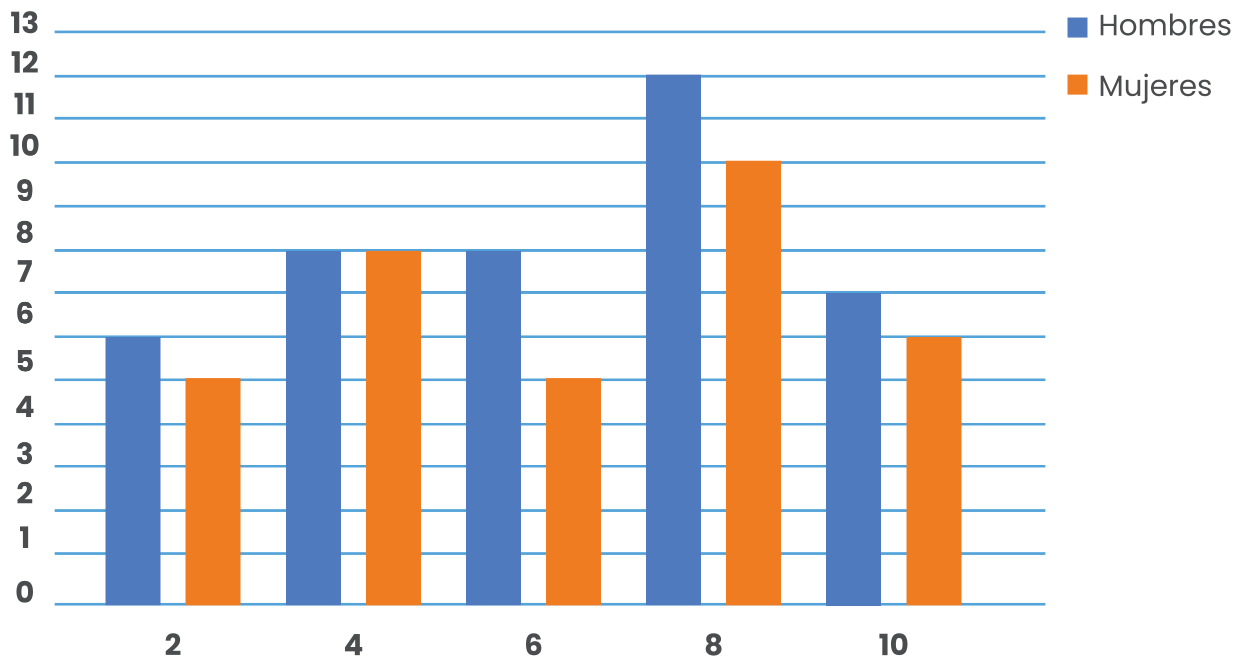


De lo anterior, finalmente, sumamos las áreas encontradas:
29 $cm^2$ + 3,44 $cm^2$ = 32,44 $cm^2$

**R/** El área aproximada, en centímetros cuadrados, de la figura negra es 32,44 $cm^2$

**4.** Considere la siguiente información, relacionada con la cantidad de vueltas por semana que un grupo de estudiantes dan a una plaza corriendo. A partir de dicha información, indique cuál opción es verdadera:

**Distribución de los estudiantes de acuerdo con el número de vueltas a la plaza, por semana**



Número de vueltas a la plaza, por semana

a. Un 20% de las mujeres dan 2 vueltas a la plaza por semana.
b. El porcentaje de varones y el porcentaje de mujeres que dan cuatro vueltas a la plaza, es el mismo.
c. Es mayor el porcentaje de mujeres que dan 8 vueltas a la plaza por semana, que el porcentaje de hombres que también realizan 8 vueltas.

**Estrategia 1. Análisis Porcentual.**
Vamos a analizar cada opción para encontrar cuál es la correcta.

**Opción a)**
**Un 20% de las mujeres dan 2 vueltas a la plaza por semana.**

Tomemos en cuenta que se entrevistaron a 34 mujeres de las cuales, según la opción, el 20% dan 2 vueltas.

Averigüemos cuántas mujeres, aproximadamente, son el 20% de 34, para ello basta realizar el siguiente cálculo:

$$34 \; \textit{mujeres} \times 20 \div 100 = 6{,}8$$

O sea, alrededor de 7 mujeres, no obstante, según el gráfico solo 5 mujeres le dan 2 vueltas a la plaza, por lo cual la proposición es falsa.

**Opción b)**
**El porcentaje de varones y el porcentaje de mujeres que dan cuatro vueltas a la plaza, es el mismo.**

Como se dijo anteriormente, hay 34 mujeres y 41 hombres de los cuales 8 personas de cada género dan 4 vueltas, podemos calcular el porcentaje de cada uno, de la siguiente forma:

| 34 mujeres | 8 mujeres |
|---|---|
| 100 | x |

$$\% \; \textit{mujeres} = \frac{8 \times 100}{34} = 11{,}53\%$$

| 41 hombres | 8 hombres |
|---|---|
| 100 | x |

$$\%\ hombres = \frac{8 \times 100}{41} = 19{,}51\%$$

Ambos porcentajes son distintos, por lo tanto, la proposición es falsa.

**Opción c)**
**Es mayor el porcentaje de mujeres que dan 8 vueltas a la plaza por semana, que el porcentaje de hombres que también realizan 8 vueltas.**

| 34 mujeres | 10 mujeres |
|---|---|
| 100 | x |

$$\%\ mujeres = \frac{10 \times 100}{34} = 29{,}41\%$$

| 41 hombres | 12 hombres |
|---|---|
| 100 | x |

$$\%\ hombres = \frac{12 \times 100}{41} = 29{,}27\%$$

Si hacemos la comparación, 29,41% es mayor que 29,27%, lo que la hace la opción correcta.

Observemos cómo el porcentaje de mujeres es mayor pese a que la cantidad de mujeres es menor, es importante recordar que una cantidad relativa depende también del total en cada grupo

**Estrategia 2. Análisis Tabular.**
Primero representamos los datos del gráfico en una tabla.

Observemos la tabla:

| Cantidad de vueltas | Hombres | Mujeres |
|---|---|---|
| 2 | 6 | 5 |
| 4 | 8 | 8 |
| 6 | 8 | 5 |
| 8 | 12 | 10 |
| 10 | 7 | 6 |
| **Total** | **41** | **34** |

Luego, consideramos lo requerido en cada opción:

**Opción a)**
**Un 20% de las mujeres dan 2 vueltas a la plaza por semana.**

Al tener presente la proporción entre cantidades numéricas, sabremos que nos permite conocer el porcentaje. Podemos calcular la proporción de mujeres que dan 2 vueltas: 5 de 34.

$$\frac{5}{34} = 0{,}15 = 15\%$$

Por lo cual, la opción A es **falsa**.

**Opción B:**
**El porcentaje de varones y el porcentaje de mujeres que dan cuatro vueltas a la plaza, es el mismo**

Podemos comparar la proporción de mujeres que dan 4 vueltas, y la proporción de varones que da esa misma cantidad de vueltas:

Mujeres: $\frac{8}{34}$

Hombres: $\frac{8}{41}$

Como podemos ver, no es lo mismo $\frac{8}{34}$ que $\frac{8}{41}$ .

Por lo tanto, no representan el mismo porcentaje, la proposición **es falsa**.

**Opción C:**
**Es mayor el porcentaje de mujeres que dan 8 vueltas a la plaza por semana, que el porcentaje de hombres que también realizan 8 vueltas.**

Para este caso también podemos comparar la proporción de mujeres que dan 4 vueltas, y la proporción de varones que da esa misma cantidad de vueltas:

Mujeres: $\frac{10}{34} = 0{,}294 = 29{,}4\%$

Hombres: $\frac{12}{34} = 0{,}292 = 29{,}2\%$

Como podemos ver en ambos casos se tiene una proporción muy similar, sin embargo, es mayor en las mujeres. Por lo que el porcentaje de las mujeres es mayor, la proposición **es verdadera**.

**R/** Es verdadera la Opción C.

**5.** Los estudiantes analizan la siguiente pregunta que realizó su docente:
¿Cuántos números múltiplos de 10 hay del 1 al 2023?

a. Bruno responde: - Hay 83 múltiplos de 10.
b. Liz responde: - Son exactamente 401.
c. Ana considera: - Hay 202 múltiplos de 10.

De ellos, tiene la razón

a. Bruno.
b. Liz.
c. Ana.

**Estrategia 1: Agrupación por decenas.**
Podemos considerar la agrupación de los números del 1 al 2023 en decenas, como en series de 10 en 10:

10, 20, 30, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110 ..., 2020.

Podemos ver que, por cada 100 unidades ordenadas, o por cada centena, tendremos 10 múltiplos de 10.

Ahora bien, del 1 al 100 hay 10 centenas.

Por tanto, del 1 al 1000 tendremos la siguiente cantidad de múltiplos de 10:

| Cantidad de múltiplos de 10 en cada centena | | Cantidad de centenas por 1000 números ordenados | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | x | 10 | = | 100 |

Si del 1 al 1000 tenemos 100 múltiplos de 10, entonces del 1 al 2000 tendremos el doble, o sea 200.

Por último, del 2000 al 2023, sólo tenemos 2 múltiplos de 10.

Entonces, el total de múltiplos de 10 del 1 al 2023 es: 200 + 2 = 202

**Estrategia 2: Visualización en cuadro.**
Para resolver este problema podemos encontrar los primeros múltiplos de 10 y representarlos en una tabla para visualizarlos mejor:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 |
| 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 |
| 310 | 320 | 330 | 340 | 350 | 360 | 370 | 380 | 390 | 400 |

...

Podemos constatar que en cada fila que correspondiente a una centena, se encontrarán 10 múltiplos de 10.

Al analizar la cantidad de centenas en 2000, podemos notar que hasta el 2000 tenemos $(10 \times 20)$ múltiplos de 10.

Hasta el 2023, entonces serían: $(10 \times 20) + 2 = 202$

**R/** Ana tiene la razón

**6.** El papá de Rita plantó un árbol de 8 dm de altura. Cada año el árbol crece el 25% de su altura. Hoy el árbol mide 15,625 dm. ¿Hace cuántos años fue plantado el árbol?

a. 3
b. 5
c. 7

**Estrategia 1: Representación tabular.**
Para este problema debemos tomar en cuenta que el 25% de 8 dm es 2 dm, por lo que el primer año crece 2 dm y, en adelante debemos calcular un 25% de la altura para representarlo en una tabla como la siguiente que permita ver la altura del árbol cada año que pasa:

Recordemos que 25% de un número representa su cuarta parte

| Año transcurrido | Altura |
|---|---|
| 0 | 8 dm |
| 1 | 10 dm |
| 2 | 12,5 dm |
| 3 | 15,625 dm |

La cuarta parte (25%) de 10 es 2,5

La cuarta parte (25%) de 12,5 es 3,125

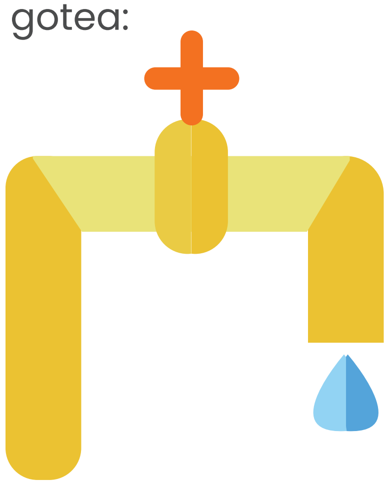
**Estrategia 2: Proporción de crecimiento.**
Consideramos una altura inicial del árbol de 8 dm.
Como cada año la altura crece 25%, esto quiere decir que podemos determinar la altura del árbol multiplicando su altura anterior por 1,25. Esto porque la unidad representa la altura del árbol, y 0,25, corresponde al 25% más.

Entonces:

- Año 1: 8 x 1,25 = 10 dm
- Año 2: 10 x 1,25 = **12.5** dm
- Año 3: **12.5 x 1.25 = 15.625** dm

**R/** El árbol fue sembrado hace 3 años

**7.** Un grifo gotea:



Ana mide cada cuánto sale cada gota, y se da cuenta que sale una gota cada 2 segundos, de forma constante.

Se requieren de 4000 de esas gotas para llenar un recipiente con capacidad de 250 mililitros.

Si el grifo no se llega a reparar, ¿cuál es la cantidad de litros de agua que se desperdiciaría durante 30 días?

a. 48
b. 81
c. 102

**Estrategia 1. Partir del tiempo de goteo.**
Es importante recordar que un 1 l = 1000 ml.

Como 4000 gotas hacen 250 ml, que es la cuarta parte de un litro, se necesitarían 16 000 gotas para hacer un litro de agua.
Otro dato importante es que 1 h = 3600 s, y cada dos segundos sale una gota.

Entonces:

- En una hora caen 1800 gotas.
- En un día hay 24 h = 86400 s, de modo que, para calcular las gotas por día:
- 86  400 ÷ 2 = 43 200, pues cada 2 segundos cae una gota, si en el día hay 86 400 segundos, tendremos que la cantidad de gotas es la mitad.

- Para saber la cantidad de gotas durante 30 días, podemos multiplicar la cantidad de gotas en un día por 30: 43200 x 30

Obtenemos 1 296 000 gotas.

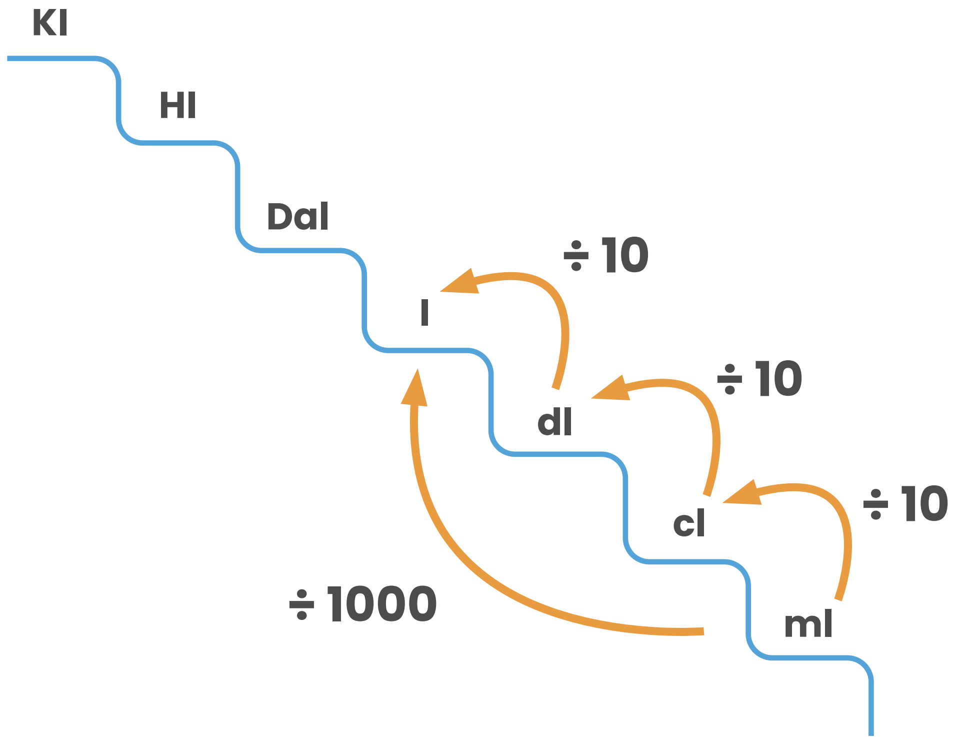
Recordemos se necesitarían 16000 gotas para hacer un litro de agua. E

Entonces para saber a cuántos litros equivalen 1 296 000 gotas, dividimos:

$$\begin{array}{l|l} 1\,29 6\cancel{000} & 16\,\cancel{000} \\ \hline 1\,28 & 81 \\ \quad\;\, 16 & \\ \quad\;\;\; 0 & \end{array}$$

Por lo que, se desperdiciarían 81 litros.

**Estrategia 2. Conversiones.**
Se requieren de 4000 gotas para llenar un recipiente con capacidad de 250 mililitros, pero nos preguntan cuántos litros se desperdician, por lo que podemos recordar cómo convertir de ml a l:




De acuerdo con lo recordado a través de la representación anterior, cuando tenemos la cantidad de ml desperdiciados, la podemos calcular en litros dividiendo entre 1000.

Procedamos entonces a calcular la cantidad de ml desperdiciados:

- 4000 gotas equivalen a 250 mililitros.
- A gota cada dos segundos, en un minuto caen 30 gotas. En una hora caen: 30 x 60 = 1800 gotas
- En un día caen: 24 x 1800 = 43 200 gotas

- Para saber cuántos ml caen en un día, podemos aplicar la regla de tres, llamemos W al dato que debemos averiguar:

| | |
|---|---|
| **250** | **w** |
| **4000** | **43200** |

$$\frac{250}{4000} = \frac{w}{43200}$$

**250 x 43200 ÷ 4000 = 2700**

Por lo que, cada día se desperdician 2700 ml.

- En un mes, se desperdician 27 000 x 30= 81 000 ml
- Finalmente, realizamos la conversión a litros, dividiendo por 1000:
- 81 000 ÷ 1000 = 81

**81 000 ÷ 1000 = 81**

**R/** En 30 días se desperdiciarían 81 litros de agua.

**8.** En una escuela, se realizó una encuesta a los estudiantes de tres años escolares diferentes (cuarto, quinto y sexto) sobre su preferencia por uno de estos dos deportes: fútbol y baloncesto. En la siguiente tabla se han colocado algunas frecuencias.

| Deporte | Sexto Año | | Quinto Año | | Cuarto Año | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Absoluta | % | Absoluta | % | Absoluta | % |
| Fútbol | | 64 | | 60 | 40 | |
| Baloncesto | | 32 | | | | 25 |
| No me gusta ninguno | | 4 | | 10 | | |
| **TOTAL** | **50** | **100** | **60** | **100** | **68** | **100** |

Escriba el año escolar en el que se observa la mayor frecuencia absoluta de estudiantes que prefieren el baloncesto.

**Estrategia 1.**
Para este problema podemos ir completando la tabla con los datos que se brindan y realizar los siguientes cálculos, como se muestra:

| Deporte | Sexto Año | |
|---|---|---|
| | Absoluta | % |
| Fútbol | | 64 |
| Baloncesto | | 32 |
| No me gusta ninguno | | 4 |
| **TOTAL** | **50** | **100** |

A partir de la frecuencia porcentual, podemos determinar el valor absoluto, utilizando estrategias como la aplicación de regla de tres.

50 × 64 ÷ 100 = 32
50 × 32 ÷ 100 = 16
50 × 4 ÷ 100 = 2

De modo que para sexto grado la tabla quedaría con la siguiente información:

| Deporte | Quinto Año | |
|---|---|---|
| | Absoluta | % |
| Fútbol | 36 | 60 |
| Baloncesto | 18 | 30 |
| No me gusta ninguno | 6 | 10 |
| **TOTAL** | **60** | **100** |

| Deporte | Sexto Año | |
|---|---|---|
| | Absoluta | % |
| Fútbol | 32 | 64 |
| Baloncesto | 16 | 32 |
| No me gusta ninguno | 2 | 4 |
| **TOTAL** | **50** | **100** |

Para quinto grado, se hace de la misma forma que la anterior:

60 × 60 ÷ 100 = 36
60 × 30 ÷ 100 = 18
60 × 10 ÷ 100 = 6

| Deporte | Quinto Año | |
|---|---|---|
| | Absoluta | % |
| Fútbol | | 60 |
| Baloncesto | | |
| No me gusta ninguno | | 10 |
| **TOTAL** | **60** | **100** |

Acá hace falta el porcentaje para completar el 100% de las personas estudiantes Hace falta un 30% , por lo que ese dato es el que corresponde

Para cuarto año faltan más datos, los podemos encontrar de la siguiente forma:

Primero, obtenemos la cantidad absoluta estudiantes que prefieren el baloncesto:

$68 \times 25 \div 100 = 17$

| Deporte | Cuarto Año | |
|---|---|---|
| | Absoluta | % |
| Fútbol | 40 | |
| Baloncesto | | 25 |
| No me gusta ninguno | | |
| **TOTAL** | **68** | **100** |

Ya sabiendo la cantidad de estudiantes que les gusta el baloncesto, podemos obtener la cantidad de estudiantes que no les gusta ninguno:

$68 - 17 - 40 = 11$

Con todos los datos absolutos, obtenemos los porcentajes pendientes:

| Deporte | Cuarto Año | |
|---|---|---|
| | Absoluta | % |
| Fútbol | 40 | |
| Baloncesto | 17 | 25 |
| No me gusta ninguno | 11 | |
| **TOTAL** | **68** | **100** |

% de estudiantes que les gusta el fútbol

$$= \frac{40 \times 100}{68} = 58{,}82\%$$

100% - 58,82% - 25% = 16,18%

Por lo que la tabla completa para poder contestar la pregunta te quedaría de la siguiente forma:

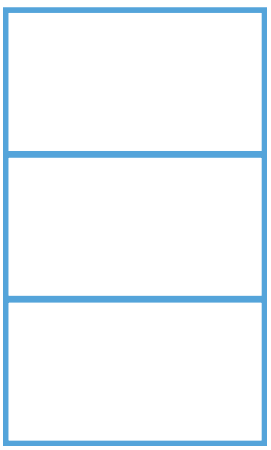
| Deporte | Sexto Año | | Quinto Año | | Cuarto Año | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Absoluta | % | Absoluta | % | Absoluta | % |
| Fútbol | 32 | 64 | 36 | 60 | 40 | 58,82 |
| Baloncesto | 16 | 32 | 18 | 30 | 17 | 25 |
| No me gusta ninguno | 2 | 4 | 2 | 10 | 11 | 16,18 |
| **TOTAL** | **50** | **100** | **60** | **100** | **68** | **100** |

Con los datos completos, comparamos para ver en cuál año escolar más cantidad de estudiantes prefieren baloncesto, es en quinto año.

**R/** En Quinto Año.

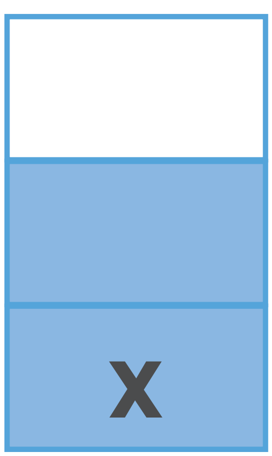
**9.** Una jarra llena con jugo pesa 800 g. Cuando su contenido es la mitad de las dos terceras partes, pesa 400 g. ¿Cuántos gramos pesa la jarra vacía?

**Estrategia 1. Método gráfico.**
Pensemos que este rectángulo representa la capacidad de la jarra.



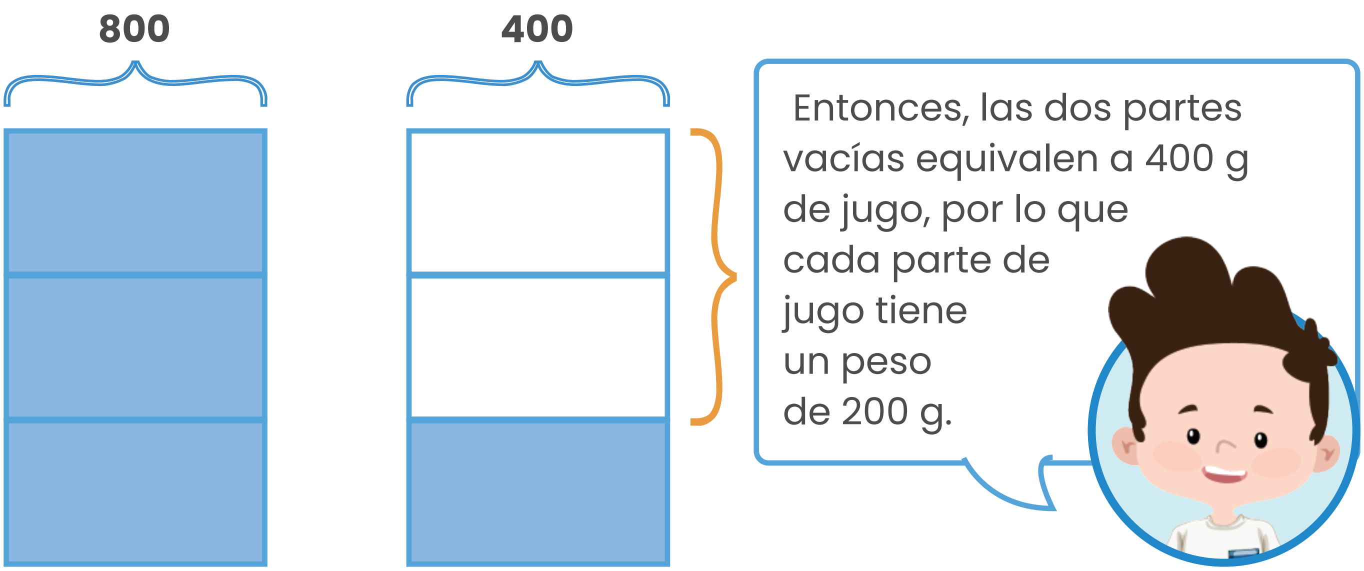
Para representar su tercera parte, lo dividimos en tres partes iguales.

Luego, marcamos dos tercios con color:




En celeste, están las dos terceras partes. La mitad de esos dos tercios es un tercio, entonces lo marcamos con X

Comparando el peso de las dos cantidades de jugo: lleno y con la mitad de la tercera parte, podemos visualizar la diferencia en el peso de la jarra:




Así, si cada parte de jugo pesa 200g, el jugo que se requiere para llenar la jarra pesa 600 gramos (las tres partes juntas). Por lo que la jarra pesaría:

| Peso de la jarra llena con el jugo | | Peso únicamente del jugo que llena la jarra | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{800}$ | $-$ | $\boxed{600}$ | $=$ | $200$ |

**Estrategia 2. Operaciones con fracciones.**
Debemos identificar los siguientes datos:

La jarra llena pesa 800 g.

Cuando su contenido es la mitad de las $\frac{2}{3}$ partes pesa 400 g.

Al retirar dos terceras partes de jugo se tiene: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ parte del peso.

Por lo que la jarra y el contenido que queda(una tercera parte)pesan 400 g.

Como la jarra llena pesa 800 g, quiere decir que $\frac{2}{3}$ partes del

contenido pesan 400 g, por lo que las tres partes del contenido pesan 600 g y la jarra 200 g.

**R/** La jarra vacía pesa 200 g.

**10.** Rodrigo planea preparar queques para vender. La receta original indica que se deben utilizar 3 tazas y media de harina de trigo por cada queque, pero él desea hacer una variación de la receta original:

- En vez de harina de trigo, utilizará 2 tazas y dos tercios de harina de avena para hacer un queque.
- El resto de la harina necesaria según la receta original será completado con harina de coco.

Si Rodrigo dispone de un paquete de harina de coco que contiene 15 tazas, ¿cuántos queques podrá hacer si utiliza toda la harina de coco?

**Estrategia 1. Operaciones con fracciones.**
Con este problema podemos razonar de la siguiente forma:

Según los datos del problema, podemos representar las 3 tazas y media de harina de trigo así:

$$3\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Y las dos tazas y dos tercios, así:

$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Luego realizamos la resta para saber cuantas tazas de harina de avena se van a utilizar por cada queque, de modo que:

$$\frac{7}{2} - \frac{8}{3} = \frac{5}{6}$$

Ahora, como se tienen 15 tazas de harina de avena, debemos determinar cuántas veces caben $\frac{5}{6}$ en 15, para ello podemos realizar la siguiente división:

$$15 \div \frac{5}{6} = \frac{15 \cdot 6}{5} = \frac{90}{5} = 18$$

**R/** Rodrigo podrá realizar 18 queques.

**Estrategia 2. Aproximación con números decimales.**
Primero, calculamos la cantidad de harina de coco que se necesita por queque:

- 3 tazas y media de harina de trigo equivalen a 3, 5 tazas.
- Rodrigo utilizará 2 tazas y dos tercios de harina de avena, que equivalen a 2, 66 tazas, aproximadamente pues se recurre al redondeo.

La cantidad de harina de coco que se necesita es: 3, 5 – 2, 66 = 0, 84 tazas.

Calculamos la cantidad de queques que se pueden preparar con 15 tazas de harina de coco, para ello dividimos la cantidad total de harina de coco por la cantidad de harina de coco por queque:

15 ÷ 0,84 = 1500 ÷ 84

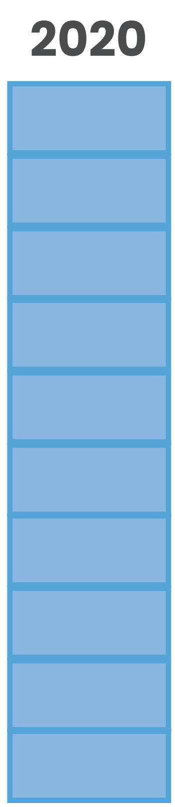
| 1500 | 84 |
| --- | --- |
| 84 | 17,8... |
| 660 | |
| -558 | |
| 720 | |
| -588 | |

Dado que la cantidad de queques debe ser un número entero, recurrimos al redondeo: 17,8≈ 18

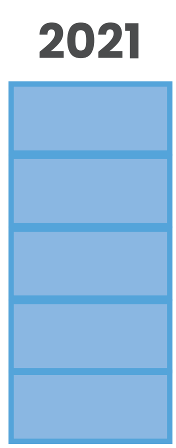
**R/** Rodrigo podrá realizar 18 queques.

**11.** En 2021, el salario bruto de Priscila se redujo en un 50% debido a la situación del COVID-19. Durante el año pasado, su salario aumentó un 60% con respecto a lo que recibió en 2021. ¿Qué porcentaje de incremento necesita Priscila con respecto al salario de este año para que su salario bruto sea igual al del año 2020, antes de la pandemia?

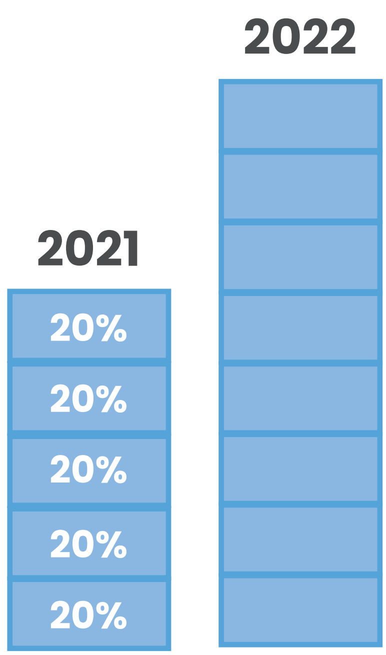
**Estrategia 1. Material concreto.**
Con cualquier tipo de material que nos permita utilizar bloques podemos construir una torre con 10 bloques que representa el salario completo en el año 2020. Pensamos en 10 bloques por ser un número manejable para bloques, puede ser perfectamente ser 20 u otra cantidad que se permita dividir a la mitad y en 5:




Para el **2021**: Retiramos la mitad bloques de la torre para simular la reducción del 50% en el salario. Quedan 5 bloques.



Ahora bien, podemos determinar el valor porcentual de cada bloque en el salario 2021, distribuyendo el 100% en los 5 bloques:




En el **2022:** Agregamos 3 bloques a la torre para mostrar el aumento del 60% (cada bloque representa el 20% del salario anterior):

Ahora procedemos a realizar la comparación: Para alcanzar el salario de 2020, Priscila necesita 2 bloques más (10 bloques - 8 bloques = 2 bloques).

**Y realizamos el cálculo del porcentaje:** calculamos el porcentaje que representan 2 bloques del total del salario actual que consta de 8 bloques:

$$2 \div 8 \times 100 = 25\%$$

**R/** Priscila debe aumentar un 25% respecto a su salario.

**Estrategia 2. Método gráfico.**
Para calcular el porcentaje de incremento que debe recibir Priscila con respecto al salario de este año, debemos analizar los siguientes datos:

1. El salario bruto que recibió en el 2020 antes de la pandemia era de 100 %.

| Salario bruto en 2020 |
|---|

2. En 2021, su salario disminuyó 50%, por lo que solo recibió un 50% de su salario original.

| Salario 2021 | Reducción del 50% |
|---|---|

3. Para el 2022, recibe un aumento del 60%, que equivale al 30% de lo perdido de su salario original.

$$\frac{60 \times 50}{100} = \frac{30}{100} = 30\%$$

| Salario 2021 | 30% del salario del 2020 | 20% |
|---|---|---|

De esta forma, Priscila en el 2022 tendría el 80% del salario que tenía en el 2020, Por lo que necesita para equiparar su salario con el del año 2020 el 20% del salario del que recibió en el año 2020.

Sin embargo, no se nos pregunta el porcentaje del salario que recibió en el año 2020 si no el porcentaje de aumento respecto al salario del 2022, Por lo que debemos realizar el cálculo.

| Salario 2021 | 30% del salario del 2020 | 20% |
|---|---|---|

$$\underbrace{\text{Salario 2021} \quad \text{30\% del salario del 2020}}_{\textbf{Salario 2022}}$$

Como el salario del año 2022 corresponde al 80% del salario del año 2020 podemos utilizar regla de 3, llamemos W al dato que debemos averiguar:

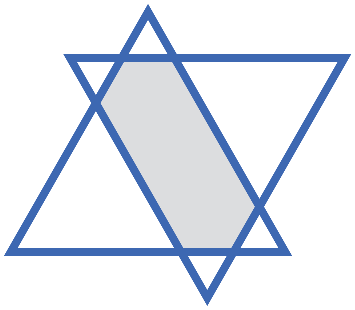
| | |
|---|---|
| **20** | **W** |
| **80** | **100** |

$$\frac{20}{80} = \frac{w}{100}$$

**20 x 100 ÷ 80 = 25**

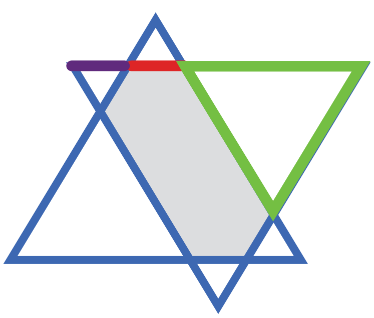
**R/** Priscila debe aumentar un 25% respecto a su salario.

**12.** Juan dibuja dos triángulos equiláteros cuyo perímetro es 18 unidades. Los dibuja con sus lados paralelos y se cortan entre sí. Luego Juan observa, que, al cortarse sus dos triángulos, forman otros triángulos más pequeños y todos equiláteros, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el perímetro de la figura sombreada?



**Estrategia 1. Visualización y análisis de la suma de lados.**
Como los triángulos que se forman externamente al hexágono son equiláteros, tienen sus tres lados iguales.

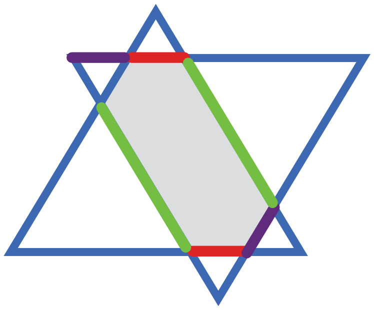
Luego, la mitad del perímetro de la figura sombreada corresponde a un lado de los triángulos dibujados por Juan.



Observemos que cada lado de un triángulo dibujado por Juan, equivale a 3 segmentos: un segmento morado, uno rojo y uno verde, de los que marcamos. Los cuales, a su vez su vez, tienen la medida de uno de los 6 lados de la figura sombreada

Equivalencia del lado de cada triángulo dibujado por Juan:

Por lo tanto, el perímetro de la figura sombreada (hexágono) será la suma de la longitud de dos de los lados de uno de los triángulos dibujados por Juan.



Equivalencia con cada lado de un triángulo dibujado por Juan:

Como el perímetro de cada triángulo dibujado por Juan es 18, cada lado mide 6. Por lo que el perímetro de la figura sombreada es 12.

**R/** El perímetro de la figura sombreada es 12 unidades.

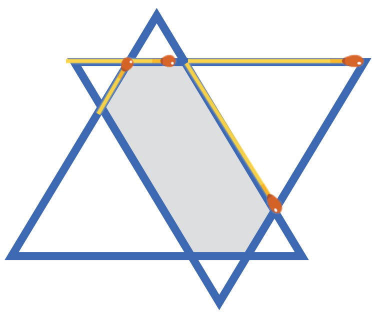
**Estrategia 2. Experimentación con material concreto.**
Una estrategia solución puede ser la siguiente:

**Pasos:**

1. **Construir:** Construir los 2 triángulos equiláteros con palitos de helado, fósforos o palitos de construcción. Todos los palitos deben ser idénticos y los pegamos con goma por sus extremos.

2. **Sobreponer un triángulo al otro:** Unir, sin pegar, los triángulos como en la imagen, superponiendo sus lados.

Notaremos al que si mantenemos los lados paralelos indistintamente de cuánto acerquemos o alejemos los triángulos superpuestos, los triangulitos pequeños que se forman en el exterior de la intersección son congruentes, podemos probar de forma concreta que la mitad del perímetro de la figura sombreada corresponde a la suma de 2 lados de un triángulo pequeño y de un lado de los triángulos grandes que se forman en su exterior, lo cual es equivalente a un palillo completo.



Al experimentar nos damos cuenta que el perímetro de la figura sombreada es equivalente a dos palitos completos. Ahora bien, como los triángulos elaborados por Juan tienen un perímetro de 18 y son equiláteros, eso quiere decir que cada lado mide 6 unidades. Entonces, Si asignamos a cada uno de nuestros palitos una longitud de 6 unidades dos de ellos equivaldrían a 12 unidades.

**R/** El perímetro de la figura sombreada es 12 unidades.

**13.** Mattias ha dibujado dos cuadrados en una cartulina para un diseño escolar. El área de uno de ellos es 36 veces el área del otro cuadrado.

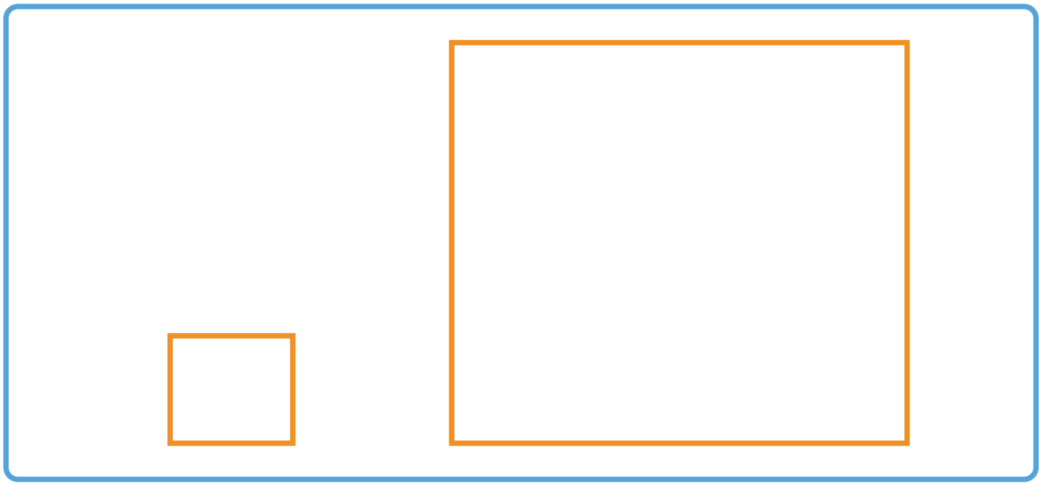
Si desea comprar cinta roja para el perímetro del cuadrado mayor, de forma que se vea como el cuadrado menor representado en la imagen.

Entonces, con respecto a la cantidad de cinta utilizada para el cuadrado menor, para el mayor debe comprarse:

a. 3 veces su longitud.
b. 4 veces su longitud.
c. 6 veces su longitud

**Estrategia 1. Cálculo del lado a partir del área.**
Para este problema lo podemos resolver de la siguiente forma:
Primero, debemos determinar los datos que dan al inicio del problema.

Se tienen dos cuadrados, uno más grande que el otro, donde sus áreas son uno 36 veces más grande que el otro.



Para determinar la cinta que se debe comprar, ya que está a lo largo del perímetro del cuadrado, podemos partir del área:

Llamemos l al lado del cuadrado menor, y L al lado del cuadrado mayor.

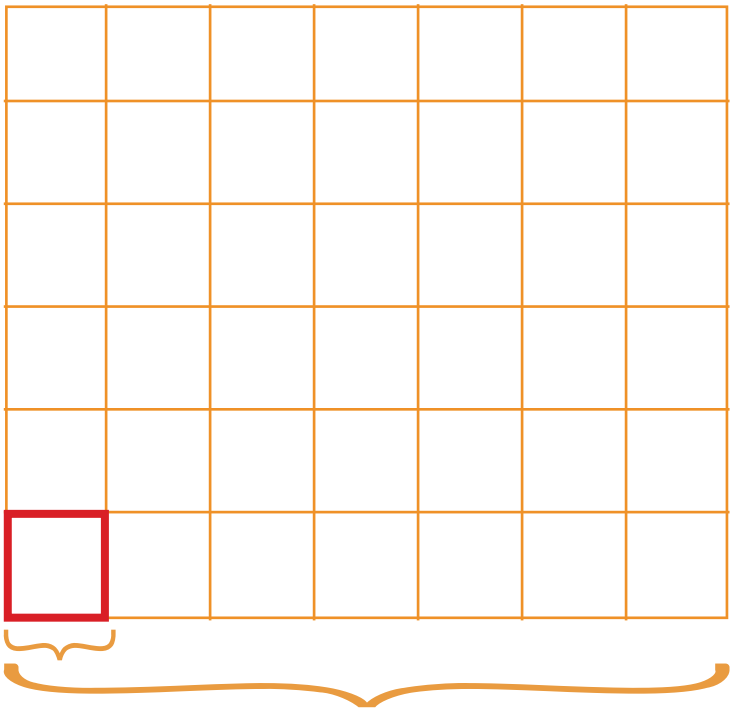
- Como $l \times l = A$ y para el cuadrado mayor, es 36 veces esa área, o sea 36 x A.
- Y como además sabemos que 6 x 6 = 36, entonces

$$l \times l = A \quad \text{y, además:}$$
$$6xl \times 6xl = 36A$$

Tenemos que el lado del cuadrado mayor debe ser 6xl, o sea, seis veces el lado del cuadrado menor, demás, los perímetros tienen la misma relación, ya que cada perímetro es exactamente cuatro veces la medida del lado.

Al averiguar la relación entre los perímetros, hemos averiguado la relación entre la cantidad es cinta que se requiere, porque la cinta se coloca en el perímetro. De modo que, se debe comprar 6 veces la longitud de cinta utilizada para el cuadrado menor.

**Estrategia 2. Método gráfico.**
Vas a tener dos cuadrados uno es 36 veces más grande que el otro.



Observemos que le lado del cuadrado pequeño
cabe 6 veces en el lado del cuadrado grande

Entonces, tenemos que el lado del cuadrado mayor es seis veces el lado del cuadrado menor, dado que los perímetros tienen la misma relación, ya que cada perímetro es exactamente cuatro veces la medida del lado.

La relación verificada, no permite decir que la cantidad de cinta que se requiere es seis veces la utilizada para el cuadrado pequeño.

**R/** Se requiere 6 veces su longitud

**14.** Juan Carlos compra el periódico todos los días y una revista deportiva todos los domingos; paga por el total a fin de mes. En un mes de 30 días en el que hubo cuatro domingos pagó ¢ 39 830. El periódico cuesta ¢ 825 de lunes a sábado y ¢ 1050 los domingos. Sobre el precio de venta, el dueño del quiosco tiene una ganancia fija de ¢ 164,25 por cada periódico y un quinto del precio por cada revista. ¿Cuántos colones ganó el dueño del quiosco ese mes con las compras de Juan Carlos?

a. 4930,5
b. 7106,5
c. 7763,5

**Estrategia 1. Apoyo en representación tabular.**
Podemos organizar la información en una tabla de lo que gasta Juan Carlos en sus revistas y periódicos durante el mes la siguiente manera:

| Día | Artículo | Precio | Cantidad | Cálculo del costo total | Costo total |
|---|---|---|---|---|---|
| Lunes a sábado | Periódico | ¢ 825 | 26 | 26 x 825 | ¢ 21 450 |
| Domingo | Periódico | ¢ 1050 | 4 | 4 x 1050 | ¢ 4200 |
| Domingo | Revista | | | | |
| **Total pagado** | | | | | **39 830** |

Con la información de los costos totales podemos determinar el costo total de la revista de la siguiente manera

39 830 - 21450 – 4200
= 14 180

Como la revista se vende solo los domingos y son cuatro domingos, a partir del costo total de las revistas podemos obtener el precio de cada revista para Juan Carlos:

| | |
|---|---|
| 14 180 | 4 |
| 21 | 3545 |
| 18 | |
| -16 | |
| 20 | |

Cada revista le cuesta a Juan Carlos ¢ 3570

Entonces nuestra tabla se completa de la siguiente forma:

| Día | Artículo | Precio | Cantidad | Costo total |
|---|---|---|---|---|
| Lunes a sábado | Periódico | ¢ 825 | 26 | 26 x 825 |
| Domingo | Periódico | ¢ 1050 | 4 | 4 x 1050 |
| Domingo | Revista | ¢ 3545 | 4 | ¢ 14180 |
| **Total pagado** | | | | **39 830** |

A partir de la información anterior realizamos una tabla con las ganancias que obtiene el dueño del kiosco, en colones:

| Día | Artículo | Precio | Cantidad | Ganancia Unitaria | Cálculo Ganancia Total | Ganancia total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lunes a sábado | Periódico | 825 | 26 | 164,25 | 164,25 x 26 | 4270,5 |
| Domingo | Periódico | 1050 | 4 | 164,25 | 164,25 x 4 | 657 |
| Domingo | Revista | 3545 | 4 | 3545 ÷ 5 = 709 | 709 x 4 | 2836 |
| **Total pagado** | | | | | | **7763,5** |

**R/** Las ganancias recibidas por el dueño del Quiosco con lo vendido a Juan Carlos durante 30 días es de ¢ 7763,5

**Estrategia 2. Operaciones básicas a partir del análisis del problema.**
Para este problema debemos tomar en cuenta que los artículos comprados por Juan Carlos no tienen el mismo valor todos los días.

Según los datos del problema el periódico tiene un valor de ¢ 825 de lunes a sábado y ¢ 1050 los domingos.

Para el precio de la revista debemos buscar la diferencia que hay entre ambos artículos, además tomar en cuenta la diferencia entre los precios los días entre semana y el domingo, de esta forma:

En un mes de 30 días donde hubo 4 domingos, por tanto 26 días entre semana, ahora debemos realizar el siguiente cálculo:

26 x ¢ 825 = ¢ 21 450
4 x ¢ 1050 = ¢ 4 200

¢ 21 450 + ¢ 4 200 = ¢ 25 650

Entonces lo que Juan Carlos pagó por las revistas es:

¢ 39 830 - ¢ 25 650 = ¢ 14 180

Como compró 4 revistas (durante 4 domingos), entonces debes efectuar la siguiente división:

¢ 14 180 ÷ 4 = ¢ 3 545

Por lo que cada revista tiene un costo de ¢ 3 545.

Por otro lado, sobre el precio de venta, el dueño del quiosco tiene una ganancia fija de ¢ 164,25 por cada periódico y un quinto del precio por cada revista, por lo que para calcular la ganancia por cada periódico debes multiplicar:

¢ 164,25 x 30 = ¢ 4 927,5

Ahora debes determinar la quinta parte del precio de cada revista, efectuando la siguiente división:

¢ 3 545 ÷ 5 = ¢ 709

Por lo que las ganancias que recibe el dueño del quiosco por cada revista son de ₡ 709, ahora bien, durante 4 domingos es ₡ 2836.

De manera que las ganancias recibidas por el dueño los artículos vendidos a Juan Carlos durante 30 días son de

$$₡\ 4927{,}5 + ₡\ 2836 = ₡\ 7763{,}5$$

**15.** Luis ha ganado un cupón del 20 % de descuento sobre el total a pagar de su compra en una heladería. Resulta que elige un helado que está en promoción ese día con un descuento del 40% sobre su precio original. ¿Cuál es el descuento total que recibe Luis al comprar el helado si utiliza el cupón?

a. 48%
b. 52%
c. 60%

**Estrategia. Análisis de porcentajes.**
Vamos a representar el precio original del helado así:

Como el descuento por ese día es del 40%, el precio del helado por ese día es el 60% de su valor original, o sea:

$$X \; \frac{60}{100}$$

Ahora, al aplicarle a ese precio el cupón se debe obtener el 20% de ese precio, el descuento del cupón es del 20% sobre el 60%, lo podemos visualizar así:

Descuento del cupón:

$$\frac{60}{100} \times \frac{20}{100}$$

$$= 0{,}12$$

$$= 12\%$$

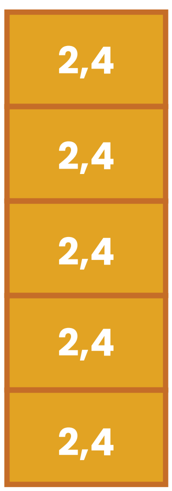
Al sumar los descuentos al precio original: 40% + 12% = 52%

**R/** El descuento precio original es 52%

**16.** Sonia tiene un kit de cocina para preparar postres pequeños. El kit incluía un vaso medidor de 12 dl, que se encuentra dividido en cinco partes iguales con unas marcas. Uno de los ingredientes de una receta es la leche. Las instrucciones dicen que cada postre necesita dos de esas cinco partes señaladas en el vaso medidor. Si Sonia desea preparar 30 postres, y las cajas de leche que ella utiliza contienen 750 ml, ¿cuántas cajas de leche, como mínimo, debe comprar?

a. 19
b. 20
c. 25

**Estrategia 1. Método gráfico.**
Vamos a representar el vaso medidor con una torre de 5 bloques esto por se indica que está dividido en 5 partes iguales o quintas partes:




Cada parte representa 2,4 dl. Ya que la capacidad completa del vaso es 12 dl, entonces 12÷5 = 2,4

Como la leche corresponde a dos de esas quintas partes, la cantidad de leche por cada postre es de:

$$2 \times 2{,}4 = 4{,}8$$

Ahora calculamos la cantidad de leche que Sonia requiere para 30 postres:

**4, 8 x 30 = 144 dl**

Las cajas de leche que compra Sonia contienen 750 ml, sin embargo, hemos venido haciendo cálculos en dl por lo que debemos realizar la conversión de los 144 dl

**Recordemos:**
**1 dl = 100 ml**
**144 dl = 144 x 100 ml = 14 400 ml**

Las cajas de leche que compra Sonia contienen 750 ml, sin embargo, hemos venido haciendo cálculos en dl por lo que debemos realizar la conversión de los 144 dl

Ahora podemos dividir 14400 ml es el total requerido entre el contenido de una caja que es 750 ml para así encontrar la cantidad de caja requeridas:

$$\begin{array}{r|l} 14\,4\,0\cancel{0} & 75\cancel{0} \\ \hline -75 & 19{,}2 \\ 690 & \\ -675 & \\ 15\,0 & \\ 0 & \end{array}$$

En la realidad, no se pueden comprar cajas de leche en fracciones, por lo que Sonia deberá comprar como mínimo 20 cajas de leche para preparar los 30 postres.

**Estrategia 2. Cálculos a partir del análisis del problema.**
Para este problema primero debes determinar cuánto es una parte del vaso medidos de 12 dl a ml.

- El vaso medidor de 12 dl equivale a 1200 ml.
- Dado que el vaso medidor está dividido en cinco partes iguales, cada parte equivale a 1200 ÷ 5 = 240 ml.

Ahora, calculamos cuánta leche se necesita para preparar un postre:

- Para cada uno de los postres se necesita dos partes del vaso medidor, por lo que, 2 x 240 ml = 480 ml de leche.

Por último, debemos calcular la cantidad de leche que se necesita para preparar los 30 postres:

30 x 480 ml = 14 400 ml de leche

Ya que cada caja posee 750 ml de capacidad de leche, debemos dividir la cantidad total de leche que se necesita entre la cantidad de leche que hay en cada caja:

$$\begin{array}{r|l} 14\,4\,0\cancel{0} & 75\cancel{0} \\ \hline -75 & 19{,}2 \\ 690 & \\ -675 & \\ 15\,0 & \\ 0 & \end{array}$$

Por lo que Sonia deberá comprar como mínimo 20 cajas de leche para preparar los 30 postres.

**R/** Debe comprar 20 cajas de leche

**17.** El promedio de las edades de Ana, Beatriz y Carmen es 10. Sabemos que todas sus edades son distintas, y que el promedio de las edades de Ana y Beatriz es 11, mientras que el promedio de las edades de Beatriz y Carmen es 12. ¿Cuál es la edad de la mayor de ellas?

a. 11
b. 12
c. 16

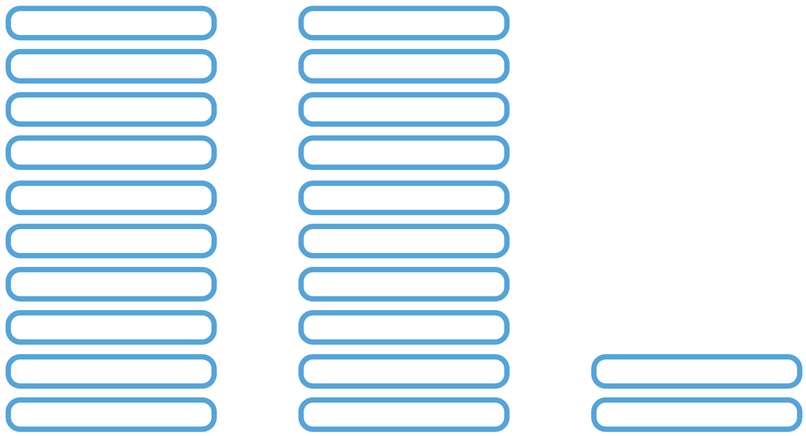
**Estrategia 1. Análisis del promedio con material concreto.**
Representamos con fichas, donde cada una corresponde a un año.

Como el promedio de Ana y Beatriz es 11, Esto quiere decir que la suma de las edades de Ana y Beatriz es 22 años.

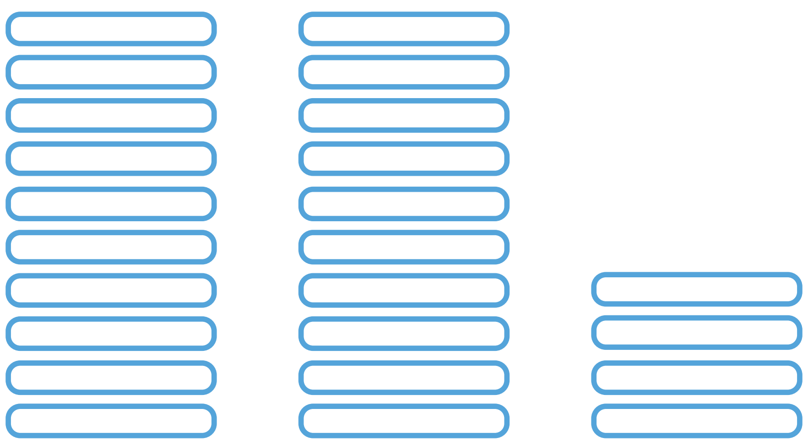
Recuerda que el promedio es la suma de los datos dividido entre la cantidad de datos. En este caso la mitad de la suma de la edad de Ana y Beatriz es 11

Entonces la suma de las edades de Ana y Beatriz se representa con 22 fichas así:

**Ana y Beatriz:**

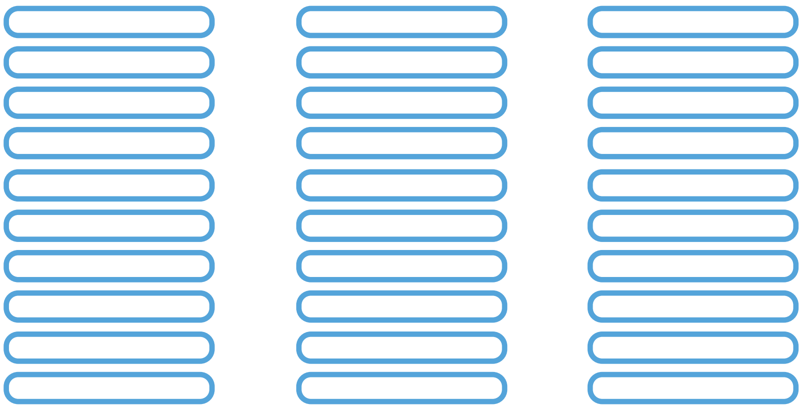


**Beatriz y Carmen:** El promedio de sus edades es 12 años por lo que la suma de sus edades es 24



Como el promedio de las edades de Ana, Beatriz y Carmen es 10, la suma de sus edades es 30:

**Ana, Beatriz y Carmen:**

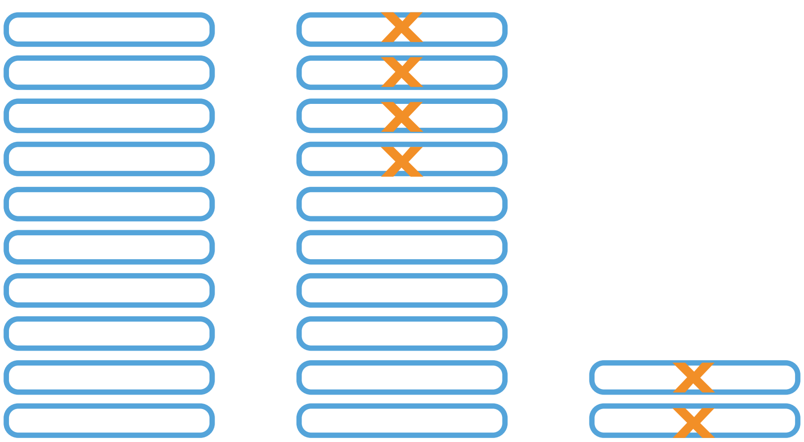


Como la suma de las edades de Beatriz y Carmen es 24, para saber la edad de Ana, retiro de este grupo 24 fichas, quedando los años de Ana

Al retirar las 24 fichas que representan los años que tienen Beatriz y Carmen juntas, obtenemos que la edad de **Ana equivale a 6 fichas, o sea 6 años.**

Como ya conocemos la edad de Ana, veamos el grupo de fichas que representa la edad de Ana y Beatriz:

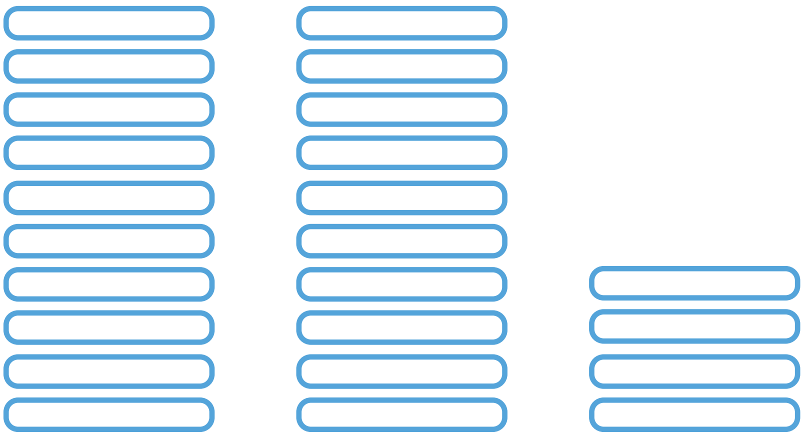
**Ana y Beatriz:**



Ahora retiramos las fichas que representan los años de Ana para conocer la cantidad de años que tiene Beatriz.

De esta forma obtenemos que la edad de Beatriz es 16 años, pues quedan 16 fichas.

Ahora veamos las fichas de la suma de las edades de **Beatriz y Carmen:**



En total son 24 fichas. Si retiramos las 16 que representan la edad de Beatriz, obtenemos la edad de Carmen.

Por lo tanto, para Carmen quedan 8 fichas, por lo que **tiene 8 años.**

**Así, la mayor de las tres es Beatriz.**

**Estrategia 2. Uso de ecuaciones.**
Para resolver este problema podemos denotar las edades de Ana, Beatriz y Carmen con las letras A, B y C respectivamente.

Ahora tomamos en cuenta la información proporcionada en el problema, de modo que debes obtener las siguientes igualdades:

a) $(A + B + C) \div 3 = 10$ entonces $A + B + C = 30$
b) $(A + B) \div 2 = 11$ entonces $A + B = 22$
c) $(B + C) \div 2 = 12$ entonces $B + C = 24$

Ahora:

$A + B + C = 30$ pero también $A + B = 22$

Entonces $22 + C = 30$

$\mathbf{C = 8}$

Por otro lado $B + C = 24$

$B + 8 = 24$

$\mathbf{B = 16}$

Por último $A + B = 22$

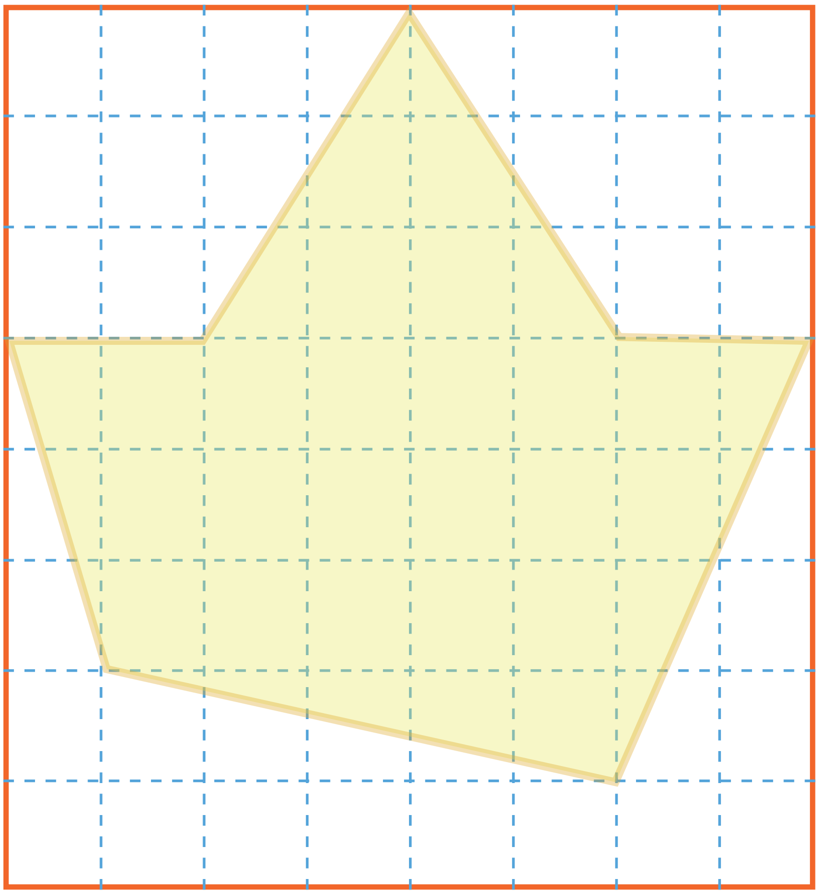
$A + 16 = 22$

$\mathbf{A = 6}$

De modo de la mayor es la representada por la letra B, o sea Beatriz con 16 años.

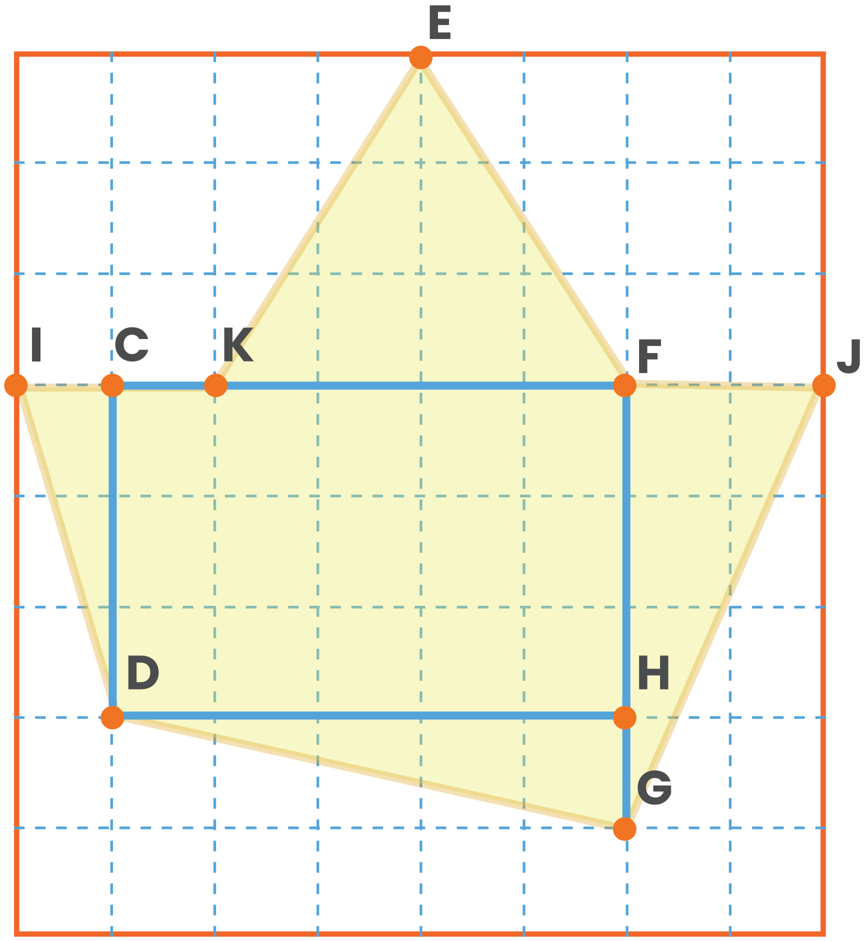
**R/** La persona de más edad es Beatriz con 16 años.

**18.** José realiza la siguiente figura en un papel cuadrado cuya área es 64 $cm^2$. Luego lo cuadrícula (lo divide en cuadrados, todos iguales) y realiza el diseño de la figura sombreada. Si recorta dicho diseño y descarta el resto de papel, ¿Cuál es el área de la superficie del papel que se descarta?



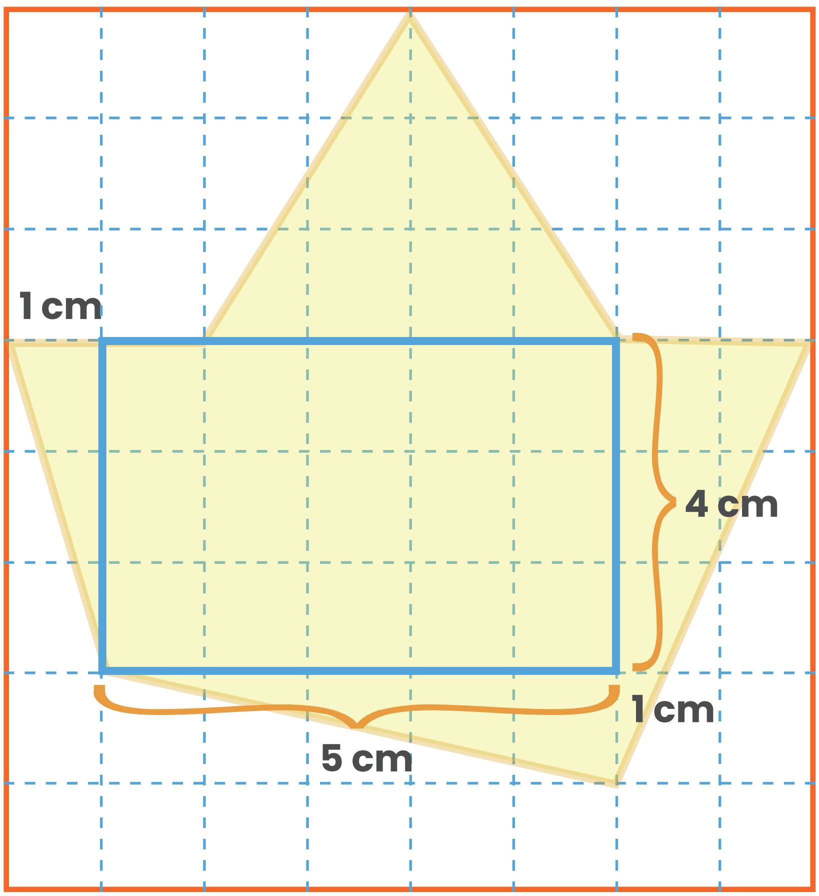
**Estrategia**

Como José construyó una figura irregular podemos intentar descomponer la figura en otras conocidas de la siguiente forma:

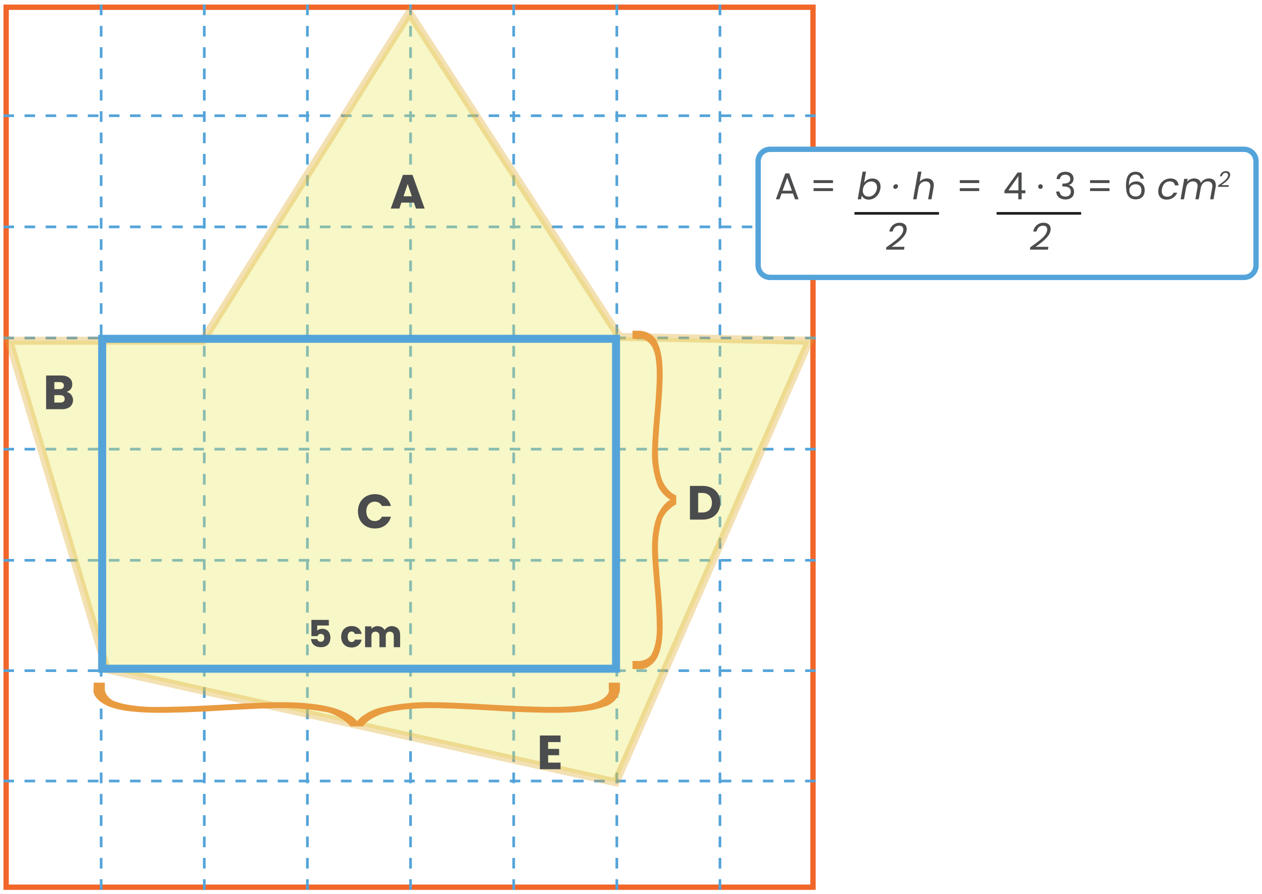



Debemos tomar en cuenta que el área del cuadrado más grande que forma la imagen es de 64 cm2 por lo que cada lado de la hoja mide 8 cm, y el lado de cada cuadrito en la cuadrícula mide 1 cm.

Ahora, debemos notar que podemos formar varios triángulos y rectángulos, de los cuales podemos obtener su área por separado. Pueden realizarse diversas combinaciones de figuras, una opción es la de la siguiente forma, nombrando cada figura para poder identificar:



Procedemos a obtener las áreas por separado:




Área del triángulo **A:** $\frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6\ cm^2$

Área del triángulo **B:** $\frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 3}{2} = 1{,}5\ cm^2$

Área del rectángulo **C:** $b \times h = 5 \times 3 = 15\ cm^2$

Área del triángulo **D:** $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{2 \times 4}{2} = 4\ cm^2$

Área del triángulo **E:** $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{5 \times 1}{2} = 2{,}5\ cm^2$

Ahora, debemos de sumar las medidas obtenidas para conocer el área dibujada:

$$\boldsymbol{1{,}5\ cm^2 + 2{,}5\ cm^2 + 4\ cm^2 + 6\ cm^2 + 15\ cm^2 = 29\ cm^2}$$

Finalmente, como se recorta todo lo que no esté dibujado, al área de la hoja le restamos el área dibujada:

$$\boldsymbol{64 - 29 = 35\ cm^2}$$

**R/** Se descartan 35 $m^2$

**19.** Mi maestra tiene una caja con galletas. Sabe que hay menos de 50, que puede repartirlas entre 3 niños de manera que a todos les toque la misma cantidad, que también puede repartirlas equitativamente entre 4 niños, pero que para repartirlas de forma equitativa entre 7 niños necesitaría 6 galletas más. ¿Cuántas galletas son?

**Estrategia 1. Análisis apoyado en cuadro.**
Vamos a representar la cantidad total de galletas con la siguiente bolsa:

Sabemos que dicha cantidad tiene las siguientes características, por los datos del problema:

- Es menor que 50
- es múltiplo de 3: puede repartirlas entre 3 niños de manera que a todos les toque la misma cantidad.
- es múltiplo de 4: también puede repartirlas equitativamente entre 4 niños
- dividido por 7 tiene residuo 1: para repartirlas de forma equitativa entre 7 niños necesitaría 6 galletas más

Como la cantidad es divisible por 3, debe ser un múltiplo de 3, entonces veamos los múltiplos de 3 menores que 50:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 |
| 45 | 48 | | | | | |

Como también es múltiplo de cuatro vamos a identificar de la tabla anterior los números múltiplos de cuatro, los marcaremos con naranja:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | **6** | **9** | **12** | **15** | **18** | **21** |
| **24** | **27** | **30** | **33** | **36** | **39** | **42** |
| **45** | **48** | | | | | |

Ahora revisaremos de los números que nos quedan cuál al ser dividido entre 7 tiene residuo 1:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 7 \\ \hline -7 & 1 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \hline -21 & 3 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{r|l} 36 & 7 \\ \hline -35 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 7 \\ \hline -42 & 6 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Hemos encontrado el número que cumple con todas las características, es 36.

**Estrategia 2. Teoría de números.**
Para resolver este problema podemos denotar la cantidad de galletas en la caja con “n”. Según la información brindada en el problema tenemos que debe cumplir cuatro condiciones:

- n < 50
- n es divisible por 3
- n es divisible por 4
- n dividido por 7 tiene residuo 1

Recuerda los criterios de divisibilidad para que un número sea divisible por 3, y la divisibilidad por 4

Primero, debemos notar que el menor número posible que es divisible por 3 y 4 es el número 12, luego, podemos probar valores para n que sean múltiplos de 12 y que sean menores que 50.

Probemos:

- **n = 12**, podemos ver que se cumplen las tres primeras condiciones, pero no la cuarta.
- **n = 24** se cumplen tres condiciones, pero 24 dividido entre 7 tiene como residuo 3.
- **n = 36** se cumplen las 4 condiciones:
- 36 < 50
- 36 es divisible por 3, pues 3+6=9
- es divisible por 4
- 36 dividido por 7 tiene residuo 1

**R/** Son 36 galletas

**20.** Considera el siguiente reto sobre la obtención de la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{a}{7} + \frac{20}{b} =$$

Se sabe que "a" representa un número de dos cifras divisible por 3, por 4 y por 5. Además, b corresponde al antecesor de la cuarta parte de "a". ¿Cuál es el resultado de dicha suma?

**Estrategia 1. Teoría de números y representación en cuadro.**
Primero, notamos que "a" debe ser un múltiplo común de 3, 4 y 5. El primer múltiplo común entre 3 cuatro y 5 es 60. Podemos comprobarlo de varias formas, una es con apoyo de un cuadro.

Comenzamos colocando los primeros múltiplos de 3:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 |
| 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 |

Luego en él marcamos con un círculo los múltiplos de cuatro que estén en el cuadro:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 |
| 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 |

Finalmente marcamos los múltiplos de 5 que estén en el cuadro, puede ser con un cuadrado:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | $\boxed{15}$ | 18 | 21 |
| 24 | 27 | $\boxed{30}$ | 33 | 36 | 39 | 42 |
| $\boxed{45}$ | 48 | 51 | 54 | 57 | $\boxed{60}$ | 63 |

De esta forma nos damos cuenta que el primer número donde coinciden las marcas es el 60. Esto quiere decir que “a” puede ser 60, 120, 180, 240….

O sea, 60 y sus múltiplos.
Sin embargo, por la información brindada en el problema debe ser un número de dos dígitos, entonces se descartan los valores mayores a 60.

**Por lo tanto: a = 60**

Luego, podemos encontrar el valor de “b”. El antecesor de la cuarta parte de “a” es $\frac{60}{4} - 1$. Por lo tanto, el valor de “b” es:

$$\frac{60}{4} - 1 = 15 - 1 = 14$$

Ahora si sustituyes los dos valores para a y b respectivamente en la operación original, obtenemos:

$$\frac{a}{7} + \frac{20}{b} =$$

$$\frac{60}{7} + \frac{20}{14} =$$

$$\frac{140}{14} = 10$$

**R/** 10.

**Estrategia 2. Descomposición y cálculo.**
Podemos seguir la siguiente estrategia:

- Descomponer a: al identificar que "a" es múltiplo de 3, 4 y 5, podemos descomponerlo como 2 x 3 x 5.
- Calculamos b: Buscar el antecesor de la cuarta parte de "a". Si "a" es 60, la cuarta parte es 60 ÷4 = 15, y el antecesor de 15 es 14.
- Sustituimos "a" y "b" en las fracciones, simplificamos:

$$\frac{a}{7} + \frac{20}{b}$$

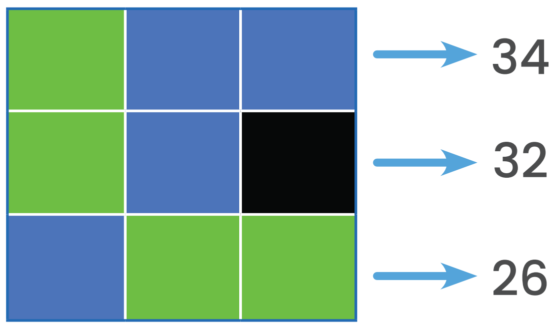
$$= \frac{2x3x5}{7} + \frac{20}{14}$$

$$= \frac{60}{7} + \frac{10}{7}$$

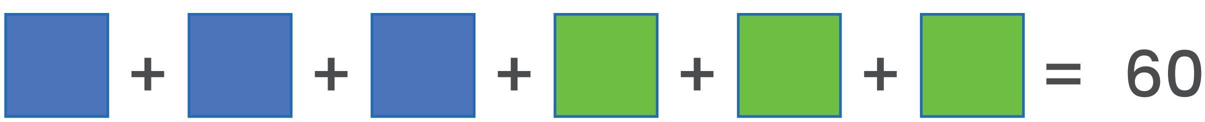
$$\frac{70}{7} = 10$$

**R/** El resultado es 10

**21.** En cada cuadro de la cuadrícula se debe escribir un número. Si en los cuadros del mismo color los números son iguales, y a la derecha de cada reglón se ha puesto la suma de los números del renglón. ¿Qué número va en el cuadro negro?

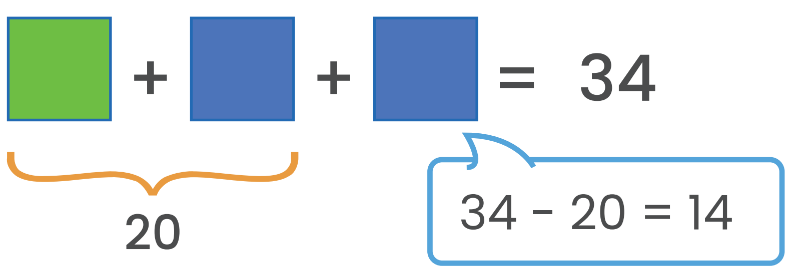



**Estrategia 1. Método gráfico.**
Si sumamos la primera y tercera fila tendrás el siguiente resultado:




De donde podemos concluir que:


De la primera fila tenemos que



Hemos encontrado el valor de cada cuadrito azul que es 14 entonces ya lo podemos sustituir en el cuadro original:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 14 | 14 | → 34 |
| | 14 | | → 32 |
| 14 | | | → 26 |

En la primera fila podemos hallar el valor de un cuadro verde de la siguiente forma:

$$\square + \underbrace{\square + \square}_{28} = 34$$

$$34 - 26 = 6$$

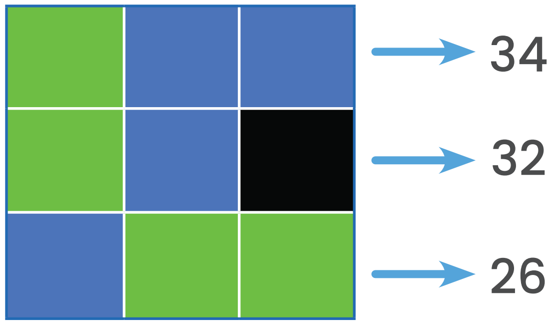
Tenemos el valor de los cuadros verdes también, que corresponde a 6 cada uno, entonces procedemos a trabajar en la segunda fila que tiene el cuadrito negro del cual debemos hallar su valor:

$$\underbrace{6 + 14}_{20} + \blacksquare = 32$$

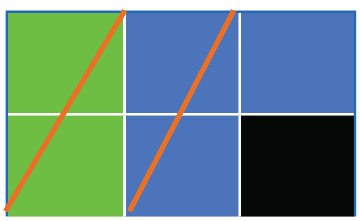
$$32 - 20 = 12$$

**R/** El valor del cuadrito negro corresponde a 12.

**Estrategia 2. Análisis por colores y ecuaciones básicas.**
Observemos;



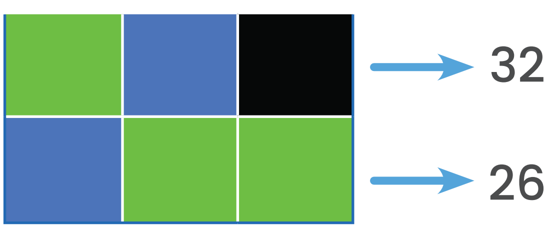

Consideremos las dos primeras filas, Vi al valor de la primera le resto la segunda la diferencia es dos; 34 – 32 = 2, Notemos que ambas Son idénticas en sus dos primeros cuadros así que la única diferencia la pueden hacer en cuadro negro respecto al azul:



Las dos unidades de diferencia están entre el cuadrado negro y el azul:

**a = n +2**

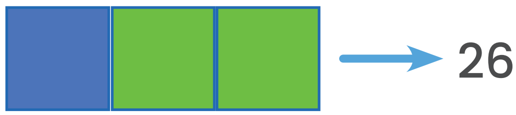
Analicemos de forma similar la segunda y tercera fila:




32 – 26 = 6, Las 6 unidades de diferencia están entre el cuadrado negro y el verde, pues los otros son equivalentes en cada fila:
**n = v +6**

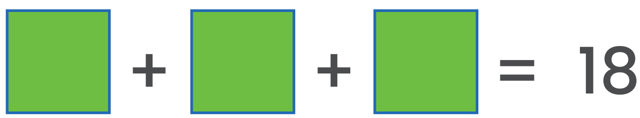
Como el valor del cuadro azul es dos unidades mayor que el negro, y el negro es 6 unidades mayor que el verde, entonces el cuadro azul es 8 unidades mayor que el verde: a = v +8.

Si vemos la última fila:




Equivale a :


Podemos decir que:




Entonces, cada cuadro verde equivale a 6.

Si llamamos n al valor del cuadro negro, habíamos hallado que:

$$n = v + 6$$

$$n = 6 + 6$$

$$\mathbf{n = 12}$$

**R/** El valor del cuadrado negro es 12

**22.** Un microempresario tiene 15 litros de alcohol en gel para envasar en recipientes de bolsillo de 30ml, 50ml y 70ml.

Tiene 3 distribuidores para los recipientes:

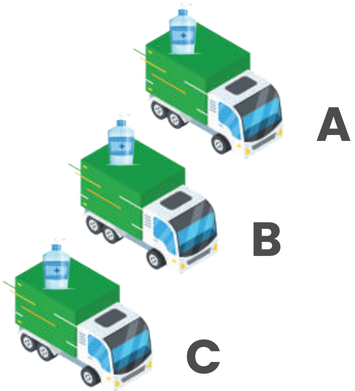
- El distribuidor A distribuye los de 30ml.
- El distribuidor B lleva los de 50ml.
- El distribuidor C reparte los de 70ml.

Al envasar los recipientes se procuró que los 3 distribuidores se lleven la cantidad de alcohol en gel más similar posible de forma que no sobre nada de alcohol.

Entonces, ¿cuál es la cantidad de recipientes que se lleva el distribuidor B?

**Estrategia 1.**
Primero, debemos procurar que los distribuidores lleven la cantidad de alcohol en gel más similar.
Por ello, debemos repartir los 15 L entre 3, que equivale a 5 l.
Realizando la conversión correspondiente, esto es 5000 ml. Recordemos que **1 l = 1000 ml**

**15 litros**




Para que la repartición sea lo más similar posible cada camión debe llevarse una cantidad cercana a 5000 ml

Ahora, vamos a repartir los 5000 ml entre los envases, teniendo presente que a cada envase le caben cantidades enteras de mililitros, por lo que no se trabaja con decimales.

**Para A**

```
 50'0'0' | 30
---------+-----
-30      | 166
 200
-180
 200
-180
  20
```

De la división, salen 166 envases y sobran 20 ml.

**Para B**

```
 50'0'0' | 50
---------+-----
-50      | 100
 000
```

De 5000 ml salen justo 100 envases de 50 ml.

**Para C**

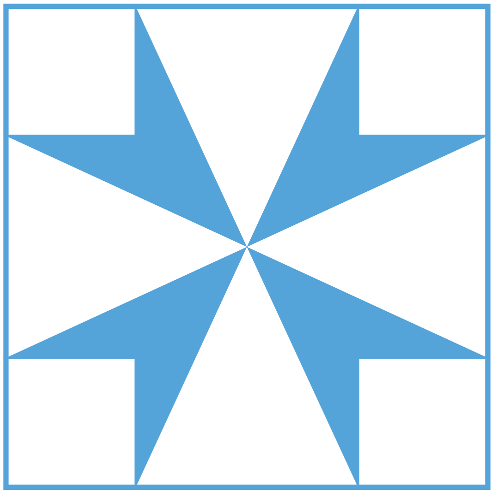
```
 50'0'0' | 70
---------+-----
-490     |    71
   100
   -70
    30
```

De la división, salen 71 envases y sobran 30 ml.

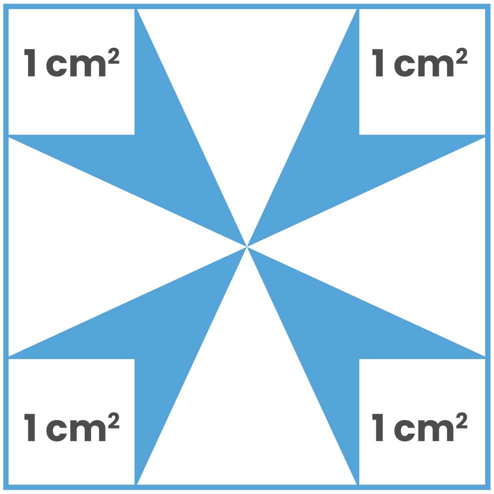
No debemos perder de vista que no puede sobrar alcohol en gel sin envasar.
Por lo que se debemos pensar en sumar los residuos que en este caso corresponden a 20 + 30 ml, los cuales se puede envasar en un recipiente de 50 ml.

Por lo que en total se envasaron: 166 + 100 + 71 + 1 envases.
Por lo cual, se envasaron en total 101 recipientes.

**23.** El área del cuadrado más grande de la figura es 16 cm2, mientras que el área de cada uno de los 4 cuadrados pequeños en las esquinas del grande es 1 cm2. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide el área de la región sombreada?



**Estrategia.**
Para este problema vamos a calcular primero el área de las regiones blancas y restarlas al área original para que podamos determinar el área de las regiones con color celeste, de la siguiente forma:



Dado que el área de los cuadrados pequeños es 1 $cm^2$, entonces podés usar la formula de su área para determinar la medida que cada lado:

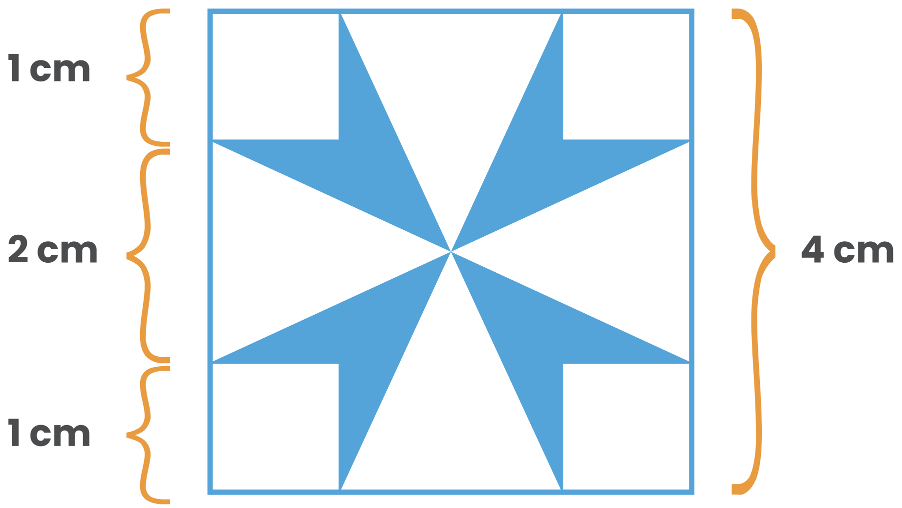
$$l \times l = 1\ cm \times 1\ cm = 1\ cm^2$$

De donde obtenemos que cada lado de los cuadrados pequeños mide lado 1 cm.

De igual forma para el cuadrado más grande:

$$l \times l = 4\ cm \times 4\ cm = 16\ cm^2$$

De modo que obtienes que cada lado de los cuadrados pequeños mide lado 4 cm, por lo que podemos establecer algunas medidas:



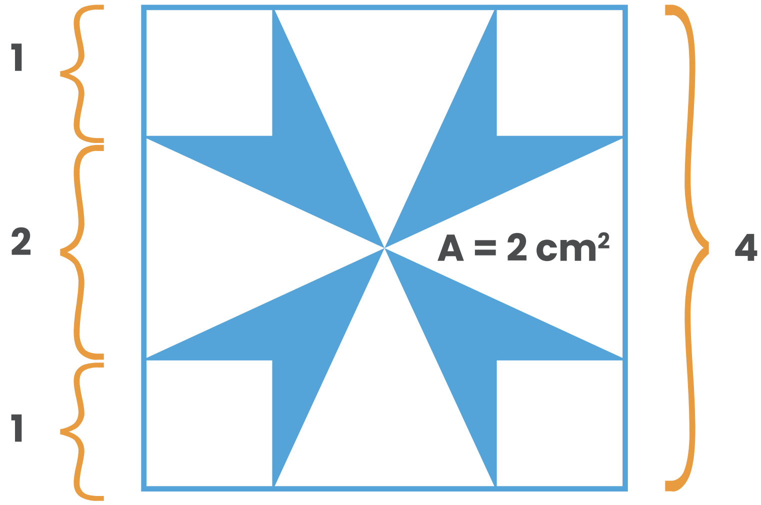

Sabemos que los cuatro cuadrados pequeños es 1 $cm^2$ por lo que el área blanca formada por esos cuadrados es 4 $cm^2$.

Ahora, si notas hay cuatro triángulos blancos del mismo tamaño, por lo que basta tomar uno de ellos y multiplicarlos por cuatro para que podamos determinar el área formada por esos triángulos, de la siguiente manera:

$$\frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2\ cm^2$$

Por lo que el área cubierta por los triángulos blancos:

$$\mathbf{4 \times 2\ cm^2 = 8\ cm^2}$$




Si sumamos sumar las áreas blancas, tenemos cuatro cuadrados y cuatro triángulos: $4\ cm^2 + 8\ cm^2 = 12\ cm^2$

Por último, al quitar al área total del cuadrado toda el área blanca, nos quedará el área de las figuras celestes: $16\ cm^2 - 12\ cm^2 = 4\ cm^2$

**R/** El área celeste es $4\ cm^2$

**24.** En una clase habrá exposiciones, para elegir al estudiantado que se debe preparar para la próxima semana, la maestra ha preparado cuatro cajas con tarjetas.

Cada estudiante debe elegir una de las cajas y pasar a sacar una tarjeta. Quienes saquen una tarjeta marcada con una equis, deben prepararse para la próxima semana.

Todas las tarjetas tienen la misma forma y contextura, se diferencian únicamente porque algunas tienen la marca y otras no.
Las cuatro cajas tienen en su interior sólo tarjetas con la siguiente distribución:

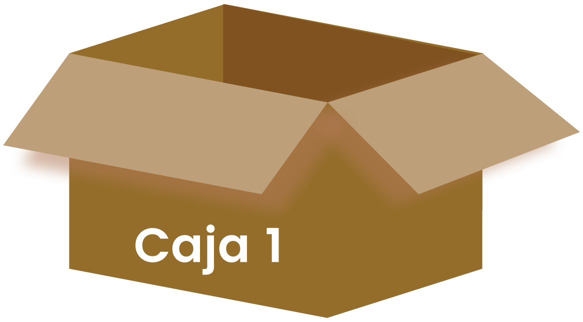
**Caja 1:** 12 tarjetas marcadas y 9 sin marcar.

**Caja 2:** $\frac{7}{15}$ sin marca y las otras 16 tarjetas marcadas.

**Caja 3:** Tiene la mitad sin marcar.

Si Javier desea exponer la próxima semana, ¿cuál es el número de caja que debe elegir para que sea más probable que obtenga una tarjeta marcada?

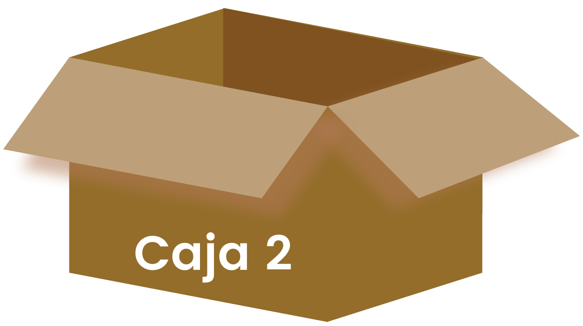
**Estrategia 1. Uso de probabilidades.**
Para que Javier tenga más oportunidad para exponer la próxima semana, debe escoger la caja con mayor probabilidad de obtener una tarjeta al azar, por lo que debemos buscar la forma de obtener las probabilidades de sacar una tarjeta marcada en cada caja:




12 tarjetas marcadas
9 sin marcar
Total: 21 tarjetas

Por lo que la probabilidad de sacar una tarjeta marcada corresponde a:

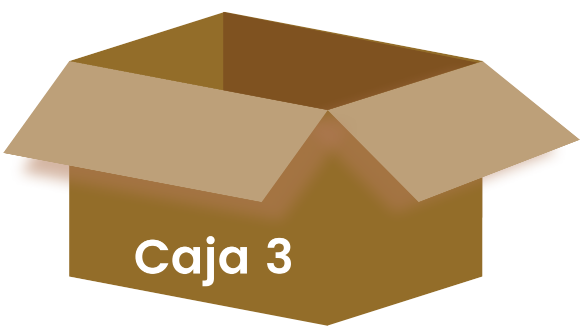
$$\frac{12}{21} = 0{,}574..$$




$\frac{7}{15}$ sin marca y las otras 16 tarjetas marcadas.

En este caso, 16 tarjetas marcadas corresponden a $\frac{8}{15}$ del total de tarjetas:

$$\frac{8}{15} = 0{,}533...$$




50% de las tarjetas marcadas.

Al analizar caso, recordemos que 50% equivale a $\frac{50}{100}$ del total de tarjetas:

$$\frac{50}{100} = 0{,}5$$

Al comparar las probabilidades, nos damos cuenta que Javier debe elegir la caja 1 para tener mayor probabilidad de sacar una tarjeta marcada.

**R/** Debe elegir la caja 1

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA | GOBIERNO DE COSTA RICA

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

45 ANIVERSARIO UNED DESDE 1977

TEC | Tecnológico de Costa Rica

UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA

OLCOMEP